Demostración formal de la terminación del Juego de la Hidra.

Lucas Polymeris

7 de abril de 2021

Asumimos familiaridad con las reglas del *Juego de la Hidra*, introducido por L. Kirby y J. Paris en [1]. En el siguiente enlace se puede encontrar una buena explicación de estas. También se puede jugar al juego con el programa del autor. Adoptamos la notación (como es usual en combinatoria) de representar el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ por $[n]$.

La estrategia para la demostración es como sigue. Primero formalizamos la noción de árbol "plantado", definimos un orden sobre estos, y definimos las hidras como representantes de la clase de isomorfismos de estos árboles. Mostramos que este orden restringido a las hidras es *bien fundado*, es decir, que toda sucesión estrictamente decreciente de hidras debe ser finita, así como en $\mathbb{N}$, y como no es el caso en $\mathbb{Q}_{\geq 0}$. Por último, mostramos que si α' es una hidra producida por una jugada válida desde α, entonces $\alpha' < \alpha$. Concluyendo entonces, que si se sigue jugando, siempre llegará un momento en el que se llegue a la hidra de solo un nodo, donde no hay jugada posible.

Definición 1. Definimos un árbol "plantado" finito inductivamente como sigue:

- $\langle\rangle$ es el árbol de solo un nodo.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son árboles plantados, entonces $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ es un árbol-plantado. Decimos que $t_1, \ldots, t_n$ son los sub-árboles directos de $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$.

Consideramos $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los árboles finitos, y si $\alpha \in \mathcal{A}$ con $\alpha = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ entendemos $\alpha[i] = t_i$.

Definición 2. Definimos el orden $(\mathcal{A}, \leq)$ recursivamente. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, con $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_p\rangle$ y $\beta = \langle b_1, \ldots, b_q\rangle$. Considere

$$I := \{i \in [\text{mín}\{p, q\}] : a_i \neq b_i\}$$

Si $p \leq q$ e I es vacío, entonces definimos $\alpha \leq \beta$. Si I es no vacío, sea $i_0 := \text{mín}(I)$, luego $\alpha \leq \beta$ si $a_{i_0} < b_{i_0}$.

Es claro que en $\mathcal{A}$ hay muchas copias de un "mismo" árbol en el sentido de isomorfismo. Por ejemplo los árboles $\langle\langle\rangle, \langle\langle\rangle, \langle\rangle\rangle\rangle$ y $\langle\langle\langle\rangle, \langle\rangle\rangle, \langle\rangle\rangle$ son isomorfos, sin embargo, bajo el orden definido tenemos $\langle\langle\rangle, \langle\langle\rangle, \langle\rangle\rangle\rangle < \langle\langle\langle\rangle, \langle\rangle\rangle, \langle\rangle\rangle$, lo cual causaría problemas más adelante. Además, es claro que en lo que al juego de la hidra respecta, dos árboles isomorfos son la "misma" hidra. En esencia, nos gustaría que las hidras sean los representantes de la clase de isomorfismo, que tienen sus hijos ordenados de mayor a menor según el orden definido, los hijos de hijos también y así. Lo cual nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3. Definimos las hidras recursivamente.

- $\langle\rangle$ es la hidra de solo un nodo.
- Si $r_1, \dots, r_n$ son hidras tal que $r_1 \geq \cdots \geq r_n$, entonces $\langle r_1, \dots, r_n\rangle$ es una hidra.

Llamamos por $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las hidras, donde es claro que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$. Llamamos a los sub-árboles directos de una hidra, sus hijos. Además definimos la altura $h(\alpha)$ de una hidra α, como la cantidad de paréntesis izquierdos al comienzo de α, antes de encontrarse con uno derecho.

Debiera ser claro de esta definición, que para todo árbol existe una hidra isomorfa a este, y que por lo tanto, no nos "faltan" hidras por considerar.

Lema 1. Sea $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de hidras tal que

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$$

luego debe ser que α se estabiliza. Es decir, existe i_0 tal que $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre $H := \text{mín}\{h(\alpha_i) : i \in \mathbb{N}\}$. Si $H = 1$, debe ser que $\alpha_1 = \langle\rangle$, y en consecuencia la sucesión se estabiliza en α_1. Suponga que $H > 1$ y suponga que el lema se cumple para valores menores a H. Como $H > 1$, $\langle\rangle$ no aparece en la sucesión y por lo tanto

$$f_1(i) := \alpha_i[1]$$

es bien definida ya que todo α_i tiene al menos un hijo. Además es claro que $h(f_1(i)) = h(\alpha_i) - 1$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción f_1 se estabiliza, es decir, existe t_1 tal que para todos excepto finitos de los naturales i se tiene $f_1(i) = t_1$. Esto implica que para estos i

$$\alpha_i = \langle t_1, \dots, t_1, r_i, r_{i+1} \dots\rangle$$

Es decir, que α_i comienza con una "tira" de t_1's. De todos estos α_i, sea K el largo de la tira de t_1's más corta. Si fuera que para algún i, α_i consiste exactamente de esta tira de t_1's de largo K, entonces es claro que α se estabiliza en tal α_i y el lema vale. Llamamos a este caso $(*)$.
Si no, debe ser que a partir de cierto i_1, todos los α_i, tienen un termino además de la tira de t_1's de largo K, y por lo tanto la función

$$f_2(i) = \alpha_{i_1+i}[K+1]$$

es bien definida. Es claro además, que para todo i, $h(f_2(i)) \leq h(t_1) < H$, y que por lo tanto, f_2 se estabiliza en algún valor t_2. Además,por construcción debe ser que $t_2 < t_1$. Iterando este proceso, formamos una sucesión de hidras

$$t_1 > t_2 > \dots$$

que por hipótesis de inducción debe estabilizarse. Pero esto no es posible, ya que cada término es estrictamente menor que el anterior, concluyendo que la sucesión debe ser finita. Como la única posibilidad de que no se pueda construir t_{i+1} es que en t_i se de el caso $(*)$, concluimos que este debe darse para algún i, completando la demostración del lema. □

Corolario 1. $(\mathcal{H}, \leq)$ es un orden bien fundado.

Todavía no queda claro, en esta forma de representar una hidra, cuales son las "cabezas" de esta. Para definir esto, nos apoyamos en el hecho de que en un árbol plantado, existe un único camino de la raíz a cada hoja. Lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 4. Dado $\alpha \in \mathcal{H}$, decimos que $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es la dirección de una cabeza de α si es tal que $x_0 = \alpha$, $x_n = \langle\rangle$, y para todo $i \in [n]$ se tiene que x_i es hijo x_{i-1}. Decimos entonces que la cabeza representada tiene profundidad n.

Nos gustaría definir el conjunto $R(\alpha)$ de las hidras que pueden resultar de una jugada válida desde α, sin embargo, estas dependen de en que "fase" esté el juego, es decir, de cuantos turnos hayan pasado. Sin embargo, esto no es problema, ya que podemos simplemente considerar $R(\alpha)$ como la unión de las hidras que resultan de α en un turno i para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5. Dado $\alpha \in \mathcal{H}$, denotamos por $R(\alpha)$ el conjunto de hidras que se pueden alcanzar desde α mediante a una jugada del Juego de la Hidra, para alguna fase $i \in \mathbb{N}$. Note que sigue de las reglas del juego que $R(\langle\rangle) = \{\langle\rangle\}$.

Lema 2. Si $\alpha \in \mathcal{H} \setminus \{\langle\rangle\}$, $\alpha' \in R(\alpha) \Rightarrow \alpha' < \alpha$.

Demostración. Procedemos por inducción por sobre la profundidad p de la cabeza cortada. Si $p = 1$, entonces la cabeza tiene dirección $(\alpha, \langle\rangle)$ y en consecuencia $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_n, \langle\rangle\rangle$, para algunos $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{H}$, luego, por las reglas del juego $\alpha' = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle < \alpha$.
Si $p = 2$, la dirección es de la forma $(\alpha, x, \langle\rangle)$, y por lo tanto x debe ser de la forma $\langle s_1, \ldots, s_r, \langle\rangle\rangle$ y α de la forma

$$\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, \underbrace{x, \ldots, x}_{k \text{ veces}}, a_i, \ldots, a_n\rangle$$

y en consecuencia α' es de la forma

$$\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, \underbrace{x, \ldots, x}_{k-1 \text{ veces}}, y, \ldots\rangle$$

donde y es o bien una de las muchas copias de $\langle s_1, \ldots, s_r\rangle$, o a_j con $i \leq j \leq n$. En cualquier caso $y < x$ y concluimos $\alpha' < \alpha$.

Luego, suponga $p > 2$ y que el lema se cumple para $p - 1$. Luego, debe ser que la dirección es de la forma $(\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_p)$ y entonces α es de la forma

$$\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k \text{ veces}}, a_i, \ldots, a_n \rangle$$

y como $p \geq 3$ se sigue por reglas del juego, que α' debe ser de la forma

$$\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k-1 \text{ veces}}, y, \ldots \rangle$$

donde o bien $y = x_1'$, el resultado de cortar la cabeza con dirección $(x_1, \ldots, x_p)$ de x_1, que como esta tiene profundidad $p - 1$, se sigue por hipótesis de inducción que $x_1' < x_1$, y por lo tanto $\alpha' < \alpha$. O $y = a_j$ con $i \leq j \leq n$, también concluyendo $\alpha' < \alpha$. □

Teorema 1. Cualquier estrategia del Juego de la Hidra es ganadora.

Demostración. Sigue de los lemas anteriores. □

Referencias

[1] L. Kirby and J. Paris. Accessible independence results for peano arithmetic. *BULLETIN OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY*, 14:725–731, 1982.