Aufgabenstellungen für das Seminar "Optimierung"

Andreas Müller*

1 Ziele des Seminars

- Teilnehmer verstehen, wie mathematische Optimierungsprobleme gestellt werden, und können sie grob klassifizieren.
- Lineare Optimierung: Teilnehmer verstehen das Konzept des dualen Optimierungsproblems und können ein lineares Optimierungsproblem mit dem Simplex-Algorithmus lösen.
- Analytische Behandlung nichtlineare Optimierungsprobleme: Teilnehmer kennen die wichtigsten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Extrema nichtlinearer Funktionen mehrere Variablen ohne und mit Nebenbedingungen und/oder Einschraenkungen, insbesondere das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren und die Karush-Kuhn-Tucker-Bedinungen.
- Numerische Verfahren zur Bestimmung eines Optimums ohne Nebenbedingungen:
  - Simplex-Methode
  - Abstieg
- Algorithmen für Optimierung mit Nebenbedingungen:
  - Penalty Functions
- Algorithmen für ganzzahlige Optimierungsprobleme:
  - Branch and Bound

*University of Applied Sciences, Oberseestrasse 10, CH-8640 Rapperswil, Switzerland, Email: andreas.mueller@hsr.ch

- Teilnehmer kennen eine Auswahl von modernen (nicht analytischen) Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen, zum Beispiel
  - genetische Algorithmen
  - Simulated Annealing
  - Teilchenschwarm-Optimierung
  - Ameisen-Kolonie-Optimierung
- Teilnehmer verstehen, was ein Variationsproblem ist und können mit Hilfe der Euler-Gleichung ein Variationsproblem in eine Differential- Gleichung umwandeln.

2 Auftrag

Jeder Seminarteilnehmer bearbeitet ein Thema aus dem Bereich der mathematischen Optimierung, stellt seine Resultate in Form eines kurzen Papers (wenige Seiten) zusammen und stellt sie ausserdem in Form einer Präsentation im Klassenrahmen vor.

Im Idealfall lässt sich Ihr Paper fast unverändert als Abschnitt in das Script aufnehmen, so dass den Teilnehmern am Ende des Seminars ein kleiner "Leitfaden der Optimierungstheorie" zur Verfügung steht, der als Einstieg in die Fachliteratur dienen kann.

Die Präsentation sollte nicht nur einfach den Stoff vorführen, sondern sollte genügend Zahlenbeispiele, Aufgaben oder von Hand durchführbare Schritte einhalten, dass die Zuhörer sich durch die Problemlösung durcharbeiten und so ihr Verständnis des Stoffes vertiefen können. Die Präsentation soll sich auch darum bemühen, den Zusammenhang mit den anderen im Seminar behandelten Themen herzustellen, also zum Beispiel darlegen, warum eine bestimmte Methode in gewissen Fällen einer anderen, von jemand anderem behandelten Methode vorzuziehen ist.

Die Darstellung soll vor allem verständlich und anschaulich sein, aber natürlich auch so exakt wie möglich. Sie muss alllerdings nicht die strengen Anforderungen an einen vollständigen Beweis erfüllen. Es ist besser, sich auf die wesentlichsten Fälle zu beschränken, oder die Methode mit einem niedrigedimensionalen Beispiel zu illustrieren, welche die Methode verständlich macht, als den Zuhörer mit stundenlangen Falldiskussionen zu langweilen.

3 Aufgaben

Die nachstehend skizzierten Aufgaben werden in dieser Reihenfolge im Seminar behandelt. Die genauen Termine werden später bekannt gegeben. Als Faustregel dient, dass Aufgabe Nummer n in der Woche $n + 2$ behandelt wird.

3.1 Lineare Optimierung

Aufgabe 1. *Effiziente Implementation des Simplex-Algorithmus.*

Lineare Optimierungsprobleme können eine grosse Zahl von Unbekannten haben, es ist also notwendig, geeignete effiziente Implementationen zur Verfügung zu haben. Die Bibliotheken BLAS (Basic Linear Algebra Subprogramms) und LAPACK (Linear Algebra Package) stellen oft verwendete Operationen für Matrizen und Vektoren in optimierter Form zur Verfügung. Auf vielen Plattformen sind die Bibliotheken in der Lage, automatische mehrere Cores zu verwenden.

Wie kann man aus solchen Bausteinen eine schnelle Implementation des Simplex-Algorithmus aufbauen? Wie schnell ist die Implementation, in Abhängigkeit von der Anzahl Variablen und Ungleichungen? Wie schnell ist der Algorithmus für die Lösung des dualen Problems?

Aufgabe 2. *Wie findet der Simplex-Algorithmus die optimale Lösung?*

Der Simplex-Algorithmus findet zuverlässig eine optimale Lösung für lineare Optimierungsprobleme. Trotzdem weiss man, dass seine Worst-case-Laufzeit exponentiell mit der Problemgrösse anwächst. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich auf, wenn man besser verstehen kann, wie der Simplex-Algorithmus sich der Lösung nähert. Sein Vorgehen ist ähnlich einem Abstiegs-Verfahren.

Um dies zu verstehen, wird folgendes Experiment vorgeschlagen. Man versucht, eine lineares Optimierungsproblem mit nur sehr wenigen Variablen $x_1, \dots, x_n$, z. B. $n = 3$, aber sehr vielen Ungleichungen zu lösen. Dann visualisiert man den Pfad der vom Simplex-Algorithmus in jedem Schritt gefundenen Ecke, und verfolgt, wie sich die Ecke dem Optimum nähert.

Die grosse Zahl von Ungleichungen erzeugt man zufällig: man wählt zunächst N (z. B. N=10000) zufällige Einheitsvektoren $\vec{n}_i$ im ersten Oktanten aus ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Dann nimmt man als Ungleichungen

$$\vec{n}_i \cdot \vec{x} \leq 1$$

Die Ebenen $\vec{n}_i \cdot \vec{x}$ sind alle Tangentialgebenen der Einheitskugel. Dann sucht man mit dem Simplex-Algorithmus des Maximum der Zielfunktion

$$Z = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

also $Z = x + y + z$ im dreidimensionalen Fall. Man erwartet als Maximum einen Punkt in der Nähe von $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

1. Wieviele Schritte braucht der Simplex-Algorithmus im Schnitt, um das Optimum zu finden?
2. Wie lange ist der Weg von der Ausgangsecke bis zum Optimum?

Aufgabe 3. *Wie löst man ein lineares Optimierungsproblem mit dem Algorithmus von Karmarkar?*

Der Simplex-Algorithmus liefert eine exakte Lösung des linearen Optimierungsproblems, braucht aber im schlimmsten Fall exponentiell viel Zeit dafür. In den 80er-Jahren hat Karmarkar einen Algorithmus gefunden, der zwar nicht exakt ist, für den es aber eine Geschwindigkeitsgarantie gibt.

Zeigen Sie an Beispielen, wie der Karmarkar-Algorithmus funktioniert, und versuchen sie klar zu machen, warum er funktioniert.

3.2 Nichtlineare Optimierung

Aufgabe 4. *Wie findet die Fibonacci-Methode ein Minimum einer unstetigen Funktion?*

Extremwerte einer differenzierbaren Funktion finden gehört zu den nützlichen Leistungen der Analysis. Doch wie findet man das Minimum einer Funtion, die nur stetig oder sogar nicht stetig ist? Die Fibonacci-Methode oder die damit verwandte Methode des goldenen Schnittes findet ein Optimum in solchen Fällen.

Zeigen Sie an Beispielen, wie diese Methode funktioniert. Wie schnell und wie genau ist die Methode? Unter welchen Voraussetzung ist sie einsetzbar, wann funktioniert sie nicht?

Aufgabe 5. *Wie funktioniert die Methode des steilsten Abstiegs?*

Von Cauchy stammt die Idee, ein Minimum dadurch zu finden, immer der "Falllinie" zu folgen. Damit daraus ein nützliches numerisches Verfahren wird, muss man allerdings noch auf einige Feinheiten achten.

Zeigen Sie an Beispielen, wie dieses Verfahren funktioniert? Unter welchen Voraussetzungen funktioniert es? Zeigen Sie an Beispielen, wie das Verfahren versagen kann.

Aufgabe 6. *Der Simplex-Algorithmus für nichtlineare Optimierungsproblem ist etwas völlig anderes als der Simplex-Algorithmus für lineare Programme. Wie funtioniert er?*

Der Simplex-Algorithmus für nichtlineare Optimierungsproblem löst Probleme ohne Nebenbedingungen. Zeigen Sie an Beispieln, wie er funktioniert. Beschrieben Sie Kriterien für Optimierungsprobleme, die gut mit diesem Algorithmus gelöst werden können.

3.3 Ganzzahlige Optimierung

Aufgabe 7. *Wie funktioniert die Branch-and-Bound Methode?*

Bei einem ganzzahligen Optimierungsproblem müssen die Werte einiger der Variablen im Optimum ganzzahlig sein. Der Simplex-Algorithmus liefert jedoch im allgemeinen keine ganzzahligen Lösungen. Die Branch-and-Bound Methode findet schrittweise durch wiederholte Lösung eines gewöhnlichen stetigen Optimierungsproblems ein ganzzahliges Optimum.

Illustrieren Sie mit geeigneten Beispielen, wie diese Methode funktioniert, und zeigen Sie an linearen und vielleicht auch nichtlinearen Beispielen, wie sie angewendet wird.

3.4 Moderne Verfahren

Aufgabe 8. *Wie funktionieren genetische Algorithmen?*

Genetische Algorithmen versuchen den Prozess von Mutationen und natürlicher Auslese, der der biologieschen Evolution zu Grunde liegt, auf mathematische Optimierungsproblem zu übertragen. Zeigen Sie an Beispieln, wie diese Idee konkret umgesetzt werden kann. Versuchen Sie Kriterien zu formulieren, für welche Art von Problemen diese Methode geeignet ist.

Aufgabe 9. *Wie funktioniert "Simulated Annealing"?*

Simulate Annealing bedeutet simulierte Abkühlung. Durch kontrollierte Abkühlung eines Metalls können bestimmte, oft optimale Eigenschaften eines Metalls erhalten werden. Bei der Abkühlung nimmt die Bewegung der einzelnen Metallatome immer mehr ab, bis sie schliesslich in einem optimalen Zustand bleiben. Die Optimierungsmethode des "simulated annealing" versucht, diesen Prozess auf abstrakte mathematische Optimierungsprobleme zu übertragen.

Zeigen Sie an Beispielen, wie diese Übertragung funktioniert, und wie sich mit der Methode optimale Lösungen für Optimierungsproblem finden lassen. Versuchen Sie Kriterien aufzustellen, welche Art von Optimierungsproblemen sich gut mit dieser Methode lösen lassen.

Aufgabe 10. *Wie funktioniert Teilchenschwarm-Optimierung?*

Ein Jäger erreicht mit einem Schwarm von Geschossen eine zuverlässigere Wirkung als mit einem Einzelgeschoss. Vögel fliegen als Schwarm in ihre Winterquartiere, und finden dank "Schwarm-Intelligenz" den optimalen Weg dorthin.

Zeigen Sie an Beispielen, wie sich diese der Natur abgeguckte Idee auch auf mathematische Optimierungsproblem anwenden lässt. Welche Art von Optimierungsproblemen ist gut geeignet für die Behandlung mit dieser Methode?

Aufgabe 11. *Wie optimiert eine Ameisen-Kolonie?*

Ameisen-Kolonien finden gemeinsam einen optimalen Weg von einem Futter-Fundort zum Bau des Ameisenstaates. Sie markieren den Weg mit Pheromonen, die sich aber auch wieder verflüchtigen können. Findet eine Ameise eine Abkürzung werden viele Ameisen ihre Pheromonspur folgen. Da die Abkürzung schneller und damit auch häufiger begangen werden kann, wird sich diese Pheromon-Spur weniger schnell verflüchtigen, so dass immer mehr Ameisen den kürzeren Weg nehmen werden.

Zeigen Sie an Beispielen, wie sich diese Idee aus der Natur auf mathematische Optimierungsprobleme übertragen lässt. Welche Art von Optimierungsproblemen sind der Lösung durch diese Methode zugänglich?

3.5 Variationsrechnung

Aufgabe 12. *Das Licht nimmt immer den kürzesten Weg. Die Lichtgeschwindigkeit hängt von der optischen Dichte des Materials ab. Wie wird ein Lichtstrahl gekrümmt, wenn die optische Dichte nicht konstant ist?*

Die Natur regelt die Ausbreitung des Lichtes mit einem Minimumprinzip. Zeigen Sie, wie man aus diesem Minimumprinzip für die Ausbreitung von Lichtstrahlen zum Beispiel in einer Fata Morgana eine Differentialgleichung ableiten kann. Und auch das Brechungsgesetz von Snellius folgt aus diesem Optimumprinzip.

4 Voraussetzungen

Die folgende Tabelle zeigt, welche Voraussetzungen man vor allem zur Bearbeitung einer der genannten Themen braucht.

Aufgabe	LinAlg	Analysis	FuVar
1	✓		
2	✓		
3	✓	✓	
4		✓	
5	✓	✓	✓
6	✓		
7	✓		
8		✓	
9		✓	
10		✓	
11		✓	
12	✓	✓	✓

5 Bewertung

5.1 Note

Die Vorträge und Papers werden benotet und geben die Modulnote. Die Note setzt sich zusammen aus den Resultaten eines Fragebogens, den die Zuhörer ausfüllen, und einer Benotung durch den Dozenten.

5.2 Kurztests

Ausserdem wird zu den drei grossen Themen *Lineare Optimierung*, *Nichtlineare Optimierung* und *Variationsrechnung* je ein Kurztest bestehend aus einer Standardaufgabe aus den jeweiligen Themengebieten verlangt. In diesem Kurztest dürfen beliebige Hilfsmittel verwendet werden, auch Computer und das Internet, und es gibt keine Zeitlimite (ausser der Schliessung des Geäudes). Mit dem Kurztest soll sichergestellt werden, dass jeder Teilnehmer mit den drei Basismethoden mindestens einmal eine Lösung erarbeitet hat. Die Kurztests geben keine Note, müssen aber alle erfüllt sein, damit das Modul als bestanden gilt.