UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Departamento de Estatística

CE222 - Processos Estocásticos

Prof. Benito Orlando Olivares Aguilera

Andryas Waurzenczak

2018-05-08

Sumário

Introdução

O objetivo dessa página é guardar as anotações, atividades e trabalhos da disciplina CE222 - Processos Estocásticos Aplicados, ministrada pelo Professor Benito Olivares Aguilera.

Processos Estocásticos Aplicados

Objetivo da disciplina: Possibilitar ao aluno a aplicação de técnicas de processos estocásticos na análise de problemas de diversas áreas.

EMENTA

A ementa da disciplina está dividida em duas partes. A primeira parte referente a teoria básica de processos. A segunda parte é o desenvolvimente da parte teórica em diversas aplicações.

Parte I - Teórica

1. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: Introdução. Teoria básica de processos. Classificação de processos. Processos Estacionários. Seqüências Independentes. Passeio Aleatório. Ruína do Jogador. Sistemas Lineares.
2. PROCESSOS DE SEGUNDA ORDEM: Função Média, Variância e Covariância. Processos Fracamente Estacionários.
3. CADEIAS DE MARKOV: Cadeias Markovianas de Parâmetro Discreto. Cadeias Markovianas de Parâmetro Contínuo. O Processo de Nascimento e Morte. Processo de Poisson. Introdução à Teoria das Filas.
4. PROCESSOS GAUSSIANOS: O Processo de Wiener.

Parte II - Prática

5. Aplicações de Cadeias de Markov
6. Teoria de Filas
7. Sistemas lineares e controle.

Link para disciplina

1 Revisão

1.1 Fenômenos

Fenômenos são acontecimentos observáveis. Tem-se dois tipos de fenômenos:

- Determinístico

Sob certas condições de regularidade, o resultado, é previsível.

Ex: Ferver água, por exemplo, sabe-se que quando aquecida a 100ºC, sobre pressão normal, entre em ebulição.

- Aleátorio

Os resultados são imprevisíveis.

Ex: Lançamento de um dado, não sabemos que número vai sair.

Aqui, neste curso de processos estocásticos estaremos interessandos no segundo tipo de evento (aleátorio), onde por meio de probabilidade podemos ter uma ideia do comportamento/resultado futuro.

A seguir algumas definições de probabilidade que serão utilizadas ao decorrer do curso.

1.2 Definições de Probabilidade

DEF 1.1. Dado um experimento aleátorio ε, chamamos de espaço amostral o conjunto (não vazio) de **todos** os resultados possíveis (Ω). O conjunto de todos os objetos aos quais poderemos atribuir uma probabilidade é chamado de σ-álgebra. No caso do Ω finito (ou enumerável) a sigma-álgebra será o conjunto das partes de Ω (Conjunto potência).

Exemplo 1.1. Lançamento de uma moeda uma vez.
A = P(Ω) = ({c},{k}, Ω, ϕ)

Exemplo 1.2. Lançamento de um dado.
F = P(Ω) = {{1},{2},...,{1,2},{1,3}, ...,{1,2,3},...,Ω,ϕ}

Para intervalos contínuos σ-álgebra de Bórel.

F = $\beta_{[0,1)}$ => σ-álgebra de Bórel

DEF 1.2 (Definição Clássica)**.** P(A) = $\frac{\#A}{\#\Omega}$
Utiliza-se quando os pontos são equiprovaveis.

DEF 1.3 (Definição Geométrica)**.** P(A) = $\frac{compr(A)}{compr(\Omega)}$

DEF 1.4 (Definição Frequentista)**.** P(A) = $\frac{A}{N}$

DEF 1.5 (Definição de Probabilidade)**.** Uma medidade de probabilidade P como uma função de Ω em $\mathbb{R}$ tal que:

- P(A) $\leq$ 0, $\forall$ A $\in$ F (existe um evento pelo menos)
- P(Ω) = 1
- P($\cup_i A_i$) = $\sum_i P(A_i)$, se os Ai's são dijuntos

DEF 1.6 (Espaço de Probabilidade)**.** (Ω,F,P)

Um espaço de probabilidade como o trio (Ω,F,P) - (Espaço amostral, σ-álgebra, medidade de probabilidade)

DEF 1.7 (Probabilidade Condicional)**.** Dados A e B $\in$ F: P(A|B) = P(A $\cap B)\overline{{}_{P(B),P(B)>0}}$

Para duas variáveis aleátorias X, Y $\in$ (Ω, F, P)

$$P(X \in B_1|Y \in B_2) = \frac{P(X \in B_1, Y \in B_2)}{P(Y \in B_2)}$$

para B_1, B_2 bolineanos e P(Y $\in$ B_2) > 0.

Exemplo 1.3 (Exemplo de Probabilidade Condicional)**.** Sejam X e Y va's no mesmo espaço parâmetrico. Tais que X~Poi(λ_1) e Y~Poi(λ_2). Defini-se Z = X + Y. Encontrar a distribuição de X|Z, sabendo que X é independente de Y.

$$P(X$$

$\in$ B$_1$|$Z \in B_2$)

Como X e Y são discretas, podemos considerar somente os bolineanos B_1= {x} e B_2 = {z} temos assim:

P(X = x|Z=z) = P(X=x|X+Y=z) = $\frac{P(X=x,X+Y==z)}{P(X+Y=z)} = \frac{P(X=x,Y=z-x)}{P(X+Y=z)} = \frac{P(X=x)P(Y=z-x)}{P(X+Y=z)}$

Sabemos que se X ~ Poi(λ_1) e Y ~ Poi(λ_2), X independente de Y, então X + Y ~ Poi ($\lambda_1 + \lambda_2$).

P(X=x|X + Y =z) = $\frac{\frac{e^{-\lambda x}\lambda_1^x}{x!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}} = \frac{z!\lambda_1^x\lambda_2^{z-x}}{x!(z-x)!\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{(\lambda_1+\lambda_2)^x(\lambda_1+\lambda_2)^{z-x}}} = \binom{z}{x}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^x\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{z-x}$

Temos então:

$$X|X+Y=z \sim Bin(z, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$$

2 Processo Estocástico

2.1 O que é um Processo?

Processo é um termo que indica a ação de avançar, de ir para frente. É um conjunto sequencial de ações com objetivo comum.

Exemplos são: fabricas que produzem coca-cola por exemplo, onde existe esteiras que vão levando latas de aluminio, que são pintadas, preenchidas com liquido, lacradas, pressurizadas etc...

2.2 Processos Estocásticos

DEF 2.1. Um processo estocástico é uma familia de variáveis aleátorias indexadas por um conjunto T $\neq \phi$.

$$X(t), t \in T \text{ ou } X_t, t \in T$$

$t_{fixo} \rightarrow$ va X(t)

$w_{fixo} \rightarrow$ função real (chamada tragetoria do processo)

O conjunto de todas as trágetorias é chamado "ensemble".

A descrição completa de um processo estocástico pode ser extremamente complexo, mas em certos processos uma estrutura de probabilidade adequada pode facilitar tal descrição.

O conjunto T será chamado de `espaço de parâmetros`. Geralmente o índice t será identificado como 'tempo'. O conjunto S no qual a va assume valores será chamado `espaço de estados`.

Exemplo 2.1. No experimento do lançamento da moeda.
{X_n, n=1,...,24}, sendo X_n uma va dicotômica em que S = {-1,1}, T = {1,2,...,24}

Também definimos o processo {G_n,n=0,...,24}.

Logo o resultado teriamos então.

T = {0,1,2,...,24} e S = {-20,-19,...,0,1,...28}

Notar que na verdade, por se tratar de uma va existe uma dependência com o espaço amostral Ω, isto é, deveriamos escrever X(w,n), mas por simplicidade vamos escrever apenas X(n) ou X_n.

2.3 Espaços T e S

Dependendo da natureza dos espaços T e S temos, quatro casos a saber:

2.3.1 T discreto e S discreto

Temos um PE discreto a tempo discreto

Exemplo 2.2. Exemplo da moeda

{Gn, n $\in$ T} sendo T = {0,1,2,...,24} e S = {-20,...,28}

2.3.2 T é contínuo e S discreto

Temos um PE discreto e o tempo contínuo.

Exemplo 2.3. $\{X_t$, t $\in$ T$\}$ onde X_t nº de carros que passaram num pedagio até o instante t.

T = [0, $+\infty$]

S = {0,1,2,3,4,....}

2.3.3 T discreto e S contínuo

Temos um PE contínuo e o tempo discreto.

Exemplo 2.4. $\{X_t$, t $\in$ T$\}$ A pressão diastolica de n-eisimo individuo.

T: {1,2,3,...,N} S: {0,$+\infty$}

2.3.4 T contínuo e S contínuo

Temos um PE contínuo a tempo contínuo

Exemplo 2.5. $\{X_t$, t $\in$ T$\}$ voltagem na rede no instante t

T = (0,$+\infty$)

S = (0,$+\infty$)

2.4 Descrição probabilística

Considere um PE $\{X_t$, t $\in$ T$\}$. Para t_1 fixo, X(t_1) é uma va com função distribuição.

$$F_x(x_1, t_1) = P(X(t_1) \leq x_1) \rightarrow \text{ distribuicao de 1 ordem de X(t)}$$

Para t_1 e t_2 fixos, temos que:

$$F_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2) \rightarrow \text{ distribuicao de 2 ordem de X(t)}$$

Em geral,

$$F_x(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, ..., X(t_n) \leq x_n)$$

$X(t_1) \in (-\infty, x_1], X(t_2) \in (\infty, x_2], ...$

Distribuição da n-esima ordem de X(t).

Se as va's X(t_i) com i = 1,. . . ,μ fossem discretas, podemos escrever:

$P_x(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = P(X(t_1) = x_1, ..., X(t_n) = x_n)$

- Se $X(t)$ é um PE a tempo continuo podemos escrever:

$f_x(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = \frac{\partial^n F_x}{\partial x_1, ..., \partial x_n}$

A descrição completa precisaria calcular todas as distribuições de X (distribuições-finita-dimensionalidades) o que seria muito dificil. Felizmente, em determinados casos, é necessário calcular a penas as duas primeiras distribuições ??? (momentos).

2.5 Média, variância e covariância

DEF 2.2. A função média de um PE {X(t), t $\in$ T}:

$$\mu_x(t) = E[X(t)]$$

DEF 2.3. A função variância do processo X:

$$\sigma_x^2(t) = var[X(t)]$$

DEF 2.4. A função covariância do PE X = {X(t),t $\in$ T}:

$$K_x(s,t) = cov[X(s), X(t)] = E[X(s), X(t)] - \mu_x(s)\mu_x(t)$$

DEF 2.5. A função de autocorrelação:

$$R_x(s,t) = E[X(s), X(t)] - \mu_x(s)\mu_x(t)$$

Exemplo 2.6. Seja o PE X(t) = Z_1 + Z_2 sendo Z_1, Z_2 iid N(0,1)

$$\begin{aligned}
\mu_x(t) &= E[X(t)] \\
&= E[Z_1 cos\lambda t + Z_2 sen\lambda t] \\
&= \underbrace{E[Z_1]}_{0} cos\lambda t + E[Z_2] sen\lambda t \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
K_x(s,t) = cov[X(s), X(t)] &= cov[Z_1 cos\lambda s + Z_2 sen\lambda s, Z_1 cos\lambda t + Z_2 sen\lambda t] \\
&= cov(Z_1 cos\lambda s, Z_1 cos\lambda t) + cov(Z_1 cos\lambda s, Z_2 sen\lambda t) + \\
& cov(Z_2 sen\lambda s, Z_1 cos\lambda t) + cov(Z_2 sen\lambda s, Z_2 sen\lambda t) \\
&= cos\lambda s.cos\lambda t.cov(Z_1, Z_2) + cov\lambda s.sen\lambda t.cov(Z_1, Z_2) + \\
& sen\lambda s.cos\lambda t.cov(Z_2, Z_1) + sen\lambda s.sen\lambda t.cov(Z_2, Z_2) \\
&= cos\lambda s.cos\lambda t + sen\lambda s.sen\lambda t \\
&= cos(\lambda s - \lambda t) \\
&= cos[\lambda(s-t)]
\end{aligned} \tag{2}$$

3 Classificação de Processos

3.1 Processos estacionários

Um PE {X(t), t $\in$ T} é chamado estacionário (ou estritamente estacionário) se, **para todo n** e para qualquer conjunto de tempos t_i, $t_i \in$ T(i = 1,2,...,n) tem-se que:

$$F_X(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = F_X(x_1, ..., x_n; t_1 + \pi, ..., t_n + \pi)$$

(distribuição da n-esima ordem)

Isso significa que a distribuição não é afetada por deslocamento no tempo e X(t) e X($t + \pi$) terão a mesma distribuição.

- Para a distribuição de 1º ordem temos que:

$$F_X(x; t) = F_X(x; t\pi) = F_X(x)$$

$\mu_x(t) = \mu$ constante

$\sigma_x^2(t) = \sigma^2$

Para ser estacionário é necessário ter média e variância constante, mas não suficiente.

3.2 Processos fracamente estacinário

Se a condição de estacionaridade é satisfeita somente para n $\leq$ k (até certa ordem) então diremos que o processo é fracamente estacionário.

Se X(t) é estacionário de 2º ordem, ele é chamado de fracamente estacionário (de 2º ordem). Ou, como outros autores colocam, processos estacináriode ordem k.

Teorema 3.1. *Um PE {X(t), t $\in$ T} será fracamente estacionário se:*

i. $\mu_x(t) = \mu$ *constante*
ii. $K_x(s, t) = K_x(|s - t|)$

ou seja, a covariância depende somente da diferença entre **s** e **t**.

Exemplo 3.1. X(t) = $Z_1 cos\lambda t + Z_2 sen\lambda t$ $\mu_x(t) = 0$ $K_x(s, t) = cos[\lambda(s - t)]$

OBS: Todo processo estritamente estacinário é também fracamente estacinário, a recíproca, em geral, não é verdadeira.

3.3 Processos independentes

Um PE {X(t, t *in* T)} será chamado independente se para $t_i \in$ T, n = 2,3,...

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_x(x_i; t_i)$$

Nesse caso uma distribuição de primeira, será suficiente para caracterizar o processo.

3.4 Processos, com incrementos independentes e estacionários

Um processo {X(t), t $\in$ T} terá incrementos independentes se, para t $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ as va's $X(0), X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ são independentes.

Isto é, o número de ocorrências de X(t) em intervalos disjuntos de tempo são variáveis independentes.

Se X(t) possui incrementos independentes e ainda X(t) - X(s) tem a mesma distribuição que X(t+ π) - X(s + π) , $\forall s, t, \pi > 0$, s < t diremos que o processo possui incrementos independentes estacionários.

4 Cadeias de Markov

Diremos que um PE {X(t), t $\in$ T} satisfaz a propriedade markoviana (PM) se:

$$P(X(t_{n+1}) \leq |X(t_1) = x_1, ..., X(t_n) = x_n) = P(X(t_{n+1}) \leq X_{n+1}|X(t_n) = x_n)$$

Isso significa que a probabilidade condicional não leva em consideração o que ocorreu antes do instante t_n para calcular a probabilidade no instante $t_n + 1$_

4.1 Caso particular

No caso particular em que as VA's X(t) são DISCRETAS a propriedade markoviana (PM) fica:

$$P(\underbrace{X_{n+1}}_{\text{Variável aleátoria}} = \underbrace{x_{n+1}}_{\text{número real}} |X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_{n+1} = X_{n+1}|X_n = x_n)$$

Nesse caso, o processo {X_n, n $\geq$ 1} é chamado de `cadeia de markov`.

Algunas autores resumem essa propriedade dizendo que:

O futuro do processo depende somente do presente e não do passado. (ou instante mais recente)

Exemplo 4.1. No caso do experimento de jgoar uma moeda, seja G_n o capital do jogador no instante n:

{G_n n $\geq$ 0} é um PE, discreto a tempo discreto.

S = {-20,-19,. . . ,27,28} -> espaço de resultados possíveis

T = {0,1,2,. . . ,24}

DEF 4.1. Para uma cadeia de markov (CM) {X_n, n $\geq$ 0} a probabilidade condicional P($X_{n+1} = y|X_n = x$) será chamada de **probabilidade de transfição** e denotada como P(x,y).

(Vamos sempre supor que essa probabilidade independe de m, ou seja, a CM é homogenea)

Exemplo 4.2 (CADEIA DE MARKOV DE 2 ESTADOS)**.** Suponha que uma máquina, em um dia qualquer, pode estar *quebrada* ou *operando*. Assuma que se ela esta **quebrada** no inicio do n-eisimo dia, a probabilidade ser *consertada* e estar operando no dia SEGUINTE é `p`.

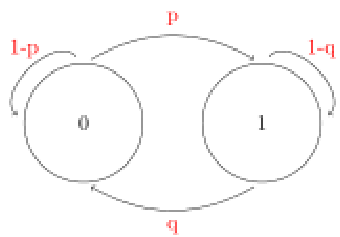
Por outro lado, se a máquina estiver **funcionando** no n-esimo dia, a probabilidade dela *quebrar* e não estar funcionando no dia seguinte é `q`.

Vamos assumir que as probabilidades condicionais para o n-esimo dia depende apenas do estado do dia anterior.

Seja $\prod_0(0)$ a probabilidade da máquina estar quebrada no instante inicial e $\prod(0)(1)$ a probabilidade de estar funcionando no instante inicial.

Temos então que:

$$X_n \begin{cases} 0 & \text{, se a maq. esta quebrada no dia n} \\ 1 & \text{, se a maq esta funcionando no dia n} \end{cases}$$



Ou seja,

$P(0,1) = P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = p$

$P(1,0) = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = q$

$P(0,0) = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1 - p$

$P(1,1) = P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1 - q$

4.2 Distribuição do Processo

Antes de fazermos a distribuição do processo lembramos que:

Teorema 4.1 (Probabilidade Total)**.**

$$X, Y = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

$$P(X = x, Y = y) = P(Y = y | X = x) P(X = x)$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_{n+1} = 0, X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0, X_n = 1) \\ &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) P(X_n = 1) \\ &= (1-p) P(X_n = 0) + q P(X_n = 1) \text{ // observe que } P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) \\ &= (1-p) P(X_n = 0) + q(1 - P(X_n = 0)) \\ &= (1 - p - q) P(X_n = 0) + q \end{aligned} \tag{3}$$

seja n = 0

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0) &= (1 - p - q) \overbrace{P(X_0 = 0)}^{\prod_0 (0)} + q \\ &= (1 - p - q) \prod_0 (0) + q \end{aligned} \tag{4}$$

Seja n = 1

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= (1-p-q)P(X_1 = 0) + q \text{ // utilizando o resultado anterior} \\
&= (1-p-q)[(1-p-q)\prod_0(0) + q] + q \\
&= (1-p-q)^2\prod_0(0) + (1-p-q)q + q \\
&= (1-p-q)^2\prod_0(0) + q(1-p-q+1)
\end{aligned} \tag{5}
$$

Seja n = 2

$$
\begin{aligned}
P(X_3 = 0) &= (1-p-q)P(X_2 = 0) + q \text{ // utilizando o resultado anterior} \\
&= (1-p-q)[(1-p-q)^2\prod_0(0) + (1-p-q)q + q] + q \\
&= (1-p-q)^3\prod_0(0) + (1-p-q)q + (1-p-q)^2 q + q \\
&= (1-p-q)^3\prod_0(0) + q(1 + (1-p-q) + (1-p-q)^2)
\end{aligned} \tag{6}
$$

Forma geral

$$P(X_n = 0) = (1-p-q)^2\prod_0(0) + q\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j$$

Vamos supor que p + q > 0 logo:

PROGRESSÃO GEOMETRICA

$$\sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{1-r^m}{1-r}$$

No nosso caso:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j = \frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

Finalmente

$$P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n[\prod_0(0) - \frac{q}{p+q}]$$

$$P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n[\prod_0(1) - \frac{p}{p+q}]$$

OBS:

Distribuição limite

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}$$

4.3 Forma matricial

Temos conhecido as probabilidades:

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = P(0,1) = p$$

$$P(X_{n+1}|X_n = 1) = P(1,0) = q$$

Podemos colocar essas probabilidades na forma de uma matriz.

$$\text{P} = \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$
(7)

A matriz P será chamada de matriz de transição de **um passo**.

Carácteristicas da Matriz:

- Matriz quadrada
- Matriz estocástica
- significa que a soma das linhas é igual a 1.

4.4 Espaços de estados

Seja $\{X_n,\ \text{n} \geq 0\}$ uma CM com $\overbrace{\text{espaços de estados}}^{\text{o 'passo'}}$ S definimos a função de transição a 1 passo como P(x,y)=P(X_{n+1}=y|X_n=n).

Notar que P(x,y) é uma distribuição de probabilidade pois $P(x,y) \geq 0$ e $\underbrace{\sum_{y\in S} P(x,y) = 1}_{\text{soma das linhas}}, x \in S$

A função $\prod_0(x)$, x ∈ S, definido por $\prod_0(x) = P(X_0 = x), x \in S$ é chamada de **distribuição inicial** do CM.

Também, $\prod_0(x) \geq 0$ e $\sum_{x\in S} \underbrace{\prod_0(x_i)}_{\text{instante inicial}} = 1.$

Pode ser provado que a distribuição da cadeia em qualquer instante fica completamente determinado pelo conhecimento das probabilidades de transição e pela distribuição normal.

Exemplo 4.3.

P($X_0 = x_0, X_1 = x_1) = \overbrace{P(X_1 = x_1|X_0 = x_0)}^{P(x_0,x_1)}\overbrace{P(X_0 = x_0)}^{\prod_0(x)}$
$= P(x_0, x_1)\prod_0(x)$ (8)

Da mesma forma $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2)$

$$\begin{aligned} P(\overbrace{X_0 = x_0, X_1 = x_1}^{A}, \overbrace{X_2 = x_2}^{B}) &= P(X_2 = x_2|X_0 = x_0, X_1 = x_1)P(X_1 = x_1|X_0 = x_0)P(X_0 = x_0) \\ &= P(X_2 = x_2, X_1 = x_1)P(x_0, x_1)\prod_0(x_0) \end{aligned} \tag{9}$$

$= P(X_2 = x_2, X_1 = x_1)P(x_0, x_1)\prod_0(x_0)$corta-se X_0 por que é uma CM

5 Fórmula geral

Em geral, a distribuição da cadeia vai ser:

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \prod_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2)...P(x_{n-1}, x_n)$$

Exemplo 5.1. (#exm:Exemplo da máquina) No exemplo da máquina que queremos calcular a probabilidade da máquina estar funcionando hoje e estar funcionando ainda depois de amanhã. Ou seja, precisamos calcular:

$$\begin{aligned} P(X_{n+2} = 1|X_n = 1) &= P(1,0)P(0,1) + P(1,1)P(1,1) \\ &= qp + (1-q)(1-q) \\ &= pq + (1-q)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

As probabilidades de transição a n-passos podem ser facilmente obtidas pela matriz P^n sendo:

$$P^n = p * p * ... * p$$

No exemplo:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1-p)^2 + pq & (1-p)p + (1-q)p \\ q(1-p) + q(1-q) & pq + (1-q)^2 \end{bmatrix}$$

Em resumo, a função de transição a n-passos $P^n(x, y)$ é definida por:

$$P^n(x, y) = \sum_{y_1} ... \sum_{y_{n-1}} P(x_1, y_1)P(y_1, y_2)...P(y_{n-1}, y_n)$$

Proposição 5.1. (#prp:Fórmula de CHAPMAN-KOLMOGOROV)

$$P^{n+m}(x, y) = \sum_z P^n(x, z)P^m(z, y)$$

Para uma CM com espaços de estados finitos a matriz P^n será uma matriz finita.

Notar que a:

$$\begin{aligned} P(X_n = y) &= \sum_{x \in S} P(X_0 = x, X_n = y) \\ &= \sum_{x \in S} \overbrace{P(X_n = y | X_0 = x)}^{P^n} \overbrace{P(X_0 = x_0)}^{\prod_0(x)} \\ &= \sum_{x \in S} \prod_0 (x) P^n(x, y). \end{aligned} \tag{12}$$

Matricialmente, $\prod_n = \prod_0 P^n$

sendo que $\prod_n$ é a distribuição de X_n

6 Extensões da Cadeia de Markov

6.1 Construção do Modelo

Ideia geral de como começar o processo de modelagem dos dados.

Primeiro defina as hipóteses do processo, suposições para faciliar o tratamento matemático.

Segundo, defina quem é o X_n se perguntando "O que estou tentando modelar?".

Terceiro, defina o S e T, o espaço de estados e espaço de parâmetros.

6.2 Passeio aleátorio

Sejam $\zeta_1, \zeta_2, ...$ VA independentes, de valor inteiro com função de probabilidade f. Seja X_n a variável aleátoria definida por:

$$X_n = X_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_n$$

sendo X_0 o valor inicial.

A sequência $\{X_n$, n $\geq 0\}$ é chamado de passeio aleátorio. Pode ser provado que é uma CM com espaço de estados inteiro e função de transição dada por :

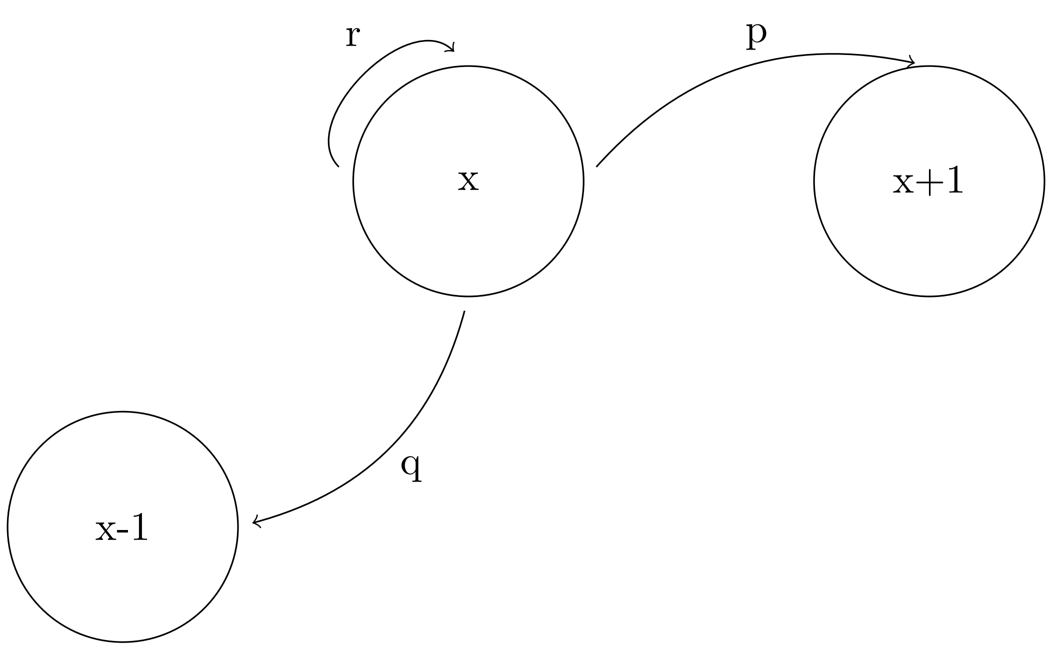
$$P(X, Y) = f(y - x)$$

Exemplo 6.1. Suponha que uma particula se movimenta de acordo com essa cadeia. Consideremos o caso especial f(1) = p e f(-1) = q e f(0) = r, com p + q + r = 1.

A função de transição será:

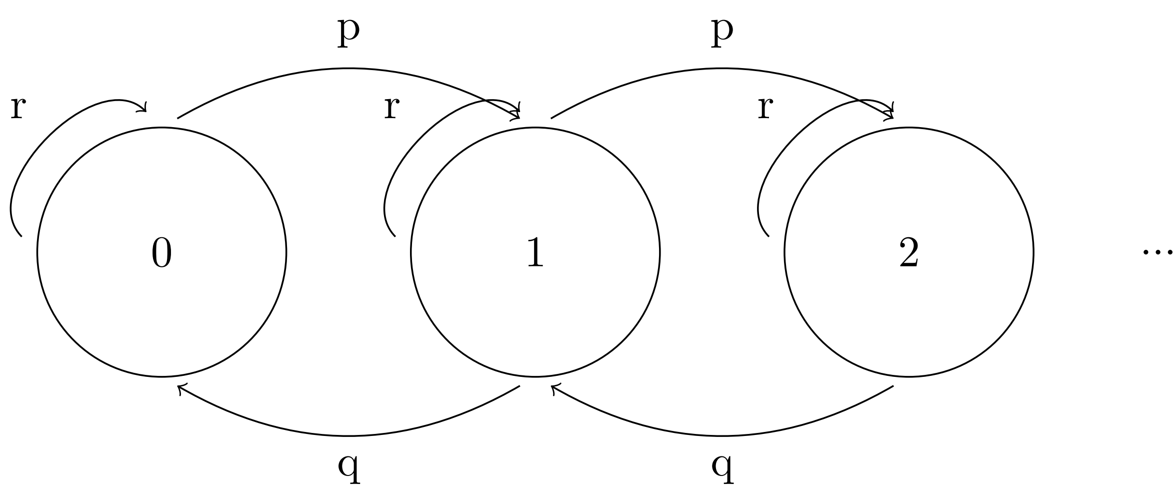
$$P(x, y) = \begin{cases} p & y = x + 1 \\ q & y = x - 1 \\ r & \quad y = x \end{cases}$$

Essa cadeia particular é chamada de passeio aleátorio simples, ou passeio do bêbado.



x

Por exemplo se S = {0,1,2,...}



A matriz de transição fica como segue-se:

	0	1	2	3	...
0	r0	p	0	0	
1	q	r	p	0	
2	0	q	r	p	
3	0	0	q	r	
...					$\ddots$

6.3 Cadeia de Ehrenfest

Paul Ehrenfest nasceu em 18/01/1880 e morreu no dia 25/07/1993. Ele foi um físico teórico alemão que teve suas maiores contribuições feitas no campo da estatística mecânica, mecânica quântica , incluindo o a teoria de fase de transição, e o teorema de Ehrenfest. Referência

O seguinte modelo pode ser utilizado para intercambio de moleculas de um gás entre corpos isolados.

Suponha que temos duas caixas numeradas I e II e **d** bolas, também numeradas de 1 a **b**. Inicialmente algumas bolas são colocadas na caixa I e as restantes na caixa II. Um inteiro é selecionado aleatoriamente do conjunto {1,2,...,d} e a bola correspondente a esse número é trocada de caixa. Repete-se esse processo indefinidamente. Com seleções independentes entre os ensaios. Seja X_n: número de bolas na caixa I após a n-esimo ensaio.

Pode ser provado que $\{X_n$, n $\geq 0\}$ é uma cadeia de markov sobre S = {0,1,2,3,...,d} (T={0,1,2,3,...)

Precisamos encontrar a função de transição P(x,y) $\forall$ (x,y) ϵ S, para tal vamos supor que em determinado instante temos x bolas na caixa I. Vemos então que as únicas transições possíveis são:

$$x \to x - 1x \to x + 1$$

$$P(x, x-1) = \frac{x}{d} P(x, x+1) = \frac{d-x}{d} = 1 - \frac{x}{d}$$

Logo a função de transição é:

$$P(x,y)\begin{cases} \frac{x}{d} & ;y = x-1 \\ \frac{d-x}{d} & ;y = x+1 \\ 0 & ;cc \end{cases}$$

Matriz de transição.

	0	1	2	3	...	d
0	0	1	0	0	...	0
1	$\frac{1}{d}$	0	$1-\frac{1}{d}$	0	...	0
2	0	$\frac{2}{d}$	0	$1-\frac{2}{d}$	...	0
3	0	0	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	0
d	0	0	0	0	1	0

6.4 Ruína do jogador

Suponha que um jogador faz apostas de um dolar por vez, sendo que sua probabilidade de ganhar é `p`. Seja X_0 o capital inicial do jogador. Suponha ainda que não existe "emprestimo" da banca, ou seja, o jogador deixa de jogar se o seu capital atingir 0, nessa caso diremos que o jogador está arruinado.

Seja X_n : capital do jogador no instante n:

$$X_n, n \geq 0\text{uma CM. sobre 0, 1, 2, ...}$$

$$P(x,y)\begin{cases} 1-p & ,y = x-1 \\ p & ,y = x+1 \\ 0 & ,cc \end{cases}$$

DEF 6.1. Um estado a ϵ S de uma cadeia de Markov será chamado de absorvente se P(a,a) = 1. (ou equivalentemente, P(a,x)=0, $\forall x \neq a$)

Vamos supor que o jogo seja definido se o ganho do jogador atingir `d` dolares ele deve abandonar o jogo. Nesse caso, S = { 0,1,2,...,d}

Essa cadeia é chamada "com barreiras absorventes"

6.5 Cadeia de Nascimento e Morte (C N-M)

Considere uma CM sobre S = {0,1,2,...} ou sobre S = {0,1,2,...d} e suponha a seguinte função de transição.

$$P(x,y) \begin{cases} q_x & ,y = x-1 \\ r_x & ,y = x \\ p_x & ,y = x+1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Sendo p_x, q_x, r_x inteiros não negativos tal que $p_x + q_x + r_x = 1$

A matriz de transição fica:

	0	1	2	3	...	d
0	r_0	p_0	0	0	...	0
1	q_1	r_1	p_1	0	...	0
2	0	q_2	r_2	p_2	...	0
...	...	...	...	...	...	0
d	0	0	0	0	q_d	r_d

NOTAR: que o passeio aleátorio, a cadeia de Ehrenfest e a ruína do jogador são casos particulares de C N-M.

6.6 Cadeia de Fila

Considere um sistema de serviço em que os clientes chegam e devem esperar por atendimento formando uma fila.

Suponha que se há clientes esperando serviço no inicio de qualquer período de tempo, exatamente um cliente será atendido nesse período (não existe atendimentos simultaneos). E que se não há clientes esperando então ninguém será atendido nesse período.

Seja ζ_n o número de novos clientes que chegam durante o período (n-esimo).

Vamos supor que as variáveis aleátorias $\zeta_1, \zeta_2, ...\zeta_n$ são independentes e identicamente distribuidas segundo uma função de probabilidade f.

Seja X_0 o número inicial de clientes e X_n o número de clientes no sistema até o final do n-esimo período.

Se $X_n = 0$, então $X_n + 1 = \zeta_{n+1}$

Se $X_n \geq 1$, então $X_n + 1 = X_n + \zeta n + 1 - 1$

Então $\{X_n, n \geq\}$ é uma CM sobre {0,1,2,...} com função de transição

P(x,y) = f(y-x+1) $x \geq 1$

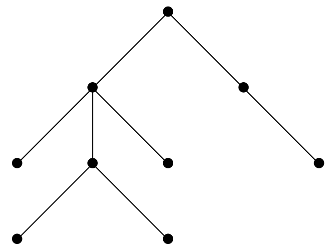
P(0,y) = f(y)

6.7 Cadeia de ramificação

Considere objetos tais como particulas de algum tipo ou bacterias que podem gerar novos elementos do mesmo tipo.

O conjunto inicial de objetos será chamado "geração zero". Os elementos gerados durante o n-esimo tempo serão dito pertencer a (n+1)-esima geração.

Seja X_n o nº de objetos no n-esima geração, então temos, por exemplo a seguinte situação.



$X_0 = 1$

$X_1 = 2$

$X_2 = 4$

$X_3 = 2$

$X_4 = 0$

Para modelar essa situação como uma CM vamos supor que cada particula gera ζ novas particulas na próxima geração, sendo ζ uma VA de valor inteiro não negativo, tendo a função de probabilidade f. Sob essa hipótese $\{X_n$, n $\geq 0\}$ será uma CM cujo o espaço de estados é S = $\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Notar que 0 é um estado absorvente.

Se a cadeia atingir o estado 0, diremos que ela foi extinta, e um problema muito interessante é determinar a probabilidade de extinção da cadeia.

Para x $\geq$ 1 a função de transição será:

P(x,y) = P($\zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_x = y$)

com os ζ_i's sendo iid com f.d.p e

P(1,y) = f(y), $y \geq 0$

DEF 6.2. Seja A um subconjunto de S. Define-se o tempo de chegada (hitting time) em A como:

$T_A = min\{n \geq 0 : X_n \epsilon A\}$, se $X_n \epsilon A$, para algum n $\geq$ 0.

DEF 6.3. $T_A = \infty$ se $X_n \not\epsilon$ A, $\forall$ n > 0.

Ou seja, T_A é o primeiro indice de X_n em que a cadeia entra no conjunto A pela primeira vez.

NOTAÇÃO Quando A = {y}, em lugar de escrever T_y vamos apenas escrever T_y.

NOTAÇÃO Denotaremos por P_x(A) a probabilidade de A ocorrer quando a CM começou no estado x. Por exemplo, $P_x(X_5 = 2)$ ou $P_0(T_y = 3)$ "A probabilidade,saindo de zero a cadeia, atingir o estado y, pelo menos uma vez."

7 Estados Transientes e Recorrentes

Seja $\{X_n$, n $\geq 0\}$ uma CM sobre S com função de transição p(x,y). Definida como:

$$\rho_{xy} = \rho(T_y \leq \infty)$$

I.E, a probabilidade de saindo de x, atingir o estado y em um tempo finito.

Em particular, ρ_{yy} denota a probabilidade de sair de y e retornar para y (alguma vez) -> tempo finito.

DEF 7.1. Diremos que um estado y é **transiente** se $\rho \leq 1$.

Isto quer dizer que, se y for recorrente, então, com probabilidade 1, a cadeia retornará alguma vez em y.

Se y for transiente, existe uma probabilidade positiva (de valor 1 - ρ_{yy}) de sair de y e não retornar.

Seja N(y) o número de vezesque a cadeia **VISITA** o estado y ($n \geq 1$).

Então, P_x (N(y) $\geq$ 1) = P_x ($T_y \leq \infty$) = ρ_{xy}.

Denotaremos por EX(.) a esperança de alguma VA, com a cadeia partindo em x.

Teorema 7.1. *i) Se y é transiente, então $F_x(N(y) < \infty) = 1$ e $E(N(y)) = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}$, $x \epsilon S$ ii) Se y é recorrente, então $P_x(N(y) = \infty) = 1$ e $E_x(N(y)) = \infty$.*

Isto significa que estados transientes são apenas estados de "passagem" ou transitórios, enquanto que estados recorrentes são estados permanentes ou definitivos. Isso produz uma partição do espaço de estados.

$$S = S_T \cup S_R, (S_T \cap S_R = \varnothing)$$

DEF 7.2. Sejam x e y dois estados de S. Diremos que x atinge y se $\rho_{xy} > 0$.

NOTAÇÃO : (independente do número de passos): x $\rightarrow$ y. "Saindo de x em n passos chego em y"

DEF 7.3. Diremos que dois estados quaisquer estão comunicados se x $\rightarrow$ y e y $\rightarrow$ x.

Teorema 7.2. *Seja X um estado recorrente. Suponha que $x \leftrightarrow y$. Então y será também recorrente. Aqui $\rho_{xy} = \rho_{yx} = 1$. (Isso significa que estados se comunicam somente com estados de mesma natureza)*

DEF 7.4. 1) Um conjunto C estados é chamado **fechado** se $\rho_{xy} = 0$, x $\leq$ c, y $\notin$ c. 2) Um conjunto c é chamado irredutivel se x $\leftrightarrow$ y, $\forall$ x,y *in* c. (Ou seja, todos os estados de c estão comunicados)

Teorema 7.3. *Seja C um conjunto finito irredutivel e fechado de estados. Então, todos os estados em C serão recorrentes.*

C é o conjunto de estados. FINITO, FECHADO e IRREDUTÍVEL.

Exemplo 7.1. Considere uma cadeia de markov com matrix de transição MT

Tabela 1:

0	1	2	3	4	5	
0	1	0	0	0	0	0
1	0.25	0.5	0.25	0	0	0
2	0	0.2	0.4	0.2	0	0.2
3	0	0	0	0.166666666666667	0.333333333333333	0.5
4	0	0	0	0.5	0	0.5
5	0	0	0	0.25	0	0.75

S = {0,1,2,3,4,5}

Como os conjuntos C_1 = {0} e C_2 = {3,4,5} são finitos, fechados e irredutiveis, então eles são conjuntos de estados recorrentes.

Assim, S_R = {0} $\cup$ {3,4,5} e S_T {1,2}

Notar que 0 é um estado absorvente, logo recorrente. 3,4 e 5 são estados recorrentes. “‘ ## Probabilidade de absorção

Seja C um conjunto de estados recorrentes (fechado e irredutivel) e seja ρ_c(x) = P_x ($T_c < \infty$). Dado que a cadeia permanecerá definitivamente em C, se os estados de C forem atingidos, diremos que a cadeia foi absorvida em C e chamaremos a ρ_c(x) de probabilidade de absorção de C, saindo do estado x.

Notar que, trivialmente

$\rho_c(x) = 1, x \in C$

$\rho_c(x) = 0, x \notin C$

Vamos calcular $\rho(x)$, x $\in S_T$.

Teorema 7.4. *Seja C um conjunto finito, fechado e irredutivel de estados. Então:*

$$\rho_c(x) = \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in S_T} P(x,y) P_C(y), x \in S_T$$

Consideramos $C_1 = \{0\}$, x = 1 ou 2 ($S_T = (1,2)$)

x = 1

$$\begin{aligned}
\rho_0(1) &= \sum_{y \in 0} P(1,y) + \sum_{y \in 1,2} P(1,y)\rho_0(y), x \in S_T \\
\rho_0(1) &= P(1,0) + [P(1,1)\rho_0(1) + P(1,2)\rho_0(2)] \\
\rho_0(1) &= \frac{1}{4} + [\frac{1}{2}\rho_0(1) + \frac{1}{4}\rho_0(2)]
\end{aligned} \tag{19}$$

$\frac{1}{2}\rho_0(1) - \frac{1}{4}\rho_0(2) = \frac{1}{4}$ (1) Primeira equação

x = 2

$$\begin{aligned}
\rho_0(2) &= \sum_{y \in 0} P(2,y) + \sum_{y \in 1,2} P(2,y)\rho_0(y) \\
\rho_0(2) &= 0 + [P(2,1)\rho_0(1) + P(2,2)\rho_0(2)]
\end{aligned} \tag{20}$$

$\frac{1}{5}\rho_0(1) - \frac{3}{5}\rho_0(2) = 0$ (2) Segunda equação

De (2):

$$\frac{1}{5}\rho_0(1) = \frac{3}{5}\rho_0(2) => \frac{1}{3}\rho_0(1)$$

De (1):

$$\frac{1}{2}\rho_0(1) - \frac{1}{4}\frac{1}{3}\rho_0(1) = \frac{1}{4}$$

Logo:

$$\frac{6\rho_0(1) - \rho_0(1)}{12} = \frac{1}{4} 5\rho_0(1) = 3\rho_0(1) = \frac{3}{5}$$

Em (2):

$$\frac{1}{2}\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\rho_0(2) = \frac{1}{4}\rho_0(2) = \frac{1}{5}$$

Como a cadeia só pode ser absorvente em C_1 ou C_2, essas probabilidade são complementares logo:

$$\rho_{3,4,5}(1) = 1 - \rho_0(1) = \frac{2}{5}$$

e

$$\rho_{3,4,5}(2) = \frac{4}{5}$$

7.1 Martingales

Considere uma CM sobre {0,1,2,. . . ,d} com função de transição ρ satisfazendo:

$$\sum_{y=0}^{d} yP(x,y) = x, x = 0, ..., d$$

então, E[$X_{n+1}|X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n$]=x (i.e, o valor esperado de X_{n+1} dado o passado e o presente do processo, depende somente do valor presente.)

DEF 7.5. Uma sequência de VA'S satisfazendo a propriedade acima será chamado de **MARTINGALES**.

OBS: Na verdade um martingale não é necessariamente uma CM, mas é um elemento importante na teoria de jogos.

7.2 Cadeias N-M

Quando uma CM é irredutivel, ou seja, todos seus estado são da mesma natureza. "Todos são transientes ou todos são recorrentes".

Quando S é finito e a CM é irredutivel.

Todos os estados serão recorrentes. Nesse caso diremos que a cadeia é recorrente.

Analisar os estados quando S não é finito é um problema extremamente complexo e a natureza dos estados denpederá da existencia de algumas estruturas probabilisticas sobre a cadeia. O caso particular das cadeias de nascimento e morte é um dos casos em que consegue-se um criterio de classificação de estados

DEF 7.6. Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma C-N-M com função de probabilidade.

$$P(x,y) = \begin{cases} q_x & ,y = x-1 \\ r_x & ,y = x \\ p_x & ,y = x+1 \end{cases}$$

sendo $q_x + p_x + r_x = 1$, ∀ x ∈ S.

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1}}$$

sendo que:

$$\gamma_y = \frac{q_1 q_2 ... q_y}{p_1 p_2 ... p_y}$$

a < x < b

Ainda,

$$\begin{aligned} P_x(T_a < T_b) &= 1 - P(T_a < T_b) \\ &= \frac{\sum_{y=a}^{x-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1}} \end{aligned} \tag{23}$$

Notar que $P_x(T_a < T_b)$ indica a probabilidade de saindo de x atingir o estado A antes de que o estado B.

Exemplo 7.2. Um jogador faz aposstas de um dolar por vez com probabilidade $\frac{9}{19}$ de ganhar e $\frac{10}{19}$ de perder. Supoha que o jogador deixa de jogar quando está arruinado ou quando o seu lucro for de 25 dolares. Suponha que ele inicia o jogo com capital de 10 dolares.

7.2.1 a.

Encontrar a probabilidade do jogador se retirar ganhando

Temos que γ_y:

$$\gamma_y = \frac{(\frac{10}{19})(\frac{10}{19})...(\frac{10}{19})}{(\frac{9}{19})(\frac{9}{19})...(\frac{9}{19})} = \frac{(\frac{10}{19})^y}{(\frac{9}{19})^y} = (\frac{10}{9})^y$$

Logo:

$$\begin{aligned} P_{10}(T_{35} < T_0) &= \frac{\sum_{y=0}^{9}(\frac{10}{9})^y}{\sum_{y=0}^{34}(\frac{10}{9})^y} \\ &= \frac{\frac{1-(\frac{10}{9})^{10}}{1-\frac{10}{9}}}{\frac{1-(\frac{10}{9})^{35}}{1-\frac{10}{9}}} \\ &= \frac{1-(\frac{10}{9})^{10}}{1-(\frac{10}{9})^{35}} = 0.047 \end{aligned} \tag{24}$$

7.2.2 b.

Encontrar a perda esperada

$$L = \begin{cases} 10 & , \text{ se atingir } 0 \\ -25 & , \text{ se atingir } 35 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(L) &= 10P(atingir0) - 25P(atingir35) \\ &= 10(1x0.047) - 25(0.047) \\ &= 10 - 35x0.047 \end{aligned} \tag{26}$$

Teorema 7.5. *Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma C-N-M irredutivel sobre S ={0,1,2,...}. Então, a cadeia será recorrente se:*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \gamma_x = \infty$$

caso contrario a cadeia sera transiente

8 Distribuição estacionária de uma CM

Exemplo 8.1. Seja $\{X_n, \text{n} \geq 0\}$ uma CM com dois estados tais que:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Temos que P^2 é:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 5/12 & 7/12 \end{bmatrix}$$

P^4

$$P^4 = \begin{bmatrix} 139/324 & 185/324 \\ 185/432 & 247/432 \end{bmatrix}$$

Intuimos que a matriz $P^n \approx P^8$, n > 8. Isto mostra que para n suficientemente grande a distribuição da cadeia (prob de transição) tende a estabilizar em determinados valores para todos os estados, ou seja, as linhas da matriz P^n tendem a se igualar.

8.1 Distribuição Estacionária de uma CM.

Uma pergunta interessante é saber o que acontece com a matriz P^n, para n suficientemente grande. isso tem a ver com a chamada **distribuição estacionária**, ou de equilibrio.

DEF 8.1. Seja $\{X_n n \geq 0\}$ uma CM sobre S com função de transição P. Diremos que uma distribuição de probabilidade $\{\Pi(x)$, x $\in$ S$\}$ é uma distribuição estacionária se:

$$\sum_x \Pi(x)P(x,y) = \Pi(y), y \in S$$

Matricialmente a condição para ser DE (distribuição estacionária)

$$\Pi P = \Pi$$

sendo que Π é um vetor de probabilidades e P a matriz de transição.

Exemplo 8.2. Para P, consideramos $\Pi = (\Pi(0), \Pi(1))$

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$(\Pi(0), \Pi(1)) \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = (\Pi(0), \Pi(1))$$

I. $\frac{\Pi_0}{3} + \frac{\Pi_1}{2} = \Pi_0$

II. $\frac{2\Pi_0}{3} + \frac{prod_1}{2} = \Pi_1$

III. $\frac{\Pi_0 + \Pi_1}{=} 1$

A III eq foi acrescentada por que sabemos que a soma das duas probabilidades Π tem que resultar em 1. Assim o sistema de equações agora tem solução.

I em III

$\Pi_0 + \frac{4}{3}\Pi_0 = 1 => \Pi_0 = \frac{3}{7}$

e

$\Pi_1 = \frac{4}{7}$

Quando temos uma cadeia com infinitos estados, não é possível resolver o sistema $\Pi P = \Pi$ para obter a distribuição estacionária.

No caso particular de C-N-M é possível encontrar a DE.

Considere uma cadeia de nascimento e morte sobre {0,1,2...} ou sobre {0,1,2,3,4,...,d}, tal que:

$$\begin{aligned} p_x > 0 \quad &, p/0 \leq x \leq d \\ q_x > 0 \quad &, p/0 \leq x \leq d \end{aligned}$$

A condição de estcionariedade é: $\sum_x \Pi(x)P(x, y) = \Pi(x, y)$

Isto é:

y = 0

$$\begin{aligned} \sum_x \Pi(x)P(x, 0) &= \Pi(0) \\ \Pi(0)P(0, 0) + \Pi(1)P(1, 0) + \Pi(2)P(2, 0)... &= \Pi(0) \\ \Pi(0)r_0 + q_1\Pi(1) + 0 + 0 + 0... &= \Pi(0) \\ q_1\Pi(1) + \Pi(0)[r_0 - 1] &= 0 \\ q_1\Pi(1) - \Pi(0)p_0 &= 0 \\ \Pi(1) &= \frac{p_0}{q_1}\Pi(0) \end{aligned} \tag{33}$$

Para qualquer y: $\sum_x \Pi(x)P(x,y) = \Pi(y)$

$$\Pi(y-1)P(y-1,y) + \Pi(y)P(y,y) + \Pi(y+1)P(y+1,y) = \Pi(y)$$

y = 1

$$\begin{aligned} P_0\Pi(0) + r_1\Pi(1) + q_2\Pi(2) = \Pi(1) \\ q_2\Pi(2) &= (1-r_1)\Pi(1) - p_0\Pi(0) \\ q_2\Pi(2) &= (p_1+q_1)\Pi(1) - p_0\Pi(0) \\ q_2\Pi(2) &= (p_1+q_1)\frac{p_0}{q_1}\Pi(0) - p_0\Pi(0) \\ q_2\Pi(2) &= \Pi(0)[\frac{p_1p_0}{q_1} + p_0 - p_0] \\ \Pi(2) &= \frac{p_1p_0}{q_1q_2}\Pi(0) \end{aligned} \tag{34}$$

Em geral

$$\Pi(x) = \frac{p_0p_1 ... p_{x-1}}{q_1q_2 ... q_x}\Pi(x)$$

Define-se

$$\alpha \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ \frac{p_0p_1 ... p_{x-1}}{q_1q_2 ... q_x}\Pi(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, $\Pi(x) = \alpha_x\Pi(0)$, $x \geq 0$

Somando em ambos os lados

$$\sum_x \Pi(x) = \sum_x \alpha_x\Pi(0)$$

$$1 = \Pi(0)\sum_x \alpha_x$$

Logo:

$$\Pi(0) = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\infty} \alpha_x}$$

Se $\sum_{x=0}^{\infty} \alpha_x < \infty$, então existe uma DE que será dada por:

$$\Pi(x) = \frac{\alpha_x}{\sum_{x=0}^{\infty} \alpha_x}$$

OBS: Isto para uma C-N-M

9 Distribuição estacionária de uma CM

9.1 Método de Decomposição Especial

Para encontrar a matriz P^n no caso de dois estados.

Seja

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

0 < a < 1, 0 < b < 1.

$P^n = \lambda_1^n E_1 + \lambda_2^n E_2$, sendo λ_1 e λ_2 os autovalores da equação caracteristica.

$$det(\lambda I - P) = 0$$

I identidade

As matrizes E_1 e E_2 são dadas por:

$$E_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[P - \lambda_2 I]$$

$$E_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}[P - \lambda_1 I]$$

9.2 DE p/ C-N-M

$$\pi(x) = \frac{\alpha x}{\sum_{y=0} \alpha_y}, x \geq 0$$

$$\alpha_x = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ \frac{p_0 \dots p_{x-1}}{q_1 \dots q_x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

9.3 Cadeia de Ehrenfest Modificada

Tem-se **d** bolas numeradas e duas caixas (I e II). Inicialmente **m** bolas são distribuidas de forma aleatoria nas duas caixas. Seleciona-se um número inteiro entre 1 e **d**, retira-se a correspondente a esse número e logo recoloca-se numa das caixas selecionadas aleatoriamente. O interesse é o número de bolas na caixa I.

Seja X_n: o nº de bolas na caixa I, após o n-esimo sorteio. Então, $\{X_n$, n $\geq 0\}$ será uma CM sobre S = {0,1,...,d}.

No caso de d = 3, temos que:

$p_0 = 1/2$ $p_1 = 1/3$ $p_2 = 1/6$
$q_1 = 1/6$ $q_2 = 1/3$ $q_3 = 1/2$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 3/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/6 & 3/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = \frac{p_0}{p_1} = \frac{1/2}{1/6} = 3$
$\alpha_2 = \frac{p_0 p_1}{q_1 q_2} = \frac{1/2x1/3}{1/6x1/3} = 3$
$\alpha_3 = \frac{p_0 p_1 p_2}{q_1 q_2 q_3} = \frac{1/2x1/3x1/6}{1/2x1/3x1/2} = \frac{3x1/6}{1/2}$
$\alpha_3 = 1$

$\sum_{y=0}^{3} \alpha_y = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$

$\pi(0) = \frac{\alpha_0}{\sum \alpha_y} = 1/8$ $\pi(1) = \frac{3}{\sum \alpha_y} = \frac{3}{8}$
$\pi(2) = 3/8$ $\pi(3) = 1/8$

π = (1/8,3/8,3/8,1/8)\$

Seja $N_n(y)$ o número de visitas da cadeia no estado y durante os tempos m = 1,...,n. Denotado por Gn(x,y) o valo esperado da VA. Nn(y), quando a cadeia come em x, isto é:

$$Gn(x, y) = E_x(Nn(y))$$

Quando y é transiente, o limite Nn(y) $< \infty$. Seja y recorrente e consideremos my $= E_y(T_y)$ (tempo medio de retorno em y)

DEF 9.1. Um estado recorrente será chamado recorrente nulo se my $= \infty$
Caso contrario (ie, se my $< \infty$) o estado será chamado recorrente positivo.

Teorema 9.1. *Seja x recorrente positivo.*
Se, $x \leftrightarrow y$ (se comunica com) y tambem será recorrente positivo.

Teorema 9.2. *Seja C um conjunto de estados fechados, finitos e irredutivel, então todo estado em C, será recorrente positivo.*

Corolário 9.1. Uma CM, irredutivel com S finito, é recorrente

Corolário 9.2. Uma CM, com S finito não possui estados recorrentes nulos.

Teorema 9.3. *Uma CM irredutivel de estados recorrentes positivos possui uma unica distribuição estacionaria dada por:*

$$\pi(x) = \frac{1}{m\alpha}, \alpha \in S$$

Teorema 9.4. *Uma CM irredutivel é recorrente positiva, se e somente se, ela possui uma distribuição estacionária.*

Corolário 9.3. Se uma CM com S finito é irredutivel, então ela possui uma unica distribuição estacionária.

Corolário 9.4. i. Se S_{RP} é vazio ($S_{RP} = \phi$), então não existe distribuição estacionária. ii. Se $S_{RP} \neq 0$ e irredutivel, então, existe uma unica distribuição estacionaria. iii. Se $S_{RP} \neq 0$ e ele não é irredutivel, então existem infinitas distribuições estacionarias.

10 Processo de Poisson

Veremos a seguir um dos principais processos a tempo continuo que aparece nas mais diversas áreas. Seja t o tempo para o processo aleatorio, começando em t =0. Suponha que eventos de um tipo particular ocorrem em instantes aleatorios de tempo, digamos t_1, t_2 ...

Defina $T_i = t_i - t_{i-1}$, t ≥ 1 os instantes são chamados de tempos de ocorrência dos eventos e as va's T_i são chamadas de tempos entre ocorrencias (interocorrencias).

DEF 10.1. Um processo {X(t), t ≥ 0} é chamado processo de contagem se X(t) representa o número total de eventos que ocorrem no instante (0,t]. Um processo de contagem deve satisfazer: i. x(t) ≥ 0 e X(0) = 0 ii. X(t) é valor inteiro iii. X(s) $\leq$ X(t) se s $<$ t (não decrescente) iv. X(t) - X(s) é o número de eventos em (s,t)

DEF 10.2. Um processo de Poisson é um processo de contagem tal que: 1. X(0) = 0 2. X(t) tem incrementos independentes 3. O número de eventos em qualquer intervalo de comprimento t, possui distribuição Poisson de média λ(t), com $\lambda > 0$, ou seja, P[X(t+s) - X(s) = n] = $\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n_i}}{n!}$ com n = 0,1,2,...

NOTAÇÃO: X(t+s) - X(s) ~ Poisson (λ t)

O número λ é chamado de **taxa do processo**. Como λ é constante no tempo, esse processo de Poisson também é chamado de processo de Poisson homogenico de taxa λ.

Seja X(t) um PP de taxa λt, ou seja, um processo de Poisson não é um processo estocastico.

Calculando a variância.

NOTAR QUE: $K_x(t,t) = cov[X(t)X(t)] = Var[X(t)] = \lambda t$

Seja 0 < s < t:

$$\begin{aligned} K_x &= cov[X(s), X(t)] \\ &= cov[X(s), (X(t) - X(s) + X(s))] \\ &= cov[X(s), X(t) - X(s)] + cov[X(s), X(s)] \\ &= 0 + \lambda s \\ &= \lambda s \end{aligned} \tag{39}$$

Como $K_x(s,t)$ não depende da diferença (s-t), então confirmamos que o processo de Poisson não pode ser fracamente estacionario ou estacionario de 2ª ordem. Existe uma transformação do PP que é estacionaria.

Exemplo 10.1. Seja X(t) em PP(λ)$édefinadapor: Y(t) = X(t+1) - X(t), t \geq 0$

E[Y(t)] = E[X(t+1) - X(t)] = E[X(t+1)] - E[X(t)] = $\lambda(t+1-t) = \lambda$

Suponha que s ≤ t ≤ s + 1

$$\begin{aligned} K_y(s,t) &= cov[Y(s), Y(t)] \\ &= cov[X(s+1) - X(s), X(t+1) - X(t)] \\ &= cov[X(s+1), X(t+1)] - cov[X(s+1), X(t)] - cov[X(s), X(t+1)] + cov[X(s), X(t)] \end{aligned} \tag{40}$$

DEF 10.3. Um processo de Poisson {N(t), t ≥ 0} será chamado Processo de Poisson não homenico, se a taxa dor uma função do tempo λ(t), t ≥ 0. Também λ(t) é chamado intensidade do processo.

11 Processos Gaussianos

DEF 11.1. Um PE, {X(t, t ∈ T)} é chamado Gaussiano se qualquer combinação linear finita das va's X(t), possui uma distribuição normal. Isto é,

$$\sum_i \alpha_i X(t_i)\ Normal$$

Exemplo 11.1. Seja X(t) = $Z_1 cos\lambda t$ + $Z_2 sen\lambda t$, t ≥ 0, sendo Z_1, Z_2 VA's iid N(μ,σ^2). Então:

$$\begin{aligned} \sum \alpha_i X(t_i) &= \alpha_1 X(t_1) + \alpha_2 X(t_2) + ... + \alpha_n X(t_n) \\ &= \alpha_1[Z_1 cos\lambda t_1 + Z_2 sen\lambda t_1] + ... + \alpha_n[Z_1 cos\lambda t_n + Z_2 sen\lambda t_n] \\ &= [\alpha_1 cos\lambda t_1 + \alpha_2 cos\lambda t_2 + ... + \alpha_n cos\lambda t_n]Z_1 + [\alpha_1 cos\lambda t_1 + \alpha_2 cos\lambda t_2 + ... + \alpha_n cos\lambda t_n]Z_2 \\ &= b_n Z_1 + c_n Z_2\ Normal \end{aligned} \tag{41}$$

Teorema 11.1. *Seja {X(t), t ≥ 0} um processo gaussiano fracamente estacionario. Então esse processo é (tambem estritamente) estacionario.*

IDEIA DA PROVA: Se X(t) é Gaussiano, o processo Y(t) = X(t + τ), $\tau \in$ R é também gaussiano com mesma média e covariância de X(t). Ou seja a distribuição de X(t) e de X(t + τ) é a mesma.

12 Procesos de Wiener

O processo de Wiener é um PE, continuo a tempo continuo que tem diversas aplicaçoes em fisica e economia.

DEF 12.1. Um PE{W(t), t $\in$ T} será um processo wiener se satisfazer: i. W(0) = 0 ii. W(t) - W(s) ~ N(0, σ^2(t-s)), s $\in$ t iii. W(t) possui incrementos independentes

Da mesma forma que foi feita com PP pode ser mostrado que:

$$K_w(s,t) = cov[W(s), W(t)] = \sigma^2 min(s,t)$$