Chapitre VII

Méthode de la puissance itérée et méthode de la déflation

1. Introduction
2. Méthode de la puissance itérée
3. Méthode de la déflation

1. Introduction

On considère une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisable admettant n valeurs propres λ_k avec la convention de notation :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

On dit que λ_1 est la **valeur propre dominante** si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et le vecteur propre $\mathbf{e}_1$ associé à λ_1 est appelé **vecteur propre dominant**.

La méthode de la puissance itérée est une méthode numérique qui permet de calculer de façon approchée le couple dominant $(\lambda_1, \mathbf{e}_1)$.

2. Méthode de la puissance itérée

Exemple : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

On définit la suite de vecteurs $(\mathbf{x}_n)$ suivante : $\begin{cases} \mathbf{x}_0 = (1,1)^T \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \end{cases}$

- $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -7 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ -11 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 167 \\ -43 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_4 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 167 \\ -43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 481 \\ -119 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_5 = \mathbf{A}\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 481 \\ -119 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1463 \\ -367 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_6 = \mathbf{A}\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1463 \\ -367 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4369 \\ -1091 \end{pmatrix}$

On remarque que :

- le vecteur $\mathbf{x}_{k+1}$ est presque proportionnel à $\mathbf{x}_k$
- le coefficient de proportionnalité est très proche de la valeur propre dominante $\lambda_1 = 3$
- le vecteur $\mathbf{x}_k$ tend vers le vecteur propre dominant $\mathbf{e}_1 = (-4,\ 1)^T$

2. Méthode de la puissance itérée

Explications

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_{k-2} = \cdots = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$$

On rappelle (cf. cours chapitre I, diagonalisation) que :

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \mathbf{M}_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{f}_i^T$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont les vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$ (c'est-à-dire les vecteurs colonnes de $\mathbf{P}$) et les vecteurs $\mathbf{f}_i^T$ sont les vecteurs lignes de la matrice $\mathbf{P}^{-1}$. Donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{x}_k =$$

2. Méthode de la puissance itérée

Mais comme λ_1 est la valeurs propre dominante on a :

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \qquad \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0$$

Donc, pour k suffisamment grand :

$$\mathbf{x}_k \simeq \lambda_1^k a_1 \mathbf{e}_1$$

Donc $\mathbf{x}_k$ est proche d'un vecteur propre dominant (puisque presque proportionnel à $\mathbf{e}_1$).

Au rang suivant :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \simeq \lambda_1^k a_1 \mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1^k a_1 \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \lambda_1\left(\lambda_1^k a_1 \mathbf{e}_1\right)$$

Donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{x}_{k+1} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}_k$$

Ceci explique le fait que le rapport des composantes est proche de λ_1 :

$$|\lambda_1| = \frac{\|\mathbf{x}_{k+1}\|}{\|\mathbf{x}_k\|}$$

2. Méthode de la puissance itérée

Remarques

- la convergence est d'autant plus rapide que le rapport $|\lambda_1|/|\lambda_2|$ est grand

- la méthode ne marche pas si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$

- il est également possible de normer les vecteurs $\mathbf{x}_k$ à chaque étape afin de les composantes ne deviennent trop grandes (ou trop petites) ; la suite $(\mathbf{x}_k)$ est alors définie par :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{x}_k\|}$$

3. Méthode de la déflation

Pour calculer les autres valeurs propres on utilise la **méthode de déflation** qui consiste à construire une matrice $\mathbf{B}$ admettant pour valeurs propres $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivement associées aux vecteurs propres $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Le couple dominant est alors $(\lambda_2, \mathbf{e}_2)$; il suffit alors d'appliquer la méthode de la puissance itérée à la matrice $\mathbf{B}$.

Construction de la matrice $\mathbf{B}$

Soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ la base constituée des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}^T$ (on rappelle que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^T$ ont les mêmes valeurs propres), c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1\,, n]\!], \qquad \mathbf{A}^T \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$$

Ou encore (en prenant la transposée de la formule précédente) :

$$\forall k \in [\![1\,, n]\!], \qquad \mathbf{u}_k^T \mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{u}_k^T$$

3. Méthode de la déflation

Soit $p \neq k$ alors :

Les vecteurs de la base des vecteurs propres de $\mathbf{A}^T$ sont orthogonaux aux vecteurs propres de la base des vecteurs propres de $\mathbf{A}$. On pose alors :

On a alors :

Donc 0 est une valeur propre de $\mathbf{B}$; elle est associée au vecteur propre $\mathbf{e}_1$.

3. Méthode de la déflation

De plus :

Donc λ_k est une valeur propre de $\mathbf{B}$; elle est associée au vecteur propre $\mathbf{e}_k$.

Finalement, $\mathbf{B}$ est une matrice diagonalisable admettant pour valeurs propres $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ avec :

$$|\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

La valeur propre dominante est alors λ_2 et le vecteur propre dominant est $\mathbf{e}_2$. Il suffit alors d'appliquer la méthode de la puissance itérée à la matrice $\mathbf{B}$ pour déterminer le couple dominant $(\lambda_2, \mathbf{e}_2)$, et ainsi de suite pour les autres valeurs propres et vecteurs propres.