



BIMA

MINI RAPPORT 1

Kim-Anh Laura NGUYEN
Arij RIABI
M1 DAC
Promo 2018-2019

Enseignant : Dominique BÉRÉZIAT

Échantillonnage des signaux 2D

En considérant une grille carrée, l'échantillonnage idéal d'un signal 2D est modélisé de la manière suivante :

$$x_e(t, u) = x(t, u) \cdot e(t, u) \quad (1)$$

$$\text{où } e(t, u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e, u - lT_e).$$

Le spectre du signal échantillonné s'écrit :

$$X_e(f, g) = \frac{1}{T_e^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e, g - lf_e) \quad (2)$$

1 Aliasing et fenêtrage pour des signaux 2D

Question 1

La figure 1 représente l'image produite par $s_\theta(t, u)$, avec $A = 10$, $\theta = 45^\circ$, $L = 512$, $T_0 = 64$, et $T_e = 1$.

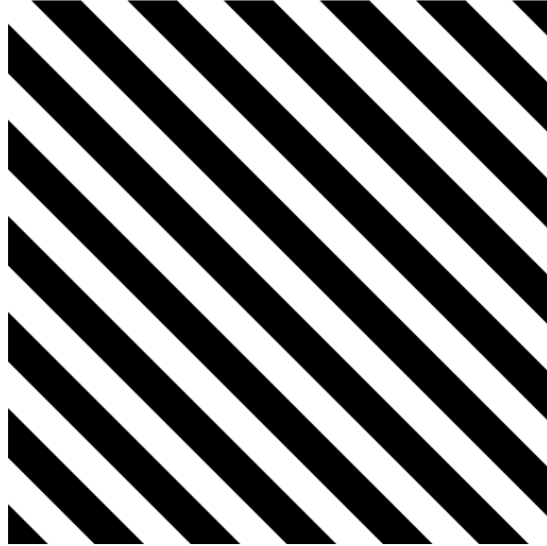


FIGURE 1 – $s_\theta(t, u)$, avec $A = 10$, $\theta = 45^\circ$, $L = 512$, $T_0 = 64$, et $T_e = 1$

Question 2

La transformée de Fourier du signal $s_\theta(t, u)$ est :

$$\begin{aligned} S(f, g) &= TF[s_\theta(t, u)](f, g) \\ &= \frac{A}{2} [\delta(f - f_0 \cos \theta) \delta(g - f_0 \sin \theta) + \delta(f + f_0 \cos \theta) \delta(g + f_0 \sin \theta)] \end{aligned}$$

On a alors $f_t^{max} = f_0 \cos \theta$ et $f_u^{max} = f_0 \sin \theta$.

Pour $T_0 = 64$ et $\theta = 45^\circ$, on a donc $f_t^{max} = \frac{1}{64} \cos(45) = 0.0082$ et $f_u^{max} = \frac{1}{64} \sin(45) = 0.0133$.
Donc $f_m = \max(f_t^{max}, f_u^{max}) = f_u^{max} = 0.0133$.

Soit f_{max} la fréquence maximale du signal analogique $x_a(t)$ et f_e la fréquence du signal échantillonné $x_e(t)$. D'après le théorème de Nyquist-Shannon, il n'y a pas de perte d'information entre $x_a(t)$ et $x_e(t)$ si :

$$f_e \geq 2f_{max}$$

f_m est donc la fréquence qui déterminera la fréquence d'échantillonnage limite.

(2a) On échantillonne $s_\theta(t, u)$ avec les mêmes paramètres que précédemment et $f_e = 16 \cdot f_m = 16 \cdot 0.0133$. Le résultat est représenté dans la figure 2.

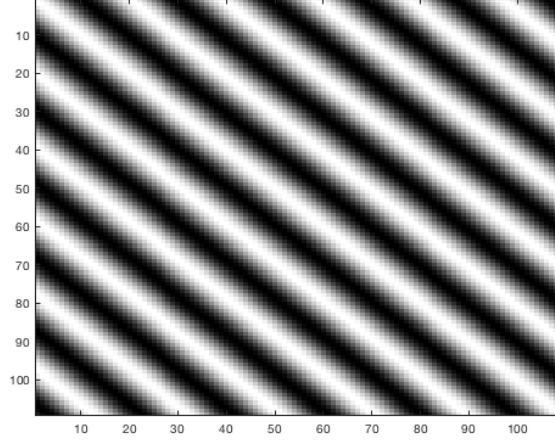
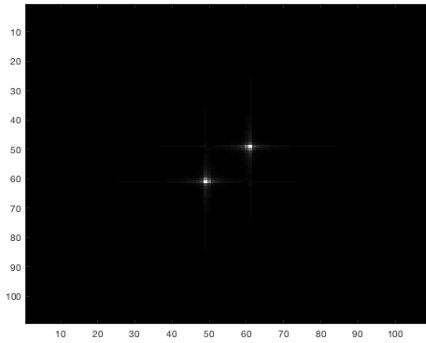
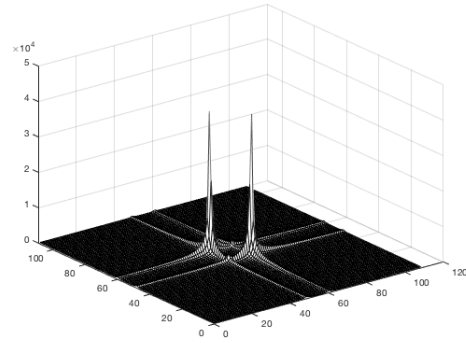


FIGURE 2 – Échantillonnage de $s_\theta(t, u)$, avec $A = 10$, $\theta = 45^\circ$, $L = 512$, $T_0 = 64$, et $T_e = \frac{1}{16 \cdot f_m}$

(2b) Les figures 3a et 3b contiennent respectivement les spectre 2d et 3d de la Transformée de Fourier Discrète de l'image précédente.



(a) Représentation 2d

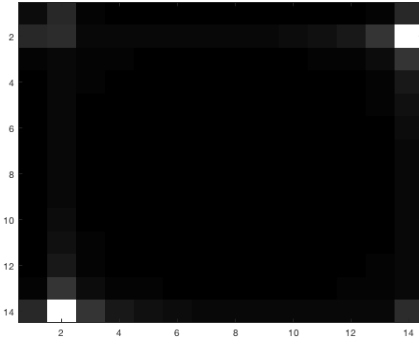
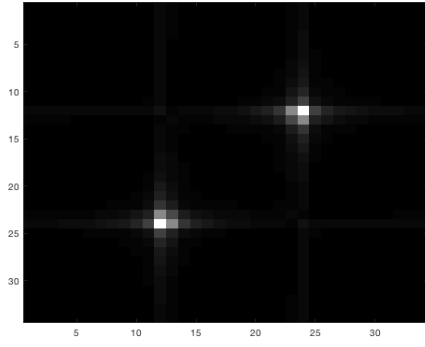


(b) Représentation 3d

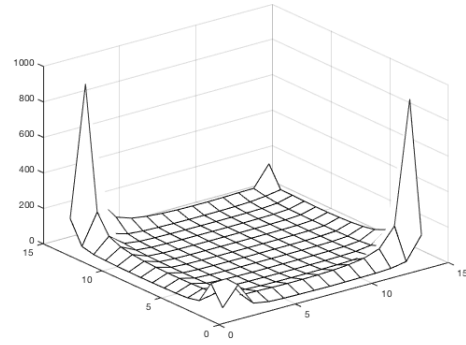
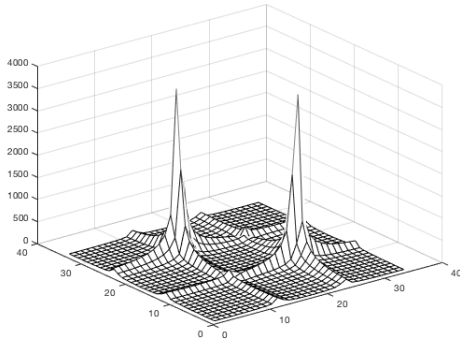
FIGURE 3 – Spectres 2d et 3d de la Transformée de Fourier Discrète de l'image de la figure 2

(2c) On remarque bien la présence de deux pics en fréquence (deux Dirac) sur les deux figures précédentes.

On fait maintenant varier la période d'échantillonnage de la sinusoïde. Les figures 4a, 4c et 4b, 4d contiennent respectivement les spectres des signaux produits avec $T_e = \frac{1}{5 \cdot f_m}$ et $T_e = \frac{1}{2 \cdot f_m}$.



(a) Représentation 2d du spectre de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = \frac{1}{5 \cdot f_m}$ (b) Représentation 2d du spectre de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = \frac{1}{2 \cdot f_m}$



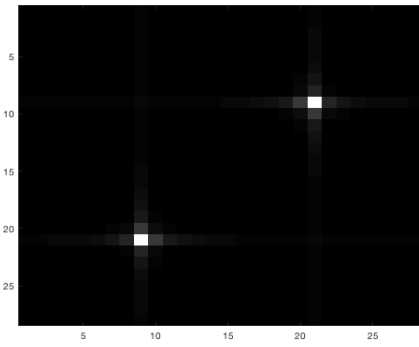
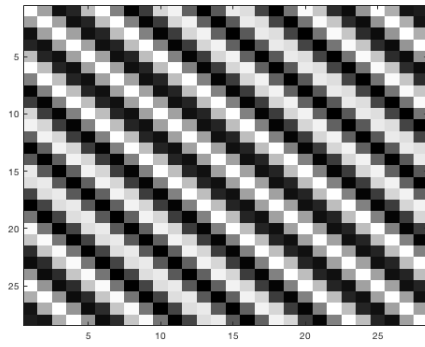
(c) Représentation 3d du spectre de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = \frac{1}{5 \cdot f_m}$ (d) Représentation 3d du spectre de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = \frac{1}{2 \cdot f_m}$

D'après l'équation 2, la période d'échantillonnage T_e intervient dans la Transformée de Fourier du signal échantillonné. Comme l'on a fait varier T_e , on observe des différences sur le spectre.

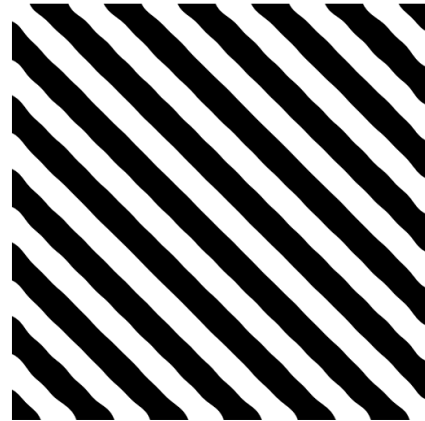
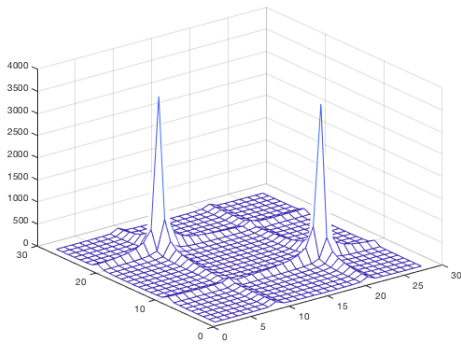
Plus la fréquence d'échantillonnage f_e diminue, moins les pics sont distincts et moins l'image échantillonnée est détaillée. Lorsque l'on atteint sa valeur limite selon le théorème de Shannon ($f_e = 2$), on remarque que les pics sont sur les bords.

Question 3

On échantillonne maintenant $s_\theta(t, u)$ avec $f_e = 4 \cdot f_m$, puis l'on reconstruit le signal à l'aide de la fonction `shannon_interpolation`, avant de calculer avec `erreur` l'erreur moyenne relative de reconstruction.



(a) Échantillonnage de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = 4 \cdot f_m$ (b) Représentation 2d du spectre correspondant



(c) Représentation 3d du spectre correspondant

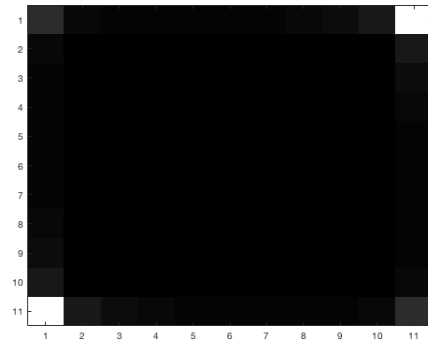
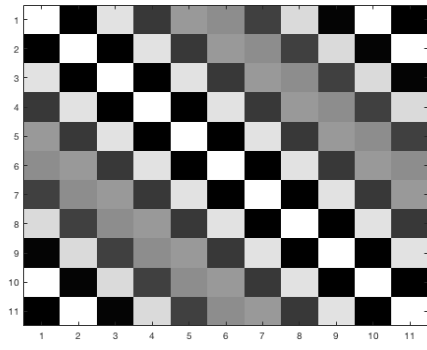
(d) Reconstruction de l'image

FIGURE 5 – Reconstruction de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = 4 \cdot f_m$

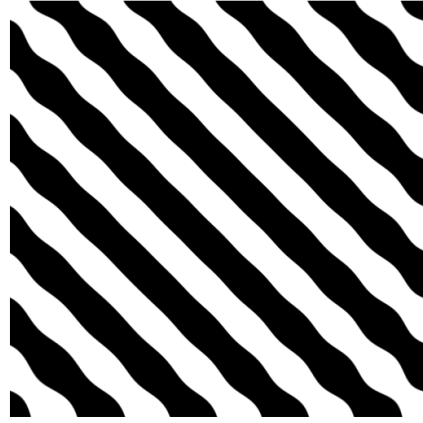
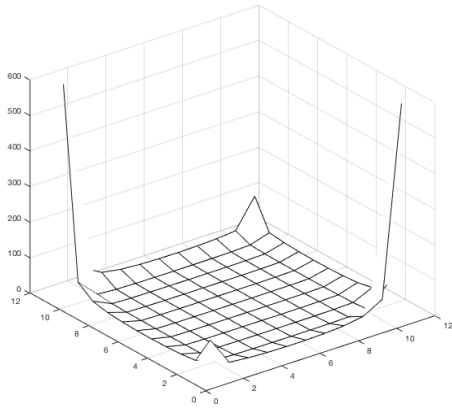
On remarque sur la figure 5d que les bandes sont légèrement ondulées. Cette erreur de reconstruction s'explique par une fréquence d'échantillonnage f_e relativement faible par rapport à la fréquence maximale f_m . Malgré le respect du théorème de Nyquist-Shannon, il y a perte d'information et l'on ne peut pas reconstruire le signal de façon précise.

Question 4

On reprend la question 3 avec $f_e = \frac{3}{2}f_{max}$.



(a) Échantillonnage de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = \frac{3}{2} \cdot f_m$ (b) Représentation 2d du spectre correspondant



(c) Représentation 3d du spectre correspondant

(d) Reconstruction de l'image

FIGURE 6 – Reconstruction de $s_\theta(t, u)$, avec $T_e = \frac{3}{2} \cdot f_m$

La figure 6d montre un problème de reconstruction de la sinusoïde : les bandes ne sont pas assez droites. Ce problème est confirmé par les figures 6a, 6b, et 6c. Comme l'on n'a pas respecté le théorème de Shannon, on perd trop d'information.