Chapitre V

Décomposition en valeurs singulières

1. Introduction
2. Forme complète de la SVD
3. Propriétés
4. Interprétation géométrique
5. Méthode pratique
6. Application

1. Introduction

Exemple introductif

On considère la matrice 3×2 suivante : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cette matrice est de rang 2 (les 2 vecteurs colonnes sont libres).

On pose : $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont symétriques (matrices de Gram), donc d'après le théorème spectral on a :

- $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{D}_1\mathbf{V}^T$ avec $\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{N} = \mathbf{U}\mathbf{D}_2\mathbf{U}^T$ avec $\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \end{pmatrix}$

1. Introduction

On a alors :

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{D}_1\mathbf{V}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{D}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_1^2 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1})^T\mathbf{A}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} = \mathbf{I}$$

$\mathbf{A}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}$ est une matrice orthogonale et cette matrice est :

$$\mathbf{A}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

1. Introduction

Finalement :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \\ \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Les valeurs $\sigma_1 = \sqrt{7}$ et $\sigma_2 = \sqrt{2}$ sont appelées **valeurs singulières** de $\mathbf{A}$ (ce sont les racines carrées des valeurs propres de $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$).

Ceci n’est pas une diagonalisation (puisque $\mathbf{A}$ n’est pas carrée) mais ça y ressemble beaucoup ! On dit plutôt que $\mathbf{A}$ a été décomposée en valeurs singulières. Il s’agit ici plus exactement de la <u>forme réduite</u> de la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

2. Forme complète de la SVD

La <u>forme complète</u> et générale de la SVD s'énonce de la façon suivante :

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Il existe une matrice orthogonale $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, une matrice orthogonale $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et une matrice « diagonale » $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ à coefficients diagonaux positifs ou nuls telles que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$$

C'est-à-dire :

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \dots & \mathbf{u}_m \end{array}\right)}_{\substack{\mathbf{U} \\ m\times m}} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)}_{\substack{\mathbf{\Lambda} \\ m\times n}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \mathbf{v}_2^T \\ \hline \mathbf{v}_3^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{v}_n^T \end{array}\right)}_{\substack{\mathbf{V}^T \\ n\times n}}$$

Les réels $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sont positifs ou nuls et sont appelés **valeurs singulières** de $\mathbf{A}$ et on dit que $\mathbf{A}$ est décomposée en valeurs singulières (SVD : Singular Values Decomposition).

2. Forme complète de la SVD

Un simple calcul par blocs permet d'écrire :

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \dots & \mathbf{u}_m \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \mathbf{v}_2^T \\ \hline \mathbf{v}_3^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{v}_n^T \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \sigma_2\mathbf{u}_2 & \sigma_3\mathbf{u}_3 & \dots & \sigma_n\mathbf{u}_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \hline \mathbf{v}_2^T \\ \hline \mathbf{v}_3^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{v}_n^T \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_n\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T}$$

combinaison linéaire des matrices $\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^T$

2. Forme complète de la SVD

La forme complète de la SVD de la matrice de l'exemple introductif s'écrit :

$$\underset{3\times 2}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U\Lambda V}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{U} \\ 3\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{\Lambda} \\ 3\times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{V}^T \\ 2\times 2}}$$

3. Propriétés

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \mathbf{U\Lambda V}^T$ la SVD d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On note r le nombre de valeurs singulières non nulles.

Alors :

1. $$\boxed{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^2}$$ ***conservation de l'énergie***

2. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $(\sigma_k^2,\ \mathbf{v}_k)$ est un couple d'éléments propres de $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ et

   $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $(\sigma_k^2,\ \mathbf{u}_k)$ est un couple d'éléments propres de $\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$

3. $\mathbf{A}\mathbf{v}_k = \begin{cases} \sigma_k \mathbf{u}_k & 1 \le k \le r \\ 0 & r+1 \le k \le n \end{cases}$ et $\mathbf{A}^T\mathbf{u}_k = \begin{cases} \sigma_k \mathbf{v}_k & 1 \le k \le r \\ 0 & r+1 \le k \le m \end{cases}$

4. $\mathrm{Im}\,\mathbf{A} = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$ (donc $\mathrm{rg}\,\mathbf{A} = r$) et $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}^T = \mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$

5. $\mathrm{Ker}\mathbf{A} = \mathrm{Vect}(\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_n)$ et $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}^T = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_{r+1}, \mathbf{u}_{r+2}, \dots, \mathbf{u}_m)$

4. Interprétation géométrique

Image de la sphère unité

Soient $\mathbf{A} = \mathbf{U\Lambda V}^T$ la SVD d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et r le nombre de valeurs singulières non nulles.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Lambda V}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{AV} = \mathbf{U\Lambda}$$

- La matrice $\mathbf{V}$ est orthogonale, ses vecteurs colonnes sont donc normés, ils appartiennent donc à la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. De même les vecteurs colonnes de $\mathbf{U}$ appartiennent à la sphère unité de $\mathbb{R}^m$.

- $\mathbf{U\Lambda}$ est donc l'image de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ par la matrice $\mathbf{A}$.

- Par ailleurs :

$$\mathbf{U\Lambda} = \left(\mathbf{u}_1 \middle| \mathbf{u}_2 \middle| \mathbf{u}_3 \middle| \dots \middle| \mathbf{u}_m \right) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\sigma_1 \mathbf{u}_1 \middle| \dots \middle| \sigma_r \mathbf{u}_r \middle| \dots \middle| 0 \right)$$

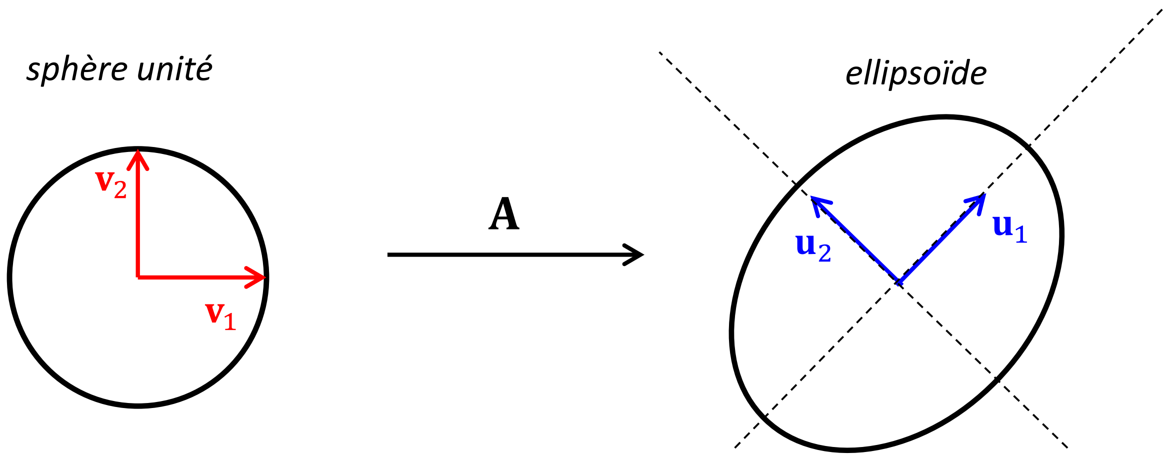
4. Interprétation géométrique

Image de la sphère unité (suite)

- Les vecteurs colonnes de $\mathbf{U\Lambda}$ sont de longueurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, ils appartiennent donc à un ellipsoïde de $\mathbb{R}^r$ dont les axes sont les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$.

- Les valeurs singulières $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ correspondent alors aux facteurs de déformation subie par les vecteurs de la sphère unité lorsqu'on leur applique la matrice $\mathbf{A}$.

Schématiquement :



$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1$

$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \sigma_2 \mathbf{u}_2$

- *σ_1 et σ_2 correspondent respectivement au demi-grand axe et au demi-petit axe*
- *$\mathbf{u}_1$, correspondant à la plus grande valeur singulière, donne la direction principale*
- *$\mathbf{u}_2$, correspondant à la plus petite valeur singulière, donne la direction secondaire*

5. Méthode pratique

Méthode pratique pour faire la SVD d'une matrice « à la main » *(cas où* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *avec* $m \geq n$*)*

- Diagonalisation de $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{D}_1\mathbf{V}^T$ avec $\mathbf{D}_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

- Diagonalisation de $\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{N} = \mathbf{U}\mathbf{D}_2\mathbf{U}^T$ avec $\mathbf{D}_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0)$

- la SVD de $\mathbf{A}$ s'écrit alors :

5. Méthode pratique

Exercice

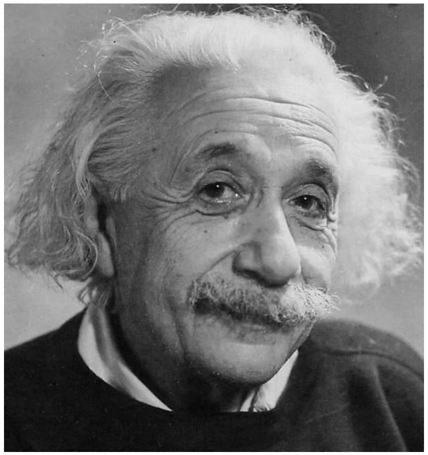
Appliquer la méthode précédente pour faire la SVD de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{-5\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

6. Application

Application de la SVD en traitement d'image



- Une image en niveaux de gris peut être représentée par une matrice dont chaque coefficient détermine l'intensité du pixel correspondant.
- Par exemple, l'image d'A. Einstein ci-contre possède 590×629 pixels, elle peut être représentée par une matrice $\mathbf{A}$ de $m = 629$ lignes et $n = 590$ colonnes, c'est-à-dire par 371 110 nombres compris entre 0 et 255.
- La décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$ permet de l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

où r est le nombre de valeurs singulières non nulles (ici $r = 590$).

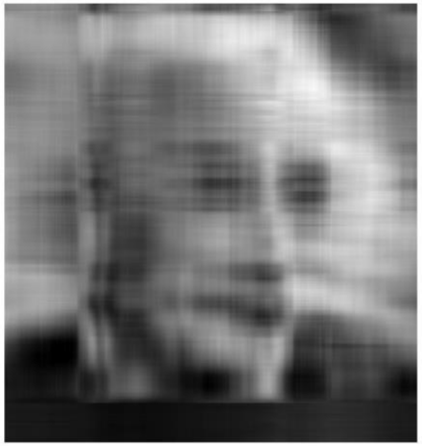
Question : que se passe-t-il si dans la somme ci-dessus on prend en compte un nombre de valeurs singulières k inférieur à r ?

En d'autres termes, à quoi ressemble l'image d'A. Einstein lorsqu'elle est reconstruite à l'aide de la matrice :

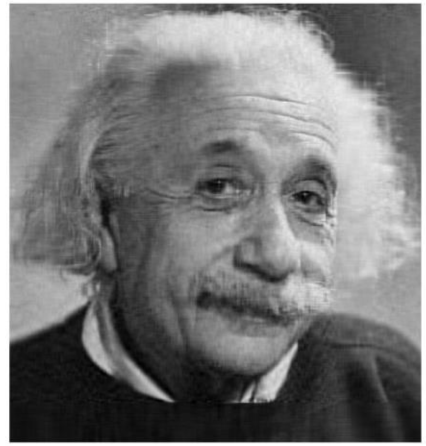
$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad \text{avec} \quad k < r = 590$$

6. Application

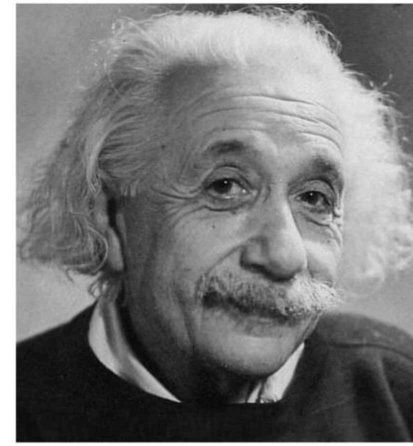
Application de la SVD en traitement d'image (suite)



$k = 5$



$k = 40$



$k = 100$

- Bien évidemment, l'image est reconstruite à l'identique si $k = r = 590$.
- On observe que pour $k = 100$, c'est-à-dire en utilisant moins d'information que dans l'image originale, l'image reconstruite est d'une assez bonne qualité
- Cela s'explique par la forte décroissance des valeurs singulières (cf. figure ci-contre)
- Application à la compression d'image