Chapitre III

Systèmes linéaires

1. Introduction

- **Objectif** : proposer des méthodes de résolution d'un système linéaire de la forme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice inversible, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x}$ est l'inconnue).

- Théoriquement il existe une solution unique $\mathbf{x}$ dont les composantes sont données par la formule de Kramer :

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$$

  où $\mathbf{A}_i$ est la matrice obtenue à partir de $\mathbf{A}$ en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par le vecteur $\mathbf{b}$.

- Dans la pratique, le coût de calcul de la formule ci-dessus est de l'ordre de $(n+1)!$ flops (floating-point operations) ; plus exactement, le calcul de chaque déterminant se fait par la formule :

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

  dans laquelle la somme se fait sur toutes les permutations σ sur n indices ; le calcul de la formule ci-dessus requiert $n!$ flops. Calculer le déterminant d'une matrice 100×100 prendrait un temps supérieur à l'âge de l'Univers.

- Nous proposons de présenter des méthodes alternatives pour lesquelles les algorithmes présentent des temps de calcul plus raisonnables : on distinguera les <u>méthodes directes</u> (qui donnent un résultat exact) et les <u>méthodes itératives</u> (qui donnent un résultat approché en construisant une suite $(\mathbf{x}_n)$ convergeant vers la solution $\mathbf{x}$).

2. Méthodes directes

Les méthodes directes consistent le plus souvent à « factoriser » la matrice $\mathbf{A}$ du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, c'est-à-dire à l'écrire sous la forme d'un produit de matrices « plus simples » dont le déterminant se calcule plus facilement :

- Factorisation QR :

$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ avec $\mathbf{Q}$: matrice orthogonale

$\mathbf{R}$: matrice triangulaire supérieure

- Factorisation LU :

$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ avec $\mathbf{L}$: matrice triangulaire inférieure

$\mathbf{U}$: matrice triangulaire supérieure

- Factorisation de Cholesky :

$\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$ avec $\mathbf{L}$: matrice triangulaire inférieure

2. Méthodes directes

Factorisation QR

Exemple introductif

On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On peut facilement vérifier que les vecteurs colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ de $\mathbf{A}$ sont libres. Appliquons alors le procédé de Gram-Schmidt (cf. chapitre II) à ces vecteurs :

- 1ère étape

$$r_{11} = \|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{r_{11}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$$

2. Méthodes directes

Factorisation QR

- 2ème étape

$$r_{12} = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1 \rangle = \mathbf{a}_2^T \mathbf{q}_1 = 3$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1 = (-1 \quad 4 \quad 4 \quad -1)^T - \frac{3}{2}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T = \frac{5}{2}(-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1)^T$$

$$r_{22} = \|\mathbf{v}_2\| = 5$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{r_{22}} = \frac{1}{2}(-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1)^T$$

2. Méthodes directes

Factorisation QR

- 3ème étape

$$r_{13} = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{q}_1 \rangle = \mathbf{a}_3^T \mathbf{q}_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad r_{23} = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{q}_2 \rangle = \mathbf{a}_3^T \mathbf{q}_2 = -2$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 = \cdots = (2 \quad -2 \quad 2 \quad -2)^T$$

$$r_{33} = \|\mathbf{v}_3\| = 4$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{r_{33}} = \frac{1}{2}(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)^T$$

1. Méthodes directes

Factorisation QR

On pose alors :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}$ est triangulaire supérieure et $\mathbf{Q}$ est orthogonale (car les vecteurs colonnes forment une famille orthonormée).

On vérifie facilement que $\mathbf{QR} = \mathbf{A}$: c'est la factorisation QR de $\mathbf{A}$.

1. Méthodes directes

Factorisation QR

A retenir

Toute matrice $\mathbf{A}$ *de dimensions* $m \times n$ *(*$m \geq n$*) de rang* n *peut s'écrire sous la forme* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *où* $\mathbf{Q}$ *est une matrice* $m \times n$ *orthogonale et* $\mathbf{R}$ *est une matrice triangulaire supérieure.*

Remarque

- *Nous appliquerons la factorisation QR aux problèmes de moindres carrés au chapitre VI.*

1. Méthodes directes

Factorisation LU

Exemple introductif

On considère le système suivant :

$$(S_1)\quad \begin{cases} x - y + 3z = 4 & L_1 \\ 2x - y + z = 5 & L_2 \\ 3x \quad\; - 3z = 6 & L_3 \end{cases} \qquad \text{de matrice } \ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Méthode du pivot de Gauss :

- 1ère étape

$$(S_2)\quad \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 5z = -3 \\ 3y - 12z = -6 \end{cases} \qquad \text{de matrice } \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

- 2ème étape

$$(S_3)\quad \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 5z = -3 \\ 3z = 3 \end{cases} \qquad \text{de matrice } \ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Méthodes directes

Factorisation LU

Les systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) sont équivalents ; on a effectué les opérations suivantes :

- 1ère étape

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 \quad \text{avec } m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2 \qquad \text{et} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 \quad \text{avec } m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 3$$

Cela revient à écrire :

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{A}_1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2ème étape

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2 \quad \text{avec } m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

Cela revient à écrire :

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{M}_3\mathbf{A}_2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Méthodes directes

Factorisation LU

Donc, en posant $\mathbf{U} = \mathbf{A}_3$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}_3\mathbf{A}_2 = \mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{A}_1$$

Les matrices $\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{M}_3$ sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale principale, il en est donc de même pour le produit $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2$.

Donc $\det(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2) = 1$ donc $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2$ est inversible et, en posant $\mathbf{L} = (\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2)^{-1}$:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

avec $\mathbf{L} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$

et $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Méthodes directes

Factorisation LU

Revenons au système (S_1), c'est-à-dire :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = (4 \quad 5 \quad 6)^T$$

On a alors :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{LUX} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{LY} = \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{UX}$$

Résoudre le système (S_1) revient alors à résoudre 2 systèmes triangulaires :

- d'abord $\mathbf{LY} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{on trouve} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

- puis $\mathbf{UX} = \mathbf{Y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{on trouve} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Méthodes directes

Factorisation LU

A retenir

La factorisation LU d'une matrice inversible $\mathbf{A}$ *consiste à la décomposer sous la forme* $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ *où* $\mathbf{L}$ *est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale et* $\mathbf{U}$ *est une matrice triangulaire supérieure.*

Résoudre le système $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *revient alors à résoudre les 2 systèmes triangulaires* $\mathbf{LY} = \mathbf{B}$ *et* $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$*.*

1. Méthodes directes

Factorisation LU

Remarques

- *Le coût de la factorisation LU est le même que celui de la méthode du pivot de Gauss (de l'ordre de n^3). L'avantage de LU est que, une fois les matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ calculées et stockées en mémoire, on peut résoudre directement tout système linéaire de la forme $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (alors qu'avec la méthode du pivot de Gauss, on recommence les calculs à chaque fois que $\mathbf{B}$ change).*

- *Si la factorisation LU existe (c'est-à-dire si aucun pivot n'est nul) alors elle est unique.*

- *La factorisation LU est très utile pour calculer le déterminant de grosses matrice. En effet si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alors :*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \times \det \mathbf{U} = \det \mathbf{U} = \text{produit des pivots}$$

1. Méthodes directes

Factorisation LU

Méthode pratique pour effectuer la factorisation LU « à la main »

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \frac{1}{a}\mathbf{C} & \mathbf{L}_1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{U}_1 \end{array}\right)$$

A l’aide d’un calcul par blocs on obtient :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{a}\mathbf{CB} + \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$$

C’est-à-dire :

$$\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{D} - \mathbf{C}a^{-1}\mathbf{B}$$

On réitère en redécoupant par bloc la matrice $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$ de la même façon … et ainsi de suite jusqu’à obtenir un bloc 1×1.

1. Méthodes directes

Factorisation LU

Exemple : $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 2 & 4 \\ \hline 16 & 9 & 18 \\ 4 & 9 & 21 \end{array}\right)$

- $1^{\text{ère}}$ étape : $a = 4$, $\mathbf{B} = (2 \quad 4)$, $\mathbf{C} = (16 \quad 4)^T$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{L_1 U_1} = \mathbf{D} - \mathbf{C}a^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}(2 \quad 4) = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$$

On construit alors la matrice : $$\begin{array}{c} a \\ \frac{1}{a}\mathbf{C} \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \mathbf{L_1 U_1} \end{array}$$

1. Méthodes directes

Factorisation LU

- 2ème étape : $a = 1$, $\mathbf{B} = (2)$, $\mathbf{C} = (7)$, $\mathbf{D} = (17)$

$$\mathbf{L}_2\mathbf{U}_2 = \mathbf{D} - \mathbf{C}a^{-1}\mathbf{B} = (17) - (7) \times (2) = (3)$$

On construit alors la matrice :

$$\begin{array}{r} \\ a \rightarrow \\ \frac{1}{a}\mathbf{C} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \mathbf{B} \\ \leftarrow \mathbf{L_2 U_2} \end{array}$$

- 3ème étape : on sépare diagonalement cette matrice pour obtenir $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ en ajoutant des 1 sur la diagonale de $\mathbf{L}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Méthodes directes

Factorisation de Cholesky

Exemple introductif

On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Cette matrice est symétrique définie positive (on peut le prouver en vérifiant que ses valeurs propres sont strictement positives par exemple).

On cherche à écrire cette matrice comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure à termes diagonaux positifs par sa transposée, c'est-à-dire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}$$

1. Méthodes directes

Factorisation de Cholesky

- $l_{11}^2 = 1 \;\Rightarrow\; l_{11} = 1$
- $l_{21} l_{11} = 1 \;\Rightarrow\; l_{21} = 1$
- $l_{31} l_{11} = 1 \;\Rightarrow\; l_{31} = 1$
- $l_{21}^2 + l_{22}^2 = 10 \;\Rightarrow\; l_{22} = 3$
- $l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} = 4 \;\Rightarrow\; l_{32} = 1$
- $l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 6 \;\Rightarrow\; l_{33} = 2$

Donc $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Méthodes directes

Factorisation de Cholesky

A retenir

Soit $\mathbf{A}$ *une matrice symétrique définie positive. Il existe une unique matrice* $\mathbf{L}$ *triangulaire inférieure dont les termes de la diagonale sont positifs telle que* $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$

Remarques

- *On peut utiliser la factorisation de Cholesky pour faire la factorisation QR d'une matrice* $\mathbf{M}$ *de dimensions* $m \times n$ *(avec* $m \geq n$*) et de rang* n*. Pour cela, on forme la matrice de Gram* $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T\mathbf{M}$*, alors on montre que* $\mathbf{A}$ *est symétrique définie positive (à faire en exercice), donc* $\mathbf{A}$ *admet une décomposition de Cholesky, c'est-à-dire* $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$*. On a alors :*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^T = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

avec $\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\mathbf{L}^T)^{-1}$ *matrice orthogonale (à démontrer en exercice)*

et $\mathbf{R} = \mathbf{L}^T$ *matrice triangulaire supérieure (évident)*

1. Méthodes directes

Factorisation de Cholesky

Remarques (suite)

- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{L}^T = (\det \mathbf{L})^2 = \det \mathbf{L}^2$

  Comme $\mathbf{L}^2$ *est aussi une matrice triangulaire, plus précisément :*

$$\mathbf{L}^2 = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & l_{22}^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & l_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

  on en déduit que :

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2$$

- *Le coût de la factorisation de Cholesky est de l'ordre de* n^3*.*

1. Méthodes directes

Factorisation de Cholesky

Méthode pratique pour effectuer la factorisation de cholesky « à la main »

On s'inspire de la méthode utilisant le calcul par blocs vue pour la factorisation LU.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

- $1^{\text{ère}}$ étape

  - On écrit le complément de Schur : $\mathbf{S} = \mathbf{D} - \mathbf{C}a^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

  - On divise la marge gauche et la marge haute par $\sqrt{a} = 1$

  - On construit la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbf{S}$$

1. Méthodes directes

Factorisation de Cholesky

- $2^{\text{ème}}$ étape

  - On écrit le complément de Schur : $\mathbf{S} = \mathbf{D} - \mathbf{C}a^{-1}\mathbf{B} = 5 - 3 \times \dfrac{1}{9} \times 3 = 4$

  - On divise la marge gauche et la marge haute par $\sqrt{a} = 3$

  - On construit la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbf{S}$

1. Méthodes directes

Factorisation de Cholesky

- $3^{ème}$ étape

  - On divise $\mathbf{S} = 4$ par $\sqrt{a} = 2$ et on obtient la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

  - On sépare diagonalement et on obtient : $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

La décomposition de Cholesky de la matrice $\mathbf{A}$ est donc :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}^T}$$

2. Méthodes itératives

Les méthodes itératives consistent à écrire la matrice $\mathbf{A}$ du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice (facilement) inversible. Ainsi :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Nx} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \qquad (1)$$

On remarque alors que l'équation (1) est de la forme $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$; on est donc face à une problème de type « point fixe » dont la solution consiste à construire une suite qui repose sur l'itération de l'équation :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \qquad (2)$$

où $\mathbf{x}_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$.

On initialise l'algorithme par un vecteur arbitraire $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ et on arrête les calculs lorsque :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon$$

où ε est une valeur que l'on s'est fixé et qui définit la précision avec laquelle la suite doit converger.

2. Méthodes itératives

On utilisera les notations suivantes :

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ matrice triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale

$$-\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale

On a alors : $\mathbf{A} = \mathbf{D} - (\mathbf{E} + \mathbf{F})$

2. Méthodes itératives

Méthode de Jacobi

La matrice du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s'écrit $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ avec $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$.

On a alors :

La matrice $\mathbf{J} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ est appelée **matrice de Jacobi**.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Méthodes itératives

Méthode de Jacobi

Il faut donc construire la suite de vecteurs : $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{J}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

En développant les calculs on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} \dots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} \dots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} \dots - \dfrac{a_{1,n-1}}{a_{n-1,n-1}} x_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à construire les n suites numériques suivantes :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Pour chaque valeur de i on effectue $n-1$ multiplications, n additions et 1 division soit $2n$ opérations. Le calcul de la méthode de Jacobi effectue donc $2n^2$ opérations et nécessite, en tenant compte de la matrice $\mathbf{A}$ et du vecteur $\mathbf{b}$, une place mémoire de $3n^2 + n$ nombres flottants.

2. Méthodes itératives

Méthode de Jacobi

Exemple : résoudre par la méthode de Jacobi le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ en partant de la valeur initiale $\mathbf{x_0} = (0{,}0{,}0)^T$.

D'après ce qui précède on a :

- $1^{\text{ère}}$ itération

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{4-(2\times 0+1\times 0)}{4} = 1 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{2-(-1\times 0+0\times 0)}{2} = 1 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{9-(2\times 0+1\times 0)}{4} = \dfrac{9}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}^T$$

- $2^{\text{ème}}$ itération

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{4-(2\times 1+1\times 9/4)}{4} = -\dfrac{1}{16} \\ x_2^{(2)} = \dfrac{2-(-1\times 1+0\times 9/4)}{2} = \dfrac{3}{2} \\ x_3^{(2)} = \dfrac{9-(2\times 1+1\times 1)}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{16} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}^T$$

2. Méthodes itératives

Méthode de Jacobi

- $3^{\text{ème}}$ itération :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{4-(2\times 3/2+1\times 3/2)}{4} = -\dfrac{1}{8} \\ x_2^{(2)} = \dfrac{2-(1\times 1/16+0\times 3/2)}{2} = \dfrac{31}{32} \\ x_3^{(2)} = \dfrac{9-(-2\times 1/16+1\times 3/2)}{4} = \dfrac{61}{32} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{8} & \dfrac{31}{32} & \dfrac{61}{32} \end{pmatrix}^T$$

- $4^{\text{ème}}$ itération : $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{128} & \dfrac{15}{16} & \dfrac{265}{128} \end{pmatrix}^T$

- $5^{\text{ème}}$ itération : $\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{512} & \dfrac{261}{256} & \dfrac{511}{256} \end{pmatrix}^T$

- etc …

La suite (x_k) converge vers $\mathbf{x} = (0 \quad 1 \quad 2)^T$.

Vérification : $\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$

2. Méthodes itératives

Méthode de Gauss-Seidel

La matrice du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s'écrit $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ avec $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{F}$.

On a alors :

Il faut donc construire la suite de vecteurs :

En multipliant par $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ on obtient :

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2. Méthodes itératives

Méthode de Gauss-Seidel

La 1ère ligne du système donne :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \ldots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1\right)$$

La $2^{ème}$ ligne utilise le résultat obtenu à la $1^{ère}$:

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2\right)$$

$3^{ème}$ ligne :

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3\right)$$

Et ainsi de suite jusqu'à $x_n^{(k+1)}$.

2. Méthodes itératives

Méthode de Gauss-Seidel

De façon plus générale, la formule de l'algorithme de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi car à chaque itération le calcul utilise les valeurs obtenues aux itérations précédentes : la vitesse de convergence est alors augmentée.

L'application de l'algorithme de Gauss-Seidel sur l'exemple précédent donne :

- $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}^T$
- $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} & \frac{61}{64} & \frac{527}{256} \end{pmatrix}^T$
- $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{1024} & \frac{2047}{2048} & \frac{16349}{8192} \end{pmatrix}^T$
- etc ...

$\Rightarrow$ convergence vers $\mathbf{x} = (0 \quad 1 \quad 2)^T$

2. Méthodes itératives

Convergence

Définition : On dit qu'une matrice $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ est

- à **diagonale dominante par ligne** si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & & a_{1j} & & \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ & & a_{nj} & & \end{pmatrix}$$

- à **diagonale dominante par colonne** si :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad |a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

2. Méthodes itératives

Convergence

Théorème

Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent si $\mathbf{A}$ est une matrice à diagonale dominante par ligne ou par colonne.

Démonstration pour la méthode de Jacobi

Soit $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ *alors on a la suite* $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$

En appliquant la matrice $\mathbf{M}$ *on obtient :* $\mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}$

Par ailleurs on a également $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ *où* $\mathbf{x}$ *est la solution du système* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Par soustraction on a : $\mathbf{M}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})$ *ou encore* $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})$

2. Méthodes itératives

Convergence

Dans le cas de la méthode de Jacobi on a :

$$\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)}-x_1 \\ x_2^{(k+1)}-x_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)}-x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)}-x_1 \\ x_2^{(k)}-x_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k)}-x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \qquad x_i^{(k+1)}-x_i = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\left(x_i^{(k)}-x_i\right)\right)$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \left|x_i^{(k+1)}-x_i\right| \leq \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\ \left|x_i^{(k)}-x_i\right|\right) \leq \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \max_{1\leq i\leq n}\left|x_i^{(k)}-x_i\right|\right)$$

$$= \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right) \max_{1\leq p\leq n}\left|x_p^{(k)}-x_p\right|$$

2. Méthodes itératives

Convergence

Donc :

$$\underbrace{\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)}-x_i\right|}_{\|\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}\|_\infty} \le \underbrace{\frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|\right)}_{\substack{\alpha\,\in\,]0,1[\\ \textit{(par hyp. de diagonale-dominance)}}} \underbrace{\max_{1\le p\le n}\left|x_p^{(k)}-x_p\right|}_{\|\mathbf{x}_{k}-\mathbf{x}\|_\infty}$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}\|_\infty \le \alpha\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}\|_\infty \le \cdots \le \alpha^{k+1}\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\|\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}\|_\infty = 0$$

La méthode est donc convergente.

2. Méthodes itératives

Convergence

Théorème (admis)

Plus généralement, les méthodes itératives de résolution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ sont convergentes pour toute condition initiale $\mathbf{x}_0$ si et seulement si $\rho\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\right) < 1$.

Exemple précédent : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} = \mathbf{D} - (\mathbf{E} + \mathbf{F}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{J}$ sont $-0.0964 + 0.3910i$, $-0.0964 - 0.3910i$, 0.1927 et ont respectivement pour module 0.4027, 0.4027, 0.1927 donc $\rho(\mathbf{J}) = 0{,}4027 < 1$

Chapitre IV

Géométrie

1. Projection orthogonale
2. Symétrie
3. Rotation