

BRUTE  
UDESC

Eliton Machado da Silva, Enzo de Almeida Rodrigues, Eric Grochowicz,  
João Vitor Frölich, João Marcos de Oliveira e Rafael Granza de Mello

5 de janeiro de 2024

# Índice

# Capítulo 1

## Estruturas de Dados

### 1.1 Disjoint Set Union

#### 1.1.1 DSU Completo

DSU com capacidade de adicionar e remover vértices.

**EXTREMAMENTE PODEROSO!**

Funciona de maneira off-line, recebendo as operações e dando as respostas das consultas no retorno da função **solve()**

- Complexidade de tempo:  $O(Q * \log(Q) * \log(N))$ ; Onde Q é o número de consultas e N o número de nodos

Roda em 0,6ms para  $3 * 10^5$  queries e nodos com printf e scanf.

Possivelmente aguenta  $10^6$  em 3s

```
struct full_dsu {  
    struct change {  
        int node, old_size;
```

```
    };  
    struct query {  
        int l, r, u, v, type;
```

```

};
stack<change> changes;
map<pair<int, int>, vector<query>> edges;
vector<query> queries;
vector<int> parent, size;
int number_of_sets, time;

full_dsu(int n) {
    time = 0;
    size.resize(n + 5, 1);
    number_of_sets = n;
    loop(i, 0, n + 5) parent.push_back(i);
}

int get(int a) {
    return (parent[a] == a ? a : get(parent[a]));
}

bool same(int a, int b) {
    return get(a) == get(b);
}

void checkpoint() {
    changes.push({-2, 0});
}

void join(int a, int b) {
    a = get(a);
    b = get(b);
    if (a == b) {
        return;
    }
    if (size[a] > size[b]) {
        swap(a, b);
    }
    changes.push({a, size[b]});
    parent[a] = b;
    size[b] += size[a];
    --number_of_sets;
}

void rollback() {
    while (!changes.empty()) {

```

```

        auto ch = changes.top();
        changes.pop();
        if (ch.node == -2) {
            break;
        }
        size[parent[ch.node]] = ch.old_size;
        parent[ch.node] = ch.node;
        ++number_of_sets;
    }
}

void ord(int &a, int &b) {
    if (a > b) {
        swap(a, b);
    }
}

void add(int u, int v) {
    ord(u, v);
    edges[{u, v}].push_back({time++, (int)1e9, u, v, 0});
}

void remove(int u, int v) {
    ord(u, v);
    edges[{u, v}].back().r = time++;
}

// consulta se dois vertices estao no mesmo
// grupo
void question(int u, int v) {
    ord(u, v);
    queries.push_back({time, time, u, v, 1});
    ++time;
}

// consulta a quantidade de grupos distintos
void question() {
    queries.push_back({time, time, 0, 0, 1});
    ++time;
}

```

```

vector<int> solve() {
    for (auto [p, v] : edges) {
        queries.insert(queries.end(), all(v));
    }
    vector<int> vec(time, -1), ans;
    run(queries, 0, time, vec);
    for (int i : vec) {
        if (i != -1) {
            ans.push_back(i);
        }
    }
    return ans;
}

void run(const vector<query> &qrs, int l, int r, vector<int>
&ans) {
    if (l > r) {
        return;
    }
    checkpoint();
    vector<query> qrs_aux;
    for (auto &q : qrs) {
        if (!q.type && q.l <= l && r <= q.r) {
            join(q.u, q.v);

```

```

        } else if (r < q.l || l > q.r) {
            continue;
        } else {
            qrs_aux.push_back(q);
        }
    }
    if (l == r) {
        for (auto &q : qrs) {
            if (q.type && q.l == l) {
                ans[l] = number_of_sets;
                // numero de grupos nesse tempo
                // ans[l] = same(q.u, q.v);
                // se u e v estao no mesmo grupo
            }
        }
        rollback();
        return;
    }
    int m = (l + r) / 2;
    run(qrs_aux, l, m, ans);
    run(qrs_aux, m + 1, r, ans);
    rollback();
}
};

```

### 1.1.2 DSU Rollback

Desfaz as últimas K uniões

- Complexidade de tempo:  $O(K)$ .

É possível usar um checkpoint, bastando chamar **rollback()** para ir até o último checkpoint.

O rollback não altera a complexidade, uma vez que  $K \leq \text{queries}$ .

## Só funciona sem compressão de caminho

- Complexidade de tempo:  $O(\log(N))$

```

struct rollback_dsu {
    struct change {
        int node, old_size;
    };
    stack<change> changes;
    vector<int> parent, size;
    int number_of_sets;

    rollback_dsu(int n) {
        size.resize(n + 5, 1);
        number_of_sets = n;
        for (int i = 0; i < n + 5; ++i) {
            parent.push_back(i);
        }

        int get(int a) {
            return (a == parent[a]) ? a : get(parent[a]);
        }
        bool same(int a, int b) {
            return get(a) == get(b);
        }
        void checkpoint() {
            changes.push({-2, 0});
        }

        void join(int a, int b) {
            a = get(a);
            b = get(b);
            if (a == b) {
                changes.push({-1, -1});
            }
        }
    };

```

```

        return;
    }
    if (size[a] > size[b]) {
        swap(a, b);
    }
    changes.push({a, size[b]});
    parent[a] = b;
    size[b] += size[a];
    --number_of_sets;
}

void rollback(int qnt = 1 << 31) {
    for (int i = 0; i < qnt; ++i) {
        auto ch = changes.top();
        changes.pop();
        if (ch.node == -1) {
            continue;
        }
        if (ch.node == -2) {
            if (qnt == 1 << 31) {
                break;
            }
            --i;
            continue;
        }
        size[parent[ch.node]] = ch.old_size;
        parent[ch.node] = ch.node;
        ++number_of_sets;
    }
};

```

### 1.1.3 DSU Simples

Verifica se dois itens pertencem a um mesmo grupo.

- Complexidade de tempo:  $O(1)$  amortizado.

Une grupos.

- Complexidade de tempo:  $O(1)$  amortizado.

```
struct DSU {
    vector<int> pa, sz;
    DSU(int n) : pa(n + 1), sz(n + 1, 1) {
        iota(pa.begin(), pa.end(), 0);
    }
    int root(int a) {
        return pa[a] = (a == pa[a] ? a : root(pa[a]));
    }
    bool find(int a, int b) {
        return root(a) == root(b);
    }
    void uni(int a, int b) {
```

```
        int ra = root(a), rb = root(b);
        if (ra == rb) {
            return;
        }
        if (sz[ra] > sz[rb]) {
            swap(ra, rb);
        }
        pa[ra] = rb;
        sz[rb] += sz[ra];
    }
};
```

### 1.1.4 DSU Bipartido

DSU para grafo bipartido, é possível verificar se uma aresta é possível antes de adicioná-la.

Para todas as operações:

- Complexidade de tempo:  $O(1)$  amortizado.

```

struct bipartite_dsu {
    vector<int> parent;
    vector<int> color;
    int size;
    bipartite_dsu(int n) {
        size = n;
        color.resize(n + 5, 0);
        for (int i = 0; i < n + 5; ++i) {
            parent.push_back(i);
        }
    }

    pair<int, bool> get(int a) {
        if (parent[a] == a) {
            return {a, 0};
        }
        auto val = get(parent[a]);
        parent[a] = val.fi;
        color[a] = (color[a] + val.se) % 2;
        return {parent[a], color[a]};
    }
}

```

```

bool same_color(int a, int b) {
    get(a);
    get(b);
    return color[a] == color[b];
}
bool same_group(int a, int b) {
    get(a);
    get(b);
    return parent[a] == parent[b];
}
bool possible_edge(int a, int b) {
    return !same_color(a, b) || !same_group(a, b);
}

void join(int a, int b) {
    auto val_a = get(a), val_b = get(b);
    parent[val_a.fi] = val_b.fi;
    color[val_a.fi] = (val_a.se + val_b.se + 1) % 2;
}
};

```

## 1.2 Operation Queue

Fila que armazena o resultado do operatório dos itens.

\* Complexidade de tempo (Push):  $O(1)$

\* Complexidade de tempo (Pop):  $O(1)$



```

template <typename T> struct op_queue {
    stack<pair<T, T>> s1, s2;
    T result;
    T op(T a, T b) {
        return a; // TODO: op to compare
        // min(a, b);
        // gcd(a, b);
        // lca(a, b);
    }
    T get() {
        if (s1.empty() || s2.empty()) {
            return result = s1.empty() ? s2.top().second :
                s1.top().second;
        } else {
            return result = op(s1.top().second, s2.top().second);
        }
    }
    void add(T element) {

```

```

        result = s1.empty() ? element : op(element, s1.top().second);
        s1.push({element, result});
    }
    void remove() {
        if (s2.empty()) {
            while (!s1.empty()) {
                T elem = s1.top().first;
                s1.pop();
                T result = s2.empty() ? elem : op(elem,
                    s2.top().second);
                s2.push({elem, result});
            }
        }
        T remove_elem = s2.top().first;
        s2.pop();
    }
};

```

### 1.3 Interval Tree

**Por Rafael Granza de Mello**

Estrutura que trata intersecções de intervalos.

Capaz de retornar todos os intervalos que intersectam [L, R]. **L e R inclusos**

Contém funções insert(L, R, ID), erase(L, R, ID) , overlaps(L, R) e find(L, R, ID).

É necessário inserir e apagar indicando tanto os limites quanto o ID do intervalo.

- Complexidade de tempo:  $O(N * \log(N))$ .

Podem ser usadas as operações em Set:

- insert()
- erase()
- upper\_bound()
- etc

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace __gnu_pbds;

struct interval {
    long long lo, hi, id;
    bool operator<(const interval &i) const {
        return lo < i.lo || (lo == i.lo && hi < i.hi) ||
            (lo == i.lo && hi == i.hi && id < i.id);
    }
};

template <class CNI, class NI, class Cmp_Fn, class Allocator>
struct intervals_node_update {
    typedef long long metadata_type;
    int sz = 0;
    virtual CNI node_begin() const = 0;
    virtual CNI node_end() const = 0;

    inline vector<int> overlaps(const long long l, const long long r)
    {
        queue<CNI> q;
        q.push(node_begin());
        vector<int> vec;
        while (!q.empty()) {
            CNI it = q.front();
            q.pop();
            if (it == node_end()) {
                continue;
            }
            if (r >= (*it)->lo && l <= (*it)->hi) {
```

```
                vec.push_back((*it)->id);
            }
            CNI l_it = it.get_l_child();
            long long l_max = (l_it == node_end()) ? -INF :
                l_it.get_metadata();
            if (l_max >= l) {
                q.push(l_it);
            }
            if ((*it)->lo <= r) {
                q.push(it.get_r_child());
            }
        }
        return vec;
    }

    inline void operator()(NI it, CNI end_it) {
        const long long l_max =
            (it.get_l_child() == end_it) ? -INF :
                it.get_l_child().get_metadata();
        const long long r_max =
            (it.get_r_child() == end_it) ? -INF :
                it.get_r_child().get_metadata();
        const_cast<long long &>(it.get_metadata()) = max((*it)->hi,
            max(l_max, r_max));
    }
};

typedef tree<interval, null_type, less<interval>, rb_tree_tag,
intervals_node_update>
interval_tree;
```

## 1.4 Segment Tree

### 1.4.1 Segment Tree Lazy

Implementação padrão de Seg Tree com lazy update

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $2 * 4 * N = O(N)$

```
namespace seg {
    const int MAX = 2e5 + 5;
    const ll NEUTRAL = 0; // merge(a, neutral) = a
    ll merge(ll a, ll b) {
        return a + b;
    }
    int sz; // size of the array
    ll tree[4 * MAX], lazy[4 * MAX];
    int le(int n) {
        return 2 * n + 1;
    }
    int ri(int n) {
        return 2 * n + 2;
    }
    void push(int n, int esq, int dir) {
```

```
        if (lazy[n] == 0) {
            return;
        }
        tree[n] += lazy[n] * (dir - esq + 1);
        if (esq != dir) {
            lazy[le(n)] += lazy[n];
            lazy[ri(n)] += lazy[n];
        }
        lazy[n] = 0;
    }
    void build(span<const ll> v, int n, int esq, int dir) {
        if (esq == dir) {
            tree[n] = v[esq];
        } else {
            int mid = (esq + dir) / 2;
```

```

        build(v, le(n), esq, mid);
        build(v, ri(n), mid + 1, dir);
        tree[n] = merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}
void build(span<const ll> v) {
    sz = v.size();
    build(v, 0, 0, sz - 1);
}
ll query(int l, int r, int n = 0, int esq = 0, int dir = sz - 1) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l) {
        return NEUTRAL;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        return tree[n];
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;
    return merge(query(l, r, le(n), esq, mid), query(l, r, ri(n),
        mid + 1, dir));
}
void update(int l, int r, ll v, int n = 0, int esq = 0, int dir =
    sz - 1) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l) {
        return;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        lazy[n] += v;
        push(n, esq, dir);
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        update(l, r, v, le(n), esq, mid);
        update(l, r, v, ri(n), mid + 1, dir);
        tree[n] = merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}
}

```

### 1.4.2 Segment Tree

Implementação padrão de Seg Tree

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $4 * N = O(N)$

```

namespace seg {
    const int MAX = 2e5 + 5;
    int n;
    ll tree[4 * MAX];
    ll merge(ll a, ll b) {
        return a + b;
    }
    int le(int n) {
        return 2 * n + 1;
    }
    int ri(int n) {
        return 2 * n + 2;
    }
    void build(int n, int esq, int dir, const vector<ll> &v) {
        if (esq == dir) {
            tree[n] = v[esq];
        } else {
            int mid = (esq + dir) / 2;
            build(le(n), esq, mid, v);
            build(ri(n), mid + 1, dir, v);
            tree[n] = merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
        }
    }
    void build(const vector<ll> &v) {
        n = v.size();
        build(0, 0, n - 1, v);
    }
    ll query(int n, int esq, int dir, int l, int r) {
        if (esq > r || dir < l) {
            return 0;
        }

```

```

        if (l <= esq && dir <= r) {
            return tree[n];
        }
        int mid = (esq + dir) / 2;
        return merge(query(le(n), esq, mid, l, r), query(ri(n), mid +
            1, dir, l, r));
    }
    ll query(int l, int r) {
        return query(0, 0, n - 1, l, r);
    }
    void update(int n, int esq, int dir, int x, ll v) {
        if (esq > x || dir < x) {
            return;
        }
        if (esq == dir) {
            tree[n] = v;
        } else {
            int mid = (esq + dir) / 2;
            if (x <= mid) {
                update(le(n), esq, mid, x, v);
            } else {
                update(ri(n), mid + 1, dir, x, v);
            }
            tree[n] = merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
        }
    }
    void update(int x, ll v) {
        update(0, 0, n - 1, x, v);
    }
}

```

### 1.4.3 Segment Tree 2D

Segment Tree em 2 dimensões.

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N \cdot M)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N) \cdot \log(M))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N) \cdot \log(M))$
- Complexidade de espaço:  $4 * N * 4 * M = O(N \cdot M)$

```

const int MAX = 2505;

int n, m, mat[MAX][MAX], tree[4 * MAX][4 * MAX];

int le(int x) {
    return 2 * x + 1;
}
int ri(int x) {
    return 2 * x + 2;
}

void build_y(int nx, int lx, int rx, int ny, int ly, int ry) {
    if (ly == ry) {
        if (lx == rx) {
            tree[nx][ny] = mat[lx][ly];
        } else {
            tree[nx][ny] = tree[le(nx)][ny] + tree[ri(nx)][ny];
        }
    } else {
        int my = (ly + ry) / 2;
        build_y(nx, lx, rx, le(ny), ly, my);
        build_y(nx, lx, rx, ri(ny), my + 1, ry);
        tree[nx][ny] = tree[nx][le(ny)] + tree[nx][ri(ny)];
    }
}

void build_x(int nx, int lx, int rx) {
    if (lx != rx) {
        int mx = (lx + rx) / 2;
        build_x(le(nx), lx, mx);

```

```

        build_x(ri(nx), mx + 1, rx);
    }
    build_y(nx, lx, rx, 0, 0, m - 1);
}

void build() {
    build_x(0, 0, n - 1);
}

void update_y(int nx, int lx, int rx, int ny, int ly, int ry, int x,
int y, int v) {
    if (ly == ry) {
        if (lx == rx) {
            tree[nx][ny] = v;
        } else {
            tree[nx][ny] = tree[le(nx)][ny] + tree[ri(nx)][ny];
        }
    } else {
        int my = (ly + ry) / 2;
        if (y <= my) {
            update_y(nx, lx, rx, le(ny), ly, my, x, y, v);
        } else {
            update_y(nx, lx, rx, ri(ny), my + 1, ry, x, y, v);
        }
        tree[nx][ny] = tree[nx][le(ny)] + tree[nx][ri(ny)];
    }
}

void update_x(int nx, int lx, int rx, int x, int y, int v) {
    if (lx != rx) {
        int mx = (lx + rx) / 2;

```

```

        if (x <= mx) {
            update_x(le(nx), lx, mx, x, y, v);
        } else {
            update_x(ri(nx), mx + 1, rx, x, y, v);
        }
    }
    update_y(nx, lx, rx, 0, 0, m - 1, x, y, v);
}

void update(int x, int y, int v) {
    update_x(0, 0, n - 1, x, y, v);
}

int sum_y(int nx, int ny, int ly, int ry, int qly, int qry) {
    if (ry < qly || ly > qry) {
        return 0;
    }
    if (qly <= ly && ry <= qry) {
        return tree[nx][ny];
    }
}

```

```

        int my = (ly + ry) / 2;
        return sum_y(nx, le(ny), ly, my, qly, qry) + sum_y(nx, ri(ny), my
            + 1, ry, qly, qry);
    }
}

int sum_x(int nx, int lx, int rx, int qlx, int qrx, int qly, int qry)
{
    if (rx < qlx || lx > qrx) {
        return 0;
    }
    if (qlx <= lx && rx <= qrx) {
        return sum_y(nx, 0, 0, m - 1, qly, qry);
    }
    int mx = (lx + rx) / 2;
    return sum_x(le(nx), lx, mx, qlx, qrx, qly, qry) +
        sum_x(ri(nx), mx + 1, rx, qlx, qrx, qly, qry);
}

int sum(int lx, int rx, int ly, int ry) {
    return sum_x(0, 0, n - 1, lx, rx, ly, ry);
}

```

#### 1.4.4 Segment Tree Beats Max And Sum Update

Seg Tree que suporta update de maximo, update de soma e query de soma.

Utiliza uma fila de lazy para diferenciar os updates

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $2 * 4 * N = O(N)$

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

#define ll long long
#define INF 1e9
#define fi first
#define se second

typedef pair<int, int> ii;

struct Node {
    int m1 = INF, m2 = INF, cont = 0;
    ll soma = 0;
    queue<ii> lazy;

    void set(int v) {
        m1 = v;
        cont = 1;
        soma = v;
    }

    void merge(Node a, Node b) {
        m1 = min(a.m1, b.m1);
        m2 = INF;
        if (a.m1 != b.m1) {
            m2 = min(m2, max(a.m1, b.m1));
        }
        if (a.m2 != m1) {
            m2 = min(m2, a.m2);
        }
        if (b.m2 != m1) {
            m2 = min(m2, b.m2);
        }
        cont = (a.m1 == m1 ? a.cont : 0) + (b.m1 == m1 ? b.cont : 0);
        soma = a.soma + b.soma;
    }

    void print() {

```

```

        printf("%d %d %d %lld\n", m1, m2, cont, soma);
    }
};

int n, q;
vector<Node> tree;

int le(int n) {
    return 2 * n + 1;
}

int ri(int n) {
    return 2 * n + 2;
}

void push(int n, int esq, int dir) {
    while (!tree[n].lazy.empty()) {
        ii p = tree[n].lazy.front();
        tree[n].lazy.pop();
        int op = p.fi, v = p.se;
        if (op == 0) {
            if (v <= tree[n].m1) {
                continue;
            }
            tree[n].soma += (ll)abs(tree[n].m1 - v) * tree[n].cont;
            tree[n].m1 = v;
            if (esq != dir) {
                tree[le(n)].lazy.push({0, v});
                tree[ri(n)].lazy.push({0, v});
            }
        } else if (op == 1) {
            tree[n].soma += v * (dir - esq + 1);
            tree[n].m1 += v;
            tree[n].m2 += v;
            if (esq != dir) {
                tree[le(n)].lazy.push({1, v});
                tree[ri(n)].lazy.push({1, v});
            }
        }
    }
}

```



```

    }
}

void build(int n, int esq, int dir, vector<int> &v) {
    if (esq == dir) {
        tree[n].set(v[esq]);
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        build(le(n), esq, mid, v);
        build(ri(n), mid + 1, dir, v);
        tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}

void build(vector<int> &v) {
    build(0, 0, n - 1, v);
}

// ai = max(ai, mi) em [l, r]
void update(int n, int esq, int dir, int l, int r, int mi) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l || mi <= tree[n].m1) {
        return;
    }
    if (l <= esq && dir <= r && mi < tree[n].m2) {
        tree[n].soma += (ll)abs(tree[n].m1 - mi) * tree[n].cont;
        tree[n].m1 = mi;
        if (esq != dir) {
            tree[le(n)].lazy.push({0, mi});
            tree[ri(n)].lazy.push({0, mi});
        }
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        update(le(n), esq, mid, l, r, mi);
        update(ri(n), mid + 1, dir, l, r, mi);
        tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}

void update(int l, int r, int mi) {
    update(0, 0, n - 1, l, r, mi);
}

```

```

// soma v em [l, r]
void upsoma(int n, int esq, int dir, int l, int r, int v) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l) {
        return;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        tree[n].soma += v * (dir - esq + 1);
        tree[n].m1 += v;
        tree[n].m2 += v;
        if (esq != dir) {
            tree[le(n)].lazy.push({1, v});
            tree[ri(n)].lazy.push({1, v});
        }
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        upsoma(le(n), esq, mid, l, r, v);
        upsoma(ri(n), mid + 1, dir, l, r, v);
        tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}

void upsoma(int l, int r, int v) {
    upsoma(0, 0, n - 1, l, r, v);
}

// soma de [l, r]
int query(int n, int esq, int dir, int l, int r) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l) {
        return 0;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        return tree[n].soma;
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;
    return query(le(n), esq, mid, l, r) + query(ri(n), mid + 1, dir, l, r);
}

int query(int l, int r) {
    return query(0, 0, n - 1, l, r);
}

```

```
int main() {
    cin >> n;
```

```
tree.assign(4 * n, Node());
build(v);
}
```

### 1.4.5 Segment Tree Beats Max Update

Seg Tree que suporta update de maximo e query de soma

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $2 * 4 * N = O(N)$

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

#define ll long long
#define INF 1e9

struct Node {
    int m1 = INF, m2 = INF, cont = 0, lazy = 0;
    ll soma = 0;

    void set(int v) {
        m1 = v;
        cont = 1;
```

```
soma = v;
}

void merge(Node a, Node b) {
    m1 = min(a.m1, b.m1);
    m2 = INF;
    if (a.m1 != b.m1) {
        m2 = min(m2, max(a.m1, b.m1));
    }
    if (a.m2 != m1) {
        m2 = min(m2, a.m2);
    }
    if (b.m2 != m1) {
```

```

        m2 = min(m2, b.m2);
    }
    cont = (a.m1 == m1 ? a.cont : 0) + (b.m1 == m1 ? b.cont : 0);
    soma = a.soma + b.soma;
}

void print() {
    printf("%d %d %d %lld %d\n", m1, m2, cont, soma, lazy);
}

};

int n, q;
vector<Node> tree;

int le(int n) {
    return 2 * n + 1;
}
int ri(int n) {
    return 2 * n + 2;
}

void push(int n, int esq, int dir) {
    if (tree[n].lazy <= tree[n].m1) {
        return;
    }
    tree[n].soma += (ll)abs(tree[n].m1 - tree[n].lazy) * tree[n].cont;
    tree[n].m1 = tree[n].lazy;
    if (esq != dir) {
        tree[le(n)].lazy = max(tree[le(n)].lazy, tree[n].lazy);
        tree[ri(n)].lazy = max(tree[ri(n)].lazy, tree[n].lazy);
    }
    tree[n].lazy = 0;
}

void build(int n, int esq, int dir, vector<int> &v) {
    if (esq == dir) {
        tree[n].set(v[esq]);
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        build(le(n), esq, mid, v);
        build(ri(n), mid + 1, dir, v);
    }
}

```

```

        tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}

void build(vector<int> &v) {
    build(0, 0, n - 1, v);
}

// ai = max(ai, mi) em [l, r]
void update(int n, int esq, int dir, int l, int r, int mi) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l || mi <= tree[n].m1) {
        return;
    }
    if (l <= esq && dir <= r && mi < tree[n].m2) {
        tree[n].lazy = mi;
        push(n, esq, dir);
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        update(le(n), esq, mid, l, r, mi);
        update(ri(n), mid + 1, dir, l, r, mi);
        tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}

void update(int l, int r, int mi) {
    update(0, 0, n - 1, l, r, mi);
}

// soma de [l, r]
int query(int n, int esq, int dir, int l, int r) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l) {
        return 0;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        return tree[n].soma;
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;
    return query(le(n), esq, mid, l, r) + query(ri(n), mid + 1, dir,
        l, r);
}

int query(int l, int r) {

```

```

    return query(0, 0, n - 1, l, r);
}

int main() {

```

```

    cin >> n;
    tree.assign(4 * n, Node());
}

```

### 1.4.6 Segment Tree Esparsa

Consultas e atualizações em intervalos.

#### Seg Tree

Implementação padrão de Seg Tree

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $4 * N = O(N)$

#### Seg Tree Lazy

Implementação padrão de Seg Tree com lazy update

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $2 * 4 * N = O(N)$

**Sparse Seg Tree**

Seg Tree Esparsa:

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(1)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$

**Persistent Seg Tree**

Seg Tree Esparsa com histórico de Updates:

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N * \log(N))$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- **Para fazer consulta em um tempo específico basta indicar o tempo na query**

**Seg Tree Beats**

Seg Tree que suporta update de maximo e query de soma

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $2 * 4 * N = O(N)$

**Seg Tree Beats Max and Sum update**

Seg Tree que suporta update de maximo, update de soma e query de soma.

Utiliza uma fila de lazy para diferenciar os updates

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $2 * 4 * N = O(N)$

```
const int SEGMAX = 8e6 + 5; // should be Q * log(DIR-ESQ+1)
const ll ESQ = 0, DIR = 1e9 + 7;
```

```
struct seg {
    ll tree[SEGMAX];
    int R[SEGMAX], L[SEGMAX],
        ptr = 2; // 0 is NULL; 1 is First Root
    ll op(ll a, ll b) {
        return (a + b) % MOD;
    }
    int le(int i) {
        if (L[i] == 0) {
            L[i] = ptr++;
        }
        return L[i];
    }
    int ri(int i) {
        if (R[i] == 0) {
            R[i] = ptr++;
        }
        return R[i];
    }
};
```

```

    }
    ll query(ll l, ll r, int n = 1, ll esq = ESQ, ll dir = DIR) {
        if (r < esq || dir < l) {
            return 0;
        }
        if (l <= esq && dir <= r) {
            return tree[n];
        }
        ll mid = (esq + dir) / 2;
        return op(query(l, r, le(n), esq, mid), query(l, r, ri(n),
            mid + 1, dir));
    }
    void update(ll x, ll v, int n = 1, ll esq = ESQ, ll dir = DIR) {
        if (esq == dir) {
            tree[n] = (tree[n] + v) % MOD;
        } else {
            ll mid = (esq + dir) / 2;
            if (x <= mid) {
                update(x, v, le(n), esq, mid);
            } else {
                update(x, v, ri(n), mid + 1, dir);
            }
        }
    }
};
```

```

    }
    tree[n] = op(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
}

```

```

    }
};

```

### 1.4.7 Segment Tree Persistente

Seg Tree Esparsa com histórico de Updates:

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N \cdot \log(N))$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$
- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- **Para fazer consulta em um tempo específico basta indicar o tempo na query**

```

namespace seg {
    const ll ESQ = 0, DIR = 1e9 + 7;
    struct node {
        ll v = 0;
        node *l = NULL, *r = NULL;
        node() {}
        node(ll v) : v(v) {}
        node(node *l, node *r) : l(l), r(r) {
            v = l->v + r->v;
        }
        void apply() {
            if (l == NULL) {
                l = new node();
            }
        }
    };
}

```

```

        if (r == NULL) {
            r = new node();
        }
    };
};
vector<node*> roots;
void build() {
    roots.push_back(new node());
}
void push(node *n, int esq, int dir) {
    if (esq != dir) {
        n->apply();
    }
}
// sum v on x
node *update(node *n, int esq, int dir, int x, int v) {

```

```

    push(n, esq, dir);
    if (esq == dir) {
        return new node(n->v + v);
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;
    if (x <= mid) {
        return new node(update(n->l, esq, mid, x, v), n->r);
    } else {
        return new node(n->l, update(n->r, mid + 1, dir, x, v));
    }
}
int update(int root, int pos, int val) {
    node *novo = update(roots[root], ESQ, DIR, pos, val);
    roots.push_back(novo);
    return roots.size() - 1;
}
// sum in [L, R]
ll query(node *n, int esq, int dir, int l, int r) {
    push(n, esq, dir);
    if (esq > r || dir < l) {
        return 0;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        return n->v;
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;

```

```

        return query(n->l, esq, mid, l, r) + query(n->r, mid + 1,
            dir, l, r);
    }
    ll query(int root, int l, int r) {
        return query(roots[root], ESQ, DIR, l, r);
    }
    // kth min number in [L, R] (l_root can not be
    // 0)
    int kth(node *L, node *R, int esq, int dir, int k) {
        push(L, esq, dir);
        push(R, esq, dir);
        if (esq == dir) {
            return esq;
        }
        int mid = (esq + dir) / 2;
        int cont = R->l->v - L->l->v;
        if (cont >= k) {
            return kth(L->l, R->l, esq, mid, k);
        } else {
            return kth(L->r, R->r, mid + 1, dir, k - cont);
        }
    }
    int kth(int l_root, int r_root, int k) {
        return kth(roots[l_root - 1], roots[r_root], ESQ, DIR, k);
    }
};

```

#### 1.4.8 Segment Tree Kadani

Implementação de uma Seg Tree que suporta update de soma e query de soma máxima em intervalo.

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N)$
- Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$



- Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$
- Complexidade de espaço:  $4 * N = O(N)$

```

namespace seg {
    const int MAX = 1e5 + 5;
    struct node {
        ll pref, suff, sum, best;
    };
    node new_node(ll v) {
        return node{v, v, v, v};
    }
    const node NEUTRAL = {0, 0, 0, 0};
    node tree[4 * MAX];
    node merge(node a, node b) {
        ll pref = max(a.pref, a.sum + b.pref);
        ll suff = max(b.suff, b.sum + a.suff);
        ll sum = a.sum + b.sum;
        ll best = max(a.suff + b.pref, max(a.best, b.best));
        return node{pref, suff, sum, best};
    }

    int n;
    int le(int n) {
        return 2 * n + 1;
    }
    int ri(int n) {
        return 2 * n + 2;
    }
    void build(int n, int esq, int dir, const vector<ll> &v) {
        if (esq == dir) {
            tree[n] = new_node(v[esq]);
        } else {
            int mid = (esq + dir) / 2;
            build(le(n), esq, mid, v);
            build(ri(n), mid + 1, dir, v);
            tree[n] = merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
        }
    }
}

```

```

    }
}
void build(const vector<ll> &v) {
    n = v.size();
    build(0, 0, n - 1, v);
}
node query(int n, int esq, int dir, int l, int r) {
    if (esq > r || dir < l) {
        return NEUTRAL;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        return tree[n];
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;
    return merge(query(le(n), esq, mid, l, r), query(ri(n), mid + 1, dir, l, r));
}
ll query(int l, int r) {
    return query(0, 0, n - 1, l, r).best;
}
void update(int n, int esq, int dir, int x, ll v) {
    if (esq > x || dir < x) {
        return;
    }
    if (esq == dir) {
        tree[n] = new_node(v);
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        if (x <= mid) {
            update(le(n), esq, mid, x, v);
        } else {
            update(ri(n), mid + 1, dir, x, v);
        }
    }
}

```

```
        tree[n] = merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
    }
}
void update(int x, ll v) {
```

```
        update(0, 0, n - 1, x, v);
    }
}
```

1.5 Operation Stack

Pilha que armazena o resultado do operador dos itens.

- \* Complexidade de tempo (Push): O(1)
- \* Complexidade de tempo (Pop): O(1)

```
template <typename T> struct op_stack {
    stack<pair<T, T>> st;
    T result;
    T op(T a, T b) {
        return a; // TODO: op to compare
        // min(a, b);
        // gcd(a, b);
        // lca(a, b);
    }
    T get() {
        return result = st.top().second;
    }
};
```

```
    }
    void add(T element) {
        result = st.empty() ? element : op(element, st.top().second);
        st.push({element, result});
    }
    void remove() {
        T removed_element = st.top().first;
        st.pop();
    }
};
```

1.6 Fenwick Tree

Consultas e atualizações de soma em intervalo.

O vetor precisa obrigatoriamente estar indexado em 1.

\* Complexidade de tempo (Pre-processamento):  $O(N * \log(N))$

\* Complexidade de tempo (Consulta em intervalo):  $O(\log(N))$

\* Complexidade de tempo (Update em ponto):  $O(\log(N))$

\* Complexidade de espaço:  $2 * N = O(N)$

```
struct FenwickTree {
    int n;
    vector<int> tree;
    FenwickTree(int n) : n(n) {
        tree.assign(n, 0);
    }
    FenwickTree(vector<int> v) : FenwickTree(v.size()) {
        for (size_t i = 1; i < v.size(); i++) {
            update(i, v[i]);
        }
    }
    int lsONE(int x) {
        return x & (-x);
    }
    int query(int x) {
```

```
        int soma = 0;
        for (; x > 0; x -= lsONE(x)) {
            soma += tree[x];
        }
        return soma;
    }
    int query(int l, int r) {
        return query(r) - query(l - 1);
    }
    void update(int x, int v) {
        for (; x < n; x += lsONE(x)) {
            tree[x] += v;
        }
    }
};
```

## 1.7 LiChao Tree

Uma árvore de Funções. Retorna o  $F(x)$  máximo em um ponto  $X$ .

Para retornar o mínimo deve-se inserir o negativo da função e pegar o negativo do resultado.

Está pronta para usar função linear do tipo  $F(x) = mx + b$ .

Funciona para funções com a seguinte propriedade, sejam duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , uma vez que  $f(x)$  ganha/perde de  $g(x)$ ,  $f(x)$  vai continuar ganhando/perdendo de  $g(x)$ ,

ou seja  $f(x)$  e  $g(x)$  se intersectam apenas uma vez.

\* Complexidade de consulta :  $O(\log(N))$

\* Complexidade de update:  $O(\log(N))$

### LiChao Tree Sparse

O mesmo que a superior, no entanto suporta consultas com  $|x| \leq 1e18$ .

\* Complexidade de consulta :  $O(\log(\text{tamanho do intervalo}))$

\* Complexidade de update:  $O(\log(\text{tamanho do intervalo}))$

```
typedef long long ll;

const ll MAXN = 1e5 + 5, INF = 1e18 + 9;

struct Line {
    ll a, b = -INF;
    ll operator()(ll x) {
        return a * x + b;
    }
} tree[4 * MAXN];

int le(int n) {
    return 2 * n + 1;
}
int ri(int n) {
    return 2 * n + 2;
}

void insert(Line line, int n = 0, int l = 0, int r = MAXN) {
    int mid = (l + r) / 2;
    bool bl = line(l) < tree[n](l);
    bool bm = line(mid) < tree[n](mid);
    if (!bm) {
```

```
        swap(tree[n], line);
    }
    if (l == r) {
        return;
    }
    if (bl != bm) {
        insert(line, le(n), l, mid);
    } else {
        insert(line, ri(n), mid + 1, r);
    }
}

ll query(int x, int n = 0, int l = 0, int r = MAXN) {
    if (l == r) {
        return tree[n](x);
    }
    int mid = (l + r) / 2;
    if (x < mid) {
        return max(tree[n](x), query(x, le(n), l, mid));
    } else {
        return max(tree[n](x), query(x, ri(n), mid + 1, r));
    }
}
```

```

typedef long long ll;

const ll MAXN = 1e5 + 5, INF = 1e18 + 9, MAXR = 1e18;

struct Line {
    ll a, b = -INF;
    __int128 operator()(ll x) {
        return (__int128)a * x + b;
    }
} tree[4 * MAXN];
int idx = 0, L[4 * MAXN], R[4 * MAXN];

int le(int n) {
    if (!L[n]) {
        L[n] = ++idx;
    }
    return L[n];
}

int ri(int n) {
    if (!R[n]) {
        R[n] = ++idx;
    }
    return R[n];
}

void insert(Line line, int n = 0, ll l = -MAXR, ll r = MAXR) {
    ll mid = (l + r) / 2;

```

```

    bool bl = line(l) < tree[n](l);
    bool bm = line(mid) < tree[n](mid);
    if (!bm) {
        swap(tree[n], line);
    }
    if (l == r) {
        return;
    }
    if (bl != bm) {
        insert(line, le(n), l, mid);
    } else {
        insert(line, ri(n), mid + 1, r);
    }
}

__int128 query(int x, int n = 0, ll l = -MAXR, ll r = MAXR) {
    if (l == r) {
        return tree[n](x);
    }
    ll mid = (l + r) / 2;
    if (x < mid) {
        return max(tree[n](x), query(x, le(n), l, mid));
    } else {
        return max(tree[n](x), query(x, ri(n), mid + 1, r));
    }
}

```

## 1.8 Kd Fenwick Tree

### KD Fenwick Tree

Fenwick Tree em K dimensoes.

\* Complexidade de update:  $O(\log^k(N))$ .

\* Complexidade de query:  $O(\log^k(N))$ .

```
const int MAX = 10;
ll tree[MAX][MAX][MAX][MAX][MAX][MAX][MAX][MAX]; // insira a
    quantidade
                                // necessaria de
                                dimensoes

int lsONE(int x) {
    return x & (-x);
}

ll query(vector<int> s, int pos) {
    ll sum = 0;
    while (s[pos] > 0) {
        if (pos < s.size() - 1) {
            sum += query(s, pos + 1);
        } else {
            sum +=
                tree[s[0]][s[1]][s[2]][s[3]][s[4]][s[5]][s[6]][s[7]];
        }
    }
}
```

```
    }
    s[pos] -= lsONE(s[pos]);
}
return sum;
}

void update(vector<int> s, int pos, int v) {
    while (s[pos] < MAX + 1) {
        if (pos < s.size() - 1) {
            update(s, pos + 1, v);
        } else {
            tree[s[0]][s[1]][s[2]][s[3]][s[4]][s[5]][s[6]][s[7]] += v;
        }
    }
    s[pos] += lsONE(s[pos]);
}
}
```

## 1.9 Ordered Set

Set com operações de busca por ordem e índice.

Pode ser usado como um set normal, a principal diferença são duas novas operações possíveis:

- `find_by_order(x)`: retorna o item na posição `x`.
- `order_of_key(k)`: retorna o número de elementos menores que `k`. (o índice de `k`)

```

#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/trie_policy.hpp>

using namespace __gnu_pbds;
typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update> ordered_set;

ordered_set X;
X.insert(1);
X.insert(2);
X.insert(4);
X.insert(8);
X.insert(16);

cout<<*X.find_by_order(1)<<endl; // 2
cout<<*X.find_by_order(2)<<endl; // 4
cout<<*X.find_by_order(4)<<endl; // 16
cout<<(end(X)==X.find_by_order(6))<<endl; // true

cout<<X.order_of_key(-5)<<endl; // 0
cout<<X.order_of_key(1)<<endl; // 0
cout<<X.order_of_key(3)<<endl; // 2
cout<<X.order_of_key(4)<<endl; // 2
cout<<X.order_of_key(400)<<endl; // 5

#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/trie_policy.hpp>

using namespace __gnu_pbds;

template <typename T>
typedef tree<T, null_type, less<T>, rb_tree_tag,
            tree_order_statistics_node_update>
            ordered_set;

```

## 1.10 MergeSort Tree

Árvore que resolve queries que envolvam ordenação em range.

- Complexidade de construção :  $O(N * \log(N))$
- Complexidade de consulta :  $O(\log^2(N))$

### MergeSort Tree com Update Pontual

Resolve Queries que envolvam ordenação em Range. (**COM UPDATE**)

**1 segundo para vetores de tamanho  $3 * 10^5$**

- Complexidade de construção :  $O(N * \log^2(N))$
- Complexidade de consulta :  $O(\log^2(N))$
- Complexidade de update :  $O(\log^2(N))$

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>

using namespace __gnu_pbds;

namespace mergesort {
    typedef tree<ii, null_type, less<ii>, rb_tree_tag,
        tree_order_statistics_node_update>
        ordered_set;
    const int MAX = 1e5 + 5;

    int n;
    ordered_set mgtree[4 * MAX];
    vi values;

    int le(int n) {
        return 2 * n + 1;
    }
    int ri(int n) {
        return 2 * n + 2;
    }
}
```

```
}

ordered_set join(ordered_set set_l, ordered_set set_r) {
    for (auto v : set_r) {
        set_l.insert(v);
    }
    return set_l;
}

void build(int n, int esq, int dir) {
    if (esq == dir) {
        mgtree[n].insert(ii(values[esq], esq));
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        build(le(n), esq, mid);
        build(ri(n), mid + 1, dir);
        mgtree[n] = join(mgtree[le(n)], mgtree[ri(n)]);
    }
}

void build(vi &v) {
```



```

    n = v.size();
    values = v;
    build(0, 0, n - 1);
}

int less(int n, int esq, int dir, int l, int r, int k) {
    if (esq > r || dir < 1) {
        return 0;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        return mgtree[n].order_of_key({k, -1});
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;
    return less(le(n), esq, mid, l, r, k) + less(ri(n), mid + 1,
        dir, l, r, k);
}

int less(int l, int r, int k) {
    return less(0, 0, n - 1, l, r, k);
}

void update(int n, int esq, int dir, int x, int v) {
    if (esq > x || dir < x) {
        return;
    }
    if (esq == dir) {
        mgtree[n].clear(), mgtree[n].insert(ii(v, x));
    } else {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        if (x <= mid) {
            update(le(n), esq, mid, x, v);
        } else {
            update(ri(n), mid + 1, dir, x, v);
        }
        mgtree[n].erase(ii(values[x], x));
    }
}

```

```

        mgtree[n].insert(ii(v, x));
    }
}

void update(int x, int v) {
    update(0, 0, n - 1, x, v);
    values[x] = v;
}

// ordered_set debug_query(int n, int esq, int
// dir, int l, int r) {
//     if (esq > r || dir < 1) return
//     ordered_set(); if (l <= esq && dir <=
//     r) return mgtree[n]; int mid = (esq +
//     dir) / 2; return
//     join(debug_query(le(n), esq, mid, l,
//     r), debug_query(ri(n), mid+1, dir, l,
//     r));
// }
// ordered_set debug_query(int l, int r)
// {return debug_query(0, 0, n-1, l, r);}

// int greater(int n, int esq, int dir, int l,
// int r, int k) {
//     if (esq > r || dir < 1) return 0;
//     if (l <= esq && dir <= r) return
//     (r-l+1) - mgtree[n].order_of_key({k,
//     le8}); int mid = (esq + dir) / 2;
//     return greater(le(n), esq, mid, l, r,
//     k) + greater(ri(n), mid+1, dir, l, r,
//     k);
// }
// int greater(int l, int r, int k) {return
// greater(0, 0, n-1, l, r, k);}
};

```

```

namespace mergesort {
    const int MAX = 1e5 + 5;

    int n;
    vi mgtree[4 * MAX];

    int le(int n) {
        return 2 * n + 1;
    }
    int ri(int n) {
        return 2 * n + 2;
    }

    void build(int n, int esq, int dir, vi &v) {
        mgtree[n] = vi(dir - esq + 1, 0);
        if (esq == dir) {
            mgtree[n][0] = v[esq];
        } else {
            int mid = (esq + dir) / 2;
            build(le(n), esq, mid, v);
            build(ri(n), mid + 1, dir, v);
            merge(mgtree[le(n)].begin(),
                  mgtree[le(n)].end(),
                  mgtree[ri(n)].begin(),
                  mgtree[ri(n)].end(),
                  mgtree[n].begin());
        }
    }
    void build(vi &v) {
        n = v.size();
        build(0, 0, n - 1, v);
    }
}

```

```

int less(int n, int esq, int dir, int l, int r, int k) {
    if (esq > r || dir < l) {
        return 0;
    }
    if (l <= esq && dir <= r) {
        return lower_bound(mgtree[n].begin(), mgtree[n].end(), k)
            - mgtree[n].begin();
    }
    int mid = (esq + dir) / 2;
    return less(le(n), esq, mid, l, r, k) + less(ri(n), mid + 1,
        dir, l, r, k);
}

int less(int l, int r, int k) {
    return less(0, 0, n - 1, l, r, k);
}

// vi debug_query(int n, int esq, int dir, int
// l, int r) {
//     if (esq > r || dir < l) return vi();
//     if (l <= esq && dir <= r) return
//     mgtree[n]; int mid = (esq + dir) / 2;
//     auto vl = debug_query(le(n), esq, mid,
//     l, r); auto vr = debug_query(ri(n),
//     mid+1, dir, l, r); vi ans =
//     vi(vl.size() + vr.size());
//     merge(vl.begin(), vl.end(),
//           vr.begin(), vr.end(),
//           ans.begin());
//     return ans;
// }
// vi debug_query(int l, int r) {return
// debug_query(0, 0, n-1, l, r);}
};

```

## 1.11 Sparse Table

### 1.11.1 Disjoint Sparse Table

Resolve query de range para qualquer operação associativa em  $O(1)$ .

Pré-processamento em  $O(n \log n)$ .

```
struct dst {
    const int neutral = 1;
    #define comp(a, b) (a | b)
    vector<vector<int>>> t;
    dst(vector<int> v) {
        int n, k, sz = v.size();
        for (n = 1, k = 0; n < sz; n <= 1, k++)
            ;
        t.assign(k, vector<int>(n));
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            t[0][i] = i < sz ? v[i] : neutral;
        }
        for (int j = 0, len = 1; j <= k; j++, len <= 1) {
            for (int s = len; s < n; s += (len < 1)) {
                t[j][s] = v[s];
                t[j][s - 1] = v[s - 1];
            }
        }
    }
};
```

```
        for (int i = 1; i < len; i++) {
            t[j][s + i] = comp(t[j][s + i - 1], v[s + i]);
            t[j][s - 1 - i] = comp(v[s - 1 - i], t[j][s - i]);
        }
    }
}

int query(int l, int r) {
    if (l == r) {
        return t[0][r];
    }
    int i = 31 - __builtin_clz(l ^ r);
    return comp(t[i][l], t[i][r]);
};
```

### 1.11.2 Sparse Table

\*Read in [English](README.en.md)\*

Responde consultas de maneira eficiente em um conjunto de dados estáticos.

Realiza um pré-processamento para diminuir o tempo de cada consulta.

- Complexidade de tempo (Pré-processamento):  $O(N * \log(N))$

- Complexidade de tempo (Consulta para operações sem sobreposição amigável):  $O(N * \log(N))$
- Complexidade de tempo (Consulta para operações com sobreposição amigável):  $O(1)$
- Complexidade de espaço:  $O(N * \log(N))$

Exemplo de operações com sobreposição amigável:  $\max()$ ,  $\min()$ ,  $\gcd()$ ,  $f(x, y) = x$

```
struct SparseTable {
    int n, e;
    vector<vector<int>> st;
    SparseTable(vector<int> &v) : n(v.size()), e(floor(log2(n))) {
        st.assign(e + 1, vector<int>(n));
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            st[0][i] = v[i];
        }
        for (int i = 1; i <= e; i++) {
            for (int j = 0; j + (1 << i) <= n; j++) {
                st[i][j] = min(st[i - 1][j], st[i - 1][j + (1 << (i - 1))]);
            }
        }
    }
    // O(log(N)) Query for non overlap friendly
    // operations
    int logquery(int l, int r) {
```

```
        int res = 2e9;
        for (int i = e; i >= 0; i--) {
            if ((1 << i) <= r - l + 1) {
                res = min(res, st[i][l]);
                l += 1 << i;
            }
        }
        return res;
    }
    // O(1) Query for overlap friendly operations
    // ex: max(), min(), gcd(), f(x, y) = x
    int query(int l, int r) {
        // if (l > r) return 2e9;
        int i = ilogb(r - l + 1);
        return min(st[i][l], st[i][r - (1 << i) + 1]);
    }
};
```

## Capítulo 2

# Grafos

### 2.1 Matching

#### 2.1.1 Hungaro

Resolve o problema de Matching para uma matriz  $A[n][m]$ , onde  $n \leq m$ .

A implementação minimiza os custos, para maximizar basta multiplicar os pesos por -1.

**A matriz de entrada precisa ser indexada em 1 !!!**

O vetor `result` guarda os pares do matching.

Complexidade de tempo:  $O(n^2 * m)$

```
const ll INF = 1e18 + 18;

vector<pair<int, int>> result;

ll hungarian(int n, int m, vector<vector<int>> &A) {
    vector<int> u(n + 1), v(m + 1), p(m + 1), way(m + 1);
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
```

```
        p[0] = i;
        int j0 = 0;
        vector<int> minv(m + 1, INF);
        vector<char> used(m + 1, false);
        do {
            used[j0] = true;
            ll i0 = p[j0], delta = INF, j1;
```

```

    for (int j = 1; j <= m; j++) {
        if (!used[j]) {
            int cur = A[i0][j] - u[i0] - v[j];
            if (cur < minv[j]) {
                minv[j] = cur, way[j] = j0;
            }
            if (minv[j] < delta) {
                delta = minv[j], j1 = j;
            }
        }
    }
    for (int j = 0; j <= m; j++) {
        if (used[j]) {
            u[p[j]] += delta, v[j] -= delta;
        } else {
            minv[j] -= delta;
        }
    }
    j0 = j1;
} while (p[j0] != 0);
do {
    int j1 = way[j0];
    p[j0] = p[j1];
    j0 = j1;
} while (j0);
}
for (int i = 1; i <= m; i++) {
    result.emplace_back(p[i], i);
}
return -v[0];
}

```

## 2.2 LCA

Algoritmo de Lowest Common Ancestor usando EulerTour e Sparse Table

Complexidade de tempo:

- $O(N \log(N))$  Preprocessing
- $O(1)$  Query LCA

Complexidade de espaço:  $O(N \log(N))$

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

#define INF 1e9
#define fi first
#define se second

typedef pair<int, int> ii;

vector<int> tin, tout;
vector<vector<int>> adj;
vector<ii> prof;
vector<vector<ii>> st;

int n, timer;

void SparseTable(vector<ii> &v) {
    int n = v.size();
    int e = floor(log2(n));
    st.assign(e + 1, vector<ii>(n));
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        st[0][i] = v[i];
    }
    for (int i = 1; i <= e; i++) {
        for (int j = 0; j + (1 << i) <= n; j++) {
            st[i][j] = min(st[i - 1][j], st[i - 1][j + (1 << (i - 1))]);
        }
    }
}

void et_dfs(int u, int p, int h) {
    tin[u] = timer++;
    prof.emplace_back(h, u);
    for (int v : adj[u]) {
        if (v != p) {
            et_dfs(v, u, h + 1);
            prof.emplace_back(h, u);
        }
    }
}

```

```

    }
    tout[u] = timer++;
}

void build(int root = 0) {
    tin.assign(n, 0);
    tout.assign(n, 0);
    prof.clear();
    timer = 0;
    et_dfs(root, root, 0);
    SparseTable(prof);
}

int lca(int u, int v) {
    int l = tout[u], r = tin[v];
    if (l > r) {
        swap(l, r);
    }
    int i = floor(log2(r - l + 1));
    return min(st[i][l], st[i][r - (1 << i) + 1]).se;
}

int main() {
    cin >> n;

    adj.assign(n, vector<int>(0));

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int a, b;
        cin >> a >> b;
        adj[a].push_back(b);
        adj[b].push_back(a);
    }

    build();
}

```

## 2.3 HLD

Técnica usada para otimizar a execução de operações em árvores.

- Pré-Processamento:  $O(N)$
- Range Query/Update:  $O(\log(N)) * O(\text{Complexidade de query da estrutura})$
- Point Query/Update:  $O(\text{Complexidade de query da estrutura})$
- LCA:  $O(\log(N))$
- Subtree Query:  $O(\text{Complexidade de query da estrutura})$
- Complexidade de espaço:  $O(N)$

```
namespace hld {
    const int MAX = 2e5 + 5;
    int t, sz[MAX], pos[MAX], pai[MAX], head[MAX];
    bool e = 0;
    ll merge(ll a, ll b) {
        return max(a, b);
    } // how to merge paths
    void dfs_sz(int u, int p = -1) {
        sz[u] = 1;
        for (int &v : adj[u]) {
            if (v != p) {
                dfs_sz(v, u);
                sz[u] += sz[v];
                if (sz[v] > sz[adj[u][0]] || adj[u][0] == p) {
                    swap(v, adj[u][0]);
                }
            }
        }
    }
}
```

```
void dfs_hld(int u, int p = -1) {
    pos[u] = t++;
    for (int v : adj[u]) {
        if (v != p) {
            pai[v] = u;
            head[v] = (v == adj[u][0] ? head[u] : v);
            dfs_hld(v, u);
        }
    }
}

void build(int root) {
    dfs_sz(root);
    t = 0;
    pai[root] = root;
    head[root] = root;
    dfs_hld(root);
}

void build(int root, vector<ll> &v) {
    build(root);
}
```



```

    vector<ll> aux(v.size());
    for (int i = 0; i < (int)v.size(); i++) {
        aux[pos[i]] = v[i];
    }
    seg::build(aux);
}
void build(int root,
           vector<i3> &edges) { // use this if
                               // weighted edges
    build(root);
    e = 1;
    vector<ll> aux(edges.size() + 1);
    for (auto [u, v, w] : edges) {
        if (pos[u] > pos[v]) {
            swap(u, v);
        }
        aux[pos[v]] = w;
    }
    seg::build(aux);
}
ll query(int u, int v) {
    if (pos[u] > pos[v]) {
        swap(u, v);
    }
    if (head[u] == head[v]) {
        return seg::query(pos[u] + e, pos[v]);
    } else {

```

```

        ll qv = seg::query(pos[head[v]], pos[v]);
        ll qu = query(u, pai[head[v]]);
        return merge(qu, qv);
    }
}
void update(int u, int v, ll k) {
    if (pos[u] > pos[v]) {
        swap(u, v);
    }
    if (head[u] == head[v]) {
        seg::update(pos[u] + e, pos[v], k);
    } else {
        seg::update(pos[head[v]], pos[v], k);
        update(u, pai[head[v]], k);
    }
}
int lca(int u, int v) {
    if (pos[u] > pos[v]) {
        swap(u, v);
    }
    return (head[u] == head[v] ? u : lca(u, pai[head[v]]));
}
ll query_subtree(int u) {
    return seg::query(pos[u], pos[u] + sz[u] - 1);
}
}

```

## 2.4 Kruskal

Algoritmo para encontrar a MST (minimum spanning tree) de um grafo.

Utiliza [DSU](../Estruturas%20de%20Dados/DSU/dsu.cpp) - (disjoint set union) - para construir MST - (minimum spanning tree)

- Complexidade de tempo (Construção):  $O(M \log N)$

```

struct Edge {
    int u, v, w;
    bool operator<(Edge const &other) {
        return w < other.w;
    }
};

vector<Edge> edges, result;
int cost;

struct DSU {
    vector<int> pa, sz;
    DSU(int n) {
        sz.assign(n + 5, 1);
        for (int i = 0; i < n + 5; i++) {
            pa.push_back(i);
        }
    }
    int root(int a) {
        return pa[a] = (a == pa[a] ? a : root(pa[a]));
    }
    bool find(int a, int b) {
        return root(a) == root(b);
    }
    void uni(int a, int b) {

```

```

        int ra = root(a), rb = root(b);
        if (ra == rb) {
            return;
        }
        if (sz[ra] > sz[rb]) {
            swap(ra, rb);
        }
        pa[ra] = rb;
        sz[rb] += sz[ra];
    }
};

void kruskal(int m, int n) {
    DSU dsu(n);

    sort(edges.begin(), edges.end());

    for (Edge e : edges) {
        if (!dsu.find(e.u, e.v)) {
            cost += e.w;
            result.push_back(e); // remove if need only cost
            dsu.uni(e.u, e.v);
        }
    }
}

```

## 2.5 Bridge

Algoritmo que acha pontes utilizando uma dfs

Complexidade de tempo:  $O(N + M)$

```

int n; // number of nodes
vector<vector<int>> adj; // adjacency list of graph

vector<bool> visited;
vector<int> tin, low;
int timer;

void dfs(int u, int p = -1) {
    visited[u] = true;
    tin[u] = low[u] = timer++;
    for (int v : adj[u]) {
        if (v == p) {
            continue;
        }
        if (visited[v]) {
            low[u] = min(low[u], tin[v]);
        } else {
            dfs(v, u);
            low[u] = min(low[u], low[v]);
        }
    }
}

```

```

        if (low[v] > tin[u]) {
            // edge UV is a bridge
            // do_something(u, v)
        }
    }
}

void find_bridges() {
    timer = 0;
    visited.assign(n, false);
    tin.assign(n, -1);
    low.assign(n, -1);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i]) {
            dfs(i);
        }
    }
}

```

## 2.6 Stoer–Wagner Min Cut

Algoritmo de Stoer-Wagner para encontrar o corte mínimo de um grafo.

O algoritmo de Stoer-Wagner é um algoritmo para resolver o problema de corte mínimo em grafos não direcionados com pesos não negativos. A ideia essencial deste algoritmo é encolher o grafo mesclando os vértices mais intensos até que o grafo contenha apenas dois conjuntos de vértices combinados

Complexidade de tempo:  $O(V^3)$

```

const int MAXN = 555, INF = 1e9 + 7;

int n, e, adj[MAXN][MAXN];

```

```

vector<int> bestCut;

int mincut() {

```

```

int bestCost = INF;
vector<int> v[MAXN];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    v[i].assign(1, i);
}
int w[MAXN], sel;
bool exist[MAXN], added[MAXN];
memset(exist, true, sizeof(exist));
for (int phase = 0; phase < n - 1; phase++) {
    memset(added, false, sizeof(added));
    memset(w, 0, sizeof(w));
    for (int j = 0, prev; j < n - phase; j++) {
        sel = -1;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (exist[i] && !added[i] && (sel == -1 || w[i] >
                w[sel])) {
                sel = i;
            }
        }
        if (j == n - phase - 1) {
            if (w[sel] < bestCost) {

```

```

                bestCost = w[sel];
                bestCut = v[sel];
            }
            v[prev].insert(v[prev].end(), v[sel].begin(),
                v[sel].end());
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                adj[prev][i] = adj[i][prev] += adj[sel][i];
            }
            exist[sel] = false;
        } else {
            added[sel] = true;
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                w[i] += adj[sel][i];
            }
            prev = sel;
        }
    }
}
return bestCost;
}

```

## 2.7 Shortest Paths

### 2.7.1 Dijkstra

Computa o menor caminho entre nós de um grafo.

Dado dois nós  $u$  e  $v$ , computa o menor caminho de  $u$  para  $v$ .

Complexidade de tempo:  $O((E + V) * \log(E))$

Dado um nó  $u$ , computa o menor caminho de  $u$  para todos os nós.

Complexidade de tempo:  $O((E + V) * \log(E))$

Computa o menor caminho de todos os nós para todos os nós

Complexidade de tempo:  $O(V * ((E + V) * \log(E)))$

```
const int MAX = 505, INF = 1e9 + 9;

vector<ii> adj[MAX];
int dist[MAX][MAX];

void dk(int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            dist[i][j] = INF;
        }
    }
    for (int s = 0; s < n; s++) {
        priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> fila;
        dist[s][s] = 0;
        fila.emplace(dist[s][s], s);
```

```
const int MAX = 1e5 + 5, INF = 1e9 + 9;

vector<ii> adj[MAX];
int dist[MAX];

void dk(int s) {
    priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> fila;
    fill(begin(dist), end(dist), INF);
    dist[s] = 0;
```

```
while (!fila.empty()) {
    auto [d, u] = fila.top();
    fila.pop();
    if (d != dist[s][u]) {
        continue;
    }
    for (auto [w, v] : adj[u]) {
        if (dist[s][v] > d + w) {
            dist[s][v] = d + w;
            fila.emplace(dist[s][v], v);
        }
    }
}
}
```

```
fila.emplace(dist[s], s);
while (!fila.empty()) {
    auto [d, u] = fila.top();
    fila.pop();
    if (d != dist[u]) {
        continue;
    }
    for (auto [w, v] : adj[u]) {
        if (dist[v] > d + w) {
```

```

    dist[v] = d + w;
    fila.emplace(dist[v], v);
}

const int MAX = 1e5 + 5, INF = 1e9 + 9;

vector<ii> adj[MAX];
int dist[MAX];

int dk(int s, int t) {
    priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> fila;
    fill(begin(dist), end(dist), INF);
    dist[s] = 0;
    fila.emplace(dist[s], s);
    while (!fila.empty()) {
        auto [d, u] = fila.top();
        fila.pop();
        if (u == t) {
            return dist[t];
        }
        if (d != dist[u]) {
            continue;
        }
        for (auto [w, v] : adj[u]) {
            if (dist[v] > d + w) {
                dist[v] = d + w;
                fila.emplace(dist[v], v);
            }
        }
    }
    return -1;
}
```

2.7.2 SPFA

Encontra o caminho mais curto entre um vértice e todos os outros vértices de um grafo.

Detecta ciclos negativos.

Complexidade de tempo:  $O(|V| * |E|)$

```

const int MAX = 1e4 + 4;
const ll INF = 1e18 + 18;

vector<ii> adj[MAX];
ll dist[MAX];

void spfa(int s, int n) {
    fill(dist, dist + n, INF);
    vector<int> cnt(n, 0);
    vector<bool> inq(n, false);
    queue<int> fila;
    fila.push(s);
    inq[s] = true;
    dist[s] = 0;
    while (!fila.empty()) {
        int u = fila.front();
        fila.pop();
        inq[u] = false;

```

```

        for (auto [w, v] : adj[u]) {
            ll newd = (dist[u] == -INF ? -INF : max(w + dist[u],
                -INF));
            if (newd < dist[v]) {
                dist[v] = newd;
                if (!inq[v]) {
                    fila.push(v);
                    inq[v] = true;
                    cnt[v]++;
                    if (cnt[v] > n) { // negative cycle
                        dist[v] = -INF;
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

## 2.8 Binary Lifting

Usa uma sparse table para calcular o k-ésimo ancestral de u.

Pode ser usada com o algoritmo de EulerTour para calcular o LCA.

Complexidade de tempo:

- Pré-processamento:  $O(N * \log(N))$
- Consulta do k-ésimo ancestral de u:  $O(\log(N))$
- LCA:  $O(\log(N))$

Complexidade de espaço:  $O(N \log(N))$

```

namespace st {
    int n, me, timer;
    vector<int> tin, tout;
    vector<vector<int>> st;
    void et_dfs(int u, int p) {
        tin[u] = ++timer;
        st[u][0] = p;
        for (int i = 1; i <= me; i++) {
            st[u][i] = st[st[u][i - 1]][i - 1];
        }
        for (int v : adj[u]) {
            if (v != p) {
                et_dfs(v, u);
            }
        }
        tout[u] = ++timer;
    }
    void build(int _n, int root = 0) {
        n = _n;
        tin.assign(n, 0);
        tout.assign(n, 0);
        timer = 0;
        me = floor(log2(n));
        st.assign(n, vector<int>(me + 1, 0));
        et_dfs(root, root);
    }
    bool is_ancestor(int u, int v) {

```

```

namespace st {
    int n, me;
    vector<vector<int>> st;
    void bl_dfs(int u, int p) {
        st[u][0] = p;
        for (int i = 1; i <= me; i++) {
            st[u][i] = st[st[u][i - 1]][i - 1];

```

```

        return tin[u] <= tin[v] && tout[u] >= tout[v];
    }
    int lca(int u, int v) {
        if (is_ancestor(u, v)) {
            return u;
        }
        if (is_ancestor(v, u)) {
            return v;
        }
        for (int i = me; i >= 0; i--) {
            if (!is_ancestor(st[u][i], v)) {
                u = st[u][i];
            }
        }
        return st[u][0];
    }
    int ancestor(int u,
                  int k) { // k-th ancestor of u
        for (int i = me; i >= 0; i--) {
            if ((1 << i) & k) {
                u = st[u][i];
            }
        }
        return u;
    }
}

```

```

    }
    for (int v : adj[u]) {
        if (v != p) {
            bl_dfs(v, u);
        }
    }
}

```



```

void build(int _n, int root = 0) {
    n = _n;
    me = floor(log2(n));
    st.assign(n, vector<int>(me + 1, 0));
    bl_dfs(root, root);
}
int ancestor(int u,
             int k) { // k-th ancestor of u

```

```

    for (int i = me; i >= 0; i--) {
        if ((1 << i) & k) {
            u = st[u][i];
        }
    }
    return u;
}

```

## 2.9 Fluxo

Conjunto de algoritmos para calcular o fluxo máximo em redes de fluxo.

Muito útil para grafos bipartidos e para grafos com muitas arestas

Complexidade de tempo:  $O(V^2 * E)$ , mas em grafo bipartido a complexidade é  $O(\sqrt{V} * E)$

Útil para grafos com poucas arestas

Complexidade de tempo:  $O(V * E^2)$

Computa o fluxo máximo com custo mínimo

Complexidade de tempo:  $O(V^2 * E^2)$

```

const long long INF = 1e18;

struct FlowEdge {
    int u, v;
    long long cap, flow = 0;
    FlowEdge(int u, int v, long long cap) : u(u), v(v), cap(cap) {}
};

struct EdmondsKarp {
    int n, s, t, m = 0, vistoken = 0;
    vector<FlowEdge> edges;
    vector<vector<int>>> adj;
    vector<int> visto;

    EdmondsKarp(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) {
        adj.resize(n);
        visto.resize(n);
    }

    void add_edge(int u, int v, long long cap) {
        edges.emplace_back(u, v, cap);
        edges.emplace_back(v, u, 0);
        adj[u].push_back(m);
        adj[v].push_back(m + 1);
        m += 2;
    }

    int bfs() {
        vistoken++;
        queue<int> fila;
        fila.push(s);
        vector<int> pego(n, -1);
        while (!fila.empty()) {
            int u = fila.front();
            if (u == t) {
                break;
            }

```

```

        }
        fila.pop();
        visto[u] = vistoken;
        for (int id : adj[u]) {
            if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1) {
                continue;
            }
            int v = edges[id].v;
            if (visto[v] == -1) {
                continue;
            }
            fila.push(v);
            pego[v] = id;
        }
    }
    if (pego[t] == -1) {
        return 0;
    }
    long long f = INF;
    for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u]) {
        f = min(f, edges[id].cap - edges[id].flow);
    }
    for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u]) {
        edges[id].flow += f;
        edges[id ^ 1].flow -= f;
    }
    return f;
}

long long flow() {
    long long maxflow = 0;
    while (long long f = bfs()) {
        maxflow += f;
    }
    return maxflow;
}
};

```

```

struct MinCostMaxFlow {
    int n, s, t, m = 0;
    ll maxflow = 0, mincost = 0;
    vector<FlowEdge> edges;
    vector<vector<int>> adj;

    MinCostMaxFlow(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) {
        adj.resize(n);
    }

    void add_edge(int u, int v, ll cap, ll cost) {
        edges.emplace_back(u, v, cap, cost);
        edges.emplace_back(v, u, 0, -cost);
        adj[u].push_back(m);
        adj[v].push_back(m + 1);
        m += 2;
    }

    bool spfa() {
        vector<int> pego(n, -1);
        vector<ll> dis(n, INF);
        vector<bool> inq(n, false);
        queue<int> fila;
        fila.push(s);
        dis[s] = 0;
        inq[s] = 1;
        while (!fila.empty()) {
            int u = fila.front();
            fila.pop();
            inq[u] = false;
            for (int id : adj[u]) {
                if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1) {
                    continue;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

            int v = edges[id].v;
            if (dis[v] > dis[u] + edges[id].cost) {
                dis[v] = dis[u] + edges[id].cost;
                pego[v] = id;
                if (!inq[v]) {
                    inq[v] = true;
                    fila.push(v);
                }
            }
        }
    }

    if (pego[t] == -1) {
        return 0;
    }
    ll f = INF;
    for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u]) {
        f = min(f, edges[id].cap - edges[id].flow);
        mincost += edges[id].cost;
    }
    for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u]) {
        edges[id].flow += f;
        edges[id ^ 1].flow -= f;
    }
    maxflow += f;
    return 1;
}

ll flow() {
    while (spfa())
        ;
    return maxflow;
}
};

```

```

typedef long long ll;

const ll INF = 1e18;

struct FlowEdge {
    int u, v;
    ll cap, flow = 0;
    FlowEdge(int u, int v, ll cap) : u(u), v(v), cap(cap) {}
};

struct Dinic {
    vector<FlowEdge> edges;
    vector<vector<int>>> adj;
    int n, s, t, m = 0;
    vector<int> level, ptr;
    queue<int> q;

    Dinic(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) {
        adj.resize(n);
        level.resize(n);
        ptr.resize(n);
    }

    void add_edge(int u, int v, ll cap) {
        edges.emplace_back(u, v, cap);
        edges.emplace_back(v, u, 0);
        adj[u].push_back(m);
        adj[v].push_back(m + 1);
        m += 2;
    }

    bool bfs() {
        while (!q.empty()) {
            int u = q.front();
            q.pop();
            for (int id : adj[u]) {
                if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1) {
                    continue;
                }
                int v = edges[id].v;
            }
        }
    }
};

```

```

        if (level[v] != -1) {
            continue;
        }
        level[v] = level[u] + 1;
        q.push(v);
    }
}

return level[t] != -1;
}

ll dfs(int u, ll f) {
    if (f == 0) {
        return 0;
    }
    if (u == t) {
        return f;
    }
    for (int &cid = ptr[u]; cid < (int)adj[u].size(); cid++) {
        int id = adj[u][cid];
        int v = edges[id].v;
        if (level[u] + 1 != level[v] || edges[id].cap -
            edges[id].flow < 1) {
            continue;
        }
        ll tr = dfs(v, min(f, edges[id].cap - edges[id].flow));
        if (tr == 0) {
            continue;
        }
        edges[id].flow += tr;
        edges[id ^ 1].flow -= tr;
        return tr;
    }
    return 0;
}

ll flow() {
    ll maxflow = 0;
    while (true) {
        fill(level.begin(), level.end(), -1);
        level[s] = 0;
        q.push(s);
    }
}

```

```

    if (!bfs()) {
        break;
    }
    fill(ptr.begin(), ptr.end(), 0);
    while (ll f = dfs(s, INF)) {
        maxflow += f;
    }

```

```

    }
    }
    return maxflow;
};

```

## 2.10 Inverse Graph

Algoritmo que encontra as componentes conexas quando se é dado o grafo complemento.

Resolve problemas em que se deseja encontrar as componentes conexas quando são dadas as arestas que não pertencem ao grafo

- Complexidade de tempo:  $O(N \log N + N \log M)$

```

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

set<int> nodes;
vector<set<int>> adj;

void bfs(int s) {
    queue<int> f;
    f.push(s);
    nodes.erase(s);
    set<int> aux;
    while (!f.empty()) {
        int x = f.front();

```

```

        f.pop();
        for (int y : nodes) {
            if (adj[x].count(y) == 0) {
                aux.insert(y);
            }
        }
        for (int y : aux) {
            f.push(y);
            nodes.erase(y);
        }
        aux.clear();
    }
}

```

## 2.11 2 SAT

Resolve problema do 2-SAT.

- Complexidade de tempo (caso médio):  $O(N + M)$

$N$  é o número de variáveis e  $M$  é o número de cláusulas.

A configuração da solução fica guardada no vetor `*assignment*`.

Em relação ao sinal, tanto faz se 0 liga ou desliga, apenas siga o mesmo padrão.

```
struct sat2 {
    int n;
    vector<vector<int>> g, gt;
    vector<bool> used;
    vector<int> order, comp;
    vector<bool> assignment;

    // number of variables
    sat2(int _n) {
        n = 2 * (_n + 5);
        g.assign(n, vector<int>());
        gt.assign(n, vector<int>());
    }
    void add_edge(int v, int u, bool v_sign, bool u_sign) {
        g[2 * v + v_sign].push_back(2 * u + !u_sign);
        g[2 * u + u_sign].push_back(2 * v + !v_sign);
        gt[2 * u + !u_sign].push_back(2 * v + v_sign);
        gt[2 * v + !v_sign].push_back(2 * u + u_sign);
    }
    void dfs1(int v) {
        used[v] = true;
        for (int u : g[v]) {
            if (!used[u]) {
                dfs1(u);
            }
        }
    }
    void dfs2(int v, int cl) {
        comp[v] = cl;
        for (int u : gt[v]) {
            if (comp[u] == -1) {
                dfs2(u, cl);
            }
        }
    }
    bool solve() {
        order.clear();
        used.assign(n, false);
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            if (!used[i]) {
                dfs1(i);
            }
        }
        comp.assign(n, -1);
        for (int i = 0, j = 0; i < n; ++i) {
            int v = order[n - i - 1];
```

```
                }
            }
            order.push_back(v);
        }
        void dfs2(int v, int cl) {
            comp[v] = cl;
            for (int u : gt[v]) {
                if (comp[u] == -1) {
                    dfs2(u, cl);
                }
            }
        }
        bool solve() {
            order.clear();
            used.assign(n, false);
            for (int i = 0; i < n; ++i) {
                if (!used[i]) {
                    dfs1(i);
                }
            }
            comp.assign(n, -1);
            for (int i = 0, j = 0; i < n; ++i) {
                int v = order[n - i - 1];
```

```

        if (comp[v] == -1) {
            dfs2(v, j++);
        }
    }

    assignment.assign(n / 2, false);
    for (int i = 0; i < n; i += 2) {
        if (comp[i] == comp[i + 1]) {

```

```

            return false;
        }
        assignment[i / 2] = comp[i] > comp[i + 1];
    }
    return true;
}
};

```

## 2.12 Graph Center

Encontra o centro e o diâmetro de um grafo

Complexidade de tempo:  $O(N)$

```

const int INF = 1e9 + 9;

vector<vector<int>> adj;

struct GraphCenter {
    int n, diam = 0;
    vector<int> centros, dist, pai;
    int bfs(int s) {
        queue<int> q;
        q.push(s);
        dist.assign(n + 5, INF);
        pai.assign(n + 5, -1);
        dist[s] = 0;
        int maxidist = 0, maxinode = 0;
        while (!q.empty()) {
            int u = q.front();
            q.pop();
            if (dist[u] >= maxidist) {

```

```

                maxidist = dist[u], maxinode = u;
            }
            for (int v : adj[u]) {
                if (dist[u] + 1 < dist[v]) {
                    dist[v] = dist[u] + 1;
                    pai[v] = u;
                    q.push(v);
                }
            }
        }
        diam = max(diam, maxidist);
        return maxinode;
    }
    GraphCenter(int st = 0) : n(adj.size()) {
        int d1 = bfs(st);
        int d2 = bfs(d1);
        vector<int> path;
        for (int u = d2; u != -1; u = pai[u]) {

```

```

        path.push_back(u);
    }
    int len = path.size();
    if (len % 2 == 1) {
        centros.push_back(path[len / 2]);
    } else {

```

```

        centros.push_back(path[len / 2]);
        centros.push_back(path[len / 2 - 1]);
    }
};

```



## Capítulo 3

# String

### 3.1 Aho Corasick

Constrói uma estrutura de dados semelhante a um trie com links adicionais e, em seguida, constrói uma máquina de estados finitos (autômato). Útil para pattern matching de um set de strings em um texto.

Complexidade de tempo:  $O(|S|+|T|)$ , onde  $|S|$  é o somatório do tamanho das strings e  $|T|$  é o tamanho do texto

```
const int K = 26;

struct Vertex {
    int next[K], p = -1, link = -1, exi = -1, go[K], cont = 0;
    bool term = false;
    vector<int> idxs;
    char pch;
    Vertex(int p = -1, char ch = '$') : p(p), pch(ch) {
        fill(begin(next), end(next), -1);
        fill(begin(go), end(go), -1);
    }
};
```

```
vector<Vertex> aho(1);
void add_string(const string &s, int idx) {
    int v = 0;
    for (char ch : s) {
        int c = ch - 'a';
        if (aho[v].next[c] == -1) {
            aho[v].next[c] = aho.size();
            aho.emplace_back(v, ch);
        }
        v = aho[v].next[c];
    }
    aho[v].term = true;
```

```

    aho[v].idxs.push_back(idx);
}
int go(int u, char ch);
int get_link(int u) {
    if (aho[u].link == -1) {
        if (u == 0 || aho[u].p == 0) {
            aho[u].link = 0;
        } else {
            aho[u].link = go(get_link(aho[u].p), aho[u].pch);
        }
    }
    return aho[u].link;
}
int go(int u, char ch) {
    int c = ch - 'a';
    if (aho[u].go[c] == -1) {
        if (aho[u].next[c] != -1) {
            aho[u].go[c] = aho[u].next[c];
        } else {
            aho[u].go[c] = u == 0 ? 0 : go(get_link(u), ch);
        }
    }
    return aho[u].go[c];
}
int exi(int u) {

```

```

    if (aho[u].exi != -1) {
        return aho[u].exi;
    }
    int v = get_link(u);
    return aho[u].exi = (v == 0 || aho[v].term ? v : exi(v));
}
void process(const string &s) {
    int st = 0;
    for (char c : s) {
        st = go(st, c);
        for (int aux = st; aux; aux = exi(aux)) {
            aho[aux].cont++;
        }
    }
    for (int st = 1; st < aho_sz; st++) {
        if (!aho[st].term) {
            continue;
        }
        for (int i : aho[st].idxs) {
            // Do something here
            // idx i occurs + aho[st].cont times
            h[i] += aho[st].cont;
        }
    }
}

```

## 3.2 Patricia Tree

Estrutura de dados que armazena strings e permite consultas por prefixo.

Implementação PB-DS, extremamente curta e confusa:

- Criar: `patricia_tree pat;`

- Inserir: `pat.insert("sei la");`
- Remover: `pat.erase("sei la");`
- Verificar existência: `pat.find("sei la") != pat.end();`
- Pegar palavras que começam com um prefixo: `auto match = pat.prefix_range("sei");`
- Percorrer `*match*` : `for(auto it = match.first; it != match.second; ++it);`
- Pegar menor elemento lexicográfico `*maior ou igual*` ao prefixo: `*pat.lower_bound("sei");`
- Pegar menor elemento lexicográfico `*maior*` ao prefixo: `*pat.upper_bound("sei");`

TODAS AS OPERAÇÕES EM  $O(|S|)$

NÃO ACEITA ELEMENTOS REPETIDOS

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/trie_policy.hpp>

using namespace __gnu_pbds;
```

```
typedef trie<string, null_type, trie_string_access_traits<>,
pat_trie_tag,
trie_prefix_search_node_update>
patricia_tree;
```

### 3.3 Prefix Function

Para cada prefixo  $k$  de uma dada string  $s$ , calcula o maior prefixo que também é sufixo de  $k$ .

Seja  $n$  o tamanho do texto e  $m$  o tamanho do padrão.

**KMP**

String matching em  $O(n + m)$ .

**Autômato de KMP**

String matching em  $O(n)$  com  $O(m)$  de pré-processamento.

**Prefix Count**

Dada uma string  $s$ , calcula quantas vezes cada prefixo de  $s$  aparece em  $s$  com complexidade de tempo de  $O(n)$ .

```
vector<int> pi(string &s) {
    vector<int> p(s.size());
    for (int i = 1, j = 0; i < s.size(); i++) {
        while (j > 0 && s[i] != s[j]) {
            j = p[j - 1];
        }
        if (s[i] == s[j]) {
```

```
            j++;
        }
        p[i] = j;
    }
    return p;
}
```

```
vector<int> pi(string &s) {
    vector<int> p(s.size());
    for (int i = 1, j = 0; i < s.size(); i++) {
        while (j > 0 && s[i] != s[j]) {
            j = p[j - 1];
        }
        if (s[i] == s[j]) {
            j++;
        }
        p[i] = j;
    }
    return p;
}
```

```
vector<int> kmp(string &s, string t) {
```

```
t += '$';
vector<int> p = pi(t), match;
for (int i = 0, j = 0; i < s.size(); i++) {
    while (j > 0 && s[i] != t[j]) {
        j = p[j - 1];
    }
    if (s[i] == t[j]) {
        j++;
    }
    if (j == t.size() - 1) {
        match.push_back(i - j + 1);
    }
}
return match;
```

```
}
```

```

vector<int> pi(string s) {
    vector<int> p(s.size());
    for (int i = 1, j = 0; i < s.size(); i++) {
        while (j > 0 && s[i] != s[j]) {
            j = p[j - 1];
        }
        if (s[i] == s[j]) {
            j++;
        }
        p[i] = j;
    }
    return p;
}

```

```

vector<int> prefixCount(string s) {

```

```

struct AutKMP {
    vector<vector<int>> nxt;

    vector<int> pi(string &s) {
        vector<int> p(s.size());
        for (int i = 1, j = 0; i < s.size(); i++) {
            while (j > 0 && s[i] != s[j]) {
                j = p[j - 1];
            }
            if (s[i] == s[j]) {
                j++;
            }
            p[i] = j;
        }
        return p;
    }
}

```

```

void setString(string s) {
    s += '#';
    nxt.assign(s.size(), vector<int>(26));
    vector<int> p = pi(s);
    for (int c = 0; c < 26; c++) {

```

```

    vector<int> p = pi(s + '#');
    int n = s.size();
    vector<int> cnt(n + 1, 0);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cnt[p[i]]++;
    }
    for (int i = n - 1; i > 0; i--) {
        cnt[p[i - 1]] += cnt[i];
    }
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        cnt[i]++;
    }
    return cnt;
}

```

```

        nxt[0][c] = ('a' + c == s[0]);
    }
    for (int i = 1; i < s.size(); i++) {
        for (int c = 0; c < 26; c++) {
            nxt[i][c] = ('a' + c == s[i]) ? i + 1 : nxt[p[i - 1]][c];
        }
    }
}

vector<int> kmp(string &s, string &t) {
    vector<int> match;
    for (int i = 0, j = 0; i < s.size(); i++) {
        j = nxt[j][s[i] - 'a'];
        if (j == t.size()) {
            match.push_back(i - j + 1);
        }
    }
    return match;
}
} aut;

```

### 3.4 Hashing

Hashing para testar igualdade de duas strings.

A função **\*range(i, j)\*** retorna o hash da substring nesse range.

Pode ser necessário usar pares de hash para evitar colisões.

\* Complexidade de tempo (Construção):  $O(N)$

\* Complexidade de tempo (Consulta de range):  $O(1)$

```
struct hashing {
    const long long LIM = 1000006;
    long long p, m;
    vector<long long> pw, hsh;
    hashing(long long _p, long long _m) : p(_p), m(_m) {
        pw.resize(LIM);
        hsh.resize(LIM);
        pw[0] = 1;
        for (int i = 1; i < LIM; i++) {
            pw[i] = (pw[i - 1] * p) % m;
        }
    }
    void set_string(string &s) {
        hsh[0] = s[0];
```

```
        for (int i = 1; i < s.size(); i++) {
            hsh[i] = (hsh[i - 1] * p + s[i]) % m;
        }
    }
    long long range(int esq, int dir) {
        long long ans = hsh[dir];
        if (esq > 0) {
            ans = (ans - (hsh[esq - 1] * pw[dir - esq + 1] % m) + m)
                % m;
        }
        return ans;
    }
};
```

### 3.5 Trie

Estrutura que guarda informações indexadas por palavra.

Útil encontrar todos os prefixos inseridos anteriormente de uma palavra específica.

\* Complexidade de tempo (Update):  $O(|S|)$

\* Complexidade de tempo (Consulta de palavra):  $O(|S|)$

```
struct trie {
    map<char, int> trie[100005];
    int value[100005];
    int n_nodes = 0;
    void insert(string &s, int v) {
        int id = 0;
        for (char c : s) {
            if (!trie[id].count(c)) {
                trie[id][c] = ++n_nodes;
            }
            id = trie[id][c];
        }
        value[id] = v;
    }
};
```

```
    }
    int get_value(string &s) {
        int id = 0;
        for (char c : s) {
            if (!trie[id].count(c)) {
                return -1;
            }
            id = trie[id][c];
        }
        return value[id];
    }
};
```

## 3.6 Manacher

Encontra todos os palindromos de uma string.

Dada uma string  $s$  de tamanho  $n$ , encontra todos os pares  $(i, j)$  tal que a substring  $s[i...j]$  seja um palindromo.

\* Complexidade de tempo:  $O(N)$

```
struct manacher {
    long long n, count;
    vector<int> d1, d2;
    long long solve(string &s) {
        n = s.size(), count = 0;
        solve_odd(s);
        solve_even(s);
        return count;
    }
};
```

```
void solve_odd(string &s) {
    solve_even(s);
    return count;
}
```

```

d1.resize(n);
for (int i = 0, l = 0, r = -1; i < n; i++) {
    int k = (i > r) ? 1 : min(d1[l + r - i], r - i + 1);
    while (0 <= i - k && i + k < n && s[i - k] == s[i + k]) {
        k++;
    }
    count += d1[i] = k--;
    if (i + k > r) {
        l = i - k;
        r = i + k;
    }
}
void solve_even(string &s) {
    d2.resize(n);

```

```

for (int i = 0, l = 0, r = -1; i < n; i++) {
    int k = (i > r) ? 0 : min(d2[l + r - i + 1], r - i + 1);
    while (0 <= i - k - 1 && i + k < n && s[i - k - 1] == s[i
        + k]) {
        k++;
    }
    count += d2[i] = k--;
    if (i + k > r) {
        l = i - k - 1;
        r = i + k;
    }
}
}
} mana;

```

## 3.7 Lyndon

Strings em decomposição única em subcadeias que são ordenadas lexicograficamente e não podem ser mais reduzidas.

### Duval

Gera a Lyndon Factorization de uma string

\* Complexidade de tempo:  $O(N)$

### Min Cyclic Shift

Gera a menor rotação circular da string original que pode ser obtida por meio de deslocamentos cíclicos dos caracteres.

\* Complexidade de tempo:  $O(N)$



```

string min_cyclic_shift(string s) {
    s += s;
    int n = s.size();
    int i = 0, ans = 0;
    while (i < n / 2) {
        ans = i;
        int j = i + 1, k = i;
        while (j < n && s[k] <= s[j]) {
            if (s[k] < s[j]) {
                k = i;
            } else {

```

```

vector<string> duval(string const &s) {
    int n = s.size();
    int i = 0;
    vector<string> factorization;
    while (i < n) {
        int j = i + 1, k = i;
        while (j < n && s[k] <= s[j]) {
            if (s[k] < s[j]) {
                k = i;
            } else {
                k++;

```

```

                k++;
            }
            j++;
        }
        while (i <= k) {
            i += j - k;
        }
    }
    return s.substr(ans, n / 2);
}

```

```

        }
        j++;
    }
    while (i <= k) {
        factorization.push_back(s.substr(i, j - k));
        i += j - k;
    }
}
return factorization;
}

```

### 3.8 Suffix Array

Estrutura que conterà inteiros que representam os índices iniciais de todos os sufixos ordenados de uma determinada string.

Tambem Constroi a tabela LCP(Longest common prefix).

\* Complexidade de tempo (Pré-Processamento):  $O(|S| \cdot \log(|S|))$

\* Complexidade de tempo (Contar ocorrencias de S em T):  $O(|S| \cdot \log(|T|))$

```

pair<int, int> busca(string &t, int i, pair<int, int> &range) {
    int esq = range.first, dir = range.second, L = -1, R = -1;
    while (esq <= dir) {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        if (s[sa[mid] + i] == t[i]) {
            L = mid;
        }
        if (s[sa[mid] + i] < t[i]) {
            esq = mid + 1;
        } else {
            dir = mid - 1;
        }
    }
    esq = range.first, dir = range.second;
    while (esq <= dir) {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        if (s[sa[mid] + i] == t[i]) {
            R = mid;
        }
    }
}

```

```
const int MAX_N = 5e5 + 5;
```

```

struct suffix_array {
    string s;
    int n, sum, r, ra[MAX_N], sa[MAX_N], auxra[MAX_N], auxsa[MAX_N],
        c[MAX_N], lcp[MAX_N];
    void counting_sort(int k) {
        memset(c, 0, sizeof(c));
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            c[(i + k < n) ? ra[i + k] : 0]++;
        }
        for (int i = sum = 0; i < max(256, n); i++) {
            sum += c[i], c[i] = sum - c[i];
        }
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            auxsa[c[sa[i] + k < n ? ra[sa[i] + k] : 0]++] = sa[i];
        }
    }
}

```

```

        if (s[sa[mid] + i] <= t[i]) {
            esq = mid + 1;
        } else {
            dir = mid - 1;
        }
    }
    return {L, R};
}
// count ocurences of s on t
int busca_string(string &t) {
    pair<int, int> range = {0, n - 1};
    for (int i = 0; i < t.size(); i++) {
        range = busca(t, i, range);
        if (range.first == -1) {
            return 0;
        }
    }
    return range.second - range.first + 1;
}

```

```

    }
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        sa[i] = auxsa[i];
    }
}
void build_sa() {
    for (int k = 1; k < n; k <= 1) {
        counting_sort(k);
        counting_sort(0);
        auxra[sa[0]] = r = 0;
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            auxra[sa[i]] =
                (ra[sa[i]] == ra[sa[i - 1]] && ra[sa[i] + k] ==
                 ra[sa[i - 1] + k])
                ? r
                : ++r;
        }
    }
}

```

```

    }
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        ra[i] = auxra[i];
    }
    if (ra[sa[n - 1]] == n - 1) {
        break;
    }
}
}
void build_lcp() {
    for (int i = 0, k = 0; i < n - 1; i++) {
        int j = sa[ra[i] - 1];
        while (s[i + k] == s[j + k]) {
            k++;
        }
        lcp[ra[i]] = k;
        if (k) {
            k--;
        }
    }
}

```

```

    }
}
void set_string(string _s) {
    s = _s + '$';
    n = s.size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        ra[i] = s[i], sa[i] = i;
    }
    build_sa();
    build_lcp();
    // for (int i = 0; i < n; i++)
    // printf("%2d: %s\n", sa[i], s.c_str() +
    // sa[i]);
}
int operator[](int i) {
    return sa[i];
}
} sa;

```

## Capítulo 4

# Paradigmas

### 4.1 Mo

Resolve Queries Complicadas Offline de forma rápida.

É preciso manter uma estrutura que adicione e remova elementos nas extremidades de um range (tipo janela).

- Complexidade de tempo (Query offline):  $O(N * \sqrt{N})$

#### Mo com Update

Resolve Queries Complicadas Offline de forma rápida.

Permite que existam **UPDATES PONTUAIS!**

É preciso manter uma estrutura que adicione e remova elementos nas extremidades de um range (tipo janela).

- Complexidade de tempo:  $O(Q * N^{2/3})$

```

typedef pair<int, int> ii;
int block_sz; // Better if 'const';

namespace mo {
    struct query {
        int l, r, idx;
        bool operator<(query q) const {
            int _l = l / block_sz;
            int _ql = q.l / block_sz;
            return ii(_l, (_l & 1 ? -r : r)) < ii(_ql, (_ql & 1 ?
                -q.r : q.r));
        }
    };
    vector<query> queries;

    void build(int n) {
        block_sz = (int)sqrt(n);
        // TODO: initialize data structure
    }
    inline void add_query(int l, int r) {
        queries.push_back({l, r, (int)queries.size()});
    }
    inline void remove(int idx) {
        // TODO: remove value at idx from data
        // structure
    }
    inline void add(int idx) {
        // TODO: add value at idx from data
        // structure
    }
}

```

```

typedef pair<int, int> ii;
typedef tuple<int, int, int> iii;
int block_sz; // Better if 'const';
vector<int> vec;
namespace mo {

```

```

    inline int get_answer() {
        // TODO: extract the current answer of the
        // data structure
        return 0;
    }

    vector<int> run() {
        vector<int> answers(queries.size());
        sort(queries.begin(), queries.end());
        int L = 0;
        int R = -1;
        for (query q : queries) {
            while (L > q.l) {
                add(--L);
            }
            while (R < q.r) {
                add(++R);
            }
            while (L < q.l) {
                remove(L++);
            }
            while (R > q.r) {
                remove(R--);
            }
            answers[q.idx] = get_answer();
        }
        return answers;
    }
};

```

```

    struct query {
        int l, r, t, idx;
        bool operator<(query q) const {
            int _l = l / block_sz;
            int _r = r / block_sz;

```

```

    int _ql = q.l / block_sz;
    int _qr = q.r / block_sz;
    return iii(_l, (_l & 1 ? -_r : _r), (_r & 1 ? t : -t)) <
           iii(_ql, (_ql & 1 ? -_qr : _qr), (_qr & 1 ? q.t :
           -q.t));
}
};
vector<query> queries;
vector<ii> updates;

void build(int n) {
    block_sz = pow(1.4142 * n, 2.0 / 3);
    // TODO: initialize data structure
}
inline void add_query(int l, int r) {
    queries.push_back({l, r, (int)updates.size(),
    (int)queries.size()});
}
inline void add_update(int x, int v) {
    updates.push_back({x, v});
}
inline void remove(int idx) {
    // TODO: remove value at idx from data
    // structure
}
inline void add(int idx) {
    // TODO: add value at idx from data
    // structure
}
inline void update(int l, int r, int t) {
    auto &[x, v] = updates[t];
    if (l <= x && x <= r) {
        remove(x);
    }
    swap(vec[x], v);
    if (l <= x && x <= r) {
        add(x);
    }
}

```

```

}
inline int get_answer() {
    // TODO: extract the current answer from
    // the data structure
    return 0;
}

vector<int> run() {
    vector<int> answers(queries.size());
    sort(queries.begin(), queries.end());
    int L = 0;
    int R = -1;
    int T = 0;
    for (query q : queries) {
        while (T < q.t) {
            update(L, R, T++);
        }
        while (T > q.t) {
            update(L, R, --T);
        }
        while (L > q.l) {
            add(--L);
        }
        while (R < q.r) {
            add(++R);
        }
        while (L < q.l) {
            remove(L++);
        }
        while (R > q.r) {
            remove(R--);
        }
        answers[q.idx] = get_answer();
    }
    return answers;
}
};

```

4.2 Exponenciação de Matriz

Otimização para DP de prefixo quando o valor atual está em função dos últimos  $K$  valores já calculados.

\* Complexidade de tempo:  $O(log(n) * k^3)$

É preciso mapear a DP para uma exponenciação de matriz.

• –

DP:

$$dp[n] = \sum_{i=1}^k c[i] \cdot dp[n - i]$$

Mapeamento:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c[k] & c[k - 1] & c[k - 2] & \dots & c[1] & 0 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} dp[0] \\ dp[1] \\ dp[2] \\ \dots \\ dp[k - 1] \end{pmatrix}$$

• –

Exemplo de DP:

$$dp[i] = dp[i - 1] + 2 \cdot i^2 + 3 \cdot i + 5$$

Nesses casos é preciso fazer uma linha para manter cada constante e potência do índice.

Mapeamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} dp[0] \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{mantém } dp[i] \\ \text{mantém } 1 \\ \text{mantém } i \\ \text{mantém } i^2 \end{matrix}$$

Exemplo de DP:

$$dp[n] = c \times \prod_{i=1}^k dp[n-i]$$

Nesses casos é preciso trabalhar com o logaritmo e temos o caso padrão:

$$\log(dp[n]) = \log(c) + \sum_{i=1}^k \log(dp[n-i])$$

Se a resposta precisar ser inteira, deve-se fatorar a constante e os valores iniciais e então fazer uma exponenciação para cada fator primo. Depois é só juntar a resposta no final.

```
11 dp[100];
mat T;

#define MOD 1000000007

mat mult(mat a, mat b) {
    mat res(a.size(), vi(b[0].size()));
    for (int i = 0; i < a.size(); i++) {
        for (int j = 0; j < b[0].size(); j++) {
```

```
                for (int k = 0; k < b.size(); k++) {
                    res[i][j] += a[i][k] * b[k][j] % MOD;
                    res[i][j] %= MOD;
                }
            }
        }
    }
    return res;
}
```



```

mat exp_mod(mat b, ll exp) {
    mat res(b.size(), vi(b.size()));
<<<<<<<
HEAD: Codigos/Paradigmas/Exponencia o -de-Matriz/matrix_exp.cpp
    for (int i = 0; i < b.size(); i++) {
        res[i][i] = 1;
    }

    while (exp) {
        if (exp & 1) {
            res = mult(res, b);
        }
    }
=====
    for (int i = 0; i < b.size(); i++) {
        res[i][i] = 1;
    }

    while (exp) {
        if (exp & 1) {
            res = mult(res, b);
        }
    }
>>>>>>> master: Codigos/Paradigmas/Exponencia o de
Matriz/matrix_exp.cpp
    b = mult(b, b);
    exp /= 2;
}
return res;
}

// MUDA MUITO DE ACORDO COM O PROBLEMA

```

```

// LEIA COMO FAZER O MAPEAMENTO NO README
ll solve(ll exp, ll dim) {
<<<<<<<
HEAD: Codigos/Paradigmas/Exponencia o -de-Matriz/matrix_exp.cpp
    if (exp < dim) {
        return dp[exp];
    }
=====
    if (exp < dim) {
        return dp[exp];
    }
>>>>>>> master: Codigos/Paradigmas/Exponencia o de
Matriz/matrix_exp.cpp

    T.assign(dim, vi(dim));
    // TO DO: Preencher a Matriz que vai ser
    // exponenciada T[0][1] = 1; T[1][0] = 1;
    // T[1][1] = 1;

    mat prod = exp_mod(T, exp);

    mat vec;
    vec.assign(dim, vi(1));
    for (int i = 0; i < dim; i++) {
        vec[i][0] = dp[i]; // Valores iniciais
    }

    mat ans = mult(prod, vec);
    return ans[0][0];
}

```

### 4.3 Busca Binaria Paralela

Faz a busca binária para múltiplas consultas quando a busca binária é muito pesada.

- Complexidade de tempo:  $O((N+Q)\log(N) * O(F))$ , onde  $N$  é o tamanho do espaço de busca,  $Q$  é o número de consultas e  $O(F)$ , o custo de avaliação da função.

```

namespace parallel_binary_search {
    typedef tuple<int, int, long long, long long> query; //{value,
        id, l, r}
    vector<query> queries[1123456];           // pode ser
        um mapa se
                                           // for muito
                                           // esparso
    long long ans[1123456];                  // definir
        pro tamanho
                                           // das
                                           // queries

    long long l, r, mid;
    int id = 0;
    void set_lim_search(long long n) {
        l = 0;
        r = n;
        mid = (l + r) / 2;
    }

    void add_query(long long v) {
        queries[mid].push_back({v, id++, l, r});
    }

    void advance_search(long long v) {
        // advance search
    }

    bool satisfies(long long mid, int v, long long l, long long r) {
        // implement the evaluation
    }

    bool get_ans() {
        // implement the get ans

```

```

    }

    void parallel_binary_search(long long l, long long r) {

        bool go = 1;
        while (go) {
            go = 0;
            int i = 0; // outra logica se for usar
                        // um mapa
            for (auto &vec : queries) {
                advance_search(i++);
                for (auto q : vec) {
                    auto [v, id, l, r] = q;
                    if (l > r) {
                        continue;
                    }
                    go = 1;
                    // return while satisfies
                    if (satisfies(i, v, l, r)) {
                        ans[i] = get_ans();
                        long long mid = (i + l) / 2;
                        queries[mid] = query(v, id, l, i - 1);
                    } else {
                        long long mid = (i + r) / 2;
                        queries[mid] = query(v, id, i + 1, r);
                    }
                }
                vec.clear();
            }
        }
    }

} // namespace name

```

## 4.4 Divide and Conquer

Otimização para DP de prefixo quando se pretende separar o vetor em K subgrupos.

É preciso fazer a função `query(i, j)` que computa o custo do subgrupo

$i, j$

.

\* Complexidade de tempo:  $O(n * k * \log(n) * O(\text{query}))$

### Divide and Conquer com Query on demand

<!-- \*Read in [English](README.en.md)\* -->

Usado para evitar queries pesadas ou o custo de pré-processamento.

É preciso fazer as funções da estrutura **janela**, eles adicionam e removem itens um a um como uma janela flutuante.

\* Complexidade de tempo:  $O(n * k * \log(n) * O(\text{update da janela}))$

```
namespace DC {
    vi dp_before, dp_cur;
    void compute(int l, int r, int optl, int optr) {
        if (l > r) {
            return;
        }
        int mid = (l + r) >> 1;
        pair<ll, int> best = {0, -1}; // {INF, -1} se quiser minimizar
        for (int i = optl; i <= min(mid, optr); i++) {
            best = max(best,
                {(i ? dp_before[i - 1] : 0) + query(i, mid),
                 i}); // min() se quiser minimizar
        }
        dp_cur[mid] = best.first;
        int opt = best.second;
        compute(l, mid - 1, optl, opt);
    }
}
```

```
        compute(mid + 1, r, opt, optr);
    }
ll solve(int n, int k) {
    dp_before.assign(n + 5, 0);
    dp_cur.assign(n + 5, 0);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp_before[i] = query(0, i);
    }
    for (int i = 1; i < k; i++) {
        compute(0, n - 1, 0, n - 1);
        dp_before = dp_cur;
    }
    return dp_before[n - 1];
}
};
```

```

namespace DC {
    struct range { // eh preciso definir a forma
                    // de calcular o range
        vi freq;
        ll sum = 0;
        int l = 0, r = -1;
        void back_l(int v) { // Mover o 'l' do range
                               // para a esquerda
            sum += freq[v];
            freq[v]++;
            l--;
        }
        void advance_r(int v) { // Mover o 'r' do range
                                // para a direita
            sum += freq[v];
            freq[v]++;
            r++;
        }
        void advance_l(int v) { // Mover o 'l' do range
                                // para a direita
            freq[v]--;
            sum -= freq[v];
            l++;
        }
        void back_r(int v) { // Mover o 'r' do range
                              // para a esquerda
            freq[v]--;
            sum -= freq[v];
            r--;
        }
        void clear(int n) { // Limpar range
            l = 0;
            r = -1;
            sum = 0;
            freq.assign(n + 5, 0);
        }
    } s;
}

```

```

vi dp_before, dp_cur;
void compute(int l, int r, int optl, int optr) {
    if (l > r) {
        return;
    }
    int mid = (l + r) >> 1;
    pair<ll, int> best = {0, -1}; // {INF, -1} se quiser minimizar

    while (s.l < optl) {
        s.advance_l(v[s.l]);
    }
    while (s.l > optl) {
        s.back_l(v[s.l - 1]);
    }
    while (s.r < mid) {
        s.advance_r(v[s.r + 1]);
    }
    while (s.r > mid) {
        s.back_r(v[s.r]);
    }

    vi removed;
    for (int i = optl; i <= min(mid, optr); i++) {
        best =
            min(best,
                {(i ? dp_before[i - 1] : 0) + s.sum, i}); //
                min() se quiser minimizar
        removed.push_back(v[s.l]);
        s.advance_l(v[s.l]);
    }
    for (int rem : removed) {
        s.back_l(v[s.l - 1]);
    }

    dp_cur[mid] = best.first;
    int opt = best.second;
    compute(l, mid - 1, optl, opt);
    compute(mid + 1, r, opt, optr);
}

```

```

    }

    ll solve(int n, int k) {
        dp_before.assign(n, 0);
        dp_cur.assign(n, 0);
        s.clear(n);
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            s.advance_r(v[i]);
            dp_before[i] = s.sum;
        }
    }

    }
};

```

## 4.5 Busca Ternaria

Encontra um ponto ótimo em uma função que pode ser separada em duas funções estritamente monotônicas (e.g. parábolas).

- Complexidade de tempo:  $O(\log(N) * O(\text{eval}))$ . Onde  $N$  é o tamanho do espaço de busca e  $O(\text{eval})$  o custo de avaliação da função.

### Busca Ternária em Espaço Discreto

Encontra um ponto ótimo em uma função que pode ser separada em duas funções estritamente monotônicas (e.g. parábolas).

Versão para espaços discretos.

- Complexidade de tempo:  $O(\log(N) * O(\text{eval}))$ . Onde  $N$  é o tamanho do espaço de busca e  $O(\text{eval})$  o custo de avaliação da função.

```

double eval(double mid) {
    // implement the evaluation
}

```

```

double ternary_search(double l, double r) {
    int k = 100;
    while (k--) {

```

```

double step = (l + r) / 3;
double mid_1 = l + step;
double mid_2 = r - step;

// minimizing. To maximize use >= to
// compare
if (eval(mid_1) <= eval(mid_2)) {

```

```

    r = mid_2;
} else {
    l = mid_1;
}
}
return l;
}

```

```

long long eval(long long mid) {
    // implement the evaluation
}

long long discrete_ternary_search(long long l, long long r) {
    long long ans = -1;
    r--; // to not space r
    while (l <= r) {
        long long mid = (l + r) / 2;

```

```

        // minimizing. To maximize use >= to
        // compare
        if (eval(mid) <= eval(mid + 1)) {
            ans = mid;
            r = mid - 1;
        } else {
            l = mid + 1;
        }
    }
    return ans;
}

```

## 4.6 DP de Permutacao

Otimização do problema do Caixeiro Viajante

\* Complexidade de tempo:  $O(n^2 * 2^n)$

Para rodar a função basta setar a matriz de adjacência 'dist' e chamar solve(0,0,n).

```

const int lim = 17;           // setar para o maximo de itens
long double dist[lim][lim]; // eh preciso dar as
                             // distancias de n para n
long double dp[lim][1 << lim];

int limMask = (1 << lim) - 1; // 2**(maximo de itens) - 1
long double solve(int atual, int mask, int n) {
    if (dp[atual][mask] != 0) {
        return dp[atual][mask];
    }
    if (mask == (1 << n) - 1) {
        return dp[atual][mask] = 0; // o que fazer quando
                                   // chega no final
    }
}

```

```

long double res = 1e13; // pode ser maior se precisar
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (!(mask & (1 << i))) {
        long double aux = solve(i, mask | (1 << i), n);
        if (mask) {
            aux += dist[atual][i];
        }
        res = min(res, aux);
    }
}
return dp[atual][mask] = res;
}

```

## 4.7 Convex Hull Trick

Otimização de DP onde se mantém as retas que formam um Convex Hull em uma estrutura que permite consultar qual o melhor valor para um determinado  $x$ .

Só funciona quando as retas são monotônicas. Caso não forem, usar LiChao Tree para guardar as retas

Complexidade de tempo:

- Inserir reta:  $O(1)$  amortizado
- Consultar  $x$ :  $O(\log(N))$
- Consultar  $x$  quando  $x$  tem crescimento monotônico:  $O(1)$

```

const ll INF = 1e18 + 18;
bool op(ll a, ll b) {
    return a >= b; // either >= or <=
}
struct line {
    ll a, b;
    ll get(ll x) {
        return a * x + b;
    }
    ll intersect(line l) {
        return (l.b - b + a - l.a) / (a - l.a); // rounds up for
        integer                                // only
    }
};
deque<pair<line, ll>> fila;
void add_line(ll a, ll b) {
    line nova = {a, b};
    if (!fila.empty() && fila.back().first.a == a &&
        fila.back().first.b == b) {
        return;
    }
    while (!fila.empty() && op(fila.back().second,
        nova.intersect(fila.back().first))) {
        fila.pop_back();

```

```

    }
    ll x = fila.empty() ? -INF : nova.intersect(fila.back().first);
    fila.emplace_back(nova, x);
}
ll get_binary_search(ll x) {
    int esq = 0, dir = fila.size() - 1, r = -1;
    while (esq <= dir) {
        int mid = (esq + dir) / 2;
        if (op(x, fila[mid].second)) {
            esq = mid + 1;
            r = mid;
        } else {
            dir = mid - 1;
        }
    }
    return fila[r].first.get(x);
}
// O(1), use only when QUERIES are monotonic!
ll get(ll x) {
    while (fila.size() >= 2 && op(x, fila[1].second)) {
        fila.pop_front();
    }
    return fila.front().first.get(x);
}

```

## 4.8 All Submasks

Percorre todas as submáscaras de uma máscara.

\* Complexidade de tempo:  $O(3^N)$



```
int mask;
```

```
for (int sub = mask; sub; sub = (sub - 1) & mask) { }
```

## Capítulo 5

# Matemática

### 5.1 Sum of floor( $n \div i$ )

Computa  $\sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$

Computa o somatório de  $n$  dividido de 1 a  $n$  (divisão arredondado pra baixo).

- Complexidade de tempo:  $O(\sqrt{n})$ .

```
const int MOD = 1e9 + 7;

long long sumoffloor(long long n) {
    long long answer = 0, i;
    for (i = 1; i * i <= n; i++) {
        answer += n / i;
        answer %= MOD;
    }
}
```

```
    i--;
    for (int j = 1; n / (j + 1) >= i; j++) {
        answer += (((n / j - n / (j + 1)) % MOD) * j) % MOD;
        answer %= MOD;
    }
    return answer;
}
```

## 5.2 Primos

Algoritmos relacionados a números primos.

### Crivo de Eratóstenes

Computa a primalidade de todos os números até  $N$ , quase tão rápido quanto o crivo linear.

- Complexidade de tempo:  $O(N * \log(\log(N)))$

Demora 1 segundo para LIM igual a  $3 * 10^7$ .

### Miller-Rabin

Teste de primalidade garantido para números menores do que  $2^{64}$ .

- Complexidade de tempo:  $O(\log(N))$

### Teste Ingênuo

Computa a primalidade de um número  $N$ .

- Complexidade de tempo:  $O(N^{(1/2)})$

```
vector<bool> sieve(int n) {
    vector<bool> is_prime(n + 5, true);
    is_prime[0] = false;
    is_prime[1] = false;
    long long sq = sqrt(n + 5);
```

```
        for (long long i = 2; i <= sq; i++) {
            if (is_prime[i]) {
<<<<<<<< HEAD                for (long long j = i * i; j < n; j += i) {
                                is_prime[j] = false;
```

```

    }
    for (long long j = i * i; j < n; j += i) {
        is_prime[j] = false;
    }
}

```

```

bool is_prime(int n) {
    for (long long d = 2; d * d <= n; d++) {
<<<<<<< HEAD
        if (n % d == 0) {
            return false;
        }
    }
}

```

```

long long power(long long base, long long e, long long mod) {
    long long result = 1;
    base %= mod;
    while (e) {
<<<<<<< HEAD
        if (e & 1) {
            result = (__int128)result * base % mod;
        }
    }
    if (e & 1) {
        result = (__int128)result * base % mod;
    }
>>>>>>> master
    base = (__int128)base * base % mod;
    e >>= 1;
}
    return result;
}

```

```

>>>>>>> master
    }
    return is_prime;
}

```

```

        if (n % d == 0) {
            return false;
        }
>>>>>>> master
    }
    return true;
}

```

```

bool is_composite(long long n, long long a, long long d, int s) {
    long long x = power(a, d, n);
<<<<<<< HEAD
    if (x == 1 || x == n - 1) {
        return false;
    }
    for (int r = 1; r < s; r++) {
        x = (__int128)x * x % n;
        if (x == n - 1) {
            return false;
        }
    }
>>>>>>> master
    if (x == 1 || x == n - 1) {
        return false;
    }
    for (int r = 1; r < s; r++) {
        x = (__int128)x * x % n;
    }
}

```

```

        if (x == n - 1) {
            return false;
        }
>>>>>> master
    }
    return true;
}

bool miller_rabin(long long n) {
<<<<<<< HEAD
    if (n < 2) {
        return false;
    }
    int r = 0;
    long long d = n - 1;
    while ((d & 1) == 0) {
        d >>= 1, ++r;
    }
    for (int a : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}) {
        if (n == a) {
            return true;
        }
        if (is_composite(n, a, d, r)) {

```

```

            return false;
        }
    }
    return true;
}

bool is_composite(long long n, long long a, long long d, int r) {
    if (n < 2) {
        return false;
    }
    int r = 0;
    long long d = n - 1;
    while ((d & 1) == 0) {
        d >>= 1, ++r;
    }
    for (int a : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}) {
        if (n == a) {
            return true;
        }
        if (is_composite(n, a, d, r)) {
            return false;
        }
    }
>>>>>> master
    }
    return true;
}

```

### 5.3 NTT

Computa a multiplicação de polinômios com coeficientes inteiros módulo um número primo.

Computa multiplicação de polinômio; **Somente para inteiros.**

- Complexidade de tempo:  $O(N * \log(N))$

Constantes finais devem ser menor do que  $10^9$ .

Para constantes entre  $10^9$  e  $10^{18}$  é necessário codar também [big\_convolution](big\_convolution.cpp).

```

typedef long long ll;
typedef vector<ll> poly;

ll mod[3] = {998244353LL, 1004535809LL, 1092616193LL};
ll root[3] = {102292LL, 12289LL, 23747LL};
ll root_1[3] = {116744195LL, 313564925LL, 642907570LL};
ll root_pw[3] = {1LL << 23, 1LL << 21, 1LL << 21};

ll modInv(ll b, ll m) {
    ll e = m - 2;
    ll res = 1;
    while (e) {
<<<<<<< HEAD
        if (e & 1) {
            res = (res * b) % m;
        }
=====
        if (e & 1) {
            res = (res * b) % m;
        }
>>>>>>> master
        e /= 2;
        b = (b * b) % m;
    }
    return res;
}

void ntt(poly &a, bool invert, int id) {
    ll n = (ll)a.size(), m = mod[id];
    for (ll i = 1, j = 0; i < n; ++i) {
        ll bit = n >> 1;
<<<<<<< HEAD
        for (; j >= bit; bit >>= 1) {
            j -= bit;
        }
        j += bit;

        if (i < j) {
            swap(a[i], a[j]);
        }
    }
for (ll len = 2, wlen; len <= n; len <<= 1) {
    wlen = invert ? root_1[id] : root[id];
    for (ll i = len; i < root_pw[id]; i <<= 1) {
        wlen = (wlen * wlen) % m;
    }
=====
    for (; j >= bit; bit >>= 1) {
        j -= bit;
    }
    j += bit;
    if (i < j) {
        swap(a[i], a[j]);
    }
}
for (ll len = 2, wlen; len <= n; len <<= 1) {
    wlen = invert ? root_1[id] : root[id];
    for (ll i = len; i < root_pw[id]; i <<= 1) {
        wlen = (wlen * wlen) % m;
    }
>>>>>>> master
    for (ll i = 0; i < n; i += len) {
        ll w = 1;
        for (ll j = 0; j < len / 2; j++) {
            ll u = a[i + j], v = (a[i + j + len / 2] * w) % m;
            a[i + j] = (u + v) % m;
            a[i + j + len / 2] = (u - v + m) % m;
            w = (w * wlen) % m;
        }
    }
}
if (invert) {
    ll inv = modInv(n, m);

```

```

<<<<<<< HEAD
    for (ll i = 0; i < n; i++) {
        a[i] = (a[i] * inv) % m;
    }
=====
    for (ll i = 0; i < n; i++) {
        a[i] = (a[i] * inv) % m;
    }
>>>>>>> master
    }
}

poly convolution(poly a, poly b, int id = 0) {
    ll n = 1LL, len = (1LL + a.size() + b.size());
<<<<<<< HEAD
    while (n < len) {
        n *= 2;
    }
=====
    while (n < len) {

```

```

<<<<<<< HEAD
ll mod_mul(ll a, ll b, ll m) {
    return (__int128)a * b % m;
}
=====
ll mod_mul(ll a, ll b, ll m) { return (__int128)a * b % m; }
>>>>>>> master
ll ext_gcd(ll a, ll b, ll &x, ll &y) {
    if (!b) {
        x = 1;
        y = 0;
        return a;
    } else {
        ll g = ext_gcd(b, a % b, y, x);
        y -= a / b * x;
        return g;
    }
}

```

```

        n *= 2;
    }
>>>>>>> master
    a.resize(n);
    b.resize(n);
    ntt(a, 0, id);
    ntt(b, 0, id);
    poly answer(n);
<<<<<<< HEAD
    for (ll i = 0; i < n; i++) {
        answer[i] = (a[i] * b[i]);
    }
=====
    for (ll i = 0; i < n; i++) {
        answer[i] = (a[i] * b[i]);
    }
>>>>>>> master
    ntt(answer, 1, id);
    return answer;
}

```

```

    }
}

// convolution mod 1,097,572,091,361,755,137
poly big_convolution(poly a, poly b) {
    poly r0, r1, answer;
    r0 = convolution(a, b, 1);
    r1 = convolution(a, b, 2);

    ll s, r, p = mod[1] * mod[2];
    ext_gcd(mod[1], mod[2], r, s);

    answer.resize(r0.size());
    for (int i = 0; i < (int)answer.size(); i++) {
<<<<<<<< HEAD
        answer[i] = (mod_mul((s * mod[2] + p) % p, r0[i], p) +
                     mod_mul((r * mod[1] + p) % p, r1[i], p) + p) %
                     p;
=====
        answer[i] = (mod_mul((s * mod[2] + p) % p, r0[i], p) + mod_mul((r * mod[1] + p) % p, r1[i], p) + p) % p;
>>>>>>>> master
    }
    return answer;
}

```

## 5.4 Eliminação Gaussiana

Método de eliminação gaussiana para resolução de sistemas lineares.

- Complexidade de tempo:  $O(n^3)$ .

Dica: Se os valores forem apenas 0 e 1 o algoritmo [gauss\_mod2](gauss\_mod2.cpp) é muito mais rápido.



```

const double EPS = 1e-9;
const int INF = 2; // it doesn't actually have to
                  // be infinity or a big number

int gauss(vector<vector<double>> a, vector<double> &ans) {
    int n = (int)a.size();
    int m = (int)a[0].size() - 1;

    vector<int> where(m, -1);
    for (int col = 0, row = 0; col < m && row < n; ++col) {
        int sel = row;
        for (int i = row; i < n; ++i) {
            if (abs(a[i][col]) > abs(a[sel][col])) {
                sel = i;
            }
        }
        if (abs(a[sel][col]) < EPS) {
            continue;
        }
        for (int i = col; i <= m; ++i) {
            swap(a[sel][i], a[row][i]);
        }
        where[col] = row;

        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            if (i != row) {
                double c = a[i][col] / a[row][col];
                for (int j = col; j <= m; ++j) {
                    a[i][j] -= a[row][j] * c;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

const int N = 105;
const int INF = 2; // tanto faz

```

```

// n -> numero de equacoes, m -> numero de
// variaveis a[i][j] para j em [0, m - 1] ->
// coeficiente da variavel j na iesima equacao

```

```

    }
    }
    ++row;
}

ans.assign(m, 0);
for (int i = 0; i < m; ++i) {
    if (where[i] != -1) {
        ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
    }
}
for (int i = 0; i < n; ++i) {
    double sum = 0;
    for (int j = 0; j < m; ++j) {
        sum += ans[j] * a[i][j];
    }
    if (abs(sum - a[i][m]) > EPS) {
        return 0;
    }
}

for (int i = 0; i < m; ++i) {
    if (where[i] == -1) {
        return INF;
    }
}
return 1;
}

```

```

// a[i][j] para j == m -> resultado da equacao da
// iesima linha ans -> bitset vazio, que retornara
// a solucao do sistema (caso exista)
int gauss(vector<bitset<N>> a, int n, int m, bitset<N> &ans) {
    vector<int> where(m, -1);

```

```

for (int col = 0, row = 0; col < m && row < n; col++) {
    for (int i = row; i < n; i++) {
        if (a[i][col]) {
            swap(a[i], a[row]);
            break;
        }
    }
    if (!a[row][col]) {
        continue;
    }
    where[col] = row;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (i != row && a[i][col]) {
            a[i] ^= a[row];
        }
    }
    row++;
}

for (int i = 0; i < m; i++) {
    if (where[i] != -1) {

```

```

        ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
    }
}
for (int i = 0; i < n; i++) {
    int sum = 0;
    for (int j = 0; j < m; j++) {
        sum += ans[j] * a[i][j];
    }
    if (abs(sum - a[i][m]) > 0) {
        return 0; // Sem solucao
    }
}

for (int i = 0; i < m; i++) {
    if (where[i] == -1) {
        return INF; // Infinitas solucoes
    }
}
return 1; // Unica solucao (retornada no
// bitset ans)
}

```

## 5.5 GCD

Algoritmo Euclides para computar o Máximo Divisor Comum (MDC em português; GCD em inglês), e variações.

\*Read in [English](README.en.md)\*

### Algoritmo de Euclides

Computa o Máximo Divisor Comum (MDC em português; GCD em inglês).

- Complexidade de tempo:  $O(\log(n))$

Mais demorado que usar a função do compilador C++ `__gcd(a,b)`.

### Algoritmo de Euclides Estendido

Algoritmo estendido de euclides que computa o Máximo Divisor Comum e os valores  $x$  e  $y$  tal que  $a * x + b * y = \gcd(a, b)$ .

- Complexidade de tempo:  $O(\log(n))$

```
<<<<<<<< HEAD
long long gcd(long long a, long long b) {
    return (b == 0) ? a : gcd(b, a % b);
}
```

```
int extended_gcd(int a, int b, int &x, int &y) {
    x = 1, y = 0;
    int x1 = 0, y1 = 1;
    while (b) {
        int q = a / b;
        tie(x, x1) = make_tuple(x1, x - q * x1);
```

```
ll extended_gcd(ll a, ll b, ll &x, ll &y) {
    if (b == 0) {
        x = 1;
        y = 0;
        return a;
    } else {
```

```
=====
long long gcd(long long a, long long b) { return (b == 0) ? a :
    gcd(b, a % b); }
>>>>>>>> master
```

```
        tie(y, y1) = make_tuple(y1, y - q * y1);
        tie(a, b) = make_tuple(b, a - q * b);
    }
    return a;
}
```

```
        ll g = extended_gcd(b, a % b, y, x);
        y -= a / b * x;
        return g;
    }
}
```

## 5.6 Fatoração

Algoritmos para fatorar um número.

### Fatoração Simples

Fatora um número  $N$ .

- Complexidade de tempo:  $O(\sqrt{n})$

### Crivo Linear

Pré-computa todos os fatores primos até  $MAX$ .

Utilizado para fatorar um número  $N$  menor que  $MAX$ .

- Complexidade de tempo: Pré-processamento  $O(MAX)$
- Complexidade de tempo: Fatoração  $O(\text{quantidade de fatores de } N)$
- Complexidade de espaço:  $O(MAX)$

### Fatoração Rápida

Utiliza Pollar-Rho e Miller-Rabin (ver em Primos) para fatorar um número  $N$ .

- Complexidade de tempo:  $O(N^{1/4} \cdot \log(N))$

### Pollard-Rho

Descobre um divisor de um número  $N$ .

- Complexidade de tempo:  $O(N^{1/4} \cdot \log(N))$
- Complexidade de espaço:  $O(N^{1/2})$

```

vector<int> factorize(int n) {
    vector<int> factors;
    for (long long d = 2; d * d <= n; d++) {
        while (n % d == 0) {
            factors.push_back(d);
            n /= d;
        }
    }
    <<<<<<<< HEAD
    if (n != 1) {

```

```

namespace sieve {
    const int MAX = 1e4;
    int lp[MAX + 1], factor[MAX + 1];
    vector<int> pr;
    void build() {
        for (int i = 2; i <= MAX; ++i) {
            if (lp[i] == 0) {
                lp[i] = i;
                pr.push_back(i);
            }
            for (int j = 0; i * pr[j] <= MAX; ++j) {
                lp[i * pr[j]] = pr[j];
                factor[i * pr[j]] = i;
            }
        }
        <<<<<<<< HEAD
        if (pr[j] == lp[i]) {
            break;
        }
        if (pr[j] == lp[i]) {
            break;
        }
    }
    >>>>>>>> master
}

```

```

        factors.push_back(n);
    }
    if (n != 1) {
        factors.push_back(n);
    }
    >>>>>>>> master
    return factors;
}

```

```

    }
    vector<int> factorize(int x) {
        <<<<<<<< HEAD
        if (x < 2) {
            return {};
        }
        vector<int> v;
        for (int lpx = lp[x]; x >= lpx; x = factor[x]) {
            v.emplace_back(lp[x]);
        }
        if (x < 2) {
            return {};
        }
        vector<int> v;
        for (int lpx = lp[x]; x >= lpx; x = factor[x]) {
            v.emplace_back(lp[x]);
        }
        >>>>>>>> master
        return v;
    }
}

```

```

<<<<<<< HEAD
long long mod_mul(long long a, long long b, long long m) {
    return (__int128)a * b % m;
}
=====
long long mod_mul(long long a, long long b, long long m) { return
    (__int128)a * b % m; }
>>>>>>> master

long long pollard_rho(long long n) {
    auto f = [n](long long x) {
        return mod_mul(x, x, n) + 1;
    };
    long long x = 0, y = 0, t = 30, prd = 2, i = 1, q;
    while (t++ % 40 || __gcd(prd, n) == 1) {

```

```

// usa miller_rabin.cpp!! olhar em
// matematica/primos usa pollard_rho.cpp!! olhar em
// matematica/fatoracao

```

```

vector<long long> factorize(long long n) {
<<<<<<< HEAD
    if (n == 1) {
        return {};
    }
    if (miller_rabin(n)) {
        return {n};
    }
}
=====

```

```

<<<<<<< HEAD
    if (x == y) {
        x = ++i, y = f(x);
    }
    if ((q = mod_mul(prd, max(x, y) - min(x, y), n))) {
        prd = q;
    }
}
=====
    if (x == y) { x = ++i, y = f(x); }
    if ((q = mod_mul(prd, max(x, y) - min(x, y), n))) { prd = q; }
>>>>>>> master
    x = f(x), y = f(f(y));
}
    return __gcd(prd, n);
}

```

```

    if (n == 1) {
        return {};
    }
    if (miller_rabin(n)) {
        return {n};
    }
>>>>>>> master
    long long x = pollard_rho(n);
    auto l = factorize(x), r = factorize(n / x);
    l.insert(l.end(), all(r));
    return l;
}

```

## 5.7 Teorema do Resto Chinês

Algoritmo que resolve o sistema  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ , onde  $m_i$  são primos entre si.

<pre> 11 extended_gcd(11 a, 11 b, 11 &amp;x, 11 &amp;y) {     if (b == 0) {         x = 1;         y = 0;         return a;     } else {         11 g = extended_gcd(b, a % b, y, x);         y -= a / b * x;         return g;     } }  11 crt(vector&lt;11&gt; rem, vector&lt;11&gt; mod) {     int n = rem.size();     if (n == 0) { </pre>	<pre>         return 0;     }     __int128 ans = rem[0], m = mod[0];     for (int i = 1; i &lt; n; i++) {         11 x, y;         11 g = extended_gcd(mod[i], m, x, y);         if ((ans - rem[i]) % g != 0) {             return -1;         }         ans = ans + (__int128)1 * (rem[i] - ans) * (m / g) * y;         m = (__int128)(mod[i] / g) * (m / g) * g;         ans = (ans % m + m) % m;     }     return ans; } </pre>
--	--

## 5.8 FFT

Algoritmo que computa a transformada rápida de fourier para convolução de polinômios.

Computa convolução (multiplicação) de polinômios.

- Complexidade de tempo (caso médio):  $O(N * \log(N))$
- Complexidade de tempo (considerando alto overhead):  $O(n * \log^2(n) * \log(\log(n)))$

Garante que não haja erro de precisão para polinômios com grau até  $3 * 10^5$  e constantes até  $10^6$ .

```

typedef complex<double> cd;
typedef vector<cd> poly;
const double PI = acos(-1);

void fft(poly &a, bool invert = 0) {
    int n = a.size(), log_n = 0;
    <<<<<<<<< HEAD
        while ((1 << log_n) < n) {
            log_n++;
        }

        for (int i = 1, j = 0; i < n; ++i) {
            int bit = n >> 1;
            for (; j >= bit; bit >>= 1) {
                j -= bit;
            }
            j += bit;
            if (i < j) {
                swap(a[i], a[j]);
            }
        }
    =====
        while ((1 << log_n) < n) {
            log_n++;
        }

        for (int i = 1, j = 0; i < n; ++i) {
            int bit = n >> 1;
            for (; j >= bit; bit >>= 1) {
                j -= bit;
            }
            j += bit;
            if (i < j) {
                swap(a[i], a[j]);
            }
        }
    >>>>>>>> master
    }

    double angle = 2 * PI / n * (invert ? -1 : 1);
    poly root(n / 2);
    <<<<<<<< HEAD
        for (int i = 0; i < n / 2; ++i) {

```

```

            root[i] = cd(cos(angle * i), sin(angle * i));
        }
    =====
        for (int i = 0; i < n / 2; ++i) {
            root[i] = cd(cos(angle * i), sin(angle * i));
        }
    >>>>>>>> master

        for (long long len = 2; len <= n; len <<= 1) {
            long long step = n / len;
            long long aux = len / 2;
            for (long long i = 0; i < n; i += len) {
                for (int j = 0; j < aux; ++j) {
                    cd u = a[i + j], v = a[i + j + aux] * root[step * j];
                    a[i + j] = u + v;
                    a[i + j + aux] = u - v;
                }
            }
        }
        if (invert) {
    <<<<<<<< HEAD
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            a[i] /= n;
        }
    =====
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            a[i] /= n;
        }
    >>>>>>>> master
    }

    vector<long long> convolution(vector<long long> &a, vector<long long>
    &b) {
        int n = 1, len = a.size() + b.size();
    <<<<<<<< HEAD
        while (n < len) {
            n <<= 1;
        }
    =====
        while (n < len) {

```



```

        n <=<= 1;
    }
>>>>>>> master
    a.resize(n);
    b.resize(n);
    poly fft_a(a.begin(), a.end());
    fft(fft_a);
    poly fft_b(b.begin(), b.end());
    fft(fft_b);

    poly c(n);
<<<<<<< HEAD
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        c[i] = fft_a[i] * fft_b[i];
    }
=====
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        c[i] = fft_a[i] * fft_b[i];
    }
>>>>>>> master
    fft(c, 1);

```

```

    vector<long long> res(n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
<<<<<<< HEAD
        res[i] = round(c[i].real()); // res = c[i].real();
                                        // se for vector de
                                        // double
    }
    // while(size(res) > 1 && res.back() == 0)
    // res.pop_back(); // apenas para quando os
    // zeros direita nao importarem
=====
        res[i] = round(c[i].real()); // res = c[i].real(); se for
        vector de double
    }
    // while(size(res) > 1 && res.back() == 0) res.pop_back(); //
    // apenas para quando os
    // zeros direita nao importarem
>>>>>>> master
    return res;
}

```

## 5.9 Exponenciação Modular Rápida

Computa  $(base^{exp}) \% mod$ .

- Complexidade de tempo:  $O(\log(exp))$ .
- Complexidade de espaço:  $O(1)$

```

11 exp_mod(11 base, 11 exp) {
    11 b = base, res = 1;
    while (exp) {
        if (exp & 1) {
            res = (res * b) % MOD;
        }
    }
}

```

```

        b = (b * b) % MOD;
        exp /= 2;
    }
    return res;
}

```

## 5.10 Totiente de Euler

Código para computar o totiente de Euler.

### Totiente de Euler (Phi) para um número

Computa o totiente para um único número N.

- Complexidade de tempo:  $O(N^{(1/2)})$

### Totiente de Euler (Phi) entre 1 e N

Computa o totiente entre 1 e N.

- Complexidade de tempo:  $O(N * \log(\log(N)))$

```

vector<int> phi_1_to_n(int n) {
    vector<int> phi(n + 1);
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        phi[i] = i;
    }
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        if (phi[i] == i) {

```

```

            for (int j = i; j <= n; j += i) {
                phi[j] -= phi[j] / i;
            }
        }
    }
    return phi;
}

```

```
int phi(int n) {
    int result = n;
    for (int i = 2; i * i <= n; i++) {
        if (n % i == 0) {
            while (n % i == 0) {
                n /= i;
            }
            result -= result / i;
        }
    }
    return result;
}
```

5.11 Inverso Modular

Algoritmos para calcular o inverso modular de um número. O inverso modular de um inteiro  $a$  é outro inteiro  $x$  tal que  $a \cdot x \equiv 1 \pmod{MOD}$

The modular inverse of an integer  $a$  is another integer  $x$  such that  $a * x$  is congruent to 1 (mod MOD).

Modular Inverse

Calculates the modular inverse of  $a$ .

Uses the [exp\_mod](/Matemática/Exponenciação%20Modular%20Rápida/exp\_mod.cpp) algorithm, thus expects MOD to be prime.

\* Time Complexity:  $O(\log(MOD))$ .

\* Space Complexity:  $O(1)$ .

Modular Inverse by Extended GDC

Calculates the modular inverse of  $a$ .

Uses the [extended\_gcd](/Matemática/GCD/extended\_gcd.cpp) algorithm, thus expects MOD to be coprime with  $a$ .

Returns  $-1$  if this assumption is broken.

\* Time Complexity:  $O(\log(MOD))$ .

\* Space Complexity:  $O(1)$ .

### Modular Inverse for 1 to MAX

Calculates the modular inverse for all numbers between 1 and MAX.

expects MOD to be prime.

\* Time Complexity:  $O(\text{MAX})$ .

\* Space Complexity:  $O(\text{MAX})$ .

### Modular Inverse for all powers

Let b be any integer.

Calculates the modular inverse for all powers of b between  $b^0$  and  $b^{\text{MAX}}$ .

Needs you calculate beforehand the modular inverse of b, for 2 it is always  $(\text{MOD}+1)/2$ .

expects MOD to be coprime with b.

\* Time Complexity:  $O(\text{MAX})$ .

\* Space Complexity:  $O(\text{MAX})$ .

```
ll inv[MAX];
```

```
void compute_inv(const ll m = MOD) {
    inv[1] = 1;
```

```
const ll INVB = (MOD + 1) / 2; // Modular inverse of the base,
                               // for 2 it is (MOD+1)/2
```

```
ll inv[MAX]; // Modular inverse of b^i
```

```
void compute_inv() {
```

```
    for (int i = 2; i < MAX; i++) {
        inv[i] = m - (m / i) * inv[m % i] % m;
    }
```

```
    inv[0] = 1;
    for (int i = 1; i < MAX; i++) {
        inv[i] = inv[i - 1] * INVB % MOD;
    }
```

```
ll inv(ll a) {
    return exp_mod(a, MOD - 2);
}

int inv(int a) {
    int x, y;
    int g = extended_gcd(a, MOD, x, y);
    if (g == 1) {
        return (x % m + m) % m;
    }
}

HEAD: Codigos/Matem tica/Inverso-Modular/modular_inverse_coprime.cpp
>>>>>>> master: Codigos/Matem tica/Inverso
Modular/modular_inverse_coprime.cpp
return -1;
}
```

5.12 Some Prime Numbers

5.12.1 Left-Truncatable Prime

Prime number such that any suffix of it is a prime number  
357,686,312,646,216,567,629,137

5.12.2 Mersenne Primes

Prime numbers of the form  $2^m - 1$

Exponent ( <i>m</i> )	Decimal representation
2	3
3	7
5	31
7	127
13	8,191
17	131,071
19	524,287
31	2,147,483,647
61	$2,3 * 10^{18}$
89	$6,1 * 10^{26}$
107	$1,6 * 10^{32}$
127	$1,7 * 10^{38}$

5.13 C++ constants

Constant	C++ Name	Value
$\pi$	M_PI	3.141592...
$\pi/2$	M_PI_2	1.570796...
$\pi/4$	M_PI_4	0.785398...
$1/\pi$	M_1_PI	0.318309...
$2/\pi$	M_2_PI	0.636619...
$2/\sqrt{\pi}$	M_2_SQRTPI	1.128379...
$\sqrt{2}$	M_SQRT2	1.414213...
$1/\sqrt{2}$	M_SQRT1_2	0.707106...
$e$	M_E	2.718281...
$\log_2 e$	M_LOG2E	1.442695...
$\log_{10} e$	M_LOG10E	0.434294...
$\ln 2$	M_LN2	0.693147...
$\ln 10$	M_LN10	2.302585...

## 5.14 Linear Operators

### 5.14.1 Rotate counter-clockwise by $\theta^\circ$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

### 5.14.2 Reflect about the line $y = mx$

$$\frac{1}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix}$$

### 5.14.3 Inverse of a 2x2 matrix A

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### 5.14.4 Horizontal shear by K

$$\begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.14.5 Vertical shear by K

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix}$$

**5.14.6 Change of basis**

$\vec{a}_\beta$  are the coordinates of vector  $\vec{a}$  in basis  $\beta$ .

$\vec{a}$  are the coordinates of vector  $\vec{a}$  in the canonical basis.

$\vec{b1}$  and  $\vec{b2}$  are the basis vectors for  $\beta$ .

$C$  is a matrix that changes from basis  $\beta$  to the canonical basis.

$$C\vec{a}_\beta = \vec{a}$$

$$C^{-1}\vec{a} = \vec{a}_\beta$$

$$C = \begin{bmatrix} b1_x & b2_x \\ b1_y & b2_y \end{bmatrix}$$

**5.14.7 Properties of matrix operations**

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Let  $A$  be an  $N \times N$  matrix:

$$\det(kA) = K^N \det(A)$$