

# 实验五： 层次聚类

Hierarchical Clustering

# 基本概念

---

- 定义：聚类就是对大量未知标注的数据集，按数据的内在相似性将数据集划分为多个类别，使**类别内的数据相似度较大**而**类别间的数据相似度较小**。
- 对象：观测数据或样本集合
- 核心概念：相似度 (Similarity) / 距离 (Distance)
- 场景：
  - 图片检索：图片内容相似度
  - 图片分割：图片像素（颜色）相似度
  - 网页聚类：文本内容相似度
  - 社交网络聚类：（被）关注人群，喜好，喜好内容
  - 电商用户聚类：点击 / 加购 / 购买商品

# 相似性计算方法总结

---

- Pearson 相关系数: 
$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{ki} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}}$$
- 余弦相似度 (Cosine similarity): 
$$s_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m x_{ki}x_{kj}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m x_{ki}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m x_{kj}^2}}$$

越接近于 1，表示样本越相似；越接近于 0，表示样本越不相似。

用相似性度量时，相关系数越大样本越相似。

# 距离计算方法总结

---

样本集合为  $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ ,  $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi})^T$ ,  $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$

- 闵可夫斯基距离 (Minkowski):  $d_{ij} = \left( \sum_{k=1}^m |x_{ki} - x_{kj}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

p=2, 欧式距离; p=1, 曼哈顿距离; p=∞, 切比雪夫距离

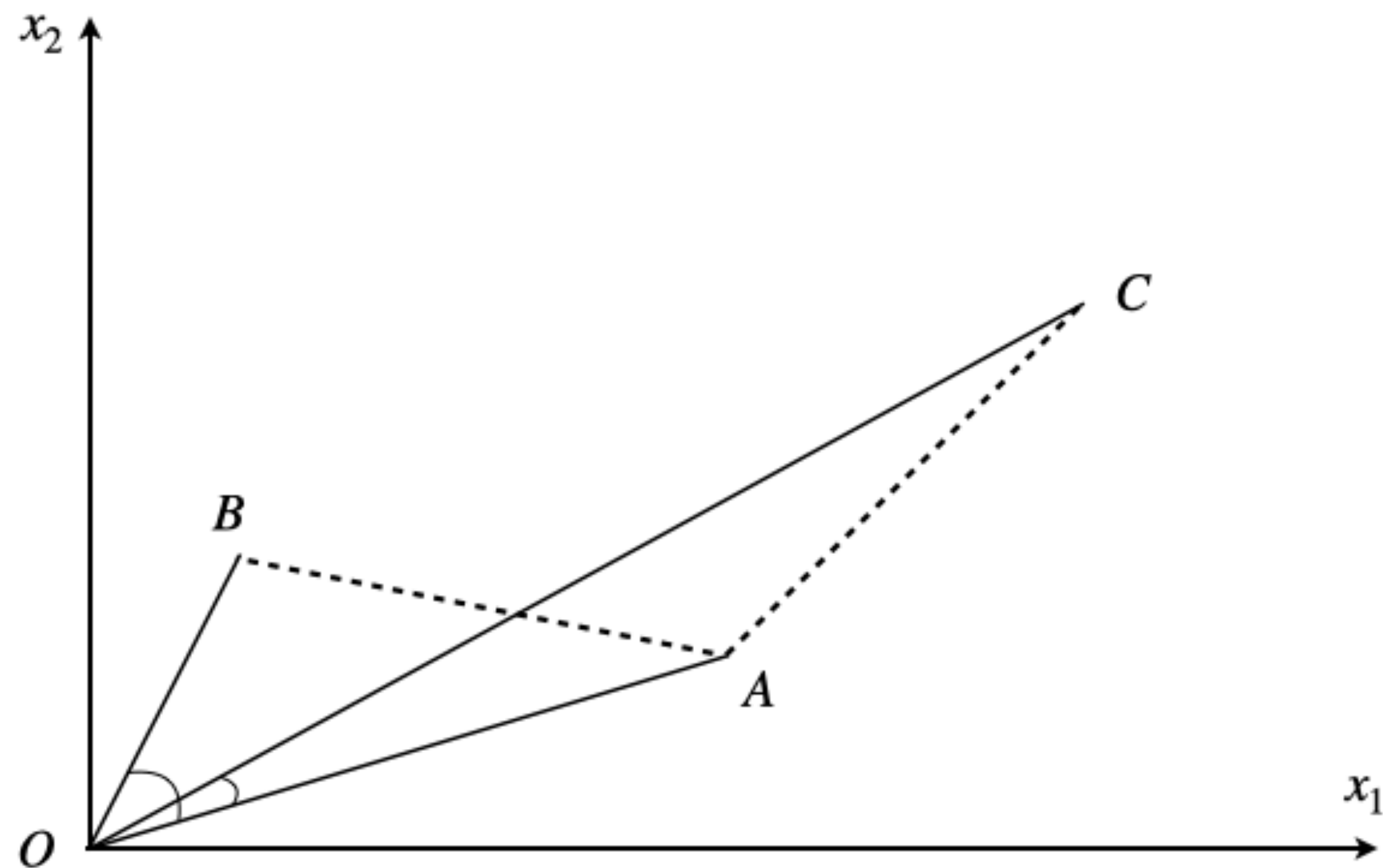
- 马哈拉诺比斯距离 (Mahalanobis):  $d_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^T S^{-1} (x_i - x_j) \right]^{\frac{1}{2}}$

X 的协方差矩阵记作 S。S 为单位矩阵时, 即样本数据的各个分量互相独立且各个分量的方差为 1 时, 马氏距离就是欧式距离。

用距离度量时, 距离越大相似度越小, 距离越小相似度越大。

# 距离与相关系数

---



如果从距离的角度看， $A$  和  $B$  比  $A$  和  $C$  更相似；但是从相关系数的角度看， $A$  和  $C$  比  $A$  和  $B$  更相似。所以进行聚类时，选择合适的距离或相似度非常重要！

# 层次聚类

---

层次聚类假设类别之间存在层次结构，将样本聚到层次化的类中。层次聚类属于硬聚类，因为每个样本只属于一个类别。

- 聚合聚类 (bottom-up)

采用自底向上的策略，开始将每个样本各自分到一个类；之后将相距最近的两类合并，建立一个新的类，重复操作直到满足停止条件；得到层次化的类别

- 分裂聚类 (top-down):

采用自顶向下的策略，开始将所有样本分到一个类；之后将已有类中相距最远的样本分到两个新的类，重复操作直到满足停止条件；得到层次化的类别

# 聚合聚类

---

输入：n 个样本组成的样本集合及样本之间的距离；

输出：对样本集合的一个层次化聚类。

- ① 计算 n 个样本两两之间的欧式距离  $\{d_{ij}\}$ ，记作矩阵  $D = [d_{ij}]_{n \times n}$
- ② 构造 n 个类，每个类只包含一个样本
- ③ 合并类间距离最小的两个类，其中最短距离为类间距离，构建一个新类
- ④ 计算新类与当前各类的距离。若类的个数为 1，终止计算，否则回到步骤3

时间复杂度为  $O(n^3m)$ ，m 是样本的维数，n 是样本个数

# 聚合聚类

例：给定 5 个样本集合，样本之间的欧式距离由  $D = [d_{ij}]_{n \times n}$  表示：

① 用 5 个样本构建 5 个类， $G_i = \{x_i\}, i = 1, 2, \dots, 5$

②  $D_{35} = D_{53} = 1$  为最小，把  $G_3$  和  $G_5$  合并为一个新类  $G_6 = \{x_3, x_5\}$

③ 计算  $G_6$  与另 3 类之间的最短距离： $D_{61} = 2, D_{62} = 5, D_{64} = 5$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 9 & 3 \\ 7 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 8 & 1 \\ 9 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

其余两类之间距离是： $D_{12} = 7, D_{14} = 9, D_{24} = 4$

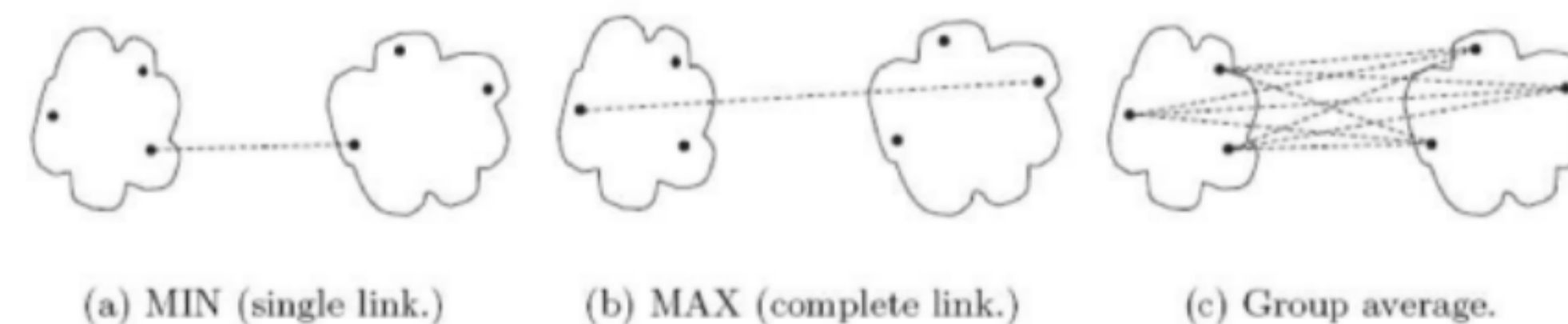
由于  $D_{61} = 2$  最小，所以将  $G_1$  和  $G_6$  合并成一个新类，记作  $G_7 = \{x_1, x_3, x_5\}$

④ 计算  $G_7$  与另 2 类之间的最短距离： $D_{72} = 5, D_{74} = 5$ ，又有  $D_{24} = 4$ ，将  $G_2$  和  $G_4$  合并成一个新类，记作  $G_8 = \{x_2, x_4\}$

⑤ 将  $G_7$  和  $G_8$  合并成一个新类，记作  $G_9 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ，即将全部样本聚成一类，聚类终止。



# 类与类之间的距离



类  $G_p$  与类  $G_q$  之间的距离  $D(p, q)$ , 也称为连接, 设类  $G_p$  包含  $n_p$  个样本, 类  $G_q$  包含  $n_q$  个样本, 连接有以下定义:

- 最短距离 / 单连接 (single linkage): 类  $G_p$  的样本与  $G_q$  的样本之间的最短距离

$$D_{pq} = \min\{d_{ij} \mid x_i \in G_p, x_j \in G_q\}$$

- 最长距离 / 全连接 (complete linkage): 类  $G_p$  的样本与  $G_q$  样本之间的最长距离

$$D_{pq} = \max\{d_{ij} \mid x_i \in G_p, x_j \in G_q\}$$

- 平均距离 (average linkage): 类  $G_p$  与  $G_q$  任意两个样本之间距离的平均值

$$D_{pq} = \frac{1}{n_p n_q} \sum_{x_i \in G_p} \sum_{x_j \in G_q} d_{ij}$$

# 实验要求

`np.random.multivariate_normal(mean, cov, temp_num)`

---

- 数据集：生成 2000 个样例，每个样例的前 3 列表示特征，第 4 列表示标签
- 基本要求(4')：绘制聚类前后样本分布情况
  - (1) 实现 single-linkage 层次聚类算法；
  - (2) 实现 complete-linkage 层次聚类算法。
- 中级要求(1')：实现 average-linkage 层次聚类算法，绘制样本分布图。
- 提高要求(1')：对比上述三种算法，给出结论。
- 拓展要求：通过变换聚类簇的个数，测试上述三种算法的性能，并给出分析。