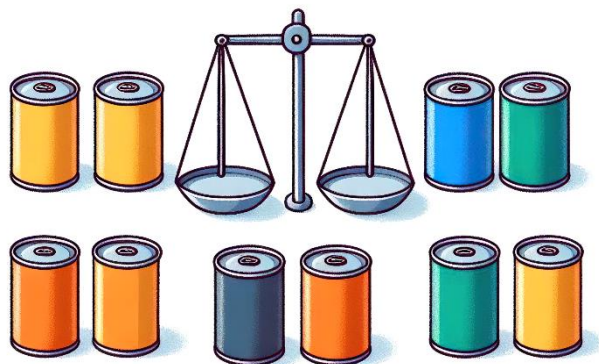


TRIER DES POIDS



Objectif

Déterminer des procédures pour trier une collection de poids inconnus dans l'ordre croissant.

Matériel

Quelques canettes vides, de l'eau, une balance et une centaine de milliards de neurones.

Consignes initiales

- **Remplir** les canettes avec une quantité différente d'eau.
- **Mélanger** aléatoirement les canettes jusqu'à ne plus connaître l'ordre des poids.
- Désigner un **juge** qui compare le poids de deux canettes grâce à la balance. Il dit à voix haute si la première canette est plus lourde que la deuxième ou non. **Il ne dit pas le poids des canettes.**

Question 1 – L'importance de trier

Que se passe-t-il si les mots du dictionnaire n'étaient pas triés par ordre alphabétique ? Si je trie vos copies par ordre de notes, quelles informations ai-je facilement ?

Question 2 – Trier une liste de 3 éléments

Choisir 3 canettes aléatoires et les **trier** dans l'ordre croissant.



Comment avez-vous fait ? Écrire une procédure. Combien de comparaisons sont effectuées dans le **meilleur** des cas ? Et dans le **pire** des cas ?

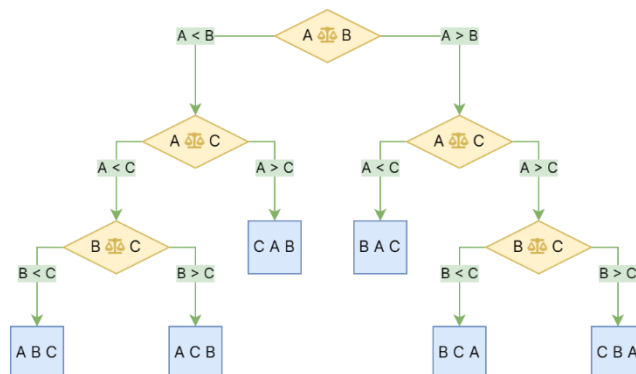
On **compare** la canette A avec les canettes B et C :

- Si A est plus lourde que B, et que A est plus légère que C : **B A C**
- Sinon si A est plus lourde que C, et que A est plus légère que B : **C A B**
- Sinon si A est plus légère que B et C, on la met tout à gauche
- Sinon si A est plus lourde que B et C, on la met tout à droite

On **compare** B et C :

- Si B est plus lourde que C alors on les échange de place : on obtient **C B A** ou **A C B**
- Sinon on ne fait rien : on obtient **B C A** ou **A B C**

On a effectué 2 comparaisons dans le meilleur des cas, et 3 comparaisons dans le pire des cas.



? Question 3 – Trouver le minimum d'une liste

Choisir 8 canettes aléatoires. Comment trouver la canette **la plus légère** ?



Comment avez-vous fait ? Écrire une procédure. Combien de comparaisons sont effectuées ? Existe-t-il un meilleur et pire des cas ?

Et si on a 20 canettes, combien de comparaisons sont effectuées ? Et pour 50 ? Et pour n canettes ?

On **compare** la canette 1 avec la canette 2 : on garde de côté la plus légère.

On **compare** la canette 3 avec la plus légère jusqu'à présent : on garde de côté la plus légère.

On **compare** la canette 4 avec la plus légère jusqu'à présent : on garde de côté la plus légère.

...

On **compare** la canette 8 avec la plus légère jusqu'à présent : on garde de côté la plus légère.

On effectue 7 comparaisons. Non, il n'y a pas de meilleur et de pire cas, on effectuera toujours 7 comparaisons quoi qu'il arrive. Pour 20 canettes, on effectue 19 comparaisons. Pour 50 canettes, on effectue 49 comparaisons. Pour n canettes, on effectue n comparaisons.

? Question 4 – Vérifier si une liste est triée

Choisir 8 canettes aléatoires. Comment vérifier que les canettes sont – à tout hasard – déjà triées dans l'ordre croissant de leur poids ?



Comment avez-vous fait ? Écrire une procédure. Combien de comparaisons sont effectuées dans le meilleur et le pire des cas ? Généraliser le nombre de comparaisons dans le pire des cas pour n canettes.

On **compare** la canette 1 avec la canette 2 : si la canette 1 est plus lourde que la canette 2, on arrête, les canettes ne sont pas triées.

On **compare** la canette 2 avec la canette 3 : si la canette 2 est plus lourde que la canette 3, on arrête, les canettes ne sont pas triées.

...

On **compare** la canette 7 avec la canette 8 : si la canette 7 est plus lourde que la canette 8, on arrête, les canettes ne sont pas triées.

Après toutes ces comparaisons, si on ne s'est pas arrêté, les canettes sont triées.

Dans le meilleur des cas, on effectue 1 comparaison et dans le pire des cas, on effectue 7 comparaisons. On effectue $n - 1$ comparaisons pour n canettes dans le pire des cas.

? Question ouverte

Choisir 8 canettes aléatoires. Proposer une méthode pour les trier par ordre croissant de poids. Vérifier à la fin que les canettes sont bien triées.

Le tri par sélection

- Trouver la canette la plus légère et la mettre sur le côté.
- Parmi les canettes restantes, trouver la plus légère et la mettre sur le côté.
- Répéter jusqu'à qu'il n'y ait plus de canettes restantes.

Canettes triées



Canettes restantes



? Question 5 – Application du tri par sélection

Choisir 8 canettes aléatoires et les trier en suivant l'algorithme du **tri par sélection**.

Combien de comparaisons ont été effectuées pour trier 8 canettes ? Existe-il un meilleur et un pire cas ?

On effectue 7 comparaisons pour déterminer la canette la plus légère parmi les canettes.

On effectue 6 comparaisons pour déterminer la canette la plus légère parmi les canettes restantes.

On effectue 5 comparaisons pour déterminer la canette la plus légère parmi les canettes restantes.

...

On effectue 1 comparaison pour déterminer la canette la plus légère parmi les canettes restantes.

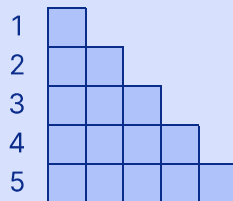
Le nombre de comparaisons total = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ comparaisons. Non il n'existe pas de meilleur ou de pire cas car le nombre de comparaisons sera toujours le même.

Un puzzle chinois

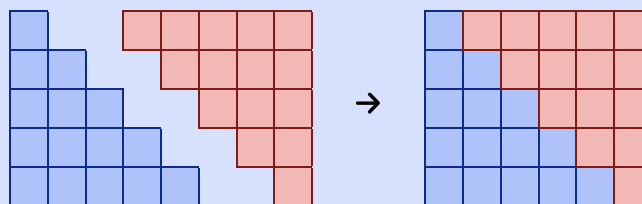
Les chinois utilisaient de nombreux puzzles pour démontrer certaines formules. Calculons par exemple la somme des 5 premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Cette somme peut être représentée par le puzzle suivant :



On pourrait compter un à un les différents blocs de ce puzzle, mais une formule intéressante émerge lorsqu'on duplique le puzzle et qu'on l'emboîte :



? Question 6 – Calcul du nombre de comparaisons pour le tri par sélection

- Exprimer $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ en fonction de la longueur et de la largeur de ce rectangle.
- Donner une formule générale pour $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$
- Donner alors le nombre de comparaisons effectuées pour trier n canettes suivant le **tri par sélection**.

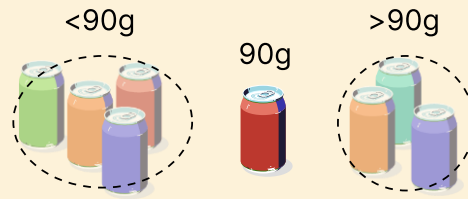
$$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 \times 6 = 30$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \times (n + 1) / 2$$

On effectue donc $(n - 1) \times n / 2$ comparaisons, soient $O(n^2)$ comparaisons.

Le tri rapide

- Choisir une canette au hasard. Comparer le reste des canettes avec elle. Mettre à **gauche** les canettes plus **légères**, et à **droite** les plus **lourdes**.



Les groupes formés ne sont pas forcément de même taille.

- Répéter la procédure pour le groupe de gauche et de droite.



- Et ainsi de suite, jusqu'à ce que les groupes n'aient au plus qu'une canette.



? Question 7 – Calcul du nombre de comparaisons pour le tri rapide

Choisir 8 canettes aléatoires et effectuer l'algorithme du tri rapide, combien de comparaisons avez-vous faits ?

Dépend des canettes choisies.

? Question 8 – Un peu de théorie

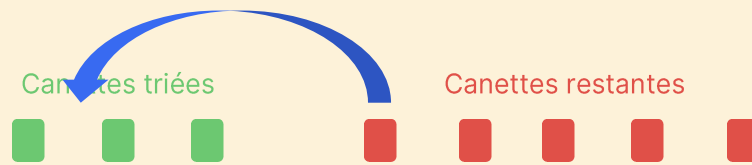
- Si par hasard, on choisit toujours dans un groupe, la canette du milieu (on formera toujours deux groupes de canettes de même taille ± 1), combien de comparaisons sont effectuées ?
- Et si on choisit toujours la canette la plus légère dans un groupe, combien de comparaisons sont effectuées ?
- Conclure sur la supériorité du tri rapide sur le tri par sélection.
- Bonus : Sauriez-vous donner le nombre de comparaisons dans le meilleur cas et dans le pire des cas pour n canettes ?

Meilleur des cas, on choisit la canette du milieu à chaque fois : On effectue environ $n \times \log(n)$ comparaisons

Pire des cas, on choisit la plus légère / lourde : On effectue n^2 comparaisons

Le tri par insertion

Le **tri par insertion** est le tri que vous effectuez généralement lorsque vous ranger vos cartes. Il consiste à retirer une canette des **canettes restantes** et de l'**insérer** à la bonne position dans les **canettes triées**.



? Question 9 – Calcul du nombre de comparaisons pour le tri par insertion

Choisir 8 canettes aléatoires et effectuer l'algorithme du tri par insertion, combien de comparaisons avez-vous faits ?

Dépend de l'ordre initial des canettes.

? Question 10 – Un peu de théorie

- Quel est le meilleur des cas, c'est-à-dire celui où vous effectuez le moins de comparaisons possibles ? Donner le nombre de comparaisons.
- Quel est le pire des cas ? Donner le nombre de comparaisons.
- Conclure sur la supériorité du tri par insertion sur le tri par sélection.
- Bonus : Donner le nombre de comparaisons dans le pire et le meilleur cas pour n canettes.

Meilleur cas : les canettes sont déjà triées, on effectue en tout $n - 1$ comparaisons

Pire cas : les canettes sont triées par ordre décroissant, on effectue $O(n^2)$ comparaisons.