# Algèbre linéaire

CPE Lyon - 3ETI

Serge Mazauric

2021-2022

# Introduction

## Objectifs

- Reformuler l'algèbre linéaire de façon moins abstraite qu'en classe préparatoire
- Montrer que l'algèbre linéaire permet de modéliser des problèmes d'application rencontrés dans de nombreux domaines : informatique, traitement d'images, physique, et même l'analyse numérique
- Résoudre ces problèmes qui sont le plus souvent modélisés par des équations de la forme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{A}$ est une matrice et $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ sont des vecteurs
- Introduire l'utilisation de Matlab et concevoir des algorithmes pour la résolution de problèmes spécifiques au calcul matriciel

## Prérequis

- Programme d'algèbre des classes préparatoires et/ou de L2
- Notions de base de programmation

# Sommaire

| | | |
|---|---|---|
| I. | Matrices | 4 |
| II. | Formes quadratiques | 81 |
| III. | Systèmes linéaires | 130 |
| IV. | Géométrie | 168 |
| V. | Décomposition en valeurs singulières | 230 |
| VI. | Méthode des moindres carrés | 244 |
| VII. | Méthode de la puissance itérée et méthode de la déflation | 265 |

# Chapitre I

# Matrices

1. Généralités
   - Définitions et notations
   - Opérations sur les matrices
   - Propriétés
   - Matrice transposée
   - Base canonique de $\mathbb{R}^n$
   - Noyau, image, formule du rang
   - Calculs par blocs
   - Complément de Schur et identités de Schur

2. Matrices carrées
   - Formule du binôme
   - Matrices inversibles
   - Déterminant
   - Trace
   - Matrices particulières
   - Matrices de passage
   - Matrices semblables
   - Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation
   - Trigonalisation
   - Exponentielle d’une matrice
   - Norme matricielle

# 1. Généralités

## Définitions et notations

Une **matrice** est un tableau de $n$ lignes et $p$ colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les nombres $a_{ij}$ sont appelés **coefficients**, ils peuvent être réels ou complexes.

*ligne* *colonne*

*$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$*

On dit que la matrice est de **format,** ou de **dimensions,** $(n, p)$ et on note $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times p}$.

Autre notation : $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ ou plus simplement : $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$n = 1 \quad \Rightarrow$ **matrice ligne** (on dit aussi **vecteur ligne**)

$p = 1 \quad \Rightarrow$ **matrice colonne** (on dit aussi **vecteur colonne**)

$n = p \quad \Rightarrow$ **matrice carrée** et si $a_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow$ **matrice unité**

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

*symbole de Kronecker :*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$a_{ij} = 0 \;\Rightarrow$ **matrice nulle**

# 1. Généralités

## Opérations sur les matrices

*$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$*

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \qquad \mathbf{B} = (b_{ij}), \qquad \mathbf{C} = (c_{ij}), \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

**Addition :**

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}$$ avec $$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

- ***A** et **B** doivent avoir les mêmes dimensions*
- *L'addition matricielle est **commutative***

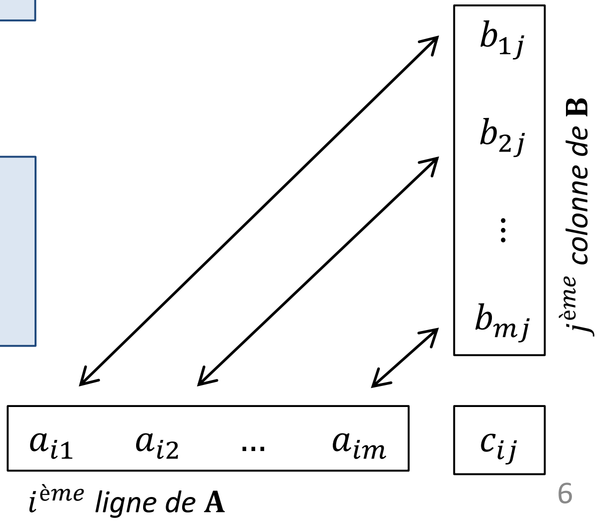
**Multiplication par un scalaire :**

$$\alpha\mathbf{A} = \mathbf{C}$$ avec $$\boxed{c_{ij} = \alpha a_{ij}}$$

**Multiplication de matrices :**

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}\ \underset{(m,p)}{\mathbf{B}} = \underset{(n,p)}{\mathbf{C}}$$ avec $$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}}$$

*Le nombre de colonnes de **A** doit être égal au nombre de lignes de **B***



# 1. Généralités

**Opérations sur les matrices**

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

  $\uparrow$ $(\mathbf{2}, \mathbf{3})$ $\quad\uparrow$ $(\mathbf{3}, \mathbf{4})$ $\quad\uparrow$ $(\mathbf{2}, \mathbf{4})$

  *Le produit* $\mathbf{BA}$ *n'est pas défini (dimensions incompatibles)*

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}$

  $\uparrow$ $(\mathbf{2}, \mathbf{3})$ $\quad\uparrow$ $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$ $\quad\uparrow$ $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2x + y & 4y + 2z & -x + z & x + y + z \end{pmatrix}$

  $\uparrow$ $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ $\quad\uparrow$ $(\mathbf{3}, \mathbf{4})$ $\quad\uparrow$ $(\mathbf{1}, \mathbf{4})$

# 1. Généralités

**Opérations sur les matrices**

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = (3)$

$\uparrow$ $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ $\uparrow$ $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ $\uparrow$ $(\mathbf{1},\mathbf{1})$

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$

$\uparrow$ $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ $\uparrow$ $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ $\uparrow$ $(\mathbf{3},\mathbf{3})$

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$

$\uparrow$ $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ $\uparrow$ $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ $\uparrow$ $(\mathbf{3},\mathbf{3})$

# 1. Généralités

## Propriétés

**Associativité :** $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

**Distributivité :** $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ et $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

**Non commutativité :** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

**Non intégrité :** $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ n'implique pas nécessairement $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ n'implique pas nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

**Exemple :** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

**Elément neutre :** $\mathbf{AI}_p = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$

*$\mathbf{A}$ est une matrice de dimensions $(n, p)$*

# 1. Généralités

## Matrice transposée

La **transposée** d'une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimensions $(n, p)$ est la matrice de dimension $(p, n)$ dont les lignes sont les colonnes de $\mathbf{A}$ et les colonnes sont les lignes de $\mathbf{A}$. On la note $\mathbf{A}^T$.

$$\underset{\uparrow \atop (\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underset{\uparrow \atop (\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{\mathbf{A}^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

**Propriétés :**

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \qquad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \qquad \boxed{(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T}$$

# 1. Généralités

**Matrice transposée**

Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

*Par convention $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des vecteurs colonnes*

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

**Produit scalaire**

Cas particulier : $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

**Norme euclidienne**

***Attention*** : $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \neq \mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$

# 1. Généralités

**Base canonique de $\mathbb{R}^n$**

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,0,0,\dots,0)^T, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1,0,\dots,0)^T,\dots, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_k = (0,0,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ k^{\text{ème}}\ position}}{1},0,\dots 0)^T,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n = (0,0,\dots,1)^T$$

Soit $\mathbf{x} = (x \quad y \quad z)^T \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$\mathbf{x} = x\,(1,0,0)^T + y\,(0,1,0)^T + z\,(0,0,1)^T = x\boldsymbol{\varepsilon}_1 + y\boldsymbol{\varepsilon}_2 + z\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

De façon générale :

$$\boxed{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\varepsilon}_k}$$

$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad x_k \in \mathbb{R}$

# 1. Généralités

**Base canonique de $\mathbb{R}^n$**

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- multiplication, <u>à droite</u>, par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{A\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & -2 & -1 & 1 \\ \mathbf{2} & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} -2 & \mathbf{3} & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{-2} & -1 & 1 \\ 2 & \mathbf{4} & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

etc …

Les colonnes d'une matrice sont donc les images des vecteurs de la base canonique (par multiplication à droite) :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{A\varepsilon}_1 & \mathbf{A\varepsilon}_2 & & \mathbf{A\varepsilon}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left( \begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{matrix}} \end{array} \right) \end{array}$$

# 1. Généralités

**Base canonique de $\mathbb{R}^n$**

- multiplication, <u>à gauche</u>, par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\mathbf{A} = (1\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (\mathbf{-2}\ \ \mathbf{3}\ \ \mathbf{1}\ \ \mathbf{2})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^T\mathbf{A} = (0\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ 2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (\mathbf{1}\ \ \mathbf{-2}\ \ \mathbf{-1}\ \ \mathbf{1})$$

etc ...

Les lignes d'une matrice sont donc les images des vecteurs de la base canonique (par multiplication à gauche) :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1p}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2p}} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \boxed{a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{np}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \ \boldsymbol{\varepsilon}_1^T\mathbf{A} \\ \longleftarrow \ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T\mathbf{A} \\ \\ \longleftarrow \ \boldsymbol{\varepsilon}_n^T\mathbf{A} \end{matrix}$$

# 1. Généralités

## Noyau – Image – Formule du rang

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ($\mathbf{A} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ transforme un vecteur de $\mathbb{R}^p$ en un vecteur de $\mathbb{R}^n$)

**Noyau** de $\mathbf{A}$ :

$$\mathrm{Ker}\ \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \ : \ \mathbf{Ax} = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Ker $\mathbf{A}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^p$

**Image** de $\mathbf{A}$ :

$$\mathrm{Im}\ \mathbf{A} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\}$$

Im $\mathbf{A}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}^T = \mathbf{A}\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \boldsymbol{\varepsilon}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} x_k \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k$$

*vecteur engendré par les vecteurs* $\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k$

*On pourra donc aussi retenir que* Im $\mathbf{A}$ *est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de* $\mathbf{A}$ *:*

$$\mathrm{Im}\ \mathbf{A} = \mathrm{Vect}(\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_p)$$

Le **rang** de $\mathbf{A}$ est la dimension de l'image de $\mathbf{A}$ :

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{Im}\ \mathbf{A})$$

# 1. Généralités

## Noyau – Image – Formule du rang

***Attention !*** Le rang de $\mathbf{A}$ n'est pas nécessairement égal à $p$ (les vecteurs $\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_p$ peuvent éventuellement être liés). Le rang de $\mathbf{A}$ est relié à la dimension du noyau par la formule suivante :

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = p - \dim(\mathrm{Ker}\ \mathbf{A})$$

C'est la **formule du rang** que l'on peut aussi retenir de la façon suivante :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\ \mathbf{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\ \mathbf{A}) = p}$$

*dimension de l'espace de* ***départ***
$\mathbf{A} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

**Conséquence** : $\quad \mathrm{rg}(\mathbf{A})\ \text{maximal} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Ker}\ \mathbf{A}) = 0$

**Théorème**

Une matrice et sa transposée ont même rang, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}^T)}$$

# 1. Généralités

## Noyau – Image – Formule du rang

**Exercice**

1) Déterminer l'image, le rang et le noyau de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2) Même question pour $\mathbf{A}^T$

**Solution**

$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. On note $\mathbf{c}_k$ les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$, $\mathbf{c}_k = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k$.

$\mathbf{c}_3 = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$

1) ▪ $\text{Im}\,\mathbf{A} = \text{Vect}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) = \text{Vect}\big((1,2)^T, (4,1)^T, (-5,4)^T\big) = \text{Vect}\big((1,2)^T, (4,1)^T\big)$

Les vecteurs colonnes $(1,2)^T$ et $(4,1)^T$ sont libres, ils forment donc une base de $\text{Im}\,\mathbf{A}$ donc $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$.

▪ D'après la formule du rang $\dim(\text{Ker}\,\mathbf{A}) = 3 - \text{rg}(\mathbf{A}) = 1$

Par ailleurs, on sait que $\mathbf{c}_3 = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$ donc :

$$3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 = 0 \iff 3\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 - 2\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = 0 \iff \mathbf{A}(3\boldsymbol{\varepsilon}_1 - 2\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3) = 0$$

$$\iff 3\boldsymbol{\varepsilon}_1 - 2\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3 \in \text{Ker}\,\mathbf{A}$$

donc $\text{Ker}\,\mathbf{A} = \text{Vect}\big((3,-2,-1)^T\big)$

# 1. Généralités

## Noyau – Image – Formule du rang

2) $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ donc $\mathbf{A}^T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

- $\mathrm{Im}\, \mathbf{A}^T = \mathrm{Vect}\big((1, 4, -5\,)^T, (2, 1,4)^T\big)$ donc $\mathrm{rg}(\mathbf{A}^T) = 2$

*ces 2 vecteurs sont libres*

- D'après la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}\, \mathbf{A}^T) = 2 - \mathrm{rg}(\mathbf{A}^T) = 0$ donc $\mathrm{Ker}\, \mathbf{A}^T = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

**Exemple 1**

Calculer le produit $\mathbf{AB}$ avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- calcul classique : $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 12 \\ 6 & 9 & 6 \\ 11 & 15 & 10 \\ 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

- calcul par blocs : $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$ et $\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = (1)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{22} = (3)$$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

Alors $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}$

avec : $\mathbf{C}_{11} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 6 & 9 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = (4 \quad 8) + (2 \quad 2) = (6 \quad 10)$$

$$\mathbf{C}_{22} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} = (4) + (3) = (7)$$

Donc : $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \left(\begin{array}{cc|c} 11 & 14 & 12 \\ 6 & 9 & 6 \\ 11 & 15 & 10 \\ \hline 6 & 10 & 7 \end{array}\right)$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

**Cas général**

Le produit de matrices par blocs s'effectue de la même façon que le produit usuel sauf que les coefficients sont remplacés par des blocs.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \cdots & \mathbf{B}_{1m} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \cdots & \mathbf{B}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \mathbf{B}_{p2} & \cdots & \cdots & \mathbf{B}_{pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1m} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \cdots & \mathbf{C}_{nm} \end{pmatrix}$$

est la matrice dont le bloc indexé par $i$ et $j$ est donné par :

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j} + \mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{2j} + \cdots + \mathbf{A}_{ip}\mathbf{B}_{pj} = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$$

sous réserve de compatibilité de la taille des blocs afin de pouvoir définir les produits matriciels $\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$.

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

L'utilisation du calcul par blocs n'a pas grand intérêt dans des situations comme celle de l'exemple précédent. Le calcul par bloc est utile dans des raisonnements théoriques ou bien qualitatifs plus que quantitatifs.

**Exemple 2**

Soit $\mathbf{A}$ la matrice définies par blocs de la façon suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ \text{ et } \ \mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Cherchons alors les conditions sur les matrices $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{22}$ pour que la matrice $\mathbf{A}$ soit inversible.

$\mathbf{A}$ est une matrice carrée de dimension $n+m$, c'est-à-dire $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$. On cherche alors la matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ telle que :

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_{n+m} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

On pose alors :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{B}_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \mathbf{B}_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{et} \quad \mathbf{B}_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Donc : $$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

Le calcul par blocs implique :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{11}\mathbf{A}_{11} = \mathbf{I}_n & (1) \\ \mathbf{B}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{0} & (2) \\ \mathbf{B}_{21}\mathbf{A}_{11} = \mathbf{0} & (3) \\ \mathbf{B}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_m & (4) \end{cases}$$

- d'après (1), $\mathbf{A}_{11}$ doit être inversible et $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1}$.
- on multiplie (3) par $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ (à droite), on obtient $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{0}$ (matrice nulle).
- l'équation (4) devient alors $\mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_m$ donc $\mathbf{A}_{22}$ doit être inversible et $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{A}_{22}^{-1}$.
- l'équation (2) devient : $$\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}_{12}\mathbf{A}_{22} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$$

  En multipliant à droite par $\mathbf{A}_{22}^{-1}$ on obtient : $\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

Finalement, $\mathbf{A}$ est inversible si $\mathbf{A}_{11}$ et $\mathbf{A}_{22}$ le sont (pas de condition sur $\mathbf{A}_{12}$) et son inverse est donné par :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}^{\mathbf{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

**Application** : inverser la matrice $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

On pose : $\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_3$ , $\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Donc $\mathbf{A}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{22}^{-1} = \mathbf{I}_3$ et $-\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

Finalement :

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -3 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

**Multiplication d'une matrice $\mathbf{A}$ par un vecteur $\mathbf{x}$**

La matrice est découpée en blocs colonnes :

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{u}_1 \; \middle| \; \mathbf{u}_2 \; \middle| \; \dots \; \middle| \; \mathbf{u}_p \right) \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \vdots \\ \hline x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

*matrice 1xp par blocs*

*patrice px1 par blocs*

Le calcul par blocs donne : $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}_1 x_1 + \mathbf{u}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{u}_p x_p = \sum_{k=1}^{p} x_k \mathbf{u}_k$

*scalaires*

*vecteurs*

En lisant l'égalité précédente de droite à gauche, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{p} x_k \mathbf{u}_k = \mathbf{Ax}$

on s'aperçoit qu'une combinaison linéaire de vecteurs peut être vue comme le produit d'une matrice (dont les colonnes sont les vecteurs) et d'un vecteur colonne (dont les composantes sont les scalaires). Par exemple :

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

### Multiplication de deux matrices

<u>1er cas</u> : $\mathbf{B}$ est découpée en blocs colonnes

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_p \end{array}\right)}_{\text{matrice 1xp par blocs}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{Au}_1 & \mathbf{Au}_2 & \dots & \mathbf{Au}_p \end{array}\right)$$

*matrice 1x1 par blocs*

**Exemple** : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>2ème cas</u> : $\mathbf{A}$ est découpée en blocs lignes

$$\mathbf{AB} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \mathbf{v}_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{v}_n^T \end{array}\right)\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{v}_2^T\mathbf{B} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{v}_n^T\mathbf{B} \end{array}\right)$$

**Exemple** : $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right)$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AB} = \left(\begin{array}{c} (1\ \ 0)\mathbf{B} \\ \hline (2\ \ 1)\mathbf{B} \\ \hline (1\ \ 1)\mathbf{B} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

# 1. Généralités

## Calcul par blocs

### Multiplication de deux matrices

3ème cas : $\mathbf{A}$ est découpée en blocs colonnes et $\mathbf{B}$ est découpée en blocs lignes

$$\mathbf{AB} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{array}\right)}_{\textit{matrice 1xp par blocs}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_1^T \\ \hline \mathbf{u}_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{u}_n^T \end{array}\right)}_{\textit{matrice px1 par blocs}} = \mathbf{v}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{u}_2^T + \cdots + \mathbf{v}_n\mathbf{u}_n^T$$

*Chaque terme $\mathbf{v}_k\mathbf{u}_k^T$ est une matrice*

**Exemple** : $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$, $\quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

# 1. Généralités

## Complément de Schur et identités de Schur

Soit $\mathbf{M}$ une matrice (2,2) par blocs : $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{C} \end{pmatrix}$

avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ inversible

$\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$

*Finalement $\mathbf{M}$ est une matrice $(m+n, m+p)$*

Le **complément de Schur** est la matrice $\boldsymbol{S}$ définie par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} - \mathbf{B}_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1$$

- **1ère identité de Schur** :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_p \end{pmatrix}$$

*$\mathbf{M}$ est le produit de 3 matrices <u>par blocs</u> :*
- *une matrice triangulaire inférieure*
- *une matrice diagonale*
- *une matrice triangulaire supérieure*

- **2ème identité de Schur** :

Si $n = p$ alors $\mathbf{S}$ est carrée et :

$$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{S}$$

# 2. Matrices carrées

**Formule du binôme**

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices carrées de même dimension qui commutent (c'est-à-dire telles que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), alors :

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{A}^k \mathbf{B}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{A}^{n-k} \mathbf{B}^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

***Attention*** *: la formule ne marche plus si* $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ *car alors* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 + \mathbf{2AB} + \mathbf{B}^2$

# 2. Matrices carrées

## Formule du binôme

**Exemple :** Calculer $\mathbf{M}^n$ où $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{M} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I} + \mathbf{J} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{IJ} = \mathbf{JI}$$

Donc : $\mathbf{M}^n = (2\mathbf{I} + \mathbf{J})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\mathbf{I})^{\boldsymbol{n-k}} \mathbf{J}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \mathbf{J}^k$

Par ailleurs : $\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{J}^3 = 0$ donc $\mathbf{J}^k = 0$ pour $k \geq 3$

Finalement on obtient (à faire) : $\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n+3)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

# 2. Matrices carrées

## Matrices inversibles

Une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible s'il existe une matrice carrée $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que :

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

On montre que :

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\ \mathbf{A} = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\ \mathbf{A} = \mathbb{R}^n}$$

**Exemple**

La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car les 3 vecteurs colonnes sont libres (linéairement indépendants) donc le rang de $\mathbf{A}$ est maximal, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 3$.

Ainsi, d'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\ \mathbf{A}) = \dim \mathbb{R}^3 - 3 = 0$ donc $\mathrm{Ker}\ \mathbf{A} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

***A retenir***

*Pour montrer qu'une matrice est inversible, il suffit de vérifier que ses vecteurs colonnes sont libres.*

# 2. Matrices carrées

## Matrices inversibles

### Méthode d'inversion

On considère le système linéaire suivant : $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 3x - 3y + 2z = b \\ -2x + y + 3z = c \end{cases}$

On l'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = (x, y, z)^T \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y} = (a, b, c)^T$$

On vérifie que $\mathbf{A}$ est bien inversible (il suffit de montrer que les 3 vecteurs colonnes sont libres, ainsi $\operatorname{Im} \mathbf{A} = \mathbb{R}^3$), puis on inverse l'expression :

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}}$$

En résolvant le système par la méthode du pivot de Gauss, on trouve :

$$x = \frac{1}{34}(11a + 7b - c)$$
$$y = \frac{1}{34}(13a - b + 5c)$$
$$z = \frac{1}{34}(3a + 5b + 9c)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\uparrow \atop \mathbf{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \frac{1}{34}\underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 7 & -1 \\ 13 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}}\underset{\uparrow \atop \mathbf{y}}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

*La solution, c'est-à-dire le triplet, est unique*

# 2. Matrices carrées

## Matrices inversibles

**Propriétés :** soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices inversibles

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$\boxed{(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}}$$

$$(\mathbf{A}^{T})^{-\mathbf{1}} = \left(\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\right)^{T}$$

$$(\mathbf{A}^{n})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{n}$$

**Exemple :** soit la matrice $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = 0$

Alors : $\mathbf{A}(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) = -2\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \times \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$

Donc $\mathbf{A}$ est inversible et $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})$

***A retenir***

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

# 2. Matrices carrées

## Déterminant

- Le déterminant de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un nombre réel ou complexe défini par :

$$\boxed{\det \mathbf{A} = ad - bc}$$

*Autre notation :* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- En dimension 3 :

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= +a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

**Propriétés** : soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des matrices carrées de dimension $n$

$$\boxed{\det \lambda\mathbf{A} = \lambda^n \det \mathbf{A}}$$

$$\boxed{\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{BA} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathbf{A} \neq 0}$$

*dans ce cas :*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}}$$

# 2. Matrices carrées

## Déterminant

### Autres propriétés importantes

- Si on échange 2 colonnes (ou 2 lignes) alors le déterminant est changé en son opposé

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & 3 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) - a \times 1 + a \times 5 = 4a - 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-3a) - 2 \times a + 1 \times (3 + a) = -4a + 3$$

- On ne change pas le déterminant si ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes (même propriété avec les lignes).

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & 3 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a-2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-2) \times 1 + (a-1) \times 5 = 4a - 3$$

$c_1 \leftarrow c_1 - c_2$

$$\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & 3 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-a & 3+a \\ 0 & 1-a & a \end{vmatrix} = 1 \times [(2-a)a - (3+a)(1-a)] = 4a - 3$$

$l_2 \leftarrow l_2 - al_1$
$l_3 \leftarrow l_3 - al_1$

# 2. Matrices carrées

## Trace

La trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.

C'est-à-dire, si $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alors :

$$\boxed{\operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

**Propriétés** : soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des matrices carrées de même dimension et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha \operatorname{tr}\mathbf{A} + \beta \operatorname{tr}\mathbf{B}}$$

$$\boxed{\operatorname{tr}\mathbf{AB} = \operatorname{tr}\mathbf{BA}}$$

# 2. Matrices carrées

## Matrices particulières

- **Matrices diagonales**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*ce sont les matrices* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *avec* $a_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

si $\lambda_i \neq 0$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

# 2. Matrices carrées

## Matrices particulières

- **Matrices triangulaires**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

***triangulaire inférieure***

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ *avec* $a_{ij} = 0$ *pour* $i < j$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

***triangulaire supérieure***

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ *avec* $a_{ij} = 0$ *pour* $i > j$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Conséquence** : il suffit qu'au moins un des termes diagonaux soit nul pour qu'une matrice triangulaire ne soit pas inversible.

# 2. Matrices carrées

## Matrices particulières

- **Matrices symétriques**

Une matrice $\mathbf{M}$ est dite symétrique si $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$.

$\mathbf{M} = (m_{ij})$ *avec* $m_{ij} = m_{ji}$

Soit $\mathbf{A}$ est une matrice rectangulaire quelconque alors les matrices

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

sont symétriques.

En effet : $\mathbf{M}^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{M}$ et $\mathbf{N}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{N}$

*Rappel :* $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

$\mathbf{M}$ est appelée la **matrice de Gram**.

**Exemple** : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

# 2. Matrices carrées

## Matrice de passage

$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2\}$ : base canonique de $\mathbb{R}^2$

*Rappel :* $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,0)^T$ *et* $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1)^T$

$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ : autre base de $\mathbb{R}^2$, avec $\mathbf{e}_1 = (1,2)^T$ et $\mathbf{e}_2 = (-1,3)^T$

$\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *et* $\mathbf{e}_2 = -\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 3\boldsymbol{\varepsilon}_2$

$\mathbf{u} = (a,b)^T_{\mathcal{B}'}$ : vecteur colonne de coordonnées $a$ et $b$ dans la base $\mathcal{B}'$

**Question** : quelles sont les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ ?

$$\mathbf{u} = (a,b)^T_{\mathcal{B}'} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 = a(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_2) + b(-\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 3\boldsymbol{\varepsilon}_2)$$

$$= (a-b)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (2a+3b)\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (a-b, 2a+3b)^T_{\mathcal{B}}$$

En termes matriciel on écrit : $\begin{pmatrix} a-b \\ 2a+3b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

C'est-à-dire : $\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}\mathbf{u}_{\mathcal{B}'}$ avec $\mathbf{P} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}_1 & 1 & -1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & 2 & 3 \end{array}$ **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

*On dit « passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ » car* $\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{e}_2$

***A retenir :***

*Les vecteurs colonnes de la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.*

# 2. Matrices carrées

## Matrice de passage

Une matrice de passage $\mathbf{P}$ est forcément inversible (puisque ses vecteurs colonnes forment une base).

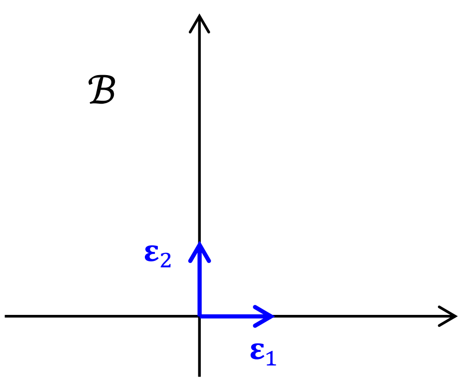
$\mathbf{P}^{-1}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

**Exemple précédent :** $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

On a alors :

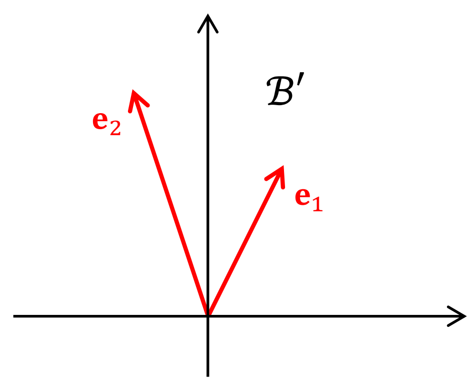
$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (1{,}0)^T = \boldsymbol{\varepsilon}_1$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = (0{,}1)^T = \boldsymbol{\varepsilon}_2$$




$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\quad\quad} \qquad \xleftarrow[\mathbf{P}^{-1}]{\quad\quad}$$



# 2. Matrices carrées

## Matrices semblables

On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$

$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Question** : que devient la matrice $\mathbf{A}$ si on veut l'exprimer dans la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$?

- soient $\mathbf{x} = (x, y)_{\mathcal{B}}^T$ et $\mathbf{u} = (u, v)_{\mathcal{B}}^T$ tels que : $\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ c'est-à-dire : $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

- soient $\mathbf{x} = (x', y')_{\mathcal{B}'}^T$ et $\mathbf{u} = (u', v')_{\mathcal{B}'}^T$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

- On cherche la matrice $\mathbf{A}'$ telle que $\mathbf{u}_{\mathcal{B}'} = \mathbf{A}'\mathbf{x}_{\mathcal{B}'}$ c'est-à-dire telle que $\mathbf{A}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$.

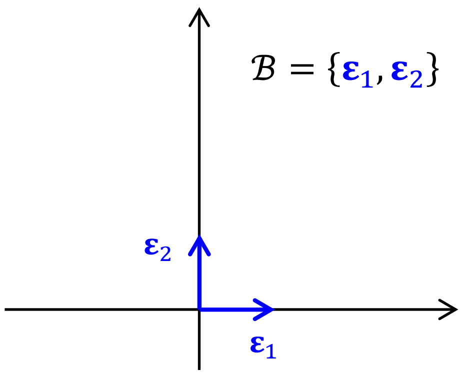
$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{AP}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 & 19 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

# 2. Matrices carrées

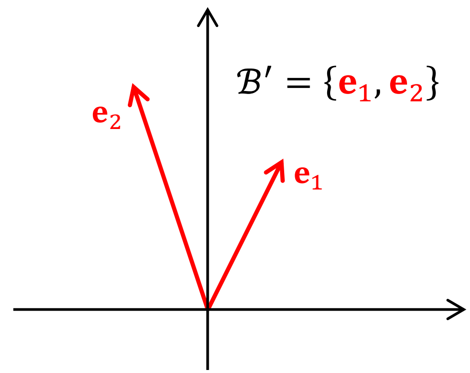
## Matrices semblables




$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}_1 & 1 & -1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\longrightarrow$$

$$\xleftarrow{\mathbf{P}^{-1}}$$




$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}_1 & 1 & 2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{A}\mathbf{e}_1 & \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \\ \hline \mathbf{e}_1 & \frac{16}{5} & \frac{19}{5} \\ \mathbf{e}_2 & -\frac{9}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}$$

***Question*** *: existe-t-il une base $\mathcal{B}'$ pour laquelle la matrice $\mathbf{A}'$ est diagonale ? (cf. diagonalisation)*

# 2. Matrices carrées

## Matrices semblables

On dit que deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

$\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ représentent la même application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ mais dans deux bases de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ différentes.

On remarque que : $\det \mathbf{A}' = \det(\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) = \det \mathbf{A}$.

De même : $\operatorname{tr} \mathbf{A}' = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

*Rappels :*

- $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{BA}$
- $\operatorname{tr} \mathbf{AB} = \operatorname{tr} \mathbf{BA}$

***A retenir :***

*Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.*

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

On appelle **valeur propre** d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ toute nombre $\lambda$, réel ou complexe, vérifiant :

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \qquad \text{où } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

On dit alors que $\mathbf{x}$ est un **vecteur propre** de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\lambda$. On a alors :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{donc} \qquad \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

$$\text{donc} \qquad \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\}$$

$$\text{donc} \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ non inversible}$$

$$\text{donc} \qquad \det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ vérifient donc l'équation : $\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0}$

$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ est appelé **polynôme caractéristique** de $\mathbf{A}$.

$E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ est appelé **sous-espace propres** de $\mathbf{A}$ (c'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à la valeur propre $\lambda$).

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

**Exemple** : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

- valeurs propres

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$

- vecteurs propres associés à $\lambda_1 = -1$

$$\mathbf{x} = (x, y)^T \in E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = (x, -2x)^T = x(1, -2)^T$$

Donc $E_{\lambda_1} = \mathrm{vect}(\mathbf{e}_1)$ avec $\mathbf{e}_1 = (1, -2)^T$

- *Il existe une infinité de vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = -1$, ils sont tous proportionnels à $e_1$.*
- *On dit que $E_{\lambda_1}$ est une droite vectorielle.*

- vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 3$

A faire : on trouve $E_{\lambda_2} = \mathrm{vect}(\mathbf{e}_2)$ avec $\mathbf{e}_2 = (1,2)^T$

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

**Propriétés**

- Toute matrice de dimension $(n, n)$ possède au plus $n$ valeurs propres distinctes.
- Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux valeurs propres distinctes alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

**Diagonalisation**

On dit qu'un matrice est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telle que :

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}}$$

On montre que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonalisable si et seulement si ses vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice $\mathbf{P}$ dans la formule précédente n'est autre que la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres. Ainsi $\mathbf{P}$ est la matrice obtenue en disposant en colonne les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

La matrice $\mathbf{D}$ est constituée des valeurs propres de $\mathbf{A}$.

# 2. Matrices carrées

**Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation**

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ étant semblables elles ont donc même trace et même déterminant. Ainsi, si on note $\lambda_k$ les valeurs propres de $\mathbf{A}$, on en déduit que :

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

$$\det\mathbf{A} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Le rayon spectral $\mathbf{A}$ de est défini par :

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|$$

# 2. Matrices carrées

**Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation**

**Exemple précédent :** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \mathbf{Ae_1} = -\mathbf{e_1} = \mathbf{-1} \times \mathbf{e_1} + 0 \times \mathbf{e_2} \\ \mathbf{Ae_2} = 3\mathbf{e_2} = 0 \times \mathbf{e_1} + \mathbf{3} \times \mathbf{e_2} \end{cases}$$ avec $\mathbf{e_1} = (1,-2)^T$ et $\mathbf{e_2} = (1,2)^T$

- on remarque que $\mathbf{e_1}$ et $\mathbf{e_2}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$

- la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base s'écrit donc : $\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

- dans la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$, la matrice $\mathbf{A}$ s'écrit donc : $\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{Ae_1} & \mathbf{Ae_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$

- la matrice diagonale $\mathbf{D}$ est semblable à la matrice $\mathbf{A}$ donc $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ c'est-à-dire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

- L'ordre dans lequel on dispose les valeurs propres dans $\mathbf{D}$ n'a aucune importance, mais, une fois cet ordre choisi, il est obligatoire de garder le même ordre pour les vecteurs propres dans $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

### Cas des valeurs propres multiples

Il peut arriver qu'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possède $k < n$ valeurs propres distinctes. Dans ce cas, le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$\boxed{P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}}$$

avec $\quad m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$

Le nombre entier $m_i$ est appelé **multiplicité** de la valeur propre $\lambda_i$ avec $i \in [\![1\ k]\!]$

**Exemple :** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 + \lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1 + \lambda)^2\,(2 - \lambda)$$

- $\lambda_1 = -1$ est une valeur propre de multiplicité 2
- $\lambda_2 = 2$ est une valeur propre de multiplicité 1

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

On montre alors que la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre associée, c'est-à-dire :

$$\dim E_{\lambda_i} \leq m_i$$

avec $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$
et $i \in [\![1, k]\!]$

Si en particulier on a $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ pour chacune des valeurs propres distinctes alors $\mathbf{A}$ est diagonalisable (et réciproquement). On retiendra le théorème fondamental suivant :

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \dim E_{\lambda_i} = m_i, \quad \forall i \in [\![1, k]\!]$$

où $k$ est le nombre de valeurs propres distinctes de $\mathbf{A}$

Ou encore :

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = n$$

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

**Exemple :** Reprenons l'exemple précédent et calculons les sous-espaces propres de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on remarque que $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3$ donc :

$\mathbf{c}_i = (\mathbf{A} + \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}_i$

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_3 = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_3) = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (1, -1, 0)^T \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1, 0, -1)^T \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \end{cases}$$

Donc $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ où $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)^T$ et $\mathbf{u}_2 = (1,0,-1)^T$

On a bien $\dim E_{-1} = 2$ où 2 est la multiplicité de la valeur propre $\lambda_1 = -1$.

- $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ on remarque que $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$ donc :

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1,1,1)^T \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$$

Donc $E_2 = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_3 = (1,1,1)^T$

On a bien $\dim E_2 = 1$ où 1 est la multiplicité de la valeur propre $\lambda_2 = 2$.

# 2. Matrices carrées

**Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation**

Finalement $\dim E_{-1} + \dim E_2 = 2 + 1 = 3$ donc $\mathbf{A}$ est diagonalisable et :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

# 2. Matrices carrées

**Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation**

**Trigonalisation**

Toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n'est pas forcément diagonalisable, notamment lorsque $\dim E_{\lambda_i} < m_i$ pour une valeur propre au moins. Dans ce cas, on ne peut trouver une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle $\mathbf{A}$ est diagonale mais on peut toujours trouver une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle elle est triangulaire : on parle alors de **trigonalisation**. On retiendra le théorème fondamental suivant :

Toute matrice dont le polynôme caractéristique est à racines réelles est trigonalisable.

**Exemple :** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\,(1-\lambda)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \text{ de multiplicité } 1 \\ \lambda_2 = 1 \quad \text{de multiplicité } 2 \end{cases}$$

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

Calculons alors les sous-espaces propres de $\mathbf{A}$ :

- $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ on remarque que $3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3$ donc :

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})(3\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad 3\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (3,1,-1)^T \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$$

Donc $E_{-2} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1)$ où $\mathbf{u}_1 = (3,1,-1)^T$

et $\dim E_{-2} = 1$ où 1 est la multiplicité de la valeur propre $\lambda_1 = -2$.

- $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $X = (x, y, z)^T \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ alors $\begin{cases} x = z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $E_1 = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_2)$ où $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)^T$

et $\dim E_1 = 1 < 2$ où 2 est la multiplicité de la valeur propre $\lambda_2 = 1$.

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

La matrice $\boldsymbol{A}$ n'est donc pas diagonalisable … mais on peut la trigonaliser.

Pour cela on choisit un vecteur $\mathbf{u}_3$ de sorte $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ que forment une base de $\mathbb{R}^3$ (le plus souvent, lorsque c'est possible, on prend un vecteur de la base canonique).

Prenons ici $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)^T$, on alors $\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \;\Rightarrow$ les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ sont libres dans $\mathbb{R}^3$ , ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ .

Ainsi :

$$\mathbf{Au}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 = -2\mathbf{u}_1 = (-2,0,0)^T_{B'}$$

$$\mathbf{Au}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 = (0,1,0)^T_{B'}$$

$$\mathbf{Au}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = (0,3,1)^T_{B'}$$

*Attention : cas un peu particulier ici car $\mathbf{u}_2$ est également un vecteur de la base canonique.*

# 2. Matrices carrées

**Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation**

En d'autres termes, la matrice $\mathbf{A}$ s'écrit dans la base $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Au}_1 & \mathbf{Au}_2 & \mathbf{Au}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Matrice triangulaire supérieure*

Finalement, la trigonalisation de $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

### Diagonalisation et calcul par blocs

Soit $\mathbf{A}$ une matrice diagonalisable telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbf{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k \quad (1)$$

- Une écriture matricielle par blocs de (1) donne :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 & \mathbf{A}\mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{e}_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{e}_1\lambda_1 & \mathbf{e}_2\lambda_2 & \cdots & \mathbf{e}_n\lambda_n \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{array}\right)}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{array}\right)}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

### Diagonalisation et calcul par blocs (bis)

- Puissance $k^{\text{ème}}$ de $\mathbf{A}$ : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{A}^k = (\mathbf{PDP}^{-1})^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1} \quad (2)$

Une écriture matricielle par blocs de (2) donne :

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{array}\right)}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}^k} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \hline \mathbf{f}_2^T \quad \cdots \\ \hline \\ \hline \mathbf{f}_n^T \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}}$$

*$\mathbf{f}_i^T$ sont les vecteurs lignes de $\mathbf{P}^{-1}$*

$$\mathbf{A}^k = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1^k\mathbf{e}_1 & \lambda_2^k\mathbf{e}_2 & \cdots & \lambda_n^k\mathbf{e}_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \hline \mathbf{f}_2^T \quad \cdots \\ \hline \\ \hline \mathbf{f}_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1^k\mathbf{e}_1\mathbf{f}_1^T + \lambda_2^k\mathbf{e}_2\mathbf{f}_2^T + \cdots + \lambda_n^k\mathbf{e}_n\mathbf{f}_n^T$$

***A retenir***

$$\boxed{\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k\,\mathbf{M}_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i\,\mathbf{f}_i^T}$$

*$\mathbf{A}^k$ est une combinaison linéaire des matrices $\mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i\mathbf{f}_i^T$*

# 2. Matrices carrées

## Valeurs propres – vecteurs propres – diagonalisation

**Exemple**

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, on a déjà montré que la diagonalisation de cette matrice peut s'écrire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

D'après la formule de la page précédente :

$$\mathbf{A}^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (2 \quad -1) + 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2 \quad 1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(-1)^k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left((-1)^k + 3^k\right) & (-1)^{k+1} + 3^k \\ 4\left((-1)^{k+1} + 3^k\right) & 2\left((-1)^k + 3^k\right) \end{pmatrix}$$

*Remarque :* $k = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ et $k = 1 \Rightarrow \mathbf{A}^1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$

# 2. Matrices carrées

**Théorème de Cayley-Hamilton**

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$, alors $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ et :

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}$$

De façon plus générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{A}^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$$

Considérons un polynôme de degré $n$ : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Et appliquons le à la matrice $\mathbf{A}$ : $P(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{A}^k$

*$P(\mathbf{A})$ est une matrice*

Multiplions la matrice $P(\mathbf{A})$ par le vecteur propre $\mathbf{x}$ :

$$P(\mathbf{A})\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \mathbf{x} = P(\lambda)\mathbf{x}$$

# 2. Matrices carrées

**Théorème de Cayley-Hamilton**

Prenons le cas particulier où est $P$ le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ :

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\mathbf{x} = P_{\mathbf{A}}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

*$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ car $\lambda$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$*

C'est le **théorème de Cayley-Hamilton** qui dit que toute matrice carrée est racine de son polynôme caractéristique. On dit aussi que le polynôme caractéristique est un **polynôme annulateur** de la matrice :

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

# 2. Matrices carrées

## Théorème de Cayley-Hamilton

**Application du théorème de Cayley-Hamilton : calcul de l'inverse d'une matrice**

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que $\det \mathbf{A} = 2 \neq 0$ donc $\mathbf{A}$ est inversible.

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $-\mathbf{A}^3 + 4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$

En multipliant par $\mathbf{A}^{-1}$ on obtient : $-\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 5\mathbf{I} + 2\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$

Donc : $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 5\mathbf{I})$

Finalement :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -14 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 10 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

# 2. Matrices carrées

## Théorème de Cayley-Hamilton

**Conséquence du théorème de Cayley-Hamilton**

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P_{\mathbf{A}}$ son polynôme caractéristique, et considérons la division euclidienne de $x^n$ par $P_{\mathbf{A}}(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} x^n & P_{\mathbf{A}}(x) \\ \hline R_{\mathbf{A}}(x) & Q_{\mathbf{A}}(x) \end{array}$$

*avec* $d°R_{\mathbf{A}} < d°P_{\mathbf{A}}$

En d'autres termes : $x^n = P_{\mathbf{A}}(x)Q_{\mathbf{A}}(x) + R_{\mathbf{A}}(x)$

En replaçant $x$ par $\mathbf{A}$ on obtient : $\mathbf{A}^n = P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) + R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$

On retiendra de façon générale que pour toute matrice carrée, $\mathbf{A}^n = R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ où $R_{\mathbf{A}}$ est le reste de la division euclidienne de $x^n$ par $P_{\mathbf{A}}(x)$.

# 2. Matrices carrées

## Théorème de Cayley-Hamilton

**Application : calcul de la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice**

Reprenons la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle que $P_{\mathbf{A}}(x) = (2-x)(1-x)^2$

- 1 est une racine double donc $P_{\mathbf{A}}(1) = 0$ et $P_{\mathbf{A}}{}'(1) = 0$

*En effet :* $P'_{\mathbf{A}}(x) = -(1-x)^2 - 2(2-x)(1-x)$

- 2 est une racine simple donc $P_{\mathbf{A}}(2) = 0$

La division euclidienne de $x^n$ par $P_{\mathbf{A}}(x)$ donne :

$$x^n = P_{\mathbf{A}}(x)Q_{\mathbf{A}}(x) + ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

*Ici* $R_{\mathbf{A}}(x) = ax^2 + bx + c$
*et* $d°R_{\mathbf{A}} = 2 < 3 = d°P_{\mathbf{A}}$

- $x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = a + b + c$
- $x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 4a + 2b + c$

Dérivons la formule $(1)$ :

$$nx^{n-1} = P'_{\mathbf{A}}(x)Q_{\mathbf{A}}(x) + P_{\mathbf{A}}(x)Q'_{\mathbf{A}}(x) + 2ax + b$$

- $x = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 2a + b$

Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2^n \\ 2a + b = n \end{cases}$ … on trouve : $\begin{cases} a = 2^n - n - 1. \\ b = -2^{n+1} + 3n + 2 \\ c = 2^n - 2n \end{cases}$

# 2. Matrices carrées

**Théorème de Cayley-Hamilton**

En remplaçant $x$ par la matrice $\mathbf{A}$ dans la formule $(1)$ de la page précédente on obtient :

$$\mathbf{A}^n = R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (2^n - n - 1)\mathbf{A}^2 + (-2^{n+1} + 3n + 2)\mathbf{A} + (2^n - 2n)\mathbf{I}$$

$$= (2^n - n - 1)\begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -14 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-2^{n+1} + 3n + 2)\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (2^n - 2n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} 2^n + 2n & n & 1 - 2^n \\ -2^{n+1} - 4n + 2 & 1 - 2n & 2^{n+1} - 2 \\ 2n & n & 1 \end{pmatrix}$$

*Remarque :*

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \qquad \text{et} \qquad n = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

# 2. Matrices carrées

## Exponentielle d'une matrice

L'exponentielle d'une matrice $\mathbf{A}$ est définie par :

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n$$

De façon générale $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$ mais on peut montrer que si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ commutent alors $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$ .

***Remarques***

- *Exponentielle de la matrice nulle :*

$$e^{\mathbf{0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{0}^n = \mathbf{0}^0 + \mathbf{0} + \frac{1}{2} \mathbf{0}^2 + \cdots = \mathbf{I}$$

*Rappel :* $\mathbf{M}^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$

- *On montre facilement que si* $\mathbf{A}$ *est inversible alors* $e^{\mathbf{A}}$ *l'est également et* $\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ *(à faire en exercice).*

# 2. Matrices carrées

**Exponentielle d'une matrice**

Si est $\mathbf{A}$ diagonalisable alors $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ avec $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors :

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{PD}^n \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{D}^n \right)}_{e^{\mathbf{D}}} \mathbf{P}^{-1}$$

Donc :

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}} \mathbf{P}^{-1} \quad \text{avec } e^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

On en déduit que les valeurs propres de $e^{\mathbf{A}}$ sont de la forme $e^{\lambda_k}$ où $\lambda_k$ sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

# 2. Matrices carrées

## Exponentielle d'une matrice

**Application : résolution d'un système différentiel linéaire homogène**

On considère un système d'équations différentielles linéaires :

$$(S)\quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

Ce système peut également s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$(S)\quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \text{avec} \quad \mathbf{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Une solution s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}}$$

*c'est l'équivalent multidimensionnel de $x(t) = Ce^{at}$, solution de l'équation différentielle linéaire $x'(t) = ax(t)$*

où $\mathbf{c}$ est un vecteur colonne constant dont les composantes dépendent des conditions initiales.

**Attention** : on écrit $e^{t\mathbf{A}}$ avant $\mathbf{c}$ car $e^{t\mathbf{A}}$ est une matrice et $\mathbf{c}$ est un vecteur colonne

Si de plus $\mathbf{A}$ est diagonalisable ($\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$) alors :

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{t\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}}$$

# 2. Matrices carrées

## Exponentielle d'une matrice

Vérification : $\mathbf{x}'(t) = \left(e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}\right)' = \left(e^{t\mathbf{A}}\right)' \mathbf{c}$ avec $\left(e^{t\mathbf{A}}\right)' \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(e^{(t+h)\mathbf{A}} - e^{t\mathbf{A}}\right)$

Or : $\dfrac{1}{h}\left(e^{(t+h)\mathbf{A}} - e^{t\mathbf{A}}\right) = \dfrac{1}{h}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{(t+h)^n\mathbf{A}^n}{n!} - \dfrac{t^n\mathbf{A}^n}{n!}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\mathbf{A}^n}{n!}\left(\dfrac{(t+h)^n - t^n}{h}\right)$

Et : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(t+h)^n - t^n}{h} = f'(t)$ où $f(t) = t^n$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(t+h)^n - t^n}{h} = nt^{n-1}$

Donc : $\left(e^{t\mathbf{A}}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\mathbf{A}^n}{n!}nt^{n-1} = \mathbf{A}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^{n-1}\mathbf{A}^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \mathbf{A}\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}\right) = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}$

**On retiendra au passage que :** $\boxed{\left(e^{t\mathbf{A}}\right)' = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}}$

*Version matricielle de la formule* $(e^{at})' = ae^{at}$

Finalement : $\mathbf{x}'(t) = \left(e^{t\mathbf{A}}\right)' \mathbf{c} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

Donc $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}$ est bien solution du système $(S)$.

# 2. Matrices carrées

## Exponentielle d'une matrice

**Exemple**

Résoudre le système différentiel linéaire suivant : $(S)\ \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Le système $(S)$ s'écrit aussi $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ avec $\mathbf{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)^T$ et $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

La diagonalisation de $\mathbf{A}$ donne : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La solution $(S)$ de s'écrit : $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}$ avec $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \mathbf{P}e^{t\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6e^{-4t} + 2e^{t} & -2e^{-4t} + 2e^{t} \\ -3e^{-4t} + 3e^{t} & 2e^{-4t} + 3e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -e^{-4t} + 6e^{t} \\ e^{-4t} + 9e^{t} \end{pmatrix}$$

Finalement la solution du système $(S)$ est : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{5}(6e^{t} - e^{-4t}) \\ y(t) = \dfrac{1}{5}(9e^{t} + e^{-4t}) \end{cases}$

# 2. Matrices carrées

## Exponentielle d'une matrice

**Cas d'un système différentiel linéaire avec second membre**

On considère un système d'équations différentielles linéaires : $(S)\quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + f(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + g(t) \end{cases}$

Ce système peut également s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$(S) \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad (1)$$

avec $\mathbf{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)^T$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b}(t) = \big(f(t), g(t)\big)^T$

Supposons que l'on connaisse une solution particulière de $(S)$ que l'on note $\mathbf{x}_p(t)$, on a alors :

$$\mathbf{x}_p'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}(t) \qquad (2)$$

La soustraction de $(2)$ et $(1)$ donne $\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}_p'(t) = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t)\right)$

Donc, en posant $\mathbf{y}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t)$ on obtient : $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$

*Système linéaire homogène*

Donc $\mathbf{y}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}$ et finalement :

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}}$$

$\mathbf{c}$ *est un vecteur colonne qui dépend des conditions initiales*

## Exponentielle d'une matrice

Pour déterminer la solution particulière $\mathbf{x}_p$ on utilise la **méthode de variation de la constante** qui consiste à poser :

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}(t)$$

La solution particulière a la même forme que la solution de l'équation homogène dans laquelle on a remplacé le vecteur constant $\mathbf{c}$ par un vecteur $\mathbf{c}(t)$ dont les composantes dépendent de $t$.

Pour que $\mathbf{x}_p(t)$ soit solution de $(S)$ il faut donc que :

$$\mathbf{x}_p'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}(t)\right)' = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{t\mathbf{A}}\right)'\mathbf{c}(t) + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t)$$

*La formule de la dérivée d'un produit de 2 matrices est la même que celle de la dérivée d'un produit de 2 fonctions*

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}(t) + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{c}'(t) = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{b}(t)$$

$\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont connus donc a priori on peut en déduire $\mathbf{c}(t)$.

# 2. Matrices carrées

## Exponentielle d'une matrice

**Exemple**

Résoudre le système différentiel linéaire suivant à l'aide de la méthode décrite précédemment :

$$(S)\quad \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 4e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = -2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

**Solution**

- Écriture matricielle : $\boldsymbol{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$

  avec $\mathbf{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)^T$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b}(t) = (0, 4e^{2t})^T$

- Diagonalisation de $\mathbf{A}$ : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Solution : $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}$ avec $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

*$a$ et $b$ dépendent des conditions initiales*

avec $e^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$

et $e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} (2a-b)e^t + (b-a)e^{2t} \\ (2a-b)e^t + 2(b-a)e^{2t} \end{pmatrix}$

# 2. Matrices carrées

## Exponentielle d'une matrice

- Solution particulière $\mathbf{x}_p(t)$ (méthode de variation de la constante) :

$$\mathbf{c}'(t) = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4e^{t} \\ 8 - 4e^{t} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 4t - 4e^{t} \\ 8t - 4e^{t} \end{pmatrix}$$

donc : $$\mathbf{x}_p(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & -e^{t} + e^{2t} \\ 2e^{t} - 2e^{2t} & -e^{t} + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4t - 4e^{t} \\ 8t - 4e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(t-1)e^{2t} \\ 4(2t-1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

- Solutions générales :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} (2a-b)e^{t} + (4t + b - a - 4)e^{2t} \\ (2a-b)e^{t} + 2(4t + b - a - 2)e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

- Prise en compte des conditions initiales :

$$\mathbf{x}(0) = (-2, 4)^T \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \text{et} \quad b = 8$$

- Finalement :

$$\begin{cases} x(t) = -4e^{t} + 2(2t+1)e^{2t} \\ y(t) = -4e^{t} + 8(t+1)e^{2t} \end{cases}$$

# 2. Matrices carrées

## Norme matricielle

**Rappel sur les normes vectorielles**

Soit un vecteur de $\mathbb{R}^n$ :

- norme 1 : $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- norme 2 : $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ norme euclidienne
- norme ∞ : $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

Les matrices carrées forment un espace vectoriel, elles peuvent donc être traitées comme des vecteurs auxquels on peut attribuer une norme. On parle alors de norme matricielle définie comme une application qui à toute matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associe un nombre réel positif ou nul noté $\|\mathbf{A}\|$ tel que :

- $\|\mathbf{A}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|, \quad \alpha \in \mathbb{C}$
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$
- $\|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$

# 2. Matrices carrées

## Norme matricielle

La norme matricielle de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ induite par la norme vectoriel $\|\,.\,\|_p$, $p = 1, 2$ ou $\infty$, est définie par :

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{X}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{AX}\|_p}{\|\mathbf{X}\|_p} = \max_{\substack{\mathbf{X}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\} \\ \|\mathbf{X}\|_p=1}} \|\mathbf{AX}\|_p$$

On montre alors que :

- norme 1 : $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

- norme 2 : $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$

- norme $\infty$ : $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

> - *$\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ est le rayon spectral de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$*
> - *si $\mathbf{A}$ est symétrique alors $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}\,)$*

*Démonstration de $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ :*

*Soit $\mathbf{X}$ un vecteur propre de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\lambda$ alors :*

$$\lambda\|\mathbf{X}\|_2^2 = \lambda\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\lambda\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{AX} = (\mathbf{AX})^T\mathbf{AX} = \|\mathbf{AX}\|_2^2 \geq 0$$

*Donc :* $\|\mathbf{A}\|_2^2 = \max\limits_{\mathbf{X}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{AX}\|_2^2}{\|\mathbf{X}\|_2^2} = \max\,\{\lambda \;\; |\lambda \text{ valeur propre de } \mathbf{A}^T\mathbf{A}\} \overset{\text{def}}{=} \rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$

# 2. Matrices carrées

## Norme matricielle

Les normes 1, 2 et ∞ sont les normes les plus usuelles auxquelles on peut également ajouter la **norme de Frobenius** (appelée aussi **norme euclidienne**) définie par :

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

La norme de Frobenius vérifie la double inégalité :

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_2$$

**Exemple** : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- norme 1 : $\|\mathbf{A}\|_1 = 8$
- norme 2 : $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & -9 & -17 \\ -9 & 14 & 17 \\ -17 & 17 & 26 \end{pmatrix}$ admet pour valeur propres 0.4116, 5.0000 et 48.5884 donc

  $\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ =48.5884 donc $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{48.5884} = 6.9705$

- norme ∞ : $\|\mathbf{A}\|_\infty = 10$
- norme de Frobenius : $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} = 7.3485$

# 2. Matrices carrées

## Norme matricielle

**Trois propriétés** (que l'on admettra) :

1. $\rho(\mathbf{A}) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$

2. $\rho(\mathbf{A}) = \lim\limits_{k\to\infty} \left\|\mathbf{A}^k\right\|^{1/k}$

3. $\rho(\mathbf{A}) < \|\mathbf{A}\|$