

Almanaque de Códigos pra Maratona de Programação

BRUTE UDESC

6 de agosto de 2024

Índice

1	C++	9
1.1	Compilador	9
1.2	STL (Standard Template Library)	9
1.2.1	Vector	9
1.2.2	Pair	10
1.2.3	Set	10
1.2.4	Multiset	10
1.2.5	Map	10
1.2.6	Queue	11
1.2.7	Priority Queue	11
1.2.8	Stack	11
1.2.9	Bitset	11
1.2.10	Funções úteis	12
1.2.11	Funções úteis para vetores	12
1.3	Pragmas	12
1.4	Constantes em C++	13

ÍNDICE	2
2 Teórico	14
2.1 Definições	14
2.1.1 Funções	14
2.1.2 Grafos	14
2.2 Números primos	14
2.2.1 Primos com truncamento à esquerda	14
2.2.2 Primos gêmeos (Twin Primes)	15
2.2.3 Números primos de Mersenne	15
2.3 Operadores lineares	15
2.3.1 Rotação no sentido anti-horário por θ°	15
2.3.2 Reflexão em relação à reta $y = mx$	15
2.3.3 Inversa de uma matriz 2x2 A	15
2.3.4 Cisalhamento horizontal por K	15
2.3.5 Cisalhamento vertical por K	15
2.3.6 Mudança de base	15
2.3.7 Propriedades das operações de matriz	16
2.4 Sequências numéricas	16
2.4.1 Sequência de Fibonacci	16
2.4.2 Sequência de Catalan	16
2.5 Análise combinatória	17
2.5.1 Fatorial	17
2.5.2 Combinação	17
2.5.3 Arranjo	17
2.5.4 Estrelas e barras	17
2.5.5 Princípio da inclusão-exclusão	17

<i>ÍNDICE</i>	3
2.5.6 Princípio da casa dos pombos	17
2.6 Teoria dos números	17
2.6.1 Pequeno teorema de Fermat	17
2.6.2 Teorema de Euler	17
2.6.3 Aritmética modular	17
3 Extra	19
3.1 CPP	19
3.2 Debug	19
3.3 Random	20
3.4 Run	20
3.5 Stress Test	20
3.6 Unordered Custom Hash	21
3.7 Vim	21
4 Estruturas de Dados	22
4.1 Disjoint Set Union	22
4.1.1 DSU	22
4.1.2 DSU Bipartido	22
4.1.3 DSU Rollback	23
4.1.4 DSU Rollback Bipartido	23
4.1.5 Offline DSU	24
4.2 Fenwick Tree	25
4.2.1 Fenwick	25
4.2.2 Kd Fenwick Tree	26
4.3 Implicit Treap	26

<i>ÍNDICE</i>	4
4.4 Interval Tree	28
4.5 LiChao Tree	28
4.6 Merge Sort Tree	29
4.6.1 Merge Sort Tree	29
4.6.2 Merge Sort Tree Update	30
4.7 Operation Queue	31
4.8 Operation Stack	31
4.9 Ordered Set	32
4.10 Segment Tree	33
4.10.1 Segment Tree	33
4.10.2 Segment Tree 2D	34
4.10.3 Segment Tree Beats Max And Sum Update	35
4.10.4 Segment Tree Beats Max Update	36
4.10.5 Segment Tree Esparsa	37
4.10.6 Segment Tree Kadane	38
4.10.7 Segment Tree Lazy	39
4.10.8 Segment Tree Lazy Esparsa	40
4.10.9 Segment Tree Persistente	41
4.11 Sparse Table	42
4.11.1 Disjoint Sparse Table	42
4.11.2 Sparse Table	43
4.12 Treap	43
4.13 XOR Trie	44
5 Grafos	46
5.1 2 SAT	46

5.2	Binary Lifting	47
5.2.1	Binary Lifting LCA	47
5.2.2	Binary Lifting Query	48
5.2.3	Binary Lifting Query 2	49
5.2.4	Binary Lifting Query Aresta	50
5.3	Centro e Diametro	51
5.4	Centroids	51
5.4.1	Centroid	51
5.4.2	Centroid Decomposition	52
5.5	Ciclos	53
5.6	Fluxo	54
5.7	HLD	56
5.8	Inverse Graph	58
5.9	Kosaraju	58
5.10	Kruskal	59
5.11	LCA	59
5.12	Matching	60
5.12.1	Hungaro	60
5.13	Pontes	61
5.13.1	Componentes Aresta Biconexas	61
5.13.2	Pontes	61
5.14	Pontos de Articulacao	62
5.15	Shortest Paths	62
5.15.1	01 BFS	62
5.15.2	BFS	63

<i>ÍNDICE</i>	6
5.15.3 Bellman Ford	63
5.15.4 Dijkstra	63
5.15.5 Floyd Warshall	64
5.15.6 SPFA	64
5.16 Stoer–Wagner Min Cut	65
5.17 Virtual Tree	65
6 String	67
6.1 Aho Corasick	67
6.2 Hashing	68
6.2.1 Hashing	68
6.2.2 Hashing Dinâmico	69
6.3 Lyndon	70
6.4 Manacher	70
6.5 Patricia Tree	71
6.6 Prefix Function KMP	71
6.6.1 Automato KMP	71
6.6.2 KMP	72
6.7 Suffix Array	72
6.8 Suffix Automaton	73
6.9 Trie	74
6.10 Z function	74
7 Paradigmas	76
7.1 All Submasks	76
7.2 Busca Binaria Paralela	76

<i>ÍNDICE</i>	7
7.3 Busca Ternaria	77
7.4 Convex Hull Trick	78
7.5 DP de Permutacao	78
7.6 Divide and Conquer	79
7.7 Exponenciação de Matriz	80
7.8 Mo	82
7.8.1 Mo	82
7.8.2 Mo Update	82
8 Primitivas	84
8.1 Modular Int	84
8.2 Ponto 2D	85
9 Geometria	86
9.1 Convex Hull	86
10 Matemática	87
10.1 Convolução	87
10.1.1 AND Convolution	87
10.1.2 GCD Convolution	87
10.1.3 LCM Convolution	88
10.1.4 OR Convolution	88
10.2 Eliminação Gaussiana	88
10.2.1 Gauss	88
10.2.2 Gauss Mod 2	89
10.3 Exponenciação Modular Rápida	90

ÍNDICE	8
10.4 FFT	90
10.5 Fatoração e Primos	91
10.5.1 Crivo	91
10.5.2 Divisores	92
10.5.3 Fatores	93
10.5.4 Pollard Rho	93
10.5.5 Teste Primalidade	94
10.6 Floor Values	95
10.7 GCD	95
10.8 Inverso Modular	96
10.9 NTT	97
10.9.1 NTT	97
10.9.2 NTT Big Mod	98
10.10 Teorema do Resto Chinês	98
10.11 Totiente de Euler	99

Capítulo 1

C++

1.1 Compilador

Para compilar um arquivo `.cpp` com o compilador `g++`, usar o comando:

```
1 g++ -std=c++20 -O2 arquivo.cpp
```

Obs: a flag `-std=c++20` é para usar a versão 20 do C++, os códigos desse Almanaque são testados com essa versão.

Algumas flags úteis para o `g++` são:

- `-O2`: Otimizações de compilação
- `-Wall`: Mostra todos os warnings
- `-Wextra`: Mostra mais warnings
- `-Wconversion`: Mostra warnings para conversões implícitas
- `-fsanitize=address`: Habilita o AddressSanitizer
- `-fsanitize=undefined`: Habilita o UndefinedBehaviorSanitizer

Todas essas flags já estão presente no script ‘run’ da seção Extra.

1.2 STL (Standard Template Library)

Os templates da STL são estruturas de dados e algoritmos já implementadas em C++ que facilitam as implementações, além de serem muito eficientes. Em geral, todas estão incluídas no cabeçalho `<bits/stdc++.h>`. As estruturas são templates genéricos, podem ser usadas com qualquer tipo, todos os exemplos a seguir são com `int` apenas por motivos de simplicidade.

1.2.1 Vector

Um vetor dinâmico (que pode crescer e diminuir de tamanho).

- `vector<int> v(n, x)`: Cria um vetor de inteiros com `n` elementos, todos inicializados com `x` - $\mathcal{O}(n)$
- `v.push_back(x)`: Adiciona o elemento `x` no final do vetor - $\mathcal{O}(1)$
- `v.pop_back()`: Remove o último elemento do vetor - $\mathcal{O}(1)$
- `v.size()`: Retorna o tamanho do vetor - $\mathcal{O}(1)$
- `v.empty()`: Retorna `true` se o vetor estiver vazio - $\mathcal{O}(1)$
- `v.clear()`: Remove todos os elementos do vetor - $\mathcal{O}(n)$

- `v.front()`: Retorna o primeiro elemento do vetor - $\mathcal{O}(1)$
- `v.back()`: Retorna o último elemento do vetor - $\mathcal{O}(1)$
- `v.begin()`: Retorna um iterador para o primeiro elemento do vetor - $\mathcal{O}(1)$
- `v.end()`: Retorna um iterador para o elemento seguinte ao último do vetor - $\mathcal{O}(1)$
- `v.insert(it, x)`: Insere o elemento `x` na posição apontada pelo iterador `it` - $\mathcal{O}(n)$
- `v.erase(it)`: Remove o elemento apontado pelo iterador `it` - $\mathcal{O}(n)$
- `v.erase(it1, it2)`: Remove os elementos no intervalo `[it1, it2)` - $\mathcal{O}(n)$
- `v.resize(n)`: Redimensiona o vetor para `n` elementos - $\mathcal{O}(n)$
- `v.resize(n, x)`: Redimensiona o vetor para `n` elementos, todos inicializados com `x` - $\mathcal{O}(n)$

1.2.2 Pair

Um par de elementos (de tipos possivelmente diferentes).

- `pair<int, int> p`: Cria um par de inteiros - $\mathcal{O}(1)$
- `p.first`: Retorna o primeiro elemento do par - $\mathcal{O}(1)$
- `p.second`: Retorna o segundo elemento do par - $\mathcal{O}(1)$

1.2.3 Set

Um conjunto de elementos únicos. Por baixo, é uma árvore de busca binária balanceada.

- `set<int> s`: Cria um conjunto de inteiros - $\mathcal{O}(1)$
- `s.insert(x)`: Insere o elemento `x` no conjunto - $\mathcal{O}(\log n)$
- `s.erase(x)`: Remove o elemento `x` do conjunto - $\mathcal{O}(\log n)$

- `s.find(x)`: Retorna um iterador para o elemento `x` no conjunto, ou `s.end()` se não existir - $\mathcal{O}(\log n)$
- `s.size()`: Retorna o tamanho do conjunto - $\mathcal{O}(1)$
- `s.empty()`: Retorna `true` se o conjunto estiver vazio - $\mathcal{O}(1)$
- `s.clear()`: Remove todos os elementos do conjunto - $\mathcal{O}(n)$
- `s.begin()`: Retorna um iterador para o primeiro elemento do conjunto - $\mathcal{O}(1)$
- `s.end()`: Retorna um iterador para o elemento seguinte ao último do conjunto - $\mathcal{O}(1)$

1.2.4 Multiset

Basicamente um `set`, mas permite elementos repetidos. Possui todos os métodos de um `set`.

Declaração: `multiset<int> ms`.

Um detalhe é que, ao usar o método `erase`, ele remove todas as ocorrências do elemento. Para remover apenas uma ocorrência, usar `ms.erase(ms.find(x))`.

1.2.5 Map

Um conjunto de pares chave-valor, onde as chaves são únicas. Por baixo, é uma árvore de busca binária balanceada.

- `map<int, int> m`: Cria um mapa de inteiros para inteiros - $\mathcal{O}(1)$
- `m[key]`: Retorna o valor associado à chave `key` - $\mathcal{O}(\log n)$
- `m[key] = value`: Associa o valor `value` à chave `key` - $\mathcal{O}(\log n)$
- `m.erase(key)`: Remove a chave `key` do mapa - $\mathcal{O}(\log n)$
- `m.find(key)`: Retorna um iterador para o par chave-valor com chave `key`, ou `m.end()` se não existir - $\mathcal{O}(\log n)$

- `m.size()`: Retorna o tamanho do mapa - $\mathcal{O}(1)$
- `m.empty()`: Retorna `true` se o mapa estiver vazio - $\mathcal{O}(1)$
- `m.clear()`: Remove todos os pares chave-valor do mapa - $\mathcal{O}(n)$
- `m.begin()`: Retorna um iterador para o primeiro par chave-valor do mapa - $\mathcal{O}(1)$
- `m.end()`: Retorna um iterador para o par chave-valor seguinte ao último do mapa - $\mathcal{O}(1)$

1.2.6 Queue

Uma fila (primeiro a entrar, primeiro a sair).

- `queue<int> q`: Cria uma fila de inteiros - $\mathcal{O}(1)$
- `q.push(x)`: Adiciona o elemento `x` no final da fila - $\mathcal{O}(1)$
- `q.pop()`: Remove o primeiro elemento da fila - $\mathcal{O}(1)$
- `q.front()`: Retorna o primeiro elemento da fila - $\mathcal{O}(1)$
- `q.size()`: Retorna o tamanho da fila - $\mathcal{O}(1)$
- `q.empty()`: Retorna `true` se a fila estiver vazia - $\mathcal{O}(1)$

1.2.7 Priority Queue

Uma fila de prioridade (o maior elemento é o primeiro a sair).

- `priority_queue<int> pq`: Cria uma fila de prioridade de inteiros - $\mathcal{O}(1)$
- `pq.push(x)`: Adiciona o elemento `x` na fila de prioridade - $\mathcal{O}(\log n)$
- `pq.pop()`: Remove o maior elemento da fila de prioridade - $\mathcal{O}(\log n)$
- `pq.top()`: Retorna o maior elemento da fila de prioridade - $\mathcal{O}(1)$
- `pq.size()`: Retorna o tamanho da fila de prioridade - $\mathcal{O}(1)$

- `pq.empty()`: Retorna `true` se a fila de prioridade estiver vazia - $\mathcal{O}(1)$

Para fazer uma fila de prioridade que o menor elemento é o primeiro a sair, usar `priority_queue< int, vector<int>, greater<> > pq`.

1.2.8 Stack

Uma pilha (último a entrar, primeiro a sair).

- `stack<int> s`: Cria uma pilha de inteiros - $\mathcal{O}(1)$
- `s.push(x)`: Adiciona o elemento `x` no topo da pilha - $\mathcal{O}(1)$
- `s.pop()`: Remove o elemento do topo da pilha - $\mathcal{O}(1)$
- `s.top()`: Retorna o elemento do topo da pilha - $\mathcal{O}(1)$
- `s.size()`: Retorna o tamanho da pilha - $\mathcal{O}(1)$
- `s.empty()`: Retorna `true` se a pilha estiver vazia - $\mathcal{O}(1)$

1.2.9 Bitset

Um conjunto de bits, serve para representar máscaras quando um inteiro não é suficiente. Possui operações bitwise otimizadas pelo processador.

- `bitset<N> a`: Cria um bitset de tamanho `N` (`N` deve ser constante) - $\mathcal{O}(1)$
- `a[i]`: Retorna o valor do bit na posição `i` - $\mathcal{O}(1)$
- `a.count()`: Retorna o número de bits 1 no bitset - $\mathcal{O}(N/w)$
- `a.size()`: Retorna o tamanho do bitset - $\mathcal{O}(1)$
- `a.set(i)`: Seta o bit na posição `i` para 1 - $\mathcal{O}(1)$
- `a.set()`: Seta todos os bits para 1 - $\mathcal{O}(N/w)$
- `a.reset(i)`: Seta o bit na posição `i` para 0 - $\mathcal{O}(1)$

- `a.reset()`: Seta todos os bits para 0 - $\mathcal{O}(N/w)$
- `a.flip(i)`: Inverte o bit na posição `i` - $\mathcal{O}(1)$
- `a.flip()`: Inverte todos os bits - $\mathcal{O}(N/w)$
- `a.to_ulong()`: Retorna o valor do bitset como um inteiro - $\mathcal{O}(N/w)$

O bitset também suporta operações como `&`, `|`, `^`, `~`, `<<`, `>>`, entre outros.

OBS: w é o tamanho da palavra do processador, em geral 32 ou 64 bits.

1.2.10 Funções úteis

- `min(a, b)`: Retorna o menor entre `a` e `b` - $\mathcal{O}(1)$
- `max(a, b)`: Retorna o maior entre `a` e `b` - $\mathcal{O}(1)$
- `abs(a)`: Retorna o valor absoluto de `a` - $\mathcal{O}(1)$
- `swap(a, b)`: Troca os valores de `a` e `b` - $\mathcal{O}(1)$
- `sqrt(a)`: Retorna a raiz quadrada de `a` - $\mathcal{O}(\log a)$
- `ceil(a)`: Retorna o menor inteiro maior ou igual a `a` - $\mathcal{O}(1)$
- `floor(a)`: Retorna o maior inteiro menor ou igual a `a` - $\mathcal{O}(1)$
- `round(a)`: Retorna o inteiro mais próximo de `a` - $\mathcal{O}(1)$

1.2.11 Funções úteis para vetores

Para usar em `std::vector`, sempre passar `v.begin()` e `v.end()` como argumentos para essas funções.

Se for um vetor estilo C, usar `v` e `v + n`. Exemplo:

```
1  int v[10];
2  sort(v, v + 10);
```

Lembrete: `v.end()` é um iterador para o elemento seguinte ao último do vetor, então não é um iterador válido.

As funções de vetor em geral são da forma `[L, R)`, ou seja, `L` é incluso e `R` é exclusivo.

- `fill(v.begin(), v.end(), x)`: Preenche o vetor `v` com o valor `x` - $\mathcal{O}(n)$
- `sort(v.begin(), v.end())`: Ordena o vetor `v` - $\mathcal{O}(n \log n)$
- `reverse(v.begin(), v.end())`: Inverte o vetor `v` - $\mathcal{O}(n)$
- `accumulate(v.begin(), v.end(), 0)`: Soma todos os elementos do vetor `v` - $\mathcal{O}(n)$
- `max_element(v.begin(), v.end())`: Retorna um iterador para o maior elemento do vetor `v` - $\mathcal{O}(n)$
- `min_element(v.begin(), v.end())`: Retorna um iterador para o menor elemento do vetor `v` - $\mathcal{O}(n)$
- `count(v.begin(), v.end(), x)`: Retorna o número de ocorrências do elemento `x` no vetor `v` - $\mathcal{O}(n)$
- `find(v.begin(), v.end(), x)`: Retorna um iterador para a primeira ocorrência do elemento `x` no vetor `v`, ou `v.end()` se não existir - $\mathcal{O}(n)$
- `lower_bound(v.begin(), v.end(), x)`: Retorna um iterador para o primeiro elemento maior ou igual a `x` no vetor `v` (o vetor deve estar ordenado) - $\mathcal{O}(\log n)$
- `upper_bound(v.begin(), v.end(), x)`: Retorna um iterador para o primeiro elemento estritamente maior que `x` no vetor `v` (o vetor deve estar ordenado) - $\mathcal{O}(\log n)$
- `next_permutation(a.begin(), a.end())`: Rearranja os elementos do vetor `a` para a próxima permutação lexicograficamente maior - $\mathcal{O}(n)$

1.3 Pragmas

Os pragmas são diretivas para o compilador, que podem ser usadas para otimizar o código.

Temos os pragmas de otimização, como por exemplo:

- `#pragma GCC optimize("O2")`: Otimizações de nível 2 (padrão de competições)
- `#pragma GCC optimize("O3")`: Otimizações de nível 3 (seguro para usar)
- `#pragma GCC optimize("Ofast")`: Otimizações agressivas (perigoso!)
- `#pragma GCC optimize("unroll-loops")`: Otimiza os loops mas pode levar a cache misses

E também os pragmas de target, que são usados para otimizar o código para um certo processador:

- `#pragma GCC target("avx2")`: Otimiza instruções para processadores com suporte a AVX2
- `#pragma GCC target("sse4")`: Parecido com o de cima, mas mais antigo
- `#pragma GCC target("popcnt")`: Otimiza o popcount em processadores que suportam
- `#pragma GCC target("lzcnt")`: Otimiza o leading zero count em processadores que suportam
- `#pragma GCC target("bmi")`: Otimiza instruções de bit manipulation em processadores que suportam
- `#pragma GCC target("bmi2")`: Mesmo que o de cima, mas mais recente

Em geral, esses pragmas são usados para otimizar o código em competições, mas é importante usá-los com certa sabedoria, em alguns casos eles podem piorar o desempenho do código.

Uma opção relativamente segura de se usar é a seguinte:

```
1 #pragma GCC optimize("O3,unroll-loops")
2 #pragma GCC target("avx2,bmi,bmi2,lzcnt,popcnt")
```

1.4 Constantes em C++

Constante	Nome em C++	Valor
π	M_PI	3.141592...
$\pi/2$	M_PI_2	1.570796...
$\pi/4$	M_PI_4	0.785398...
$1/\pi$	M_1_PI	0.318309...
$2/\pi$	M_2_PI	0.636619...
$2/\sqrt{\pi}$	M_2_SQRTPI	1.128379...
$\sqrt{2}$	M_SQRT2	1.414213...
$1/\sqrt{2}$	M_SQRT1_2	0.707106...
e	M_E	2.718281...
$\log_2 e$	M_LOG2E	1.442695...
$\log_{10} e$	M_LOG10E	0.434294...
$\ln 2$	M_LN2	0.693147...
$\ln 10$	M_LN10	2.302585...

Capítulo 2

Teórico

2.1 Definições

Algumas definições e termos importantes:

2.1.1 Funções

- **Comutativa:** Uma função $f(x, y)$ é comutativa se $f(x, y) = f(y, x)$.
- **Associativa:** Uma função $f(x, y)$ é associativa se $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$.
- **Idempotente:** Uma função $f(x, y)$ é idempotente se $f(x, x) = x$.

2.1.2 Grafos

- **Grafo:** Um grafo é um conjunto de vértices e um conjunto de arestas que conectam os vértices.
- **Grafo Conexo:** Um grafo é conexo se existe um caminho entre todos os pares de vértices.
- **Grafo Bipartido:** Um grafo é bipartido se é possível dividir os vértices em dois conjuntos disjuntos de forma que todas as arestas conectem um vértice de um conjunto com um vértice do outro conjunto, ou seja, não existem arestas que conectem vértices do mesmo conjunto.

- **Árvore:** Um grafo é uma árvore se ele é conexo e não possui ciclos.
- **Árvore Geradora Mínima (AGM):** Uma árvore geradora mínima é uma árvore que conecta todos os vértices de um grafo e possui o menor custo possível, também conhecido como *Minimum Spanning Tree (MST)*.

2.2 Números primos

Números primos são muito úteis para funções de hashing (dentre outras coisas). Aqui vão vários números primos interessantes:

2.2.1 Primos com truncamento à esquerda

Números primos tais que qualquer sufixo deles é um número primo:

33,333,31

357,686,312,646,216,567,629,137

2.2.2 Primos gêmeos (Twin Primes)

Pares de primos da forma $(p, p + 2)$ (aqui tem só alguns pares aleatórios, existem muitos outros).

Primo	Primo + 2	Ordem
5	7	10^0
17	19	10^1
461	463	10^2
3461	3463	10^3
34499	34501	10^4
487829	487831	10^5
5111999	5112001	10^6
30684887	30684889	10^7
361290539	361290541	10^8
1000000007	1000000009	10^9
1005599459	1005599461	10^9

2.2.3 Números primos de Mersenne

São os números primos da forma $2^m - 1$, onde m é um número inteiro positivo.

Expoente (m)	Representação Decimal
2	3
3	7
5	31
7	127
13	8,191
17	131,071
19	524,287
31	2,147,483,647
61	$2,3 * 10^{18}$
89	$6,1 * 10^{26}$
107	$1,6 * 10^{32}$
127	$1,7 * 10^{38}$

2.3 Operadores lineares

2.3.1 Rotação no sentido anti-horário por θ°

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

2.3.2 Reflexão em relação à reta $y = mx$

$$\frac{1}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Inversa de uma matriz 2x2 A

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2.3.4 Cisalhamento horizontal por K

$$\begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.5 Cisalhamento vertical por K

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.6 Mudança de base

\vec{a}_β são as coordenadas do vetor \vec{a} na base β .
 \vec{a} são as coordenadas do vetor \vec{a} na base canônica.

$\vec{b1}$ e $\vec{b2}$ são os vetores de base para β .
 C é uma matriz que muda da base β para a base canônica.

$$\begin{aligned} C\vec{a}_\beta &= \vec{a} \\ C^{-1}\vec{a} &= \vec{a}_\beta \\ C &= \begin{bmatrix} b1_x & b2_x \\ b1_y & b2_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3.7 Propriedades das operações de matriz

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= A^{-1}B^{-1} \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ \det(A) &= \det(A^T) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

Seja A uma matriz $N \times N$:

$$\det(kA) = K^N \det(A)$$

2.4 Sequências numéricas

2.4.1 Sequência de Fibonacci

Primeiros termos: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...**

Definição:

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Matriz de recorrência:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

2.4.2 Sequência de Catalan

Primeiros termos: **1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...**

Definição:

$$C_0 = C_1 = 1$$

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}$$

Definição analítica:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Propriedades úteis:

- C_n é o número de árvores binárias com $n+1$ folhas.
- C_n é o número de sequências de parênteses bem formadas com n pares de parênteses.

2.5 Análise combinatória

2.5.1 Fatorial

O fatorial de um número n é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n .

O fatorial conta o número de permutações de n elementos.

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Em particular, $0! = 1$.

2.5.2 Combinação

Conta o número de maneiras de escolher k elementos de um conjunto de n elementos.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

2.5.3 Arranjo

Conta o número de maneiras de escolher k elementos de um conjunto de n elementos, onde a ordem importa.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2.5.4 Estrelas e barras

Conta o número de maneiras de distribuir n elementos idênticos em k recipientes distintos.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

2.5.5 Princípio da inclusão-exclusão

O princípio da inclusão-exclusão é uma técnica para contar o número de elementos em uma união de conjuntos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

2.5.6 Princípio da casa dos pombos

Se n pombos são colocados em m casas, então pelo menos uma casa terá $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ pombos ou mais.

2.6 Teoria dos números

2.6.1 Pequeno teorema de Fermat

Se p é um número primo e a é um inteiro não divisível por p , então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

2.6.2 Teorema de Euler

Se m e a são inteiros positivos coprimos, então $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, onde $\phi(m)$ é a função totiente de Euler.

2.6.3 Aritmética modular

Quando estamos trabalhando com aritmética módulo um número p , todos os valores existentes estão entre $[0, p-1]$.

Algumas propriedades e equivalências úteis para usar aritmética modular em código são:

- $(a + b) \bmod p \equiv ((a \bmod p) + (b \bmod p)) \bmod p$
- $(a - b) \bmod p \equiv ((a \bmod p) - (b \bmod p)) \bmod p$
 - Note que o resultado pode ser negativo, nesse é necessário adicionar p ao resultado. De forma geral, geralmente fazemos $(a - b + p) \bmod p$ (assumindo que a e b já estão no intervalo $[0, p - 1]$).
- $(a \cdot b) \bmod p \equiv ((a \bmod p) \cdot (b \bmod p)) \bmod p$
- $a^b \bmod p \equiv ((a \bmod p)^b) \bmod p$
- $a^b \bmod p \equiv ((a \bmod p)^{(b \bmod \phi(p))}) \bmod p$ se a e p são coprimos

Capítulo 3

Extra

3.1 CPP

Template de C++ para usar na Maratona.

Codigo: template.cpp

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 #define endl '\n'
3 using namespace std;
4 using ll = long long;
5
6 void solve() { }
7
8 signed main() {
9     cin.tie(0)->sync_with_stdio(0);
10    solve();
11 }
```

3.2 Debug

Template para debugar variáveis em C++. Até a linha 17 é opcional, é pra permitir que seja possível debugar `std::pair` e `std::vector`.

Para usar, basta compilar com a flag `-DBRUTE` (o template `run` já tem essa flag). E no código usar `debug(x, y, z)` para debugar as variáveis `x`, `y` e `z`.

Codigo: debug.cpp

```
1 template <typename T, typename U>
2 ostream &operator<<(ostream &os, const pair<T, U> &p) { // opcional
3     os << "(" << p.first << ", " << p.second << ")";
4     return os;
5 }
6 template <typename T>
7 ostream &operator<<(ostream &os, const vector<T> &v) { // opcional
8     os << "{";
9     int n = (int)v.size();
10    for (int i = 0; i < n; i++) {
11        os << v[i];
12        if (i < n - 1) os << ", ";
13    }
14    os << "}";
15    return os;
16 }
17
18 void _print() { }
19 template <typename T, typename... U>
20 void _print(T a, U... b) {
21     if (sizeof...(b)) {
22         cerr << a << ", ";
23         _print(b...);
24     } else cerr << a;
25 }
26 #ifdef BRUTE
27 #define debug(x...) cerr << "[" << #x << "] = [" , _print(x), cerr << "]" << endl
28 #else
29 #define debug(...)
```

```
30 #endif
```

3.3 Random

É possível usar a função `rand()` para gerar números aleatórios em C++.

Útil para gerar casos aleatórios em stress test, porém não é recomendado para usar em soluções.

`rand()` gera números entre 0 e `RAND_MAX` (que é pelo menos 32767), mas costuma ser 2147483647 (depende do sistema/arquitetura).

Para usar o `rand()`, recomenda-se no mínimo chamar a função `srand(time(0))` no início da `main()` para inicializar a seed do gerador de números aleatórios.

Para usar números aleatórios em soluções, recomenda-se o uso do `mt19937` que está no código abaixo.

A função `rng()` gera números entre 0 e `UINT_MAX` (que é 4294967295).

Para gerar números aleatórios de 64 bits, usar `mt19937_64` como tipo do `rng`.

Recomenda-se o uso da função `uniform(1, r)` para gerar números aleatórios no intervalo fechado $[l, r]$ usando o `mt19937`.

Código: `rand.cpp`

```
1 mt19937 rng((uint32_t)chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
2
3 int uniform(int l, int r) { return uniform_int_distribution<int>(l, r)(rng); }
```

3.4 Run

Arquivo útil para compilar e rodar um programa em C++ com flags que ajudam a debugar.

Basta criar um arquivo chamado `run`, adicionar o código abaixo e dar permissão de execução com `chmod +x run`.

Para executar um arquivo `a.cpp`, basta rodar `./run a.cpp`.

Código: `run`

```
1 #!/bin/bash
2 g++ -std=c++20 -DBRUTE -O2 -Wall -Wextra -Wconversion -Wfatal-errors
   -fsanitize=address,undefined $1 && ./a.out
```

3.5 Stress Test

Script muito útil para achar casos em que sua solução gera uma resposta incorreta.

Deve-se criar uma solução bruteforce (que garantidamente está correta, ainda que seja lenta) e um gerador de casos aleatórios para seu problema.

Código: `stress.sh`

```
1 #!/bin/bash
2 set -e
3
4 g++ -O2 gen.cpp -o gen # pode fazer o gerador em python se preferir
5 g++ -O2 brute.cpp -o brute
6 g++ -O2 code.cpp -o code
7
8 for((i = 1; ; ++i)); do
9     ./gen $i > in
10    ./code < in > out
11    ./brute < in > ok
12    diff -w out ok || break
13    echo "Passed test: " $i
14 done
15
16 echo "WA no seguinte teste:"
17 cat in
18 echo "Sua resposta eh:"
19 cat out
20 echo "A resposta correta eh:"
21 cat ok
```

3.6 Unordered Custom Hash

As funções de hash padrão do `unordered_map` e `unordered_set` são muito propícias a colisões (principalmente se o setter da questão criar casos de teste pensando nisso).

Para evitar isso, é possível criar uma função de hash customizada.

Entretanto, é bem raro ser necessário usar isso. Geralmente o fator $\mathcal{O}(\log n)$ de um `map` é suficiente.

Exemplo de uso: `unordered_map<int, int, custom_hash> mp;`

Código: `custom_hash.cpp`

```
1 struct custom_hash {
2     static uint64_t splitmix64(uint64_t x) {
3         x += 0x9e3779b97f4a7c15;
4         x = (x ^ (x >> 30)) * 0xbf58476d1ce4e5b9;
5         x = (x ^ (x >> 27)) * 0x94d049bb133111eb;
6         return x ^ (x >> 31);
7     }
8
9     size_t operator()(uint64_t x) const {
10         static const uint64_t FIXED_RANDOM =
11             chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count();
12         return splitmix64(x + FIXED_RANDOM);
13     }
14 };
```

3.7 Vim

Template de arquivo `.vimrc` para configuração do Vim.

Código: `vimrc`

```
1 set nu ai si cindent et ts=4 sw=4 so=10 nosm
2
3 inoremap {} {}<left><return><up><end><return> " remap pra chaves
4
5 au BufReadPost * if line("'\"") > 0 && line("'\"") <= line("$") | exe "normal! g'\"" |
   endif " volta pro lugar onde estava quando saiu do arquivo
```

Capítulo 4

Estruturas de Dados

4.1 Disjoint Set Union

4.1.1 DSU

Estrutura que mantém uma coleção de conjuntos e permite as operações de unir dois conjuntos e verificar em qual conjunto um elemento está, ambas em $\mathcal{O}(1)$ amortizado. O método `find` retorna o representante do conjunto que contém o elemento, e o método `unite` une os conjuntos que contém os elementos dados, retornando `true` se eles estavam em conjuntos diferentes e `false` caso contrário.

Código: dsu.cpp

```
1 struct DSU {
2     vector<int> par, sz;
3     void build(int n) {
4         par.assign(n, 0);
5         iota(par.begin(), par.end(), 0);
6         sz.assign(n, 1);
7     }
8     int find(int a) { return a == par[a] ? a : par[a] = find(par[a]); }
9     bool unite(int a, int b) {
10         a = find(a), b = find(b);
11         if (a == b) return false;
12         if (sz[a] < sz[b]) swap(a, b);
13         par[b] = a;
14         sz[a] += sz[b];
15         return true;
16     }
17 };
```

```
16     }
17 };
```

4.1.2 DSU Bipartido

DSU que mantém se um conjunto é bipartido (visualize os conjuntos como componentes conexas de um grafo e os elementos como nodos). O método `unite` adiciona uma aresta entre os dois elementos dados, e retorna `true` se os elementos estavam em conjuntos diferentes (componentes conexas diferentes) e `false` caso contrário. O método `bipartite` retorna `true` se o conjunto (componente conexa) que contém o elemento dado é bipartido e `false` caso contrário. Todas as operações são $\mathcal{O}(\log N)$.

Código: bipartite_dsu.cpp

```
1 struct Bipartite_DSU {
2     vector<int> par, sz, c, bip;
3     bool all_bipartite;
4     void build(int n) {
5         par.assign(n, 0);
6         iota(par.begin(), par.end(), 0);
7         sz.assign(n, 1);
8         c.assign(n, 0);
9         bip.assign(n, 1);
10        all_bipartite = true;
11    }
12 };
```

4.1. DISJOINT SET UNION

```

12 int find(int a) { return a == par[a] ? a : find(par[a]); }
13 int color(int a) { return a == par[a] ? c[a] : c[a] ^ color(par[a]); }
14 bool bipartite(int a) { return bip[find(a)]; }
15 bool unite(int a, int b) {
16     bool equal_color = color(a) == color(b);
17     a = find(a), b = find(b);
18     if (a == b) {
19         if (equal_color) {
20             bip[a] = 0;
21             all_bipartite = 0;
22         }
23         return false;
24     }
25     if (sz[a] < sz[b]) swap(a, b);
26     par[b] = a;
27     sz[a] += sz[b];
28     if (equal_color) c[b] = 1;
29     bip[a] ^= bip[b];
30     all_bipartite ^= bip[a];
31     return true;
32 }
33 };

```

4.1.3 DSU Rollback

DSU que desfaz as últimas operações. O método `checkpoint` salva o estado atual da estrutura, e o método `rollback` desfaz as últimas operações até o último checkpoint. As operações de unir dois conjuntos e verificar em qual conjunto um elemento está são $\mathcal{O}(\log N)$, o rollback é $\mathcal{O}(K)$, onde K é o número de alterações a serem desfeitas e o `checkpoint` é $\mathcal{O}(1)$. Importante notar que o rollback não altera a complexidade de uma solução, uma vez que $\sum K = \mathcal{O}(Q)$, onde Q é o número de operações realizadas.

Para alterar uma variável da DSU durante o unite, deve-se usar o método `change`, pois ele coloca as alterações numa stack para depois poder revertê-las.

Código: `rollback_dsu.cpp`

```

1 struct Rollback_DSU {
2     vector<int> par, sz;
3     stack<stack<pair<int &, int>>> changes;
4     void build(int n) {
5         par.assign(n, 0);
6         sz.assign(n, 1);

```

```

7         iota(par.begin(), par.end(), 0);
8         while (changes.size()) changes.pop();
9         changes.emplace();
10    }
11    int find(int a) { return a == par[a] ? a : find(par[a]); }
12    void checkpoint() { changes.emplace(); }
13    void change(int &a, int b) {
14        changes.top().emplace(a, a);
15        a = b;
16    }
17    bool unite(int a, int b) {
18        a = find(a), b = find(b);
19        if (a == b) return false;
20        if (sz[a] < sz[b]) swap(a, b);
21        change(par[b], a);
22        change(sz[a], sz[a] + sz[b]);
23        return true;
24    }
25    void rollback() {
26        while (changes.top().size()) {
27            auto [a, b] = changes.top().top();
28            a = b;
29            changes.top().pop();
30        }
31        changes.pop();
32    }
33 };

```

4.1.4 DSU Rollback Bipartido

DSU com rollback e bipartido.

Código: `bipartite_rollback_dsu.cpp`

```

1 struct BipartiteRollback_DSU {
2     vector<int> par, sz, c, bip;
3     int all_bipartite;
4     stack<stack<pair<int &, int>>> changes;
5     void build(int n) {
6         par.assign(n, 0);
7         iota(par.begin(), par.end(), 0);
8         sz.assign(n, 1);
9         c.assign(n, 0);

```



```

10     bip.assign(n, 1);
11     all_bipartite = true;
12     changes.emplace();
13 }
14 int find(int a) { return a == par[a] ? a : find(par[a]); }
15 int color(int a) { return a == par[a] ? c[a] : c[a] ^ color(par[a]); }
16 bool bipartite(int a) { return bip[find(a)]; }
17 void checkpoint() { changes.emplace(); }
18 void change(int &a, int b) {
19     changes.top().emplace(a, a);
20     a = b;
21 }
22 bool unite(int a, int b) {
23     bool equal_color = color(a) == color(b);
24     a = find(a), b = find(b);
25     if (a == b) {
26         if (equal_color) {
27             change(bip[a], 0);
28             change(all_bipartite, 0);
29         }
30         return false;
31     }
32     if (sz[a] < sz[b]) swap(a, b);
33     change(par[b], a);
34     change(sz[a], sz[a] + sz[b]);
35     change(bip[a], bip[a] && bip[b]);
36     change(all_bipartite, all_bipartite && bip[a]);
37     if (equal_color) change(c[b], 1);
38     return true;
39 }
40 void rollback() {
41     while (changes.top().size()) {
42         auto [a, b] = changes.top().top();
43         a = b;
44         changes.top().pop();
45     }
46     changes.pop();
47 }
48 };

```

4.1.5 Offline DSU

Algoritmo que utiliza o DSU com Rollback e Bipartido que permite adição e **remoção** de arestas. O algoritmo funciona de maneira offline, recebendo previamente todas as

operações de adição e remoção de arestas, bem como todas as perguntas (de qualquer tipo, conectividade, bipartição, etc), e retornando as respostas para cada pergunta no retorno do método `solve`. Complexidade total $\mathcal{O}(Q \cdot (\log Q + \log N))$, onde Q é o número de operações realizadas e N é o número de nodos.

Codigo: `offline_dsu.cpp`

```

1 struct Offline_DSU : BipartiteRollback_DSU {
2     int time;
3     void build(int n) {
4         BipartiteRollback_DSU::build(n);
5         time = 0;
6     }
7     struct query {
8         int type, a, b;
9     };
10    vector<query> queries;
11    void askConnect(int a, int b) {
12        if (a > b) swap(a, b);
13        queries.push_back({0, a, b});
14        time++;
15    }
16    void askBipartite(int a) {
17        queries.push_back({1, a, -1});
18        time++;
19    }
20    void askAllBipartite() {
21        queries.push_back({2, -1, -1});
22        time++;
23    }
24    void addEdge(int a, int b) {
25        if (a > b) swap(a, b);
26        queries.push_back({3, a, b});
27        time++;
28    }
29    void removeEdge(int a, int b) {
30        if (a > b) swap(a, b);
31        queries.push_back({4, a, b});
32        time++;
33    }
34    vector<vector<pair<int, int>>> lazy;
35    void update(int l, int r, pair<int, int> edge, int u, int L, int R) {
36        if (R < l || L > r) return;
37        if (L >= l && R <= r) {
38            lazy[u].push_back(edge);

```

```

39     return;
40 }
41 int mid = (L + R) / 2;
42 update(l, r, edge, 2 * u, L, mid);
43 update(l, r, edge, 2 * u + 1, mid + 1, R);
44 }
45 void dfs(int u, int L, int R, vector<int> &ans) {
46     if (L > R) return;
47     checkpoint();
48     for (auto [a, b] : lazy[u]) unite(a, b);
49     if (L == R) {
50         auto [type, a, b] = queries[L];
51         if (type == 0) ans.push_back(find(a) == find(b));
52         else if (type == 1) ans.push_back(bipartite(a));
53         else if (type == 2) ans.push_back(all_bipartite);
54     } else {
55         int mid = (L + R) / 2;
56         dfs(2 * u, L, mid, ans);
57         dfs(2 * u + 1, mid + 1, R, ans);
58     }
59     rollback();
60 }
61 vector<int> solve() {
62     lazy.assign(4 * time, {});
63     map<pair<int, int>, int> edges;
64     for (int i = 0; i < time; i++) {
65         auto [type, a, b] = queries[i];
66         if (type == 3) {
67             edges[{a, b}] = i;
68         } else if (type == 4) {
69             update(edges[{a, b}], i, {a, b}, 1, 0, time - 1);
70             edges.erase({a, b});
71         }
72     }
73     for (auto [k, v] : edges) update(v, time - 1, k, 1, 0, time - 1);
74     vector<int> ans;
75     dfs(1, 0, time - 1, ans);
76     return ans;
77 }
78 };

```

4.2 Fenwick Tree

4.2.1 Fenwick

Árvore de Fenwick (ou BIT) é uma estrutura de dados que permite atualizações pontuais e consultas de prefixos em um vetor em $\mathcal{O}(\log n)$. A implementação abaixo é 0-indexada (é mais comum encontrar a implementação 1-indexada). A consulta em ranges arbitrários com o método `query` é possível para qualquer operação inversível, como soma, XOR, multiplicação, etc. A implementação abaixo é para soma, mas é fácil adaptar para outras operações. O método `update` soma d à posição i do vetor, enquanto o método `updateSet` substitue o valor da posição i do vetor por d .

Código: fenwick_tree.cpp

```

1 template <typename T>
2 struct FenwickTree {
3     int n;
4     vector<T> bit, arr;
5     FenwickTree(int _n = 0) : n(_n), bit(n), arr(n) {}
6     FenwickTree(vector<T> &v) : n(int(v.size())), bit(n), arr(v) {
7         for (int i = 0; i < n; i++) bit[i] = arr[i];
8         for (int i = 0; i < n; i++) {
9             int j = i | (i + 1);
10            if (j < n) bit[j] = bit[j] + bit[i];
11        }
12    }
13    T pref(int x) {
14        T res = T();
15        for (int i = x; i >= 0; i = (i & (i + 1)) - 1) res = res + bit[i];
16        return res;
17    }
18    T query(int l, int r) {
19        if (l == 0) return pref(r);
20        return pref(r) - pref(l - 1);
21    }
22    void update(int x, T d) {
23        for (int i = x; i < n; i = i | (i + 1)) bit[i] = bit[i] + d;
24        arr[x] = arr[x] + d;
25    }
26    void updateSet(int i, T d) {
27        // funciona pra fenwick de soma
28        update(i, d - arr[i]);
29        arr[i] = d;

```

```

30     }
31 };

```

4.2.2 Kd Fenwick Tree

Fenwick Tree em k dimensões. Faz apenas queries de prefixo e updates pontuais em $\mathcal{O}(k \cdot \log^k n)$. Para queries em range, deve-se fazer inclusão-exclusão, porém a complexidade fica exponencial, para k dimensões a query em range é $\mathcal{O}(2^k \cdot k \cdot \log^k n)$.

Codigo: kd_fenwick_tree.cpp

```

1  const int MAX = 20;
2  long long tree[MAX][MAX][MAX][MAX]; // insira o numero de dimensoes aqui
3
4  long long query(vector<int> s, int pos = 0) { // s eh a coordenada
5      long long sum = 0;
6      while (s[pos] >= 0) {
7          if (pos < (int)s.size() - 1) {
8              sum += query(s, pos + 1);
9          } else {
10             sum += tree[s[0]][s[1]][s[2]][s[3]];
11             // atualizar se mexer no numero de dimensoes
12         }
13         s[pos] = (s[pos] & (s[pos] + 1)) - 1;
14     }
15     return sum;
16 }
17
18 void update(vector<int> s, int v, int pos = 0) {
19     while (s[pos] < MAX) {
20         if (pos < (int)s.size() - 1) {
21             update(s, v, pos + 1);
22         } else {
23             tree[s[0]][s[1]][s[2]][s[3]] += v;
24             // atualizar se mexer no numero de dimensoes
25         }
26         s[pos] |= s[pos] + 1;
27     }
28 }

```

4.3 Implicit Treap

Simula um array com as seguintes operações em $\mathcal{O}(\log N)$:

- Inserir um elemento X na posição i (todos os elementos em posições maiores que i serão "empurrados" para a direita).
- Remover o elemento na posição i (todos os elementos em posições maiores que i serão "puxados" para a esquerda).
- Query em intervalo $[L, R]$ de alguma operação. Pode ser soma, máximo, mínimo, gcd, etc.
- Adição em intervalo $[L, R]$ (sua operação deve suportar propagação lazy).
- Reverter um intervalo $[L, R]$, ou seja, $a[L], a[L+1], \dots, a[R] \rightarrow a[R], a[R-1], \dots, a[L]$.

Obs: Inserir em uma posição < 0 vai inserir na posição 0, assim como inserir em uma posição $>$ Tamanho da Treap vai inserir no final dela.

Codigo: implicit_treap.cpp

```

1  mt19937 rng((uint32_t)chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
2  namespace imp_treap {
3      using T = ll; // mudar pra int se nao precisar pra melhorar a performance
4      T merge(T a, T b) { return a + b; }
5      T neutral = 0;
6      struct node_info {
7          node_info *l, *r;
8          int y, size;
9          T val, acc, add;
10         bool rev;
11         node_info() { }
12         node_info(T _val)
13             : l(0), r(0), y(rng()), size(0), val(_val), acc(0), add(0), rev(false) { }
14     };
15     using node = node_info *;
16     node root = 0;
17     inline int size(node t) { return t ? t->size : 0; }
18     inline T acc(node t) { return t ? t->acc : 0; }
19     inline bool rev(node t) { return t ? t->rev : false; }
20     inline void push(node t) {

```

```

21     if (!t) return;
22     if (rev(t)) {
23         t->rev = false;
24         swap(t->l, t->r);
25         if (t->l) t->l->rev ^= 1;
26         if (t->r) t->r->rev ^= 1;
27     }
28     t->acc += t->add * size(t);
29     // t->acc += t->add se for RMQ
30     t->val += t->add;
31     if (t->l) t->l->add += t->add;
32     if (t->r) t->r->add += t->add;
33     t->add = 0;
34 }
35 inline void pull(node t) {
36     if (t) {
37         push(t->l), push(t->r);
38         t->size = size(t->l) + size(t->r) + 1;
39         t->acc = merge(t->val, merge(acc(t->l), acc(t->r)));
40     }
41 }
42 void merge(node &t, node L, node R) {
43     push(L), push(R);
44     if (!L || !R) {
45         t = L ? L : R;
46     } else if (L->y > R->y) {
47         merge(L->r, L->r, R);
48         t = L;
49     } else {
50         merge(R->l, L, R->l);
51         t = R;
52     }
53     pull(t);
54 }
55 void split(node t, int pos, node &L, node &R, int add = 0) {
56     if (!t) {
57         L = R = nullptr;
58     } else {
59         push(t);
60         int imp_key = add + size(t->l);
61         if (pos <= imp_key) {
62             split(t->l, pos, L, t->l, add);
63             R = t;
64         } else {
65             split(t->r, pos, t->r, R, imp_key + 1);
66             L = t;
67         }

```

```

68     }
69     pull(t);
70 }
71 inline void insert(node to, int pos) {
72     node L, R;
73     split(root, pos, L, R);
74     merge(L, L, to);
75     merge(root, L, R);
76 }
77 bool remove(node &t, int pos, int add = 0) {
78     if (!t) return false;
79     push(t);
80     int imp_key = add + size(t->l);
81     if (pos == imp_key) {
82         node me = t;
83         merge(t, t->l, t->r);
84         delete me;
85         return true;
86     }
87     bool ok;
88     if (pos < imp_key) ok = remove(t->l, pos, add);
89     else ok = remove(t->r, pos, imp_key + 1);
90     pull(t);
91     return ok;
92 }
93 inline T query(int l, int r) {
94     if (l > r) return neutral;
95     node L1, L2, R1, R2;
96     split(root, r + 1, L1, R1);
97     split(L1, l, L2, R2);
98     T ans = acc(R2);
99     merge(L1, L2, R2);
100    merge(root, L1, R1);
101    return ans;
102 }
103 inline void update_sum(int l, int r, T val) {
104     if (l > r) return;
105     node L1, L2, R1, R2;
106     split(root, r + 1, L1, R1);
107     split(L1, l, L2, R2);
108     assert(R2);
109     R2->add += val;
110     merge(L1, L2, R2);
111     merge(root, L1, R1);
112 }
113 inline void reverse(int l, int r) {
114     if (l > r) return;

```

```

115     node L1, L2, R1, R2;
116     split(root, r + 1, L1, R1);
117     split(L1, l, L2, R2);
118     R2->rev ^= 1;
119     merge(L1, L2, R2);
120     merge(root, L1, R1);
121 }
122 inline void insert(int pos, int val) { insert(new node_info(val), pos); }
123 inline bool remove(int pos) { return remove(root, pos); }
124 }

```

4.4 Interval Tree

Por Rafael Granza de Mello

Estrutura que trata intersecções de intervalos.

Capaz de retornar todos os intervalos que intersectam $[L, R]$. Contém métodos `insert(L, R, ID)`, `erase(L, R, ID)`, `overlaps(L, R)` e `find(L, R, ID)`. É necessário inserir e apagar indicando tanto os limites quanto o ID do intervalo. Todas as operações são $\mathcal{O}(\log n)$, exceto `overlaps` que é $\mathcal{O}(k + \log n)$, onde k é o número de intervalos que intersectam $[L, R]$. Também podem ser usadas as operações padrões de um `std::set`

Codigo: interval_tree.cpp

```

1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
3 using namespace __gnu_pbds;
4
5 struct interval {
6     long long lo, hi, id;
7     bool operator<(const interval &i) const {
8         return tuple(lo, hi, id) < tuple(i.lo, i.hi, i.id);
9     }
10 };
11
12 const long long INF = 1e18;
13
14 template <class CNI, class NI, class Cmp_Fn, class Allocator>
15 struct intervals_node_update {
16     typedef long long metadata_type;

```

```

17     int sz = 0;
18     virtual CNI node_begin() const = 0;
19     virtual CNI node_end() const = 0;
20     inline vector<int> overlaps(const long long l, const long long r) {
21         queue<CNI> q;
22         q.push(node_begin());
23         vector<int> vec;
24         while (!q.empty()) {
25             CNI it = q.front();
26             q.pop();
27             if (it == node_end()) continue;
28             if (r >= (*it)->lo && l <= (*it)->hi) vec.push_back((*it)->id);
29             CNI l_it = it.get_l_child();
30             long long l_max = (l_it == node_end()) ? -INF : l_it.get_metadata();
31             if (l_max >= l) q.push(l_it);
32             if ((*it)->lo <= r) q.push(it.get_r_child());
33         }
34         return vec;
35     }
36     inline void operator()(NI it, CNI end_it) {
37         const long long l_max =
38             (it.get_l_child() == end_it) ? -INF : it.get_l_child().get_metadata();
39         const long long r_max =
40             (it.get_r_child() == end_it) ? -INF : it.get_r_child().get_metadata();
41         const_cast<long long &>(it.get_metadata()) = max((*it)->hi, max(l_max, r_max));
42     }
43 };
44 typedef tree<interval, null_type, less<interval>, rb_tree_tag, intervals_node_update>
45     interval_tree;

```

4.5 LiChao Tree

Uma árvore de funções. Retorna o $f(x)$ máximo em um ponto x .

Para retornar o mínimo deve-se inserir o negativo da função ($g(x) = -ax - b$) e pegar o negativo do resultado. Ou, alterar a função de comparação da árvore se souber mexer.

Funciona para funções com a seguinte propriedade, sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$, uma vez que $f(x)$ passa a ganhar/perder pra $g(x)$, $f(x)$ nunca mais passa a perder/ganhar pra $g(x)$. Em outras palavras, $f(x)$ e $g(x)$ se intersectam no máximo uma vez.

Essa implementação está pronta para usar função linear do tipo $f(x) = ax + b$.

Sendo L o tamanho do intervalo, a complexidade de consulta e inserção de funções é $\mathcal{O}(\log L)$.

Dica: No construtor da LiChao Tree, fazer `tree.reserve(MAX); L.reserve(MAX); R.reserve(MAX);` pode ajudar bastante no runtime, pois aloca espaço para os vetores e evita muitas realocações durante a execução. Nesse caso, MAX é geralmente $\mathcal{O}(Q \cdot \log L)$, onde Q é o número de queries e L é o tamanho do intervalo.

Código: lichao_tree.cpp

```
1 template <ll MINL = ll(-1e9 - 5), ll MAXR = ll(1e9 + 5)>
2 struct LichaoTree {
3     const ll INF = ll(2e18) + 10;
4     struct Line {
5         ll a, b;
6         Line(ll a_ = 0, ll b_ = -INF) : a(a_), b(b_) {}
7         ll operator()(ll x) { return a * x + b; }
8     };
9     vector<Line> tree;
10    vector<int> L, R;
11
12    int newnode() {
13        tree.push_back(Line());
14        L.push_back(-1);
15        R.push_back(-1);
16        return int(tree.size()) - 1;
17    }
18
19    LichaoTree() { newnode(); }
20
21    int le(int u) {
22        if (L[u] == -1) L[u] = newnode();
23        return L[u];
24    }
25
26    int ri(int u) {
27        if (R[u] == -1) R[u] = newnode();
28        return R[u];
29    }
30
31    void insert(Line line, int n = 0, ll l = MINL, ll r = MAXR) {
32        ll mid = (l + r) / 2;
33        bool bl = line(l) > tree[n](l);
34        bool bm = line(mid) > tree[n](mid);
35        bool br = line(r) > tree[n](r);
36        if (bm) swap(tree[n], line);
37        if (line.b == -INF) return;
```

```
38        if (bl != bm) insert(line, le(n), l, mid - 1);
39        else if (br != bm) insert(line, ri(n), mid + 1, r);
40    }
41
42    ll query(int x, int n = 0, ll l = MINL, ll r = MAXR) {
43        if (tree[n](x) == -INF || (l > r)) return -INF;
44        if (l == r) return tree[n](x);
45        ll mid = (l + r) / 2;
46        if (x < mid) return max(tree[n](x), query(x, le(n), l, mid - 1));
47        else return max(tree[n](x), query(x, ri(n), mid + 1, r));
48    }
49 };
```

4.6 Merge Sort Tree

4.6.1 Merge Sort Tree

Árvore muito semelhante a uma Segment Tree, mas ao invés de armazenar um valor em cada nodo, armazena um vetor ordenado. Permite realizar consultas do tipo: `count(L, R, A, B)` que retorna quantos elementos no intervalo $[L, R]$ estão no intervalo $[A, B]$ em $\mathcal{O}(\log^2 N)$. Em outras palavras, `count(L, R, A, B)` retorna quantos elementos X existem no intervalo $[L, R]$ tal que $A \leq X \leq B$.

Obs: o método `kth` presente nessa implementação encontra o k -ésimo elemento no intervalo $[L, R]$ em $\mathcal{O}(\log^3 N)$. É possível otimizar esse método para $\mathcal{O}(\log^2 N)$, basta se criar um vetor que possui pares da forma $[A[i], i]$ e ordená-lo de acordo com o valor de $A[i]$, agora, construa a Merge Sort Tree com esse vetor e no merge faça a união mantendo os valores de i ordenados. Dessa forma, sua Merge Sort Tree guardará em um nodo que representa o intervalo $[L, R]$ os índices ordenados de todos os elementos que estão entre o $(L + 1)$ -ésimo e o $(R + 1)$ -ésimo menor elemento do vetor original. Assim, para encontrar o k -ésimo elemento no intervalo $[L, R]$ basta fazer uma busca binária semelhante a busca binária de encontrar k -ésimo menor elemento em uma Segment Tree.

Código: mergesort_tree.cpp

```
1 template <typename T = int>
2 struct MergeSortTree {
3     vector<vector<T>> tree;
```

```

4   int n;
5   int le(int u) { return u << 1; }
6   int ri(int u) { return u << 1 | 1; }
7   void build(int u, int l, int r, const vector<T> &a) {
8       tree[u] = vector<T>(r - l + 1);
9       if (l == r) {
10          tree[u][0] = a[l];
11          return;
12      }
13      int mid = (l + r) >> 1;
14      build(le(u), l, mid, a);
15      build(ri(u), mid + 1, r, a);
16      merge(
17          tree[le(u)].begin(),
18          tree[le(u)].end(),
19          tree[ri(u)].begin(),
20          tree[ri(u)].end(),
21          tree[u].begin()
22      );
23  }
24  void build(const vector<T> &a) { // para construir com vector
25      n = (int)a.size();
26      tree.assign(4 * n, vector<T>());
27      build(1, 0, n - 1, a);
28  }
29  void build(T *bg, T *en) { // para construir com array de C
30      build(vector<T>(bg, en));
31  }
32  int count(int u, int l, int r, int L, int R, int a, int b) {
33      if (l > R || r < L || a > b) return 0;
34      if (l >= L && r <= R) {
35          auto ub = upper_bound(tree[u].begin(), tree[u].end(), b);
36          auto lb = upper_bound(tree[u].begin(), tree[u].end(), a - 1);
37          return (int)(ub - lb);
38      }
39      int mid = (l + r) >> 1;
40      return count(le(u), l, mid, L, R, a, b) + count(ri(u), mid + 1, r, L, R, a, b);
41  }
42  int count(int l, int r, int a, int b) { return count(1, 0, n - 1, l, r, a, b); }
43  int less(int l, int r, int k) { return count(l, r, tree[1][0], k - 1); }
44  int kth(int l, int r, int k) {
45      int L = 0, R = n - 1;
46      int ans = -1;
47      while (L <= R) {
48          int mid = (L + R) >> 1;
49          if (count(l, r, tree[1][0], tree[1][mid]) > k) {
50              ans = mid;

```

```

51          R = mid - 1;
52      } else {
53          L = mid + 1;
54      }
55  }
56  return tree[1][ans];
57  }
58  };

```

4.6.2 Merge Sort Tree Update

Merge Sort Tree com updates pontuais. O update é $\mathcal{O}(\log^2 N)$ e a query é $\mathcal{O}(\log^2 N)$, ambos com constante alta.

Obs: usa a estrutura `ordered_set`, descrita nesse Almanaque também.

Codigo: `mergesort_tree_update.cpp`

```

1  template <typename T = int>
2  struct MergeSortTree {
3      vector<ordered_set<pair<T, int>>> tree;
4      vector<T> v;
5      int n;
6      int le(int u) { return u << 1; }
7      int ri(int u) { return u << 1 | 1; }
8      void build(int u, int l, int r, const vector<T> &a) {
9          if (l == r) {
10             tree[u].insert({a[l], l});
11             return;
12          }
13          int mid = (l + r) >> 1;
14          build(le(u), l, mid, a);
15          build(ri(u), mid + 1, r, a);
16          for (auto x : tree[le(u)]) tree[u].insert(x);
17          for (auto x : tree[ri(u)]) tree[u].insert(x);
18      }
19      void build(const vector<T> &a) { // para construir com vector
20          n = (int)a.size();
21          v = a;
22          tree.assign(4 * n, ordered_set<pair<T, int>>());
23          build(1, 0, n - 1, a);
24      }
25      void build(T *bg, T *en) { // para construir com array de C
26          build(vector<T>(bg, en));

```

```

27 }
28 int count(int u, int l, int r, int L, int R, int a, int b) {
29     if (l > R || r < L || a > b) return 0;
30     if (l >= L && r <= R) {
31         int ub = (int)tree[u].order_of_key({b + 1, INT_MIN});
32         int lb = (int)tree[u].order_of_key({a, INT_MIN});
33         return ub - lb;
34     }
35     int mid = (l + r) >> 1;
36     return count(le(u), l, mid, L, R, a, b) + count(ri(u), mid + 1, r, L, R, a, b);
37 }
38 int count(int l, int r, int a, int b) { return count(1, 0, n - 1, l, r, a, b); }
39 int less(int l, int r, int k) { return count(1, r, tree[1].begin()->first, k - 1); }
40 void update(int u, int l, int r, int i, T x) {
41     tree[u].erase({v[i], i});
42     if (l == r) {
43         v[i] = x;
44     } else {
45         int mid = (l + r) >> 1;
46         if (i <= mid) update(le(u), l, mid, i, x);
47         else update(ri(u), mid + 1, r, i, x);
48     }
49     tree[u].insert({v[i], i});
50 }
51 void update(int i, T x) { update(1, 0, n - 1, i, x); }
52 };

```

4.7 Operation Queue

Fila que armazena o resultado do operador dos itens (ou seja, dado uma fila, responde qual é o elemento mínimo, por exemplo). A fila possui a operação `get` que retorna o resultado do operador dos itens da fila em $\mathcal{O}(1)$ amortizado. Chamar o método `get` em uma fila vazia é indefinido.

Obs: usa a estrutura Operation Stack (também descrita nesse Almanaque).

Codigo: `op_queue.cpp`

```

1 template <typename T, auto OP>
2 struct op_queue {

```

```

3     op_stack<T, OP> in, out;
4     void push(T x) { in.push(x); }
5     void pop() {
6         if (out.empty()) {
7             while (!in.empty()) {
8                 out.push(in.top());
9                 in.pop();
10            }
11        }
12        out.pop();
13    }
14    T get() {
15        if (out.empty()) return in.get();
16        if (in.empty()) return out.get();
17        return OP(in.get(), out.get());
18    }
19    T front() {
20        if (out.empty()) return in.bottom();
21        return out.top();
22    }
23    T back() {
24        if (in.empty()) return out.bottom();
25        return in.top();
26    }
27 };

```

4.8 Operation Stack

Pilha que armazena o resultado do operador dos itens (ou seja, dado uma pilha, responde qual é o elemento mínimo, por exemplo). A pilha possui a operação `get` que retorna o resultado do operador dos itens da pilha em $\mathcal{O}(1)$ amortizado. Chamar o método `get` em uma pilha vazia é indefinido.

A pilha é um template e recebe como argumentos o tipo dos itens e a função operatória. A função operatória deve receber dois argumentos do tipo dos itens e retornar um valor do mesmo tipo.

Exemplo de como passar a função operatória para a pilha:

```

1 int f(int a, int b) { return a + b; }
2
3 void test() {

```



```

4   auto g = [](int a, int b) { return a ^ b; };
5
6   op_stack<int, f> st;
7   op_stack<int, g> st2;
8
9   st.push(1);
10  st.push(1);
11  st2.push(1);
12  st2.push(1);
13  cout << st.get() << endl; // 2
14  cout << st2.get() << endl; // 0
15 }

```

Pode ser tanto função normal quanto lambda.

Código: op_stack.cpp

```

1  template <typename T, auto OP>
2  struct op_stack {
3      vector<pair<T, T>> st;
4      T get() { return st.back().second; }
5      T top() { return st.back().first; }
6      T bottom() { return st.front().first; }
7      void push(T x) {
8          auto snd = st.empty() ? x : OP(st.back().second, x);
9          st.push_back({x, snd});
10     }
11     void pop() { st.pop_back(); }
12     bool empty() { return st.empty(); }
13     int size() { return (int)st.size(); }
14 };

```

4.9 Ordered Set

Set com operações de busca por ordem e índice.

Pode ser usado como um `std::set` normal, a principal diferença são duas novas operações possíveis:

- `find_by_order(k)`: retorna um iterador para o k -ésimo menor elemento no set (indexado em 0).

- `order_of_key(k)`: retorna o número de elementos menores que k . (ou seja, o índice de k no set)

Ambas as operações são $\mathcal{O}(\log n)$.

Também é possível criar um `ordered_map`, funciona como um `std::map`, mas com as operações de busca por ordem e índice. `find_by_order(k)` retorna um iterador para a k -ésima menor **key** no mapa (indexado em 0). `order_of_key(k)` retorna o número de **keys** no mapa menores que k . (ou seja, o índice de k no map).

Para simular um `std::multiset`, há várias formas:

- Usar um `std::pair` como elemento do set, com o primeiro elemento sendo o valor e o segundo sendo um identificador único para cada elemento. Para saber o número de elementos menores que k no multiset, basta usar `order_of_key(k, -INF)`.
- Usar um `ordered_map` com a key sendo o valor e o value sendo o número de ocorrências do valor no multiset. Para saber o número de elementos menores que k no multiset, basta usar `order_of_key(k)`.
- Criar o set trocando o parâmetro `less<T>` por `less_equal<T>`. Isso faz com que o set aceite elementos repetidos, e `order_of_key(k)` retorna o número de elementos menores ou iguais a k no multiset. Porém esse método não é recomendado pois gera algumas inconsistências, como por exemplo: `upper_bound` funciona como `lower_bound` e vice-versa, `find` sempre retorna `end()` e `erase` por valor não funciona, só por iterador. Dá pra usar se souber o que está fazendo.

Exemplo de uso do `ordered_set`:

```

1  ordered_set<int> X;
2  X.insert(1);
3  X.insert(2);
4  X.insert(4);
5  X.insert(8);
6  X.insert(16);
7  cout << *X.find_by_order(1) << endl; // 2
8  cout << *X.find_by_order(2) << endl; // 4
9  cout << *X.find_by_order(4) << endl; // 16
10 cout << (end(X) == X.find_by_order(5)) << endl; // true
11 cout << X.order_of_key(-5) << endl; // 0

```

```

12 cout << X.order_of_key(1) << endl; // 0
13 cout << X.order_of_key(3) << endl; // 2
14 cout << X.order_of_key(4) << endl; // 2
15 cout << X.order_of_key(400) << endl; // 5

```

Exemplo de uso do `ordered_map`:

```

1 ordered_map<int, int> Y;
2 Y[1] = 10;
3 Y[2] = 20;
4 Y[4] = 40;
5 Y[8] = 80;
6 Y[16] = 160;
7 cout << Y.find_by_order(1)->first << endl; // 2
8 cout << Y.find_by_order(1)->second << endl; // 20
9 cout << Y.order_of_key(5) << endl; // 3
10 cout << Y.order_of_key(10) << endl; // 4
11 cout << Y.order_of_key(4) << endl; // 2

```

Codigo: `ordered_set.cpp`

```

1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
3
4 using namespace __gnu_pbds;
5
6 template <typename T>
7 using ordered_set =
8     tree<T, null_type, less<T>, rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update>;
9
10 template <typename T, typename U>
11 using ordered_map = tree<T, U, less<T>, rb_tree_tag,
    tree_order_statistics_node_update>;

```

4.10 Segment Tree

4.10.1 Segment Tree

Implementação padrão de Segment Tree, suporta operações de consulta em intervalo e update pontual. Está implementada para soma, mas pode ser facilmente modificada

para outras operações. A construção é $\mathcal{O}(n)$ e as operações de consulta e update são $\mathcal{O}(\log n)$.

Dica: A Seg Tree usa $4 \cdot n$ de memória pois cada nodo p tem seus filhos $2 \cdot p$ (filho esquerdo) e $2 \cdot p + 1$ (filho direito). Há uma forma de indexar os nodos que usa $2 \cdot n$ de memória. Dado um nodo p que representa o intervalo $[l, r]$, seu filho esquerdo é $p + 1$ (e representa o intervalo $[l, mid]$) e seu filho direito é $p + 2 \cdot (mid - l + 1)$ (e representa o intervalo $[mid + 1, r]$), onde $mid = (l + r)/2$.

Codigo: `seg_tree.cpp`

```

1 struct SegTree {
2     ll merge(ll a, ll b) { return a + b; }
3     const ll neutral = 0;
4
5     int n;
6     vector<ll> t;
7
8     void build(int p, int l, int r, const vector<ll> &v) {
9         if (l == r) {
10             t[p] = v[l];
11         } else {
12             int mid = (l + r) / 2;
13             build(p * 2, l, mid, v);
14             build(p * 2 + 1, mid + 1, r, v);
15             t[p] = merge(t[p * 2], t[p * 2 + 1]);
16         }
17     }
18
19     void build(int _n) { // pra construir com tamanho, mas vazia
20         n = _n;
21         t.assign(n * 4, neutral);
22     }
23
24     void build(const vector<ll> &v) { // pra construir com vector
25         n = int(v.size());
26         t.assign(n * 4, neutral);
27         build(1, 0, n - 1, v);
28     }
29
30     void build(ll *bg, ll *en) { // pra construir com array de C
31         build(vector<ll>(bg, en));
32     }
33
34     ll query(int p, int l, int r, int L, int R) {
35         if (l > R || r < L) return neutral;
36         if (l >= L && r <= R) return t[p];
37         int mid = (l + r) / 2;

```

4.10. SEGMENT TREE

```

37     auto ql = query(p * 2, l, mid, L, R);
38     auto qr = query(p * 2 + 1, mid + 1, r, L, R);
39     return merge(ql, qr);
40 }
41 ll query(int l, int r) { return query(1, 0, n - 1, l, r); }
42
43 void update(int p, int l, int r, int i, ll x) {
44     if (l == r) {
45         t[p] += x; // soma
46         // t[p] = x; // substitui
47     } else {
48         int mid = (l + r) / 2;
49         if (i <= mid) update(p * 2, l, mid, i, x);
50         else update(p * 2 + 1, mid + 1, r, i, x);
51         t[p] = merge(t[p * 2], t[p * 2 + 1]);
52     }
53 }
54 void update(int i, ll x) { update(1, 0, n - 1, i, x); }
55 };

```

4.10.2 Segment Tree 2D

Segment Tree em 2 dimensões, suporta operações de update pontual e consulta em intervalo. A construção é $\mathcal{O}(n \cdot m)$ e as operações de consulta e update são $\mathcal{O}(\log n \cdot \log m)$.

Codigo: seg_tree_2d.cpp

```

1  const int MAX = 2505;
2
3  int n, m, mat[MAX][MAX], tree[4 * MAX][4 * MAX];
4
5  int le(int x) { return 2 * x + 1; }
6  int ri(int x) { return 2 * x + 2; }
7
8  void build_y(int nx, int lx, int rx, int ny, int ly, int ry) {
9      if (ly == ry) {
10         if (lx == rx) tree[nx][ny] = mat[lx][ly];
11         else tree[nx][ny] = tree[le(nx)][ny] + tree[ri(nx)][ny];
12     } else {
13         int my = (ly + ry) / 2;
14         build_y(nx, lx, rx, le(ny), ly, my);
15         build_y(nx, lx, rx, ri(ny), my + 1, ry);
16         tree[nx][ny] = tree[nx][le(ny)] + tree[nx][ri(ny)];

```

```

17     }
18 }
19 void build_x(int nx, int lx, int rx) {
20     if (lx != rx) {
21         int mx = (lx + rx) / 2;
22         build_x(le(nx), lx, mx);
23         build_x(ri(nx), mx + 1, rx);
24     }
25     build_y(nx, lx, rx, 0, 0, m - 1);
26 }
27 void build() { build_x(0, 0, n - 1); }
28
29 void update_y(int nx, int lx, int rx, int ny, int ly, int ry, int x, int y, int v) {
30     if (ly == ry) {
31         if (lx == rx) tree[nx][ny] = v;
32         else tree[nx][ny] = tree[le(nx)][ny] + tree[ri(nx)][ny];
33     } else {
34         int my = (ly + ry) / 2;
35         if (y <= my) update_y(nx, lx, rx, le(ny), ly, my, x, y, v);
36         else update_y(nx, lx, rx, ri(ny), my + 1, ry, x, y, v);
37         tree[nx][ny] = tree[nx][le(ny)] + tree[nx][ri(ny)];
38     }
39 }
40 void update_x(int nx, int lx, int rx, int x, int y, int v) {
41     if (lx != rx) {
42         int mx = (lx + rx) / 2;
43         if (x <= mx) update_x(le(nx), lx, mx, x, y, v);
44         else update_x(ri(nx), mx + 1, rx, x, y, v);
45     }
46     update_y(nx, lx, rx, 0, 0, m - 1, x, y, v);
47 }
48 void update(int x, int y, int v) { update_x(0, 0, n - 1, x, y, v); }
49
50 int sum_y(int nx, int ny, int ly, int ry, int qly, int qry) {
51     if (ry < qly || ly > qry) return 0;
52     if (qly <= ly && ry <= qry) return tree[nx][ny];
53     int my = (ly + ry) / 2;
54     return sum_y(nx, le(ny), ly, my, qly, qry) + sum_y(nx, ri(ny), my + 1, ry, qly,
55         qry);
56 }
57 int sum_x(int nx, int lx, int rx, int qlx, int qrx, int qly, int qry) {
58     if (rx < qlx || lx > qrx) return 0;
59     if (qlx <= lx && rx <= qrx) return sum_y(nx, 0, 0, m - 1, qly, qry);
60     int mx = (lx + rx) / 2;
61     return sum_x(le(nx), lx, mx, qlx, qrx, qly, qry) +
62         sum_x(ri(nx), mx + 1, rx, qlx, qrx, qly, qry);
63 }

```

```
63 int sum(int lx, int rx, int ly, int ry) { return sum_x(0, 0, n - 1, lx, rx, ly, ry); }
```

4.10.3 Segment Tree Beats Max And Sum Update

Segment Tree que suporta update de maximo, update de soma e query de soma. Utiliza uma fila de lazy para diferenciar os updates. A construção é $\mathcal{O}(n)$ e as operações de consulta e update são $\mathcal{O}(\log n)$.

Codigo: seg_tree_beats_max_and_sum_update.cpp

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 #define ll long long
5 #define INF 1e9
6 #define fi first
7 #define se second
8
9 typedef pair<int, int> ii;
10
11 struct Node {
12     int m1 = INF, m2 = INF, cont = 0;
13     ll soma = 0;
14     queue<ii> lazy;
15
16     void set(int v) {
17         m1 = v;
18         cont = 1;
19         soma = v;
20     }
21
22     void merge(Node a, Node b) {
23         m1 = min(a.m1, b.m1);
24         m2 = INF;
25         if (a.m1 != b.m1) m2 = min(m2, max(a.m1, b.m1));
26         if (a.m2 != m1) m2 = min(m2, a.m2);
27         if (b.m2 != m1) m2 = min(m2, b.m2);
28         cont = (a.m1 == m1 ? a.cont : 0) + (b.m1 == m1 ? b.cont : 0);
29         soma = a.soma + b.soma;
30     }
31
32     void print() { printf("%d %d %d %lld\n", m1, m2, cont, soma); }
33 };
34
```

```
35 int n, q;
36 vector<Node> tree;
37
38 int le(int n) { return 2 * n + 1; }
39 int ri(int n) { return 2 * n + 2; }
40
41 void push(int n, int esq, int dir) {
42     while (!tree[n].lazy.empty()) {
43         ii p = tree[n].lazy.front();
44         tree[n].lazy.pop();
45         int op = p.fi, v = p.se;
46         if (op == 0) {
47             if (v <= tree[n].m1) continue;
48             tree[n].soma += (ll)abs(tree[n].m1 - v) * tree[n].cont;
49             tree[n].m1 = v;
50             if (esq != dir) {
51                 tree[le(n)].lazy.push({0, v});
52                 tree[ri(n)].lazy.push({0, v});
53             }
54         } else if (op == 1) {
55             tree[n].soma += v * (dir - esq + 1);
56             tree[n].m1 += v;
57             tree[n].m2 += v;
58             if (esq != dir) {
59                 tree[le(n)].lazy.push({1, v});
60                 tree[ri(n)].lazy.push({1, v});
61             }
62         }
63     }
64 }
65
66 void build(int n, int esq, int dir, vector<int> &v) {
67     if (esq == dir) {
68         tree[n].set(v[esq]);
69     } else {
70         int mid = (esq + dir) / 2;
71         build(le(n), esq, mid, v);
72         build(ri(n), mid + 1, dir, v);
73         tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
74     }
75 }
76 void build(vector<int> &v) { build(0, 0, n - 1, v); }
77
78 // ai = max(ai, mi) em [l, r]
79 void update(int n, int esq, int dir, int l, int r, int mi) {
80     push(n, esq, dir);
81     if (esq > r || dir < l || mi <= tree[n].m1) return;
```

```

82     if (l <= esq && dir <= r && mi < tree[n].m2) {
83         tree[n].soma += (ll)abs(tree[n].m1 - mi) * tree[n].cont;
84         tree[n].m1 = mi;
85         if (esq != dir) {
86             tree[le(n)].lazy.push({0, mi});
87             tree[ri(n)].lazy.push({0, mi});
88         }
89     } else {
90         int mid = (esq + dir) / 2;
91         update(le(n), esq, mid, l, r, mi);
92         update(ri(n), mid + 1, dir, l, r, mi);
93         tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
94     }
95 }
96 void update(int l, int r, int mi) { update(0, 0, n - 1, l, r, mi); }
97
98 // soma v em [l, r]
99 void upsoma(int n, int esq, int dir, int l, int r, int v) {
100     push(n, esq, dir);
101     if (esq > r || dir < l) return;
102     if (l <= esq && dir <= r) {
103         tree[n].soma += v * (dir - esq + 1);
104         tree[n].m1 += v;
105         tree[n].m2 += v;
106         if (esq != dir) {
107             tree[le(n)].lazy.push({1, v});
108             tree[ri(n)].lazy.push({1, v});
109         }
110     } else {
111         int mid = (esq + dir) / 2;
112         upsoma(le(n), esq, mid, l, r, v);
113         upsoma(ri(n), mid + 1, dir, l, r, v);
114         tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
115     }
116 }
117 void upsoma(int l, int r, int v) { upsoma(0, 0, n - 1, l, r, v); }
118
119 // soma de [l, r]
120 int query(int n, int esq, int dir, int l, int r) {
121     push(n, esq, dir);
122     if (esq > r || dir < l) return 0;
123     if (l <= esq && dir <= r) return tree[n].soma;
124     int mid = (esq + dir) / 2;
125     return query(le(n), esq, mid, l, r) + query(ri(n), mid + 1, dir, l, r);
126 }
127 int query(int l, int r) { return query(0, 0, n - 1, l, r); }
128

```

```

129 int main() {
130     cin >> n;
131     tree.assign(4 * n, Node());
132     build(v);
133 }

```

4.10.4 Segment Tree Beats Max Update

Segment Tree que suporta update de maximo e query de soma. A construção é $\mathcal{O}(n)$ e as operações de consulta e update são $\mathcal{O}(\log n)$.

Codigo: seg_tree_beats.cpp

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 #define ll long long
5 #define INF 1e9
6
7 struct Node {
8     int m1 = INF, m2 = INF, cont = 0, lazy = 0;
9     ll soma = 0;
10
11     void set(int v) {
12         m1 = v;
13         cont = 1;
14         soma = v;
15     }
16
17     void merge(Node a, Node b) {
18         m1 = min(a.m1, b.m1);
19         m2 = INF;
20         if (a.m1 != b.m1) m2 = min(m2, max(a.m1, b.m1));
21         if (a.m2 != m1) m2 = min(m2, a.m2);
22         if (b.m2 != m1) m2 = min(m2, b.m2);
23         cont = (a.m1 == m1 ? a.cont : 0) + (b.m1 == m1 ? b.cont : 0);
24         soma = a.soma + b.soma;
25     }
26
27     void print() { printf("%d %d %d %lld %d\n", m1, m2, cont, soma, lazy); }
28 };
29

```

```

30 int n, q;
31 vector<Node> tree;
32
33 int le(int n) { return 2 * n + 1; }
34 int ri(int n) { return 2 * n + 2; }
35
36 void push(int n, int esq, int dir) {
37     if (tree[n].lazy <= tree[n].m1) return;
38     tree[n].soma += (ll)abs(tree[n].m1 - tree[n].lazy) * tree[n].cont;
39     tree[n].m1 = tree[n].lazy;
40     if (esq != dir) {
41         tree[le(n)].lazy = max(tree[le(n)].lazy, tree[n].lazy);
42         tree[ri(n)].lazy = max(tree[ri(n)].lazy, tree[n].lazy);
43     }
44     tree[n].lazy = 0;
45 }
46
47 void build(int n, int esq, int dir, vector<int> &v) {
48     if (esq == dir) {
49         tree[n].set(v[esq]);
50     } else {
51         int mid = (esq + dir) / 2;
52         build(le(n), esq, mid, v);
53         build(ri(n), mid + 1, dir, v);
54         tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
55     }
56 }
57 void build(vector<int> &v) { build(0, 0, n - 1, v); }
58
59 // ai = max(ai, mi) em [l, r]
60 void update(int n, int esq, int dir, int l, int r, int mi) {
61     push(n, esq, dir);
62     if (esq > r || dir < l || mi <= tree[n].m1) return;
63     if (l <= esq && dir <= r && mi < tree[n].m2) {
64         tree[n].lazy = mi;
65         push(n, esq, dir);
66     } else {
67         int mid = (esq + dir) / 2;
68         update(le(n), esq, mid, l, r, mi);
69         update(ri(n), mid + 1, dir, l, r, mi);
70         tree[n].merge(tree[le(n)], tree[ri(n)]);
71     }
72 }
73 void update(int l, int r, int mi) { update(0, 0, n - 1, l, r, mi); }
74
75 // soma de [l, r]
76 int query(int n, int esq, int dir, int l, int r) {

```

```

77     push(n, esq, dir);
78     if (esq > r || dir < l) return 0;
79     if (l <= esq && dir <= r) return tree[n].soma;
80     int mid = (esq + dir) / 2;
81     return query(le(n), esq, mid, l, r) + query(ri(n), mid + 1, dir, l, r);
82 }
83 int query(int l, int r) { return query(0, 0, n - 1, l, r); }
84
85 int main() {
86     cin >> n;
87     tree.assign(4 * n, Node());
88 }

```

4.10.5 Segment Tree Esparsa

Segment Tree Esparsa, ou seja, não armazena todos os nodos da árvore, apenas os necessários, dessa forma ela suporta operações em intervalos arbitrários. A construção é $\mathcal{O}(1)$ e as operações de consulta e update são $\mathcal{O}(\log L)$, onde L é o tamanho do intervalo. A implementação suporta operações de consulta em intervalo e update pontual. Está implementada para soma, mas pode ser facilmente modificada para outras operações.

Para usar, declarar `SegTree<L, R> st` para suportar updates e queries em posições de L a R . L e R podem inclusive ser negativos.

Dica: No construtor da Seg Tree, fazer `t.reserve(MAX)`; `Lc.reserve(MAX)`; `Rc.reserve(MAX)` pode ajudar bastante no runtime, pois aloca espaço para os vetores e evita muitas realocações durante a execução. Nesse caso, MAX é geralmente $\mathcal{O}(Q \cdot \log L)$, onde Q é o número de queries e L é o tamanho do intervalo.

Codigo: `seg_tree_sparse.cpp`

```

1 template <ll MINL = (ll)-1e9 - 5, ll MAXR = (ll)1e9 + 5>
2 struct SegTree {
3     ll merge(ll a, ll b) { return a + b; }
4     const ll neutral = 0;
5
6     vector<ll> t;
7     vector<int> Lc, Rc;
8
9     inline int newnode() {
10         t.push_back(neutral);
11         Lc.push_back(-1);
12         Rc.push_back(-1);

```

```

13     return (int)t.size() - 1;
14 }
15
16 inline int le(int p) {
17     if (Lc[p] == -1) Lc[p] = newnode();
18     return Lc[p];
19 }
20
21 inline int ri(int p) {
22     if (Rc[p] == -1) Rc[p] = newnode();
23     return Rc[p];
24 }
25
26 SegTree() { newnode(); }
27
28 ll query(int p, ll l, ll r, ll L, ll R) {
29     if (l > R || r < L) return neutral;
30     if (l >= L && r <= R) return t[p];
31     ll mid = l + (r - l) / 2;
32     auto ql = query(le(p), l, mid, L, R);
33     auto qr = query(ri(p), mid + 1, r, L, R);
34     return merge(ql, qr);
35 }
36 ll query(ll l, ll r) { return query(0, MINL, MAXR, l, r); }
37
38 void update(int p, ll l, ll r, ll i, ll x) {
39     if (l == r) {
40         t[p] += x; // soma
41         // t[p] = x; // substitui
42         return;
43     }
44     ll mid = l + (r - l) / 2;
45     if (i <= mid) update(le(p), l, mid, i, x);
46     else update(ri(p), mid + 1, r, i, x);
47     t[u] = merge(t[le(p)], t[ri(p)]);
48 }
49 void update(ll i, ll x) { update(0, MINL, MAXR, i, x); }
50 };

```

4.10.6 Segment Tree Kadane

Implementação de uma Segment Tree que suporta update pontual e query de soma máxima de um subarray em um intervalo. A construção é $\mathcal{O}(n)$ e as operações de

consulta e update são $\mathcal{O}(\log n)$.

É uma Seg Tree normal, a magia está na função `merge` que é a função que computa a resposta do nodo atual. A ideia do `merge` da Seg Tree de Kadane de combinar respostas e informações já computadas dos filhos é muito útil e pode ser aplicada em muitos problemas.

Obs: não considera o subarray vazio como resposta.

Dica: A Seg Tree usa $4 \cdot n$ de memória pois cada nodo p tem seus filhos $2 \cdot p$ (filho esquerdo) e $2 \cdot p + 1$ (filho direito). Há uma forma de indexar os nodos que usa $2 \cdot n$ de memória. Dado um nodo p que representa o intervalo $[l, r]$, seu filho esquerdo é $p + 1$ (e representa o intervalo $[l, mid]$) e seu filho direito é $p + 2 \cdot (mid - l + 1)$ (e representa o intervalo $[mid + 1, r]$), onde $mid = (l + r) / 2$.

Codigo: `seg_tree_kadane.cpp`

```

1 struct SegTree {
2     struct node {
3         ll sum, pref, suf, ans;
4     };
5     const node neutral = {0, 0, 0, 0};
6     node merge(const node &a, const node &b) {
7         return {
8             a.sum + b.sum,
9             max(a.pref, a.sum + b.pref),
10            max(b.suf, b.sum + a.suf),
11            max({a.ans, b.ans, a.suf + b.pref})
12        };
13    }
14
15    int n;
16    vector<node> t;
17
18    void build(int p, int l, int r, const vector<ll> &v) {
19        if (l == r) {
20            t[p] = {v[l], v[l], v[l], v[l]};
21        } else {
22            int mid = (l + r) / 2;
23            build(p * 2, l, mid, v);
24            build(p * 2 + 1, mid + 1, r, v);
25            t[p] = merge(t[p * 2], t[p * 2 + 1]);
26        }
27    }
28
29    void build(int _n) { // pra construir com tamanho, mas vazia

```

```

30     n = _n;
31     t.assign(n * 4, neutral);
32 }
33
34 void build(const vector<ll> &v) { // pra construir com vector
35     n = int(v.size());
36     t.assign(n * 4, neutral);
37     build(1, 0, n - 1, v);
38 }
39 void build(ll *bg, ll *en) { // pra construir com array de C
40     build(vector<ll>(bg, en));
41 }
42
43 node query(int p, int l, int r, int L, int R) {
44     if (l > R || r < L) return neutral;
45     if (l >= L && r <= R) return t[p];
46     int mid = (l + r) / 2;
47     auto ql = query(p * 2, l, mid, L, R);
48     auto qr = query(p * 2 + 1, mid + 1, r, L, R);
49     return merge(ql, qr);
50 }
51 ll query(int l, int r) { return query(1, 0, n - 1, l, r).ans; }
52
53 void update(int p, int l, int r, int i, ll x) {
54     if (l == r) {
55         t[p] = {x, x, x, x};
56     } else {
57         int mid = (l + r) / 2;
58         if (i <= mid) update(p * 2, l, mid, i, x);
59         else update(p * 2 + 1, mid + 1, r, i, x);
60         t[p] = merge(t[p * 2], t[p * 2 + 1]);
61     }
62 }
63 void update(int i, ll x) { update(1, 0, n - 1, i, x); }
64 };

```

4.10.7 Segment Tree Lazy

Lazy Propagation é uma técnica para atualizar a Segment Tree que te permite fazer updates em intervalos, não necessariamente pontuais. Esta implementação responde consultas de soma em intervalo e updates de soma ou atribuição em intervalo, veja o método `update`.

A construção é $\mathcal{O}(n)$ e as operações de consulta e update são $\mathcal{O}(\log n)$.

Dica: A Seg Tree usa $4 \cdot n$ de memória pois cada nodo p tem seus filhos $2 \cdot p$ (filho esquerdo) e $2 \cdot p + 1$ (filho direito). Há uma forma de indexar os nodos que usa $2 \cdot n$ de memória. Dado um nodo p que representa o intervalo $[l, r]$, seu filho esquerdo é $p + 1$ (e representa o intervalo $[l, mid]$) e seu filho direito é $p + 2 \cdot (mid - l + 1)$ (e representa o intervalo $[mid + 1, r]$), onde $mid = (l + r)/2$.

Codigo: `seg_tree_lazy.cpp`

```

1 struct SegTree {
2     ll merge(ll a, ll b) { return a + b; }
3     const ll neutral = 0;
4
5     int n;
6     vector<ll> t, lazy;
7     vector<bool> replace;
8
9     void push(int p, int l, int r) {
10         if (replace[p]) {
11             t[p] = lazy[p] * (r - l + 1);
12             if (l != r) {
13                 lazy[p * 2] = lazy[p];
14                 lazy[p * 2 + 1] = lazy[p];
15                 replace[p * 2] = replace[p];
16                 replace[p * 2 + 1] = replace[p];
17             }
18         } else if (lazy[p] != 0) {
19             t[p] += lazy[p] * (r - l + 1);
20             if (l != r) {
21                 lazy[p * 2] += lazy[p];
22                 lazy[p * 2 + 1] += lazy[p];
23             }
24         }
25         replace[p] = false;
26         lazy[p] = 0;
27     }
28
29     void build(int p, int l, int r, const vector<ll> &v) {
30         if (l == r) {
31             t[p] = v[l];
32         } else {
33             int mid = (l + r) / 2;
34             build(p * 2, l, mid, v);
35             build(p * 2 + 1, mid + 1, r, v);
36             t[p] = merge(t[p * 2], t[p * 2 + 1]);
37         }

```



```

38 }
39
40 void build(int _n) { // pra construir com tamanho, mas vazia
41     n = _n;
42     t.assign(n * 4, neutral);
43     lazy.assign(n * 4, 0);
44     replace.assign(n * 4, false);
45 }
46
47 void build(const vector<ll> &v) { // pra construir com vector
48     n = (int)v.size();
49     t.assign(n * 4, neutral);
50     lazy.assign(n * 4, 0);
51     replace.assign(n * 4, false);
52     build(1, 0, n - 1, v);
53 }
54 void build(ll *bg, ll *en) { // pra construir com array de C
55     build(vector<ll>(bg, en));
56 }
57
58 ll query(int p, int l, int r, int L, int R) {
59     push(p, l, r);
60     if (l > R || r < L) return neutral;
61     if (l >= L && r <= R) return t[p];
62     int mid = (l + r) / 2;
63     auto ql = query(p * 2, l, mid, L, R);
64     auto qr = query(p * 2 + 1, mid + 1, r, L, R);
65     return merge(ql, qr);
66 }
67 ll query(int l, int r) { return query(1, 0, n - 1, l, r); }
68
69 void update(int p, int l, int r, int L, int R, ll val, bool repl) {
70     push(p, l, r);
71     if (l > R || r < L) return;
72     if (l >= L && r <= R) {
73         lazy[p] = val;
74         replace[p] = repl;
75         push(p, l, r);
76     } else {
77         int mid = (l + r) / 2;
78         update(p * 2, l, mid, L, R, val, repl);
79         update(p * 2 + 1, mid + 1, r, L, R, val, repl);
80         t[p] = merge(t[p * 2], t[p * 2 + 1]);
81     }
82 }
83 void update(int l, int r, ll val, bool repl = false) {
84     update(1, 0, n - 1, l, r, val, repl);

```

```

85 }
86 };

```

4.10.8 Segment Tree Lazy Esparsa

Segment Tree com Lazy Propagation e Esparsa. Está implementada com update de soma em range e atribuição em range, e query de soma em range. Construção em $\mathcal{O}(1)$ e operações de update e query em $\mathcal{O}(\log L)$, onde L é o tamanho do intervalo.

Dica: No construtor da Seg Tree, fazer `t.reserve(MAX)`; `lazy.reserve(MAX)`; `replace.reserve(MAX)`; `Lc.reserve(MAX)`; `Rc.reserve(MAX)`; pode ajudar bastante no runtime, pois aloca espaço para os vetores e evita muitas realocações durante a execução. Nesse caso, `MAX` é geralmente $\mathcal{O}(Q \cdot \log L)$, onde Q é o número de queries e L é o tamanho do intervalo.

Código: `seg_tree_sparse_lazy.cpp`

```

1 template <ll MINL = (1ll)-1e9 - 5, ll MAXR = (1ll)1e9 + 5>
2 struct SegTree {
3     ll merge(ll a, ll b) { return a + b; }
4     const ll neutral = 0;
5
6     vector<ll> t, lazy;
7     vector<int> Lc, Rc;
8     vector<bool> replace;
9
10    inline int newnode() {
11        t.push_back(neutral);
12        Lc.push_back(-1);
13        Rc.push_back(-1);
14        lazy.push_back(0);
15        replace.push_back(false);
16        return (int)t.size() - 1;
17    }
18
19    inline int le(int p) {
20        if (Lc[p] == -1) Lc[p] = newnode();
21        return Lc[p];
22    }
23
24    inline int ri(int p) {
25        if (Rc[p] == -1) Rc[p] = newnode();
26        return Rc[p];
27    }

```

```

28
29 SegTree() { newnode(); }
30
31 void push(int p, ll l, ll r) {
32     if (replace[p]) {
33         t[p] = lazy[p] * (r - l + 1);
34         if (l != r) {
35             lazy[le(p)] = lazy[p];
36             lazy[ri(p)] = lazy[p];
37             replace[le(p)] = replace[p];
38             replace[ri(p)] = replace[p];
39         }
40     } else if (lazy[p] != 0) {
41         t[p] += lazy[p] * (r - l + 1);
42         if (l != r) {
43             lazy[le(p)] += lazy[p];
44             lazy[ri(p)] += lazy[p];
45         }
46     }
47     replace[p] = false;
48     lazy[p] = 0;
49 }
50
51 ll query(int p, ll l, ll r, ll L, ll R) {
52     push(p, l, r);
53     if (l > R || r < L) return neutral;
54     if (l >= L && r <= R) return t[p];
55     ll mid = l + (r - l) / 2;
56     auto ql = query(le(p), l, mid, L, R);
57     auto qr = query(ri(p), mid + 1, r, L, R);
58     return merge(ql, qr);
59 }
60 ll query(ll l, ll r) { return query(0, MINL, MAXR, l, r); }
61
62 void update(int p, ll l, ll r, ll L, ll R, ll val, bool repl) {
63     push(p, l, r);
64     if (l > R || r < L) return;
65     if (l >= L && r <= R) {
66         lazy[p] = val;
67         replace[p] = repl;
68         push(p, l, r);
69     } else {
70         ll mid = l + (r - l) / 2;
71         update(le(p), l, mid, L, R, val, repl);
72         update(ri(p), mid + 1, r, L, R, val, repl);
73         t[p] = merge(t[le(p)], t[ri(p)]);
74     }

```

```

75     }
76     void update(ll l, ll r, ll val, bool repl = false) {
77         update(0, MINL, MAXR, l, r, val, repl);
78     }
79 };

```

4.10.9 Segment Tree Persistente

Uma Seg Tree Esparsa, só que com persistência, ou seja, pode voltar para qualquer estado anterior da árvore, antes de qualquer modificação.

Os métodos `query` e `update` agora recebem um parâmetro a mais, que é a root (versão da árvore) que se de ja modificar. Todos os métodos continuam $\mathcal{O}(\log n)$.

O vetor `roots` guarda na posição `i` a root da árvore após o `i`-ésimo `update`.

Dica: No construtor da Seg Tree, fazer `t.reserve(MAX)`; `Lc.reserve(MAX)`; `Rc.reserve(MAX)`; `roots.reserve(Q)`; pode ajudar bastante no runtime, pois aloca espaço para os vetores e evita muitas realocações durante a execução. Nesse caso, `MAX` é geralmente $\mathcal{O}(Q \cdot \log L)$, onde `Q` é o número de queries e `L` é o tamanho do intervalo.

Codigo: `seg_tree_persistent.cpp`

```

1 template <ll MINL = (1ll)-1e9 - 5, ll MAXR = (1ll)1e9 + 5>
2 struct SegTree {
3     ll merge(ll a, ll b) { return a + b; }
4     const ll neutral = 0;
5
6     vector<ll> t;
7     vector<int> Lc, Rc, roots;
8
9     inline int newnode() {
10         t.push_back(neutral);
11         Lc.push_back(-1);
12         Rc.push_back(-1);
13         return (int)t.size() - 1;
14     }
15
16     inline int le(int p) {
17         if (Lc[p] == -1) Lc[p] = newnode();
18         return Lc[p];
19     }
20

```

```

21 inline int ri(int p) {
22     if (Rc[p] == -1) Rc[p] = newnode();
23     return Rc[p];
24 }
25
26 SegTree() { roots.push_back(newnode()); }
27
28 ll query(int p, ll l, ll r, ll L, ll R) {
29     if (l > R || r < L) return neutral;
30     if (l >= L && r <= R) return t[p];
31     ll mid = l + (r - l) / 2;
32     auto ql = query(ri(p), l, mid, L, R);
33     auto qr = query(ri(p), mid + 1, r, L, R);
34     return merge(ql, qr);
35 }
36
37 ll query(ll l, ll r, int root = -1) {
38     if (root == -1) root = roots.back();
39     debug(root, MINL, MAXR, l, r);
40     return query(root, MINL, MAXR, l, r);
41 }
42
43 void update(int p, int old, ll l, ll r, ll i, ll x) {
44     if (l == r) {
45         t[p] = x; // substitui
46         // t[p] += x; // soma
47         return;
48     }
49     ll mid = l + (r - l) / 2;
50     if (i <= mid) {
51         Rc[p] = ri(old);
52         update(ri(p), le(old), l, mid, i, x);
53     } else {
54         Lc[p] = le(old);
55         update(ri(p), ri(old), mid + 1, r, i, x);
56     }
57     t[p] = merge(t[le(p)], t[ri(p)]);
58 }
59
60 int update(ll i, ll x, int root = -1) {
61     int new_root = newnode();
62     if (root == -1) root = roots.back();
63     update(new_root, root, MINL, MAXR, i, x);
64     roots.push_back(new_root);
65     return roots.back();
66 }
67
68 int copy_root(int root) {
69     int new_root = newnode();
70     Lc[new_root] = le(root);

```

```

68 Rc[new_root] = ri(root);
69 roots.push_back(new_root);
70 return roots.back();
71 }
72 };

```

4.11 Sparse Table

4.11.1 Disjoint Sparse Table

Uma Sparse Table melhorada, construção ainda em $\mathcal{O}(n \log n)$, mas agora suporta queries de **qualquer** operação associativa em $\mathcal{O}(1)$, não precisando mais ser idempotente.

Codigo: dst.cpp

```

1 struct DisjointSparseTable {
2     int n, LG;
3     vector<vector<ll>> st;
4     ll merge(ll a, ll b) { return a + b; }
5     const ll neutral = 0;
6     void build(const vector<ll> &v) {
7         int sz = (int)v.size();
8         n = 1, LG = 1;
9         while (n < sz) n <= 1, LG++;
10        st = vector<vector<ll>>(LG, vector<ll>(n));
11        for (int i = 0; i < n; i++) st[0][i] = i < sz ? v[i] : neutral;
12        for (int i = 1; i < LG - 1; i++) {
13            for (int j = (1 << i); j < n; j += (1 << (i + 1))) {
14                st[i][j] = st[0][j];
15                st[i][j - 1] = st[0][j - 1];
16                for (int k = 1; k < (1 << i); k++) {
17                    st[i][j + k] = merge(st[i][j + k - 1], st[0][j + k]);
18                    st[i][j - 1 - k] = merge(st[0][j - k - 1], st[i][j - k]);
19                }
20            }
21        }
22    }
23    void build(ll *bg, ll *en) { build(vector<ll>(bg, en)); }
24    ll query(int l, int r) {
25        if (l == r) return st[0][l];
26        int i = 31 - __builtin_clz(l ^ r);

```

```

27     return merge(st[i][l], st[i][r]);
28 }
29 } dst;

```

4.11.2 Sparse Table

Precomputa em $\mathcal{O}(n \log n)$ uma tabela que permite responder consultas de mínimo/máximo em intervalos em $\mathcal{O}(1)$.

A implementação atual é para mínimo, mas pode ser facilmente modificada para máximo ou outras operações.

A restrição é de que a operação deve ser associativa e idempotente (ou seja, $f(x, x) = x$).

Exemplos de operações idempotentes: `min`, `max`, `gcd`, `lcm`.

Exemplos de operações não idempotentes: `soma`, `xor`, `produto`.

Obs: não suporta updates.

Código: `sparse_table.cpp`

```

1 struct SparseTable {
2     int n, LG;
3     vector<vector<ll>> st;
4     ll merge(ll a, ll b) { return min(a, b); }
5     const ll neutral = 1e18;
6     void build(const vector<ll> &v) {
7         n = (int)v.size();
8         LG = 32 - __builtin_clz(n);
9         st = vector<vector<ll>>(LG, vector<ll>(n));
10        for (int i = 0; i < n; i++) st[0][i] = v[i];
11        for (int i = 0; i < LG - 1; i++)
12            for (int j = 0; j + (1 << i) < n; j++)
13                st[i + 1][j] = merge(st[i][j], st[i][j + (1 << i)]);
14    }
15    void build(ll *bg, ll *en) { build(vector<ll>(bg, en)); }
16    ll query(int l, int r) {
17        if (l > r) return neutral;
18        int i = 31 - __builtin_clz(r - l + 1);
19        return merge(st[i][l], st[i][r - (1 << i) + 1]);
20    }
21 };

```

4.12 Treap

Uma árvore de busca binária balanceada. Se não quiser ter elementos repetidos, basta fazer `treap::setify = true`.

- `insert(X)`: insere um elemento X na árvore em $\mathcal{O}(\log N)$
- `remove(X)`: remove uma ocorrência de X na árvore, e retorna `false` caso não tenha nenhuma ocorrência de X na árvore em $\mathcal{O}(\log N)$.
- `find(X)`: retorna `true` se X aparece pelo menos uma vez na árvore em $\mathcal{O}(\log N)$.

Código: `treap.cpp`

```

1 mt19937 rng((uint32_t)chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
2 namespace treap {
3     struct node_info {
4         node_info *l, *r;
5         int x, y, size;
6         node_info() {}
7         node_info(int _x) : l(0), r(0), x(_x), y(rng()), size(0) {}
8     };
9     using node = node_info *;
10    node root = 0;
11    bool setify = false;
12    inline int size(node t) { return t ? t->size : 0; }
13    inline void upd_size(node t) {
14        if (t) t->size = size(t->l) + size(t->r) + 1;
15    }
16    void merge(node &t, node L, node R) {
17        if (!L || !R) {
18            t = L ? L : R;
19        } else if (L->y > R->y) {
20            merge(L->r, L->r, R);
21            t = L;
22        } else {
23            merge(R->l, L, R->l);
24            t = R;
25        }
26        upd_size(t);
27    }
28    void split(node t, int x, node &L, node &R) {

```

```

29     if (!t) {
30         L = R = 0;
31     } else if (t->x <= x) {
32         split(t->r, x, t->r, R);
33         L = t;
34     } else {
35         split(t->l, x, L, t->l);
36         R = t;
37     }
38     upd_size(t);
39 }
40 void insert(node &t, node to) {
41     if (!t) {
42         t = to;
43     } else if (to->y > t->y) {
44         split(t, to->x, to->l, to->r);
45         t = to;
46     } else {
47         insert(to->x < t->x ? t->l : t->r, to);
48     }
49     upd_size(t);
50 }
51 bool remove(node &t, int x) {
52     if (!t) return false;
53     if (x == t->x) {
54         node rem = t;
55         merge(t, t->l, t->r);
56         upd_size(t);
57         delete rem;
58         return true;
59     }
60     bool ok = remove(x < t->x ? t->l : t->r, x);
61     upd_size(t);
62     return ok;
63 }
64 bool find(node &t, int x) {
65     return t ? (t->x == x || find(x < t->x ? t->l : t->r, x)) : false;
66 }
67 bool find(int x) { return find(root, x); }
68 inline void insert(int x) {
69     if (setify) {
70         if (find(x)) return;
71     }
72     insert(root, new node_info(x));
73 }
74 inline void remove(int x) { remove(root, x); }
75 }

```

4.13 XOR Trie

Uma Trie que armazena os números em binário (do bit mais significativo para o menos). Permite realizar inserção de um número X em $\mathcal{O}(\log X)$. O inteiro `bits` no template da estrutura é a quantidade bits dos números você deseja considerar.

O método `max_xor(X)` retorna o resultado do maior XOR de X com algum número contido na Trie e `min_xor(X)` resultado do menor XOR de X com algum número contido na Trie. Note que o valor X não precisa estar na Trie. Ambos os métodos são $\mathcal{O}(\log X)$.

Codigo: xor_trie.cpp

```

1 struct XorTrie {
2     const int bits = 30;
3     vector<vector<int>> go;
4     int root = 0, cnt = 1;
5     void build(int n) { go.assign((n + 1) * bits, vector<int>(2, -1)); }
6     void insert(int x) {
7         int v = root;
8         for (int i = bits - 1; i >= 0; i--) {
9             int b = x >> i & 1;
10            if (go[v][b] == -1) go[v][b] = cnt++;
11            v = go[v][b];
12        }
13    }
14    int max_xor(int x) {
15        int v = root;
16        int ans = 0;
17        if (cnt <= 1) return -1;
18        for (int i = bits - 1; i >= 0; i--) {
19            int b = x >> i & 1;
20            int good = go[v][!b];
21            int bad = go[v][b];
22            if (good != -1) {
23                v = good;
24                ans |= 1 << i;
25            } else v = bad;
26        }
27        return ans;
28    }
29    int min_xor(int x) {
30        int flipped = x ^ ((1 << bits) - 1);
31        int query = max_xor(flipped);
32        if (query == -1) return -1;

```

```
33     return x ^ flipped ^ query;
34 }
35 } trie;
```

Capítulo 5

Grafos

5.1 2 SAT

Algoritmo que resolve problema do 2-SAT. No 2-SAT, temos um conjunto de variáveis booleanas e cláusulas lógicas, onde cada cláusula é composta por duas variáveis. O problema é determinar se existe uma configuração das variáveis que satisfaça todas as cláusulas. O problema se transforma em um problema de encontrar as componentes fortemente conexas de um grafo direcionado, que resolvemos em $\mathcal{O}(N + M)$ com o algoritmo de Kosaraju. Onde N é o número de variáveis e M é o número de cláusulas.

A configuração da solução fica guardada no vetor `assignment`.

Exemplos de uso:

- `sat.add_or(x, y) $\Leftrightarrow (x \vee y)$`
- `sat.add_or(x, y) $\Leftrightarrow (\neg x \vee y)$`
- `sat.add_impl(x, y) $\Leftrightarrow (x \rightarrow y)$`
- `sat.add_and(x, y) $\Leftrightarrow (x \wedge \neg y)$`
- `sat.add_xor(x, y) $\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$`
- `sat.add_equals(x, y) $\Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$`

Codigo: 2_sat.cpp

```
1 struct sat2 {
2     int n;
3     vector<vector<int>> g, rg;
4     vector<bool> vis, assignment;
5     vector<int> topo, comp;
6
7     void build(int _n) {
8         n = 2 * _n;
9         g.assign(n, vector<int>());
10        rg.assign(n, vector<int>());
11    }
12
13    int get(int u) {
14        if (u < 0) return 2 * (~u) + 1;
15        else return 2 * u;
16    }
17
18    void add_impl(int u, int v) {
19        u = get(u), v = get(v);
20        g[u].push_back(v);
21        rg[v].push_back(u);
22        g[v ^ 1].push_back(u ^ 1);
23        rg[u ^ 1].push_back(v ^ 1);
24    }
25
26    void add_or(int u, int v) { add_impl(~u, v); }
27
28    void add_and(int u, int v) {
29        add_or(u, u);
30        add_or(v, v);
31    }
```

```

32
33 void add_xor(int u, int v) {
34     add_impl(u, ~v);
35     add_impl(~u, v);
36 }
37
38 void add_equals(int u, int v) {
39     add_impl(u, v);
40     add_impl(~u, ~v);
41 }
42
43 void toposort(int u) {
44     vis[u] = true;
45     for (int v : g[u])
46         if (!vis[v]) toposort(v);
47     topo.push_back(u);
48 }
49
50 void dfs(int u, int cc) {
51     comp[u] = cc;
52     for (int v : rg[u])
53         if (comp[v] == -1) dfs(v, cc);
54 }
55
56 pair<bool, vector<bool>> solve() {
57     topo.clear();
58     vis.assign(n, false);
59
60     for (int i = 0; i < n; i++)
61         if (!vis[i]) toposort(i);
62     reverse(topo.begin(), topo.end());
63
64     comp.assign(n, -1);
65     int cc = 0;
66     for (auto u : topo)
67         if (comp[u] == -1) dfs(u, cc++);
68
69     assignment.assign(n / 2, false);
70     for (int i = 0; i < n; i += 2) {
71         if (comp[i] == comp[i + 1]) return {false, {}};
72         assignment[i / 2] = comp[i] > comp[i + 1];
73     }
74
75     return {true, assignment};
76 }
77 };

```

5.2 Binary Lifting

5.2.1 Binary Lifting LCA

Usa uma matriz para precomputar os ancestrais de um nodo, em que $up[u][i]$ é o 2^i -ésimo ancestral de u . A construção é $\mathcal{O}(n \log n)$, e é possível consultar pelo k -ésimo ancestral de um nodo e pelo **LCA** de dois nodos em $\mathcal{O}(\log n)$.

LCA: Lowest Common Ancestor, o LCA de dois nodos u e v é o nodo mais profundo que é ancestral de ambos.

Codigo: binary_lifting_lca.cpp

```

1 const int N = 3e5 + 5, LG = 20;
2 vector<int> adj[N];
3
4 namespace bl {
5     int t, up[N][LG], tin[N], tout[N];
6
7     void dfs(int u, int p = -1) {
8         tin[u] = t++;
9         for (int i = 0; i < LG - 1; i++) up[u][i + 1] = up[up[u][i]][i];
10        for (int v : adj[u])
11            if (v != p) {
12                up[v][0] = u;
13                dfs(v, u);
14            }
15        tout[u] = t++;
16    }
17
18    void build(int root) {
19        t = 1;
20        up[root][0] = root;
21        dfs(root);
22    }
23
24    bool ancestor(int u, int v) { return tin[u] <= tin[v] && tout[u] >= tout[v]; }
25
26    int lca(int u, int v) {
27        if (ancestor(u, v)) return u;
28        if (ancestor(v, u)) return v;
29        for (int i = LG - 1; i >= 0; i--)
30            if (!ancestor(up[u][i], v)) u = up[u][i];

```



```

31     return up[u][0];
32 }
33
34 int kth(int u, int k) {
35     for (int i = 0; i < LG; i++)
36         if (k & (1 << i)) u = up[u][i];
37     return u;
38 }
39
40 }

```

5.2.2 Binary Lifting Query

Binary Lifting em que, além de queries de ancestrais, podemos fazer queries em caminhos. Seja $f(u, v)$ uma função que retorna algo sobre o caminho entre u e v , como a soma dos valores dos nodos ou máximo valor do caminho, $st[u][i]$ é o valor de $f(par[u], up[u][i])$, em que $up[u][i]$ é o 2^i -ésimo ancestral de u e $par[u]$ é o pai de u . A função f deve ser associativa e comutativa.

A construção é $\mathcal{O}(n \log n)$, e é possível consultar em $\mathcal{O}(\log n)$ pelo valor de $f(u, v)$, em que u e v são nodos do grafo, através do método `query`. Também computa LCA e k -ésimo ancestral em $\mathcal{O}(\log n)$.

Obs: os valores precisam estar nos **nodos** e não nas arestas, para valores nas arestas verificar o **Binary Lifting Query Aresta**.

Codigo: `binary_lifting_query_nodo.cpp`

```

1  const int N = 3e5 + 5, LG = 20;
2  vector<int> adj[N];
3
4  namespace bl {
5      int t, up[N][LG], st[N][LG], tin[N], tout[N], val[N];
6
7      const int neutral = 0;
8      int merge(int l, int r) { return l + r; }
9
10     void dfs(int u, int p = -1) {
11         tin[u] = t++;
12         for (int i = 0; i < LG - 1; i++) {
13             up[u][i + 1] = up[up[u][i]][i];
14             st[u][i + 1] = merge(st[u][i], st[up[u][i]][i]);
15         }

```

```

16         for (int v : adj[u])
17             if (v != p) {
18                 up[v][0] = u, st[v][0] = val[u];
19                 dfs(v, u);
20             }
21         tout[u] = t++;
22     }
23
24     void build(int root) {
25         t = 1;
26         up[root][0] = root;
27         st[root][0] = neutral;
28         dfs(root);
29     }
30
31     bool ancestor(int u, int v) { return tin[u] <= tin[v] && tout[u] >= tout[v]; }
32
33     int query2(int u, int v, bool include_lca) {
34         if (ancestor(u, v)) return include_lca ? val[u] : neutral;
35         int ans = val[u];
36         for (int i = LG - 1; i >= 0; i--) {
37             if (!ancestor(up[u][i], v)) {
38                 ans = merge(ans, st[u][i]);
39                 u = up[u][i];
40             }
41         }
42         return include_lca ? merge(ans, st[u][0]) : ans;
43     }
44
45     int query(int u, int v) {
46         if (u == v) return val[u];
47         return merge(query2(u, v, 1), query2(v, u, 0));
48     }
49
50     int lca(int u, int v) {
51         if (ancestor(u, v)) return u;
52         if (ancestor(v, u)) return v;
53         for (int i = LG - 1; i >= 0; i--)
54             if (!ancestor(up[u][i], v)) u = up[u][i];
55         return up[u][0];
56     }
57
58     int kth(int u, int k) {
59         for (int i = 0; i < LG; i++)
60             if (k & (1 << i)) u = up[u][i];
61         return u;
62     }

```

```
63
64 }
```

5.2.3 Binary Lifting Query 2

Basicamente o mesmo que o anterior, mas esse resolve queries em que o `merge` não é necessariamente **comutativo**. Para fins de exemplo, o código está implementado para resolver queries de Kadane (máximo subarray sum) em caminhos.

Foi usado para passar esse problema:

<https://codeforces.com/contest/1843/problem/F2>

Código: `binary_lifting_query_nodo2.cpp`

```
1 struct node {
2     int pref, suff, sum, best;
3     node() : pref(0), suff(0), sum(0), best(0) { }
4     node(int x) : pref(x), suff(x), sum(x), best(x) { }
5     node(int a, int b, int c, int d) : pref(a), suff(b), sum(c), best(d) { }
6 };
7
8 node merge(node l, node r) {
9     int pref = max(l.pref, l.sum + r.pref);
10    int suff = max(r.suff, r.sum + l.suff);
11    int sum = l.sum + r.sum;
12    int best = max(l.suff + r.pref, max(l.best, r.best));
13    return node(pref, suff, sum, best);
14 }
15
16 struct BinaryLifting {
17     vector<vector<int>> adj, up;
18     vector<int> val, tin, tout;
19     vector<vector<node>> st, st2;
20     int N, LG, t;
21
22     void build(int u, int p = -1) {
23         tin[u] = t++;
24         for (int i = 0; i < LG - 1; i++) {
25             up[u][i + 1] = up[up[u][i]][i];
26             st[u][i + 1] = merge(st[u][i], st[up[u][i]][i]);
27             st2[u][i + 1] = merge(st2[up[u][i]][i], st2[u][i]);
28         }
29         for (int v : adj[u])
```

```
30         if (v != p) {
31             up[v][0] = u;
32             st[v][0] = node(val[u]);
33             st2[v][0] = node(val[u]);
34             build(v, u);
35         }
36         tout[u] = t++;
37     }
38
39     void build(int root, vector<vector<int>> adj2, vector<int> v) {
40         t = 1;
41         N = (int)adj2.size();
42         LG = 32 - __builtin_clz(N);
43         adj = adj2;
44         val = v;
45         tin = tout = vector<int>(N);
46         up = vector(N, vector<int>(LG));
47         st = st2 = vector(N, vector<node>(LG));
48         up[root][0] = root;
49         st[root][0] = node(val[root]);
50         st2[root][0] = node(val[root]);
51         build(root);
52     }
53
54     bool ancestor(int u, int v) { return tin[u] <= tin[v] && tout[u] >= tout[v]; }
55
56     node query2(int u, int v, bool include_lca, bool invert) {
57         if (ancestor(u, v)) return include_lca ? node(val[u]) : node();
58         node ans = node(val[u]);
59         for (int i = LG - 1; i >= 0; i--) {
60             if (!ancestor(up[u][i], v)) {
61                 if (invert) ans = merge(st2[u][i], ans);
62                 else ans = merge(ans, st[u][i]);
63                 u = up[u][i];
64             }
65         }
66         return include_lca ? merge(ans, st[u][0]) : ans;
67     }
68
69     node query(int u, int v) {
70         if (u == v) return node(val[u]);
71         node l = query2(u, v, 1, 0);
72         node r = query2(v, u, 0, 1);
73         return merge(l, r);
74     }
75
76     int lca(int u, int v) {
```

```

77     if (ancestor(u, v)) return u;
78     if (ancestor(v, u)) return v;
79     for (int i = LG - 1; i >= 0; i--)
80         if (!ancestor(up[u][i], v)) u = up[u][i];
81     return up[u][0];
82 }
83
84 } bl, bl2;

```

5.2.4 Binary Lifting Query Aresta

O mesmo Binary Lifting de query em nodos, porém agora com os valores nas arestas. As complexidades são as mesmas.

Codigo: binary_lifting_query_aresta.cpp

```

1  const int N = 3e5 + 5, LG = 20;
2  vector<pair<int, int>> adj[N];
3
4  namespace bl {
5      int t, up[N][LG], st[N][LG], tin[N], tout[N], val[N];
6
7      const int neutral = 0;
8      int merge(int l, int r) { return l + r; }
9
10     void dfs(int u, int p = -1) {
11         tin[u] = t++;
12         for (int i = 0; i < LG - 1; i++) {
13             up[u][i + 1] = up[up[u][i]][i];
14             st[u][i + 1] = merge(st[u][i], st[up[u][i]][i]);
15         }
16         for (auto [w, v] : adj[u])
17             if (v != p) {
18                 up[v][0] = u, st[v][0] = w;
19                 dfs(v, u);
20             }
21         tout[u] = t++;
22     }
23
24     void build(int root) {
25         t = 1;
26         up[root][0] = root;

```

```

27         st[root][0] = neutral;
28         dfs(root);
29     }
30
31     bool ancestor(int u, int v) { return tin[u] <= tin[v] && tout[u] >= tout[v]; }
32
33     int query2(int u, int v) {
34         if (ancestor(u, v)) return neutral;
35         int ans = neutral;
36         for (int i = LG - 1; i >= 0; i--) {
37             if (!ancestor(up[u][i], v)) {
38                 ans = merge(ans, st[u][i]);
39                 u = up[u][i];
40             }
41         }
42         return merge(ans, st[u][0]);
43     }
44
45     int query(int u, int v) {
46         if (u == v) {
47             return neutral;
48 #warning TRATAR ESSE CASO ACIMA
49         }
50         return merge(query2(u, v), query2(v, u));
51     }
52
53     int lca(int u, int v) {
54         if (ancestor(u, v)) return u;
55         if (ancestor(v, u)) return v;
56         for (int i = LG - 1; i >= 0; i--)
57             if (!ancestor(up[u][i], v)) u = up[u][i];
58         return up[u][0];
59     }
60
61     int kth(int u, int k) {
62         for (int i = 0; i < LG; i++)
63             if (k & (1 << i)) u = up[u][i];
64         return u;
65     }
66 }

```

5.3 Centro e Diametro

Algoritmo que encontra o centro e o diâmetro de um grafo em $\mathcal{O}(N + M)$ com duas BFS.

Definição: O centro de um grafo é igual ao subconjunto de nodos com excentricidade mínima. A excentricidade de um nodo é a maior distância dele para qualquer outro nodo. Em outras palavras, pra um nodo ser centro do grafo, ele deve minimizar a maior distância para qualquer outro nodo.

O diâmetro de um grafo é a maior distância entre dois nodos quaisquer.

Codigo: graph_center.cpp

```

1  const int INF = 1e9 + 9;
2
3  vector<vector<int>> adj;
4
5  struct GraphCenter {
6      int n, diam = 0;
7      vector<int> centros, dist, pai;
8      int bfs(int s) {
9          queue<int> q;
10         q.push(s);
11         dist.assign(n + 5, INF);
12         pai.assign(n + 5, -1);
13         dist[s] = 0;
14         int maxidist = 0, maxinode = 0;
15         while (!q.empty()) {
16             int u = q.front();
17             q.pop();
18             if (dist[u] >= maxidist) maxidist = dist[u], maxinode = u;
19             for (int v : adj[u]) {
20                 if (dist[u] + 1 < dist[v]) {
21                     dist[v] = dist[u] + 1;
22                     pai[v] = u;
23                     q.push(v);
24                 }
25             }
26         }
27         diam = max(diam, maxidist);
28         return maxinode;
29     }
30     GraphCenter(int st = 0) : n(adj.size()) {
31         int d1 = bfs(st);
32         int d2 = bfs(d1);

```

```

33         vector<int> path;
34         for (int u = d2; u != -1; u = pai[u]) path.push_back(u);
35         int len = path.size();
36         if (len % 2 == 1) {
37             centros.push_back(path[len / 2]);
38         } else {
39             centros.push_back(path[len / 2]);
40             centros.push_back(path[len / 2 - 1]);
41         }
42     }
43 };

```

5.4 Centroids

5.4.1 Centroid

Algoritmo que encontra os dois centróides de uma árvore em $\mathcal{O}(N)$.

Definição: O centróide de uma árvore é o nodo tal que, ao ser removido, divide a árvore em subárvores com no máximo metade dos nodos da árvore original. Em outras palavras, se a árvore tem tamanho N , todas as subárvores geradas pela remoção do centróide têm tamanho no máximo $\frac{N}{2}$. Uma árvore pode ter até dois centróides.

Codigo: find_centroid.cpp

```

1  const int N = 3e5 + 5;
2
3  int sz[N];
4  vector<int> adj[N];
5
6  void dfs_sz(int u, int p) {
7      sz[u] = 1;
8      for (int v : adj[u]) {
9          if (v != p) {
10             dfs_sz(v, u);
11             sz[u] += sz[v];
12         }
13     }
14 }
15
16 int centroid(int u, int p, int n) {
17     for (int v : adj[u])

```

```

18     if (v != p && sz[v] > n / 2) return centroid(v, u, n);
19     return u;
20 }
21
22 pair<int, int> centroids(int u) {
23     dfs_sz(u, u);
24     int c = centroid(u, u, sz[u]);
25     int c2 = -1;
26     for (int v : adj[c])
27         if (sz[u] == sz[v] * 2) c2 = v;
28     return {c, c2};
29 }

```

5.4.2 Centroid Decomposition

Algoritmo que constrói a decomposição por centróides de uma árvore em $\mathcal{O}(N \log N)$.

Basicamente, a decomposição consiste em, repetidamente:

- Encontrar o centróide da árvore atual.
- Remover o centróide e decompor as subárvores restantes.

A decomposição vai gerar uma nova árvore (chamada comumente de "Centroid Tree") onde cada nodo é um centróide da árvore original e as arestas representam a relação de pai-filho entre os centróides. A árvore tem altura $\log N$.

No código, `dis[u][j]` é a distância entre o nodo u e seu j -ésimo ancestral na Centroid Tree.

Código: `centroid_decomposition.cpp`

```

1  const int N = 3e5 + 5;
2
3  int sz[N], par[N];
4  bool rem[N];
5  vector<int> dis[N];
6  vector<int> adj[N];
7
8  int dfs_sz(int u, int p) {

```

```

9      sz[u] = 1;
10     for (int v : adj[u])
11         if (v != p && !rem[v]) sz[u] += dfs_sz(v, u);
12     return sz[u];
13 }
14
15 int centroid(int u, int p, int szn) {
16     for (int v : adj[u])
17         if (v != p && !rem[v] && sz[v] > szn / 2) return centroid(v, u, szn);
18     return u;
19 }
20
21 void dfs_dis(int u, int p, int d = 0) {
22     dis[u].push_back(d);
23     for (int v : adj[u])
24         if (v != p && !rem[v]) dfs_dis(v, u, d + 1);
25 }
26
27 void decomp(int u, int p) {
28     int c = centroid(u, u, dfs_sz(u, u));
29
30     rem[c] = true;
31     par[c] = p;
32
33     dfs_dis(c, c);
34
35     // Faz algo na subárvore de c
36
37     for (int v : adj[c])
38         if (!rem[v]) decomp(v, c);
39 }
40
41 void build(int n) {
42     for (int i = 0; i < n; i++) {
43         rem[i] = false;
44         dis[i].clear();
45     }
46     decomp(0, -1);
47     for (int i = 0; i < n; i++) reverse(dis[i].begin(), dis[i].end());
48 }

```

5.5 Ciclos

Conjunto de algoritmos para achar ciclos em um grafo.

Find Cycle

Encontra um ciclo no grafo em $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, retorna um vetor vazio caso nenhum ciclo seja encontrado.

Find Negative Cycle

Encontra um ciclo com soma negativa no grafo em $\mathcal{O}(|V| * |E|)$ usando o algoritmo Bellman Ford, retorna um vetor vazio caso nenhum ciclo seja encontrado.

Codigo: find_negative_cycle.cpp

```

1 struct NegativeCycleFinder {
2     const ll INF = 1e18;
3     int n;
4     vector<tuple<int, int, ll>> edges;
5     void build(int _n) { n = _n; }
6     void add_edge(int u, int v, ll w) { edges.emplace_back(u, v, w); }
7     vector<int> get_cycle() {
8         vector<ll> d(n);
9         vector<int> p(n, -1);
10        int x;
11        for (int i = 0; i < n; ++i) {
12            x = -1;
13            for (auto [u, v, w] : edges) {
14                if (d[u] < INF) {
15                    if (d[u] + w < d[v]) {
16                        d[v] = max(-INF, d[u] + w);
17                        p[v] = u;
18                        x = v;
19                    }
20                }
21            }
22        }
23        vector<int> cycle;
24        if (x != -1) {
25            for (int i = 0; i < n; ++i) x = p[x];
26            for (int v = x;; v = p[v]) {
27                cycle.push_back(v);
28                if (v == x && cycle.size() > 1) break;
29            }

```

```

30        reverse(cycle.begin(), cycle.end());
31    }
32    return cycle;
33 }
34 } finder;

```

Codigo: find_cycle.cpp

```

1 const int MAXN = 1e6 + 6;
2
3 vector<int> adj[MAXN];
4
5 struct CycleFinder {
6     const ll INF = 1e18;
7     int n;
8     vector<int> visto, pai;
9     int start = -1, end = -1;
10    void build(int _n) { n = _n; }
11    bool dfs(int u) {
12        visto[u] = 1;
13        for (int v : adj[u]) {
14            if (visto[v] == 0) {
15                pai[v] = u;
16                if (dfs(v)) return true;
17            } else if (visto[v] == 1) {
18                end = u;
19                start = v;
20                return true;
21            }
22        }
23        visto[u] = 2;
24        return false;
25    }
26    vector<int> get_cycle() {
27        visto.assign(n, 0);
28        pai.assign(n, -1);
29        for (int v = 0; v < n; v++)
30            if (visto[v] == 0 && dfs(v)) break;
31        vector<int> cycle;
32        if (start != -1) {
33            cycle.emplace_back(start);
34            for (int v = end; v != start; v = pai[v]) cycle.emplace_back(v);
35            cycle.emplace_back(start);
36            reverse(cycle.begin(), cycle.end());
37        }
38        return cycle;
39    }

```

```
40 } finder;
```

5.6 Fluxo

Conjunto de algoritmos para calcular o fluxo máximo em redes de fluxo.

Muito útil para grafos bipartidos e para grafos com muitas arestas

Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(V * E)$, mas em grafo bipartido a complexidade é $\mathcal{O}(\sqrt{V} * E)$

Guarda o grafo internamente, as arestas devem ser adicionadas pela função `add_edge`.

A função `max_flow` modifica o grafo adicionando a maior quantidade de fluxo possível e retona a quantidade de fluxo adicionado.

O corte mínimo de um grafo é equivalente ao fluxo máximo.

A Função `min_cut` acha as arestas pertencentes ao corte mínimo do grafo, deve ser chamado após a função `max_flow`

Útil para grafos com poucas arestas

Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(V * E)$

Computa o fluxo máximo com custo mínimo

Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(V * E)$

Codigo: EdmondsKarp.cpp

```
1 const long long INF = 1e18;
2
3 struct FlowEdge {
4     int u, v;
5     long long cap, flow = 0;
```

```
6     FlowEdge(int u, int v, long long cap) : u(u), v(v), cap(cap) { }
7 };
8
9 struct EdmondsKarp {
10     int n, s, t, m = 0, vistoken = 0;
11     vector<FlowEdge> edges;
12     vector<vector<int>> adj;
13     vector<int> visto;
14
15     EdmondsKarp(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) {
16         adj.resize(n);
17         visto.resize(n);
18     }
19
20     void add_edge(int u, int v, long long cap) {
21         edges.emplace_back(u, v, cap);
22         edges.emplace_back(v, u, 0);
23         adj[u].push_back(m);
24         adj[v].push_back(m + 1);
25         m += 2;
26     }
27
28     int bfs() {
29         vistoken++;
30         queue<int> fila;
31         fila.push(s);
32         vector<int> pego(n, -1);
33         while (!fila.empty()) {
34             int u = fila.front();
35             if (u == t) break;
36             fila.pop();
37             visto[u] = vistoken;
38             for (int id : adj[u]) {
39                 if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1) continue;
40                 int v = edges[id].v;
41                 if (visto[v] == -1) continue;
42                 fila.push(v);
43                 pego[v] = id;
44             }
45         }
46         if (pego[t] == -1) return 0;
47         long long f = INF;
48         for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u])
49             f = min(f, edges[id].cap - edges[id].flow);
50         for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u]) {
51             edges[id].flow += f;
52             edges[id ^ 1].flow -= f;
```

```

53     }
54     return f;
55 }
56
57 long long flow() {
58     long long maxflow = 0;
59     while (long long f = bfs()) maxflow += f;
60     return maxflow;
61 }
62 };

```

Codigo: MinCostMaxFlow.cpp

```

1 struct MinCostMaxFlow {
2     int n, s, t, m = 0;
3     ll maxflow = 0, mincost = 0;
4     vector<FlowEdge> edges;
5     vector<vector<int>>> adj;
6
7     MinCostMaxFlow(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) { adj.resize(n); }
8
9     void add_edge(int u, int v, ll cap, ll cost) {
10         edges.emplace_back(u, v, cap, cost);
11         edges.emplace_back(v, u, 0, -cost);
12         adj[u].push_back(m);
13         adj[v].push_back(m + 1);
14         m += 2;
15     }
16
17     bool spfa() {
18         vector<int> pego(n, -1);
19         vector<ll> dis(n, INF);
20         vector<bool> inq(n, false);
21         queue<int> fila;
22         fila.push(s);
23         dis[s] = 0;
24         inq[s] = 1;
25         while (!fila.empty()) {
26             int u = fila.front();
27             fila.pop();
28             inq[u] = false;
29             for (int id : adj[u]) {
30                 if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1) continue;
31                 int v = edges[id].v;
32                 if (dis[v] > dis[u] + edges[id].cost) {
33                     dis[v] = dis[u] + edges[id].cost;
34                     pego[v] = id;

```

```

35                 if (!inq[v]) {
36                     inq[v] = true;
37                     fila.push(v);
38                 }
39             }
40         }
41     }
42
43     if (pego[t] == -1) return 0;
44     ll f = INF;
45     for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u]) {
46         f = min(f, edges[id].cap - edges[id].flow);
47         mincost += edges[id].cost;
48     }
49     for (int id = pego[t]; id != -1; id = pego[edges[id].u]) {
50         edges[id].flow += f;
51         edges[id ^ 1].flow -= f;
52     }
53     maxflow += f;
54     return 1;
55 }
56
57 ll flow() {
58     while (spfa());
59     return maxflow;
60 }
61 };

```

Codigo: Dinic.cpp

```

1 typedef long long ll;
2
3 const ll INF = 1e18;
4
5 struct FlowEdge {
6     int u, v;
7     ll cap, flow = 0;
8     FlowEdge(int u, int v, ll cap) : u(u), v(v), cap(cap) { }
9 };
10
11 struct Dinic {
12     vector<FlowEdge> edges;
13     vector<vector<int>>> adj;
14     int n, s, t, m = 0;
15     vector<int> level, ptr;
16     queue<int> q;
17     Dinic(int n, int s, int t) : n(n), s(s), t(t) {

```



```

18     adj.resize(n);
19     level.resize(n);
20     ptr.resize(n);
21 }
22 void add_edge(int u, int v, ll cap) {
23     edges.emplace_back(u, v, cap);
24     edges.emplace_back(v, u, 0);
25     adj[u].push_back(m);
26     adj[v].push_back(m + 1);
27     m += 2;
28 }
29 bool bfs() {
30     while (!q.empty()) {
31         int u = q.front();
32         q.pop();
33         for (int id : adj[u]) {
34             if (edges[id].cap - edges[id].flow < 1) continue;
35             int v = edges[id].v;
36             if (level[v] != -1) continue;
37             level[v] = level[u] + 1;
38             q.push(v);
39         }
40     }
41     return level[t] != -1;
42 }
43 ll dfs(int u, ll f) {
44     if (f == 0) return 0;
45     if (u == t) return f;
46     for (int &cid = ptr[u]; cid < (int)adj[u].size(); cid++) {
47         int id = adj[u][cid];
48         int v = edges[id].v;
49         if (level[u] + 1 != level[v] || edges[id].cap - edges[id].flow < 1)
50             continue;
51         ll tr = dfs(v, min(f, edges[id].cap - edges[id].flow));
52         if (tr == 0) continue;
53         edges[id].flow += tr;
54         edges[id ^ 1].flow -= tr;
55         return tr;
56     }
57     return 0;
58 }
59 ll flow() {
60     ll maxflow = 0;
61     while (true) {
62         fill(level.begin(), level.end(), -1);
63         level[s] = 0;
64         q.push(s);

```

```

64         if (!bfs()) break;
65         fill(ptr.begin(), ptr.end(), 0);
66         while (ll f = dfs(s, INF)) maxflow += f;
67     }
68     return maxflow;
69 }
70 void min_cut() {
71     vector<bool> vis(n);
72     function<void(int)> dfs = [&](int u) {
73         vis[u] = 1;
74         for (int id : adj[u]) {
75             int v = edges[id].v;
76             if (!vis[v] && edges[id].cap - edges[id].flow > 0) dfs(v);
77         }
78     };
79     dfs(s);
80     for (int id = 0; id < (int)edges.size(); id++) {
81         auto [u, v, cap, flow] = edges[id];
82         if (vis[u] ^ vis[v] && cap > 0) {
83             // this edge is in the min cut
84             // do something here
85         }
86     }
87 }
88 };

```

5.7 HLD

Técnica utilizada para decompor uma árvore em cadeias, e assim realizar operações de caminho e subárvore em $\mathcal{O}(\log N \cdot g(N))$, onde $g(N)$ é a complexidade da operação. Esta implementação suporta queries de soma e update de soma/atribuição, pois usa a estrutura de dados **Segment Tree Lazy** desse almanaque, fazendo assim com que updates e consultas sejam $\mathcal{O}(\log^2 N)$. A estrutura (bem como a operação feita nela) pode ser facilmente trocada, basta alterar o código da **Segment Tree Lazy**, ou ainda, utilizar outra estrutura de dados, como uma **Sparse Table**, caso você tenha queries de mínimo/máximo sem updates, por exemplo. Ao mudar a estrutura, pode ser necessário adaptar os métodos **query** e **update** da HLD.

A HLD pode ser feita com os valores estando tanto nos nodos quanto nas arestas, consulte os métodos **build** do código para mais detalhes.

A construção da HLD é feita em $\mathcal{O}(N + b(N))$, onde $b(N)$ é a complexidade de construir a estrutura de dados utilizada.

Código: HLD.cpp

```

1  const int N = 3e5 + 5;
2
3  vector<int> adj[N];
4  int sz[N], pos[N], par[N], head[N];
5
6  namespace HLD {
7      int t;
8      bool e = 0; // flag pra dizer se eh de aresta ou nao
9      SegTree ds; // pode usar qualquer estrutura de dados aqui
10
11     void dfs_sz(int u, int p = -1) {
12         sz[u] = 1;
13         for (int &v : adj[u]) {
14             if (v != p) {
15                 dfs_sz(v, u);
16                 sz[u] += sz[v];
17                 if (sz[v] > sz[adj[u][0]] || adj[u][0] == p) swap(v, adj[u][0]);
18             }
19         }
20     }
21     void dfs_hld(int u, int p = -1) {
22         pos[u] = t++;
23         for (int v : adj[u]) {
24             if (v != p) {
25                 par[v] = u;
26                 head[v] = (v == adj[u][0] ? head[u] : v);
27                 dfs_hld(v, u);
28             }
29         }
30     }
31     void build_hld(int u) {
32         dfs_sz(u);
33         t = 0;
34         par[u] = u;
35         head[u] = u;
36         dfs_hld(u);
37     }
38
39     void build(int root, vector<ll> v) {
40         // usar esse build pra iniciar com valores nos nodos
41         // (para iniciar vazia, passar o vetor com valores neutros)
42         build_hld(root);
43         vector<ll> aux(v.size());

```

```

44         for (int i = 0; i < (int)v.size(); i++) aux[pos[i]] = v[i];
45         ds.build(aux);
46     }
47
48     void build(int root, vector<tuple<int, int, ll>> edges) {
49         // usar esse build se os valores estiverem nas arestas
50         for (auto [u, v, w] : edges) {
51             adj[u].push_back(v);
52             adj[v].push_back(u);
53         }
54         build_hld(root);
55         e = 1;
56         assert(edges.size() >= 1);
57         vector<ll> aux(edges.size() - 1);
58         for (auto [u, v, w] : edges) {
59             if (pos[u] > pos[v]) swap(u, v);
60             aux[pos[v]] = w;
61         }
62         ds.build(aux);
63     }
64
65     ll query(int u, int v) {
66         if (e && u == v) return ds.neutral;
67         if (pos[u] > pos[v]) swap(u, v);
68         if (head[u] == head[v]) {
69             return ds.query(pos[u] + e, pos[v]);
70         } else {
71             ll qv = ds.query(pos[head[v]], pos[v]);
72             ll qu = query(u, par[head[v]]);
73             return ds.merge(qu, qv);
74         }
75     }
76     ll query_subtree(int u) {
77         if (e && sz[u] == 1) return ds.neutral;
78         return ds.query(pos[u] + e, pos[u] + sz[u] - 1);
79     }
80
81     void update(int u, int v, ll k, bool replace = false) {
82         if (e && u == v) return;
83         if (pos[u] > pos[v]) swap(u, v);
84         if (head[u] == head[v]) {
85             ds.update(pos[u] + e, pos[v], k, replace);
86         } else {
87             ds.update(pos[head[v]], pos[v], k, replace);
88             update(u, par[head[v]], k, replace);
89         }
90     }

```

```

91 void update_subtree(int u, ll k, bool replace = false) {
92     if (e && sz[u] == 1) return;
93     ds.update(pos[u] + e, pos[u] + sz[u] - 1, k, replace);
94 }
95
96 int lca(int u, int v) {
97     if (pos[u] > pos[v]) swap(u, v);
98     return head[u] == head[v] ? u : lca(u, par[head[v]]);
99 }
100 }

```

5.8 Inverse Graph

Algoritmo que encontra as componentes conexas quando se é dado o grafo complemento.

Resolve problemas em que se deseja encontrar as componentes conexas quando são dadas as arestas que não pertencem ao grafo, em $\mathcal{O}(N \cdot \log N + N \cdot \log M)$.

Codigo: inverse_graph.cpp

```

1 set<int> nodes;
2 vector<set<int>> adj;
3
4 void bfs(int s) {
5     queue<int> f;
6     f.push(s);
7     nodes.erase(s);
8     set<int> aux;
9     while (!f.empty()) {
10         int x = f.front();
11         f.pop();
12         for (int y : nodes)
13             if (adj[x].count(y) == 0) aux.insert(y);
14         for (int y : aux) {
15             f.push(y);
16             nodes.erase(y);
17         }
18         aux.clear();
19     }
20 }

```

5.9 Kosaraju

Algoritmo que encontra as componentes fortemente conexas (SCCs) de um grafo direcionado.

O algoritmo de Kosaraju resolve isso em $\mathcal{O}(N + M)$, onde N é o número de vértices e M é o número de arestas do grafo.

O componente fortemente conexo de cada vértice é armazenado no vetor `root`.

A grafo condensado é armazenado no vetor `gc`.

Codigo: kosaraju.cpp

```

1 namespace kosaraju {
2     const int N = 1e5 + 5;
3     int n, vis[N], root[N];
4     vector<int> adj[N], inv[N], gc[N], topo;
5     void add_edge(int u, int v) {
6         adj[u].emplace_back(v);
7         inv[v].emplace_back(u);
8     }
9     void toposort(int u) {
10         vis[u] = 1;
11         for (auto v : adj[u]) {
12             if (vis[v]) continue;
13             toposort(v);
14         }
15         topo.emplace_back(u);
16     }
17     void dfs(int u) {
18         vis[u] = 1;
19         for (auto v : inv[u]) {
20             if (vis[v]) continue;
21             root[v] = root[u];
22             dfs(v);
23         }
24     }
25     void solve(int n) {
26         fill(vis, vis + n, 0);
27         topo.clear();
28         for (int i = 0; i < n; i++)
29             if (!vis[i]) toposort(i);
30         fill(vis, vis + n, 0);
31         iota(root, root + n, 0);

```

5.10. KRUSKAL

```

32     for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
33         if (!vis[topo[i]]) dfs(topo[i]);
34     set<pair<int, int>> st;
35     for (int u = 0; u < n; u++) {
36         int ru = root[u];
37         for (int v : adj[u]) {
38             int rv = root[v];
39             if (ru == rv) continue;
40             if (!st.count(ii(ru, rv))) {
41                 gc[ru].emplace_back(rv);
42                 st.insert(ii(ru, rv));
43             }
44         }
45     }
46 }
47 }

```

5.10 Kruskal

Algoritmo que utiliza DSU (Disjoint Set Union, descrita na seção de Estrutura de Dados) para encontrar a MST (Minimum Spanning Tree) de um grafo em $\mathcal{O}(E \log E)$.

A Minimum Spanning Tree é a árvore geradora mínima de um grafo, ou seja, um conjunto de arestas que conecta todos os nodos do grafo com o menor custo possível.

Propriedades importantes da MST:

- É uma árvore! :O
- Entre quaisquer dois nodos u e v do grafo, a MST minimiza a maior aresta no caminho de u a v .

Ideia do Kruskal: ordenar as arestas do grafo por peso e, para cada aresta, adicionar ela à MST se ela não forma um ciclo com as arestas já adicionadas.

Codigo: kruskal.cpp

```

1 vector<tuple<int, int, int>> edges; // {u, v, w}
2
3 void kruskal(int n) {
4     DSU dsu(n); // DSU da seção Estruturas de Dados

```

```

5
6     sort(edges.begin(), edges.end(), [](auto a, auto b) {
7         return get<2>(a) < get<2>(b);
8     });
9
10    for (auto [u, v, w] : edges) {
11        if (dsu.unite(u, v)) {
12            // edge u-v is in the MST
13        }
14    }
15 }

```

5.11 LCA

Algoritmo para computar Lowest Common Ancestor usando Euler Tour e Sparse Table (descrita na seção Estruturas de Dados), com pré-processamento em $\mathcal{O}(N \log N)$ e consulta em $\mathcal{O}(1)$.

Codigo: lca.cpp

```

1 const int N = 5e5 + 5;
2 int timer, tin[N];
3 vector<int> adj[N];
4 vector<pair<int, int>> prof;
5
6 struct SparseTable {
7     int n, LG;
8     using T = pair<int, int>;
9     vector<vector<T>> st;
10    T merge(T a, T b) { return min(a, b); }
11    const T neutral = {INT_MAX, -1};
12    void build(const vector<T> &v) {
13        n = (int)v.size();
14        LG = 32 - __builtin_clz(n);
15        st = vector<vector<T>>(LG, vector<T>(n));
16        for (int i = 0; i < n; i++) st[0][i] = v[i];
17        for (int i = 0; i < LG - 1; i++)
18            for (int j = 0; j + (1 << i) < n; j++)
19                st[i + 1][j] = merge(st[i][j], st[i][j + (1 << i)]);
20    }
21    T query(int l, int r) {

```

5.12. MATCHING

```

22     if (l > r) return neutral;
23     int i = 31 - __builtin_clz(r - l + 1);
24     return merge(st[i][l], st[i][r - (1 << i) + 1]);
25 }
26 } st_lca;
27
28 void et_dfs(int u, int p, int h) {
29     tin[u] = timer++;
30     prof.emplace_back(h, u);
31     for (int v : adj[u]) {
32         if (v != p) {
33             et_dfs(v, u, h + 1);
34             prof.emplace_back(h, u);
35         }
36     }
37     timer++;
38 }
39
40 int lca(int u, int v) {
41     int l = tin[u], r = tin[v];
42     if (l > r) swap(l, r);
43     return st_lca.query(l, r).second;
44 }
45
46 void build() {
47     timer = 0;
48     prof.clear();
49     et_dfs(0, -1, 0);
50     st_lca.build(prof);
51 }

```

5.12 Matching

5.12.1 Hungaro

Resolve o problema de Matching para uma matriz $A[n][m]$, onde $n \leq m$.

A implementação minimiza os custos, para maximizar basta multiplicar os pesos por -1 .

A matriz de entrada precisa ser indexada em 1

O vetor `result` guarda os pares do matching.

Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(n^2 * m)$

Codigo: hungarian.cpp

```

1  const ll INF = 1e18 + 18;
2
3  vector<pair<int, int>> result;
4
5  ll hungarian(int n, int m, vector<vector<int>> &A) {
6      vector<int> u(n + 1), v(m + 1), p(m + 1), way(m + 1);
7      for (int i = 1; i <= n; i++) {
8          p[0] = i;
9          int j0 = 0;
10         vector<int> minv(m + 1, INF);
11         vector<char> used(m + 1, false);
12         do {
13             used[j0] = true;
14             ll i0 = p[j0], delta = INF, j1;
15             for (int j = 1; j <= m; j++) {
16                 if (!used[j]) {
17                     int cur = A[i0][j] - u[i0] - v[j];
18                     if (cur < minv[j]) minv[j] = cur, way[j] = j0;
19                     if (minv[j] < delta) delta = minv[j], j1 = j;
20                 }
21             }
22             for (int j = 0; j <= m; j++)
23                 if (used[j]) u[p[j]] += delta, v[j] -= delta;
24             else minv[j] -= delta;
25             j0 = j1;
26         } while (p[j0] != 0);
27         do {
28             int j1 = way[j0];
29             p[j0] = p[j1];
30             j0 = j1;
31         } while (j0);
32     }
33     for (int i = 1; i <= m; i++) result.emplace_back(p[i], i);
34     return -v[0];
35 }

```

5.13 Pontes

5.13.1 Componentes Aresta Biconexas

Código que acha componentes aresta-biconexas, que são componentes que para se desconectar é necessário remover pelo menos duas arestas. Para obter essas componentes, basta achar as pontes e contrair o resto do grafo, o resultado é uma árvore em que as arestas são as pontes do grafo original.

Esse algoritmo acha as pontes e constrói o grafo comprimido em $\mathcal{O}(V + E)$. Pontes são arestas cuja remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

No código, `ebcc[u]` é o índice da componente aresta-biconexa a qual o vértice `u` pertence.

Código: `ebcc_components.cpp`

```
1  const int N = 3e5 + 5;
2  int n, m, timer, ncc;
3  vector<int> adjbcc[N];
4  vector<int> adj[N];
5  int tin[N], low[N], ebcc[N];
6
7  void dfs_bridge(int u, int p = -1) {
8      low[u] = tin[u] = ++timer;
9      for (int v : adj[u]) {
10         if (tin[v] != 0 && v != p) {
11             low[u] = min(low[u], tin[v]);
12         } else if (v != p) {
13             dfs_bridge(v, u);
14             low[u] = min(low[u], low[v]);
15         }
16     }
17 }
18
19 void dfs_ebcc(int u, int p, int cc) {
20     if (p != -1 && low[u] == tin[u]) {
21         // edge (u, p) eh uma ponte
22         cc = ++ncc;
23     }
24     ebcc[u] = cc;
25     for (int v : adj[u])
26         if (ebcc[v] == -1) dfs_ebcc(v, u, cc);
27 }
28
```

```
29 void build_ebcc_graph() {
30     ncc = timer = 0;
31     for (int i = 0; i < n; i++) {
32         tin[i] = low[i] = 0;
33         ebcc[i] = -1;
34         adjbcc[i].clear();
35     }
36     for (int i = 0; i < n; i++)
37         if (tin[i] == 0) dfs_bridge(i);
38     for (int i = 0; i < n; i++)
39         if (ebcc[i] == -1) dfs_ebcc(i, -1, ncc), ++ncc;
40     // Opcao 1 - constroi o grafo comprimido passando por todas as edges
41     for (int u = 0; u < n; u++) {
42         for (auto v : adj[u]) {
43             if (ebcc[u] != ebcc[v]) {
44                 adjbcc[ebcc[u]].emplace_back(ebcc[v]);
45             } else {
46                 // faz algo
47             }
48         }
49     }
50     // Opcao 2 - constroi o grafo comprimido passando so pelas pontes
51     // for (auto [u, v] : bridges) {
52     //     adjbcc[ebcc[u]].emplace_back(ebcc[v]);
53     //     adjbcc[ebcc[v]].emplace_back(ebcc[u]);
54     // }
55 }
```

5.13.2 Pontes

Algoritmo que acha pontes em um grafo utilizando DFS. $\mathcal{O}(V + E)$. Pontes são arestas cuja remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Código: `find_bridges.cpp`

```
1  const int N = 3e5 + 5;
2  int n, m, timer;
3  vector<int> adj[N];
4  int tin[N], low[N];
5
6  void dfs_bridge(int u, int p = -1) {
7      low[u] = tin[u] = ++timer;
8      for (int v : adj[u]) {
9          if (tin[v] != 0 && v != p) {
```

```

10         low[u] = min(low[u], tin[v]);
11     } else if (v != p) {
12         dfs_bridge(v, u);
13         low[u] = min(low[u], low[v]);
14     }
15 }
16 if (p != -1 && low[u] == tin[u]) {
17     // edge (p, u) eh ponte
18 }
19 }
20
21 void find_bridges() {
22     timer = 0;
23     for (int i = 0; i < n; i++) tin[i] = low[i] = 0;
24     for (int i = 0; i < n; i++)
25         if (tin[i] == 0) dfs_bridge(i);
26 }

```

5.14 Pontos de Articulacao

Algoritmo que acha pontos de articulação em um grafo utilizando DFS. $\mathcal{O}(V+E)$. Pontos de articulação são nodos cuja remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Codigo: articulation_points.cpp

```

1  const int N = 3e5 + 5;
2  int n, m, timer;
3  vector<int> adj[N];
4  int tin[N], low[N];
5
6  void dfs(int u, int p = -1) {
7      low[u] = tin[u] = ++timer;
8      int child = 0;
9      for (int v : adj[u]) {
10         if (tin[v] != 0 && v != p) {
11             low[u] = min(low[u], tin[v]);
12         } else if (v != p) {
13             dfs(v, u);
14             low[u] = min(low[u], low[v]);
15             if (p != -1 && low[v] >= tin[u]) {
16                 // vertice u eh um ponto de articulacao
17             }
18         }
19     }
20 }

```

```

18         child++;
19     }
20 }
21 if (p == -1 && child > 1) {
22     // vertice u eh um ponto de articulacao
23 }
24 }
25
26 void find_articulation_points() {
27     timer = 0;
28     for (int i = 0; i < n; i++) tin[i] = low[i] = 0;
29     for (int i = 0; i < n; i++)
30         if (tin[i] == 0) dfs(i);
31 }

```

5.15 Shortest Paths

5.15.1 01 BFS

Computa o menor caminho entre nodos de um grafo com arestas de peso 0 ou 1.

Dado um nodo s , computa o menor caminho de s para todos os outros nodos em $\mathcal{O}(V+E)$.

Muito semelhante a uma BFS, mas usa uma **deque** (fila dupla) ao invés de uma fila comum.

Importante: As arestas só podem ter peso 0 ou 1.

Codigo: bfs01.cpp

```

1  const int N = 3e5 + 5;
2  const int INF = 1e9;
3
4  int n;
5  vector<pair<int, int>> adj[N];
6
7  vector<int> bfs01(int s) {
8      vector<int> dist(n, INF);
9      deque<int> q;
10     dist[s] = 0;
11     q.emplace_back(s);
12     while (!q.empty()) {

```

```

13     int u = q.front();
14     q.pop_front();
15     for (auto [w, v] : adj[u]) {
16         if (dist[u] + w < dist[v]) {
17             dist[v] = dist[u] + w;
18             if (w == 0) q.push_front(v);
19             else q.push_back(v);
20         }
21     }
22 }
23 return dist;
24 }

```

5.15.2 BFS

Computa o menor caminho entre nodos de um grafo com arestas de peso 1.

Dado um nodo s , computa o menor caminho de s para todos os outros nodos em $\mathcal{O}(V + E)$.

Importante: Todas arestas do grafo devem ter peso 1.

Codigo: bfs.cpp

```

1  const int N = 3e5 + 5;
2
3  int n;
4  vector<int> adj[N];
5
6  vector<int> bfs(int s) {
7      vector<int> dist(n, -1);
8      queue<int> q;
9      dist[s] = 0;
10     q.emplace(s);
11     while (!q.empty()) {
12         int u = q.front();
13         q.pop();
14         for (auto v : adj[u]) {
15             if (dist[v] == -1) {
16                 dist[v] = dist[u] + 1;
17                 q.emplace(v);
18             }
19         }
20     }

```

```

21     return dist;
22 }

```

5.15.3 Bellman Ford

Encontra o caminho mais curto entre um nodo e todos os outros nodos de um grafo em $\mathcal{O}(|V| * |E|)$.

Importante: Detecta ciclos negativos.

Codigo: bellman_ford.cpp

```

1  const ll INF = 1e18;
2
3  int n;
4  vector<tuple<int, int, int>> edges;
5
6  vector<ll> bellman_ford(int s) {
7      vector<ll> dist(n, INF);
8      dist[s] = 0;
9      for (int i = 0; i < n; i++) {
10         for (auto [u, v, w] : edges)
11             if (dist[u] < INF) dist[v] = min(dist[v], dist[u] + w);
12     }
13     for (int i = 0; i < n; i++) {
14         for (auto [u, v, w] : edges)
15             if (dist[u] < INF && dist[u] + w < dist[v]) dist[v] = -INF;
16     }
17     // dist[u] = -INF se tem um ciclo negativo que chega em u
18     return dist;
19 }

```

5.15.4 Dijkstra

Computa o menor caminho entre nodos de um grafo com pesos quaisquer nas arestas.

Dado um nodo s , computa o menor caminho de s para todos os outros nodos em $\mathcal{O}((V + E) \cdot \log E)$.

Muito semelhante a uma BFS, mas usa uma fila de prioridade ao invés de uma fila comum.

Importante: O grafo não pode conter arestas de peso negativo.

Código: dijkstra.cpp

```
1 const int N = 3e5 + 5;
2 const ll INF = 1e18;
3
4 int n;
5 vector<pair<int, int>> adj[N];
6
7 vector<ll> dijkstra(int s) {
8     vector<ll> dist(n, INF);
9     using T = pair<ll, int>;
10    priority_queue<T, vector<T>, greater<>> pq;
11    dist[s] = 0;
12    pq.emplace(dist[s], s);
13    while (!pq.empty()) {
14        auto [d, u] = pq.top();
15        pq.pop();
16        if (d != dist[u]) continue;
17        for (auto [w, v] : adj[u]) {
18            if (dist[v] > d + w) {
19                dist[v] = d + w;
20                pq.emplace(dist[v], v);
21            }
22        }
23    }
24    return dist;
25 }
```

5.15.5 Floyd Warshall

Algoritmo que encontra o menor caminho entre todos os pares de nodos de um grafo com pesos em $\mathcal{O}(N^3)$.

A ideia do algoritmo é: para cada nodo k , passamos por todos os pares de nodos (i, j) e verificamos se é mais curto passar por k para ir de i a j do que o caminho atual de i a j . Se for, atualizamos o caminho.

Código: floyd_warshall.cpp

```
1 const int N = 3e3 + 5;
2 const ll INF = 1e18;
3 int n;
4
5 ll adj[N][N]; // adj[u][v] = peso da aresta u-v, INF se não existe
6 ll dist[N][N];
7
8 void floydwarshall() {
9     for (int u = 0; u < n; u++)
10         for (int v = 0; v < n; v++) dist[u][v] = adj[u][v];
11     for (int k = 0; k < n; k++) {
12         for (int i = 0; i < n; i++)
13             for (int j = 0; j < n; j++)
14                 dist[i][j] = min(dist[i][j], dist[i][k] + dist[k][j]);
15     }
16 }
```

5.15.6 SPFA

Encontra o caminho mais curto entre um nodo e todos os outros nodos de um grafo em $\mathcal{O}(|V| * |E|)$. Na prática, é bem mais rápido que o Bellman-Ford.

Detecta ciclos negativos.

Código: spfa.cpp

```
1 const int N = 1e4 + 5;
2 const ll INF = 1e18;
3
4 int n;
5 vector<pair<int, int>> adj[N];
6
7 vector<ll> spfa(int s) {
8     vector<ll> dist(n, INF);
9     vector<int> cnt(n, 0);
10    vector<bool> inq(n, false);
11    queue<int> q;
12    q.push(s);
13    inq[s] = true;
14    dist[s] = 0;
15    while (!q.empty()) {
16        int u = q.front();
17        q.pop();
18        inq[u] = false;
```

```

19     for (auto [w, v] : adj[u]) {
20         ll newd = (dist[u] == -INF ? -INF : max(w + dist[u], -INF));
21         if (newd < dist[v]) {
22             dist[v] = newd;
23             if (!inq[v]) {
24                 q.push(v);
25                 inq[v] = true;
26                 cnt[v]++;
27                 if (cnt[v] > n) dist[v] = -INF; // negative cycle
28             }
29         }
30     }
31 }
32 return dist;
33 }

```

5.16 Stoer–Wagner Min Cut

Algoritmo de Stoer-Wagner para encontrar o corte mínimo de um grafo.

O algoritmo de Stoer-Wagner é um algoritmo para resolver o problema de corte mínimo em grafos não direcionados com pesos não negativos. A ideia essencial deste algoritmo é encolher o grafo mesclando os nodos mais intensos até que o grafo contenha apenas dois conjuntos de nodos combinados

Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(V^3)$

Código: stoer_wagner.cpp

```

1  const int MAXN = 555, INF = 1e9 + 7;
2
3  int n, e, adj[MAXN][MAXN];
4  vector<int> bestCut;
5
6  int mincut() {
7      int bestCost = INF;
8      vector<int> v[MAXN];
9      for (int i = 0; i < n; i++) v[i].assign(1, i);
10     int w[MAXN], sel;
11     bool exist[MAXN], added[MAXN];
12     memset(exist, true, sizeof(exist));

```

```

13     for (int phase = 0; phase < n - 1; phase++) {
14         memset(added, false, sizeof(added));
15         memset(w, 0, sizeof(w));
16         for (int j = 0, prev; j < n - phase; j++) {
17             sel = -1;
18             for (int i = 0; i < n; i++)
19                 if (exist[i] && !added[i] && (sel == -1 || w[i] > w[sel])) sel = i;
20             if (j == n - phase - 1) {
21                 if (w[sel] < bestCost) {
22                     bestCost = w[sel];
23                     bestCut = v[sel];
24                 }
25                 v[prev].insert(v[prev].end(), v[sel].begin(), v[sel].end());
26                 for (int i = 0; i < n; i++) adj[prev][i] = adj[i][prev] += adj[sel][i];
27                 exist[sel] = false;
28             } else {
29                 added[sel] = true;
30                 for (int i = 0; i < n; i++) w[i] += adj[sel][i];
31                 prev = sel;
32             }
33         }
34     }
35     return bestCost;
36 }

```

5.17 Virtual Tree

Dado um conjunto de nodos S , cria uma árvore com todos os nodos do conjunto e os LCA de todos os pares de nodos

desse conjunto em $\mathcal{O}(|S| \cdot \log |S|)$.

Obs: Precisa do código de LCA encontrado em Grafos/Binary-Lifting-LCA.

Código: virtual_tree.cpp

```

1  const int N = 3e5 + 5;
2  #warning nao esqueca de copiar o codigo de LCA
3  vector<int> vir_tree[N];
4  vector<int> vir_nodes;
5
6  void build_virtual_tree(vector<int> S) {

```

```

7   int n = (int)S.size();
8   sort(S.begin(), S.end(), [&](int i, int j) { return bl::tin[i] < bl::tin[j]; });
9   for (int i = 1; i < n; i++) S.emplace_back(bl::lca(S[i - 1], S[i]));
10  sort(S.begin(), S.end(), [&](int i, int j) { return bl::tin[i] < bl::tin[j]; });
11  S.erase(unique(S.begin(), S.end()), S.end());
12  vir_nodes = S;
13  n = (int)S.size();
14  for (auto u : S) vir_tree[u].clear();
15  vector<int> stk = {S[0]};
16  for (int i = 1; i < n; i++) {
17      int u = S[i];
18      while (!bl::ancestor(stk.back(), u)) {
19          int v = stk.back();
20          stk.pop_back();
21          int pai = stk.back();
22          vir_tree[pai].emplace_back(v);
23      }
24      stk.emplace_back(u);
25  }
26  while (int(stk.size()) >= 2) {
27      int u = stk.back();
28      stk.pop_back();
29      int pai = stk.back();
30      vir_tree[pai].emplace_back(u);
31  }
32 }

```

Capítulo 6

String

6.1 Aho Corasick

Muito parecido com uma Trie, porém muito mais poderoso. O autômato de Aho-Corasick é um autômato finito determinístico que pode ser construído a partir de um conjunto de padrões. Nesse autômato, para qualquer nodo u do autômato e qualquer caractere c do alfabeto, é possível transicionar de u usando o caractere c .

A transição é feita por uma aresta direta de u pra v , se a aresta de u pra v estiver marcada com o caractere c . Se não, a transição de u com o caractere c é a transição de $link(u)$ com o caractere c .

Definição: $link(u)$ é um nodo v , tal que o prefixo do autômato ate v é sufixo de u , e esse prefixo é o maior possível. Ou seja, $link(u)$ é o maior prefixo do autômato que é sufixo de u . Com apenas um padrão inserido, o autômato de Aho-Corasick é a Prefix Function (KMP).

No código, cur é o próximo nodo a ser criado. A root é o nodo 1.

Código: aho_corasick.cpp

```
1 namespace aho {
2     const int M = 3e5 + 1;
3     const int K = 26;
4
5     const char norm = 'a';
6     inline int get(int c) { return c - norm; }
7
8     int next[M][K], link[M], out_link[M], par[M], cur = 2;
```

```
9     char pch[M];
10    bool out[M];
11    vector<int> output[M];
12
13    int node(int p, char c) {
14        link[cur] = out_link[cur] = 0;
15        par[cur] = p;
16        pch[cur] = c;
17        return cur++;
18    }
19
20    int T = 0;
21
22    int insert(const string &s) {
23        int u = 1;
24        for (int i = 0; i < (int)s.size(); i++) {
25            auto v = next[u][get(s[i])];
26            if (v == 0) next[u][get(s[i])] = v = node(u, s[i]);
27            u = v;
28        }
29        out[u] = true;
30        output[u].emplace_back(T);
31        return T++;
32    }
33
34    int go(int u, char c);
35
36    int get_link(int u) {
37        if (link[u] == 0) link[u] = par[u] > 1 ? go(get_link(par[u]), pch[u]) : 1;
38        return link[u];
```

```

39 }
40
41 int go(int u, char c) {
42     if (next[u][get(c)] == 0) next[u][get(c)] = u > 1 ? go(get_link(u), c) : 1;
43     return next[u][get(c)];
44 }
45
46 int exit(int u) {
47     if (out_link[u] == 0) {
48         int v = get_link(u);
49         out_link[u] = (out[v] || v == 1) ? v : exit(v);
50     }
51     return out_link[u];
52 }
53
54 bool matched(int u) { return out[u] || exit(u) > 1; }
55
56 }

```

6.2 Hashing

6.2.1 Hashing

Hashing polinomial para testar igualdade de strings (ou de vetores). Requer precomputar as potências de um primo, como indicado na função `precalc`. A implementação está com dois MODS e usa a primitiva `Mint`, a escolha de usar apenas um MOD ou não usar o `Mint` vai da sua preferência ou necessidade, se não usar o `Mint`, trate adequadamente as operações com aritmética modular. A construção é $\mathcal{O}(n)$ e a consulta é $\mathcal{O}(1)$.

Obs: lembrar de chamar a função `precalc`!

Exemplo de uso:

```

1 string s = "abacabab";
2 Hashing h(s);
3 cout << (h(0, 1) == h(2, 3)) << endl; // 0
4 cout << (h(0, 1) == h(4, 5)) << endl; // 1
5 cout << (h(0, 2) == h(4, 6)) << endl; // 1
6 cout << (h(0, 3) == h(4, 7)) << endl; // 0
7 cout << (h(0, 3) + h(4, n - 1) * pot[4] == h(0, n - 1)) << endl; // 1, da pra shiftar
   o hash
8 string t = "abacabab";

```

```

9 Hashing h2(t);
10 cout << (h() == h2()) << endl; // 1, pode comparar os hashes diretamente

```

Código: hashing.cpp

```

1 const int MOD1 = 998244353;
2 const int MOD2 = (int)(1e9) + 7;
3 using mint1 = Mint<MOD1>;
4 using mint2 = Mint<MOD2>;
5
6 struct Hash {
7     mint1 h1;
8     mint2 h2;
9     Hash(mint1 _h1 = 0, mint2 _h2 = 0) : h1(_h1), h2(_h2) { }
10    bool operator==(Hash o) const { return h1 == o.h1 && h2 == o.h2; }
11    bool operator!=(Hash o) const { return h1 != o.h1 || h2 != o.h2; }
12    bool operator<(Hash o) const { return h1 == o.h1 ? h2 < o.h2 : h1 < o.h1; }
13    Hash operator+(Hash o) const { return {h1 + o.h1, h2 + o.h2}; }
14    Hash operator-(Hash o) const { return {h1 - o.h1, h2 - o.h2}; }
15    Hash operator*(Hash o) const { return {h1 * o.h1, h2 * o.h2}; }
16    Hash operator/(Hash o) const { return {h1 / o.h1, h2 / o.h2}; }
17 };
18
19 const int PRIME = 33333331; // qualquer primo na ordem do alfabeto
20 const int MAXN = 1e6 + 5;
21 Hash PR = {PRIME, PRIME};
22 Hash invPR = {mint1(1) / PRIME, mint2(1) / PRIME};
23 Hash pot[MAXN], invpot[MAXN];
24
25 void precalc() {
26     pot[0] = invpot[0] = Hash(1, 1);
27     for (int i = 1; i < MAXN; i++) {
28         pot[i] = pot[i - 1] * PR;
29         invpot[i] = invpot[i - 1] * invPR;
30     }
31 }
32
33 struct Hashing {
34     int N;
35     vector<Hash> hsh;
36     Hashing() { }
37     Hashing(string s) : N((int)s.size()), hsh(N + 1) {
38         for (int i = 0; i < N; i++) {
39             int c = (int)s[i];
40             hsh[i + 1] = hsh[i] + (pot[i + 1] * Hash(c, c));

```

```

41     }
42 }
43 Hash operator()(int l = 0, int r = -1) const {
44 #warning Chamou o precalc()?
45 // se ja chamou o precalc() pode apagar essa linha de cima
46 if (r == -1) r = N - 1;
47 return (hsh[r + 1] - hsh[l]) * invpot[l];
48 }
49 };

```

6.2.2 Hashing Dinâmico

Hashing polinomial para testar igualdade de strings (ou de vetores). Requer precomputar as potências de um primo, como indicado na função `precalc`. A implementação está com dois MODS e usa a primitiva `Mint`, a escolha de usar apenas um MOD ou não usar o `Mint` vai da sua preferência ou necessidade, se não usar o `Mint`, trate adequadamente as operações com aritmética modular.

Essa implementação suporta updates pontuais, utilizando-se de uma `Fenwick Tree` para isso. A construção é $\mathcal{O}(n)$, consultas e updates são $\mathcal{O}(\log n)$.

Obs: lembrar de chamar a função `precalc`!

Exemplo de uso:

```

1 string s = "abacabab";
2 DynamicHashing a(s);
3 cout << (a(0, 1) == a(2, 3)) << endl; // 0
4 cout << (a(0, 1) == a(4, 5)) << endl; // 1
5 a.update(0, 'c');
6 cout << (a(0, 1) == a(4, 5)) << endl; // 0

```

Codigo: `dynamic_hashing.cpp`

```

1 const int MOD1 = 998244353;
2 const int MOD2 = 1e9 + 7;
3 using mint1 = Mint<MOD1>;
4 using mint2 = Mint<MOD2>;
5
6 struct Hash {
7     mint1 h1;

```

```

8     mint2 h2;
9     Hash() { }
10    Hash(mint1 _h1, mint2 _h2) : h1(_h1), h2(_h2) { }
11    bool operator==(Hash o) const { return h1 == o.h1 && h2 == o.h2; }
12    bool operator!=(Hash o) const { return h1 != o.h1 || h2 != o.h2; }
13    bool operator<(Hash o) const { return h1 == o.h1 ? h2 < o.h2 : h1 < o.h1; }
14    Hash operator+(Hash o) const { return {h1 + o.h1, h2 + o.h2}; }
15    Hash operator-(Hash o) const { return {h1 - o.h1, h2 - o.h2}; }
16    Hash operator*(Hash o) const { return {h1 * o.h1, h2 * o.h2}; }
17    Hash operator/(Hash o) const { return {h1 / o.h1, h2 / o.h2}; }
18 };
19
20 const int PRIME = 1001003; // qualquer primo na ordem do alfabeto
21 const int MAXN = 1e6 + 5;
22 Hash PR = {PRIME, PRIME};
23 Hash invPR = {mint1(1) / PRIME, mint2(1) / PRIME};
24 Hash pot[MAXN], invpot[MAXN];
25 void precalc() {
26     pot[0] = invpot[0] = Hash(1, 1);
27     for (int i = 1; i < MAXN; i++) {
28         pot[i] = pot[i - 1] * PR;
29         invpot[i] = invpot[i - 1] * invPR;
30     }
31 }
32
33 struct DynamicHashing {
34     int N;
35     FenwickTree<Hash> hsh;
36     DynamicHashing() { }
37     DynamicHashing(string s) : N(int(s.size())) {
38         vector<Hash> v(N);
39         for (int i = 0; i < N; i++) {
40             int c = (int)s[i];
41             v[i] = pot[i + 1] * Hash(c, c);
42         }
43         hsh = FenwickTree<Hash>(v);
44     }
45     Hash operator()(int l, int r) { return hsh.query(l, r) * invpot[l]; }
46     void update(int i, char ch) {
47         int c = (int)ch;
48         hsh.updateSet(i, pot[i + 1] * Hash(c, c));
49     }
50 };

```

6.3 Lyndon

Strings em decomposição única em subcadeias que são ordenadas lexicograficamente e não podem ser mais reduzidas.

Duval

Gera a Lyndon Factorization de uma string

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N)$

Min Cyclic Shift

Gera a menor rotação circular da string original que pode ser obtida por meio de deslocamentos cíclicos dos caracteres.

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N)$

Codigo: min_cyclic_shift.cpp

```
1 string min_cyclic_shift(string s) {
2     s += s;
3     int n = s.size();
4     int i = 0, ans = 0;
5     while (i < n / 2) {
6         ans = i;
7         int j = i + 1, k = i;
8         while (j < n && s[k] <= s[j]) {
9             if (s[k] < s[j]) k = i;
10            else k++;
11            j++;
12        }
13        while (i <= k) i += j - k;
14    }
15    return s.substr(ans, n / 2);
16 }
```

Codigo: duval.cpp

```
1 vector<string> duval(string const &s) {
2     int n = s.size();
3     int i = 0;
4     vector<string> factorization;
5     while (i < n) {
6         int j = i + 1, k = i;
7         while (j < n && s[k] <= s[j]) {
```

```
8             if (s[k] < s[j]) k = i;
9             else k++;
10            j++;
11        }
12        while (i <= k) {
13            factorization.push_back(s.substr(i, j - k));
14            i += j - k;
15        }
16    }
17    return factorization;
18 }
```

6.4 Manacher

O algoritmo de manacher encontra todos os palíndromos de uma string em $\mathcal{O}(n)$. Para cada centro, ele conta quantos palíndromos de tamanho ímpar e par existem (nos vetores d1 e d2 respectivamente). O método `solve` computa os palíndromos e retorna o número de substrings palíndromas. O método `query` retorna se a substring $s[i \dots j]$ é palíndroma em $\mathcal{O}(1)$.

Codigo: manacher.cpp

```
1 struct Manacher {
2     int n;
3     ll count;
4     vector<int> d1, d2, man;
5     ll solve(const string &s) {
6         n = int(s.size()), count = 0;
7         solve_odd(s);
8         solve_even(s);
9         man.assign(2 * n - 1, 0);
10        for (int i = 0; i < n; i++) man[2 * i] = 2 * d1[i] - 1;
11        for (int i = 0; i < n - 1; i++) man[2 * i + 1] = 2 * d2[i + 1];
12        return count;
13    }
14    void solve_odd(const string &s) {
15        d1.assign(n, 0);
16        for (int i = 0, l = 0, r = -1; i < n; i++) {
17            int k = (i > r) ? 1 : min(d1[l + r - i], r - i + 1);
18            while (0 <= i - k && i + k < n && s[i - k] == s[i + k]) k++;
19            count += d1[i] = k--;
20            if (i + k > r) l = i - k, r = i + k;
21        }
```

```

22     }
23     void solve_even(const string &s) {
24         d2.assign(n, 0);
25         for (int i = 0, l = 0, r = -1; i < n; i++) {
26             int k = (i > r) ? 0 : min(d2[l + r - i + 1], r - i + 1);
27             while (0 <= i - k - 1 && i + k < n && s[i - k - 1] == s[i + k]) k++;
28             count += d2[i] = k--;
29             if (i + k > r) l = i - k - 1, r = i + k;
30         }
31     }
32     bool query(int i, int j) {
33         assert(man.size());
34         return man[i + j] >= j - i + 1;
35     }
36 } mana;

```

6.5 Patricia Tree

Estrutura de dados que armazena strings e permite consultas por prefixo, muito similar a uma Trie. Todas as operações são $\mathcal{O}(|s|)$.

Obs: Não aceita elementos repetidos.

Implementação PB-DS, extremamente curta e confusa:

Exemplo de uso:

```

1 patricia_tree pat;
2 pat.insert("exemplo");
3 pat.erase("exemplo");
4 pat.find("exemplo") != pat.end(); // verifica existência
5 auto match = pat.prefix_range("ex"); // pega palavras que começam com "ex"
6 for (auto it = match.first; it != match.second; ++it); // percorre match
7 pat.lower_bound("ex"); // menor elemento lexicográfico maior ou igual a "ex"
8 pat.upper_bound("ex"); // menor elemento lexicográfico maior que "ex"

```

Código: patricia_tree.cpp

```

1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/trie_policy.hpp>
3

```

```

4 using namespace __gnu_pbds;
5 typedef trie<
6     string,
7     null_type,
8     trie_string_access_traits<>,
9     pat_trie_tag,
10    trie_prefix_search_node_update>
11    patricia_tree;

```

6.6 Prefix Function KMP

6.6.1 Automato KMP

O autômato de KMP computa em $\mathcal{O}(|s| \cdot \Sigma)$ a função de transição de uma string, que é definida por:

$$nxt[i][c] = \max\{k \mid s[0, k] = s(i - k, i - 1]c\}$$

Em outras palavras, $nxt[i][c]$ é o tamanho do maior prefixo de s que é sufixo de $s[0, i - 1]c$.

O autômato de KMP é útil para múltiplos pattern matchings, ou seja, dado um padrão t , encontrar todas as ocorrências de t em várias strings s_1, s_2, \dots, s_k , em $\mathcal{O}(|t| + \sum |s_i|)$. O método `matching` faz isso.

Obs: utiliza o código do KMP.

Código: aut_kmp.cpp

```

1 struct AutKMP {
2     vector<vector<int>>> nxt;
3     void setString(string s) {
4         s += '#';
5         nxt.assign(s.size(), vector<int>(26));
6         vector<int> p = pi(s);
7         for (int c = 0; c < 26; c++) nxt[0][c] = ('a' + c == s[0]);
8         for (int i = 1; i < int(s.size()); i++)
9             for (int c = 0; c < 26; c++)
10                 nxt[i][c] = ('a' + c == s[i]) ? i + 1 : nxt[p[i - 1]][c];
11     }
12     vector<int> matching(string &s, string &t) {

```



```

13     vector<int> match;
14     for (int i = 0, j = 0; i < int(s.size()); i++) {
15         j = nxt[j][s[i] - 'a'];
16         if (j == int(t.size())) match.push_back(i - j + 1);
17     }
18     return match;
19 }
20 } aut;

```

6.6.2 KMP

O algoritmo de Knuth-Morris-Pratt (KMP) computa em $\mathcal{O}(|s|)$ a Prefix Function de uma string, cuja definição é dada por:

$$p[i] = \max\{k \mid s[0, k) = s(i - k, i]\}$$

Em outras palavras, $p[i]$ é o tamanho do maior prefixo de s que é sufixo próprio de $s[0, i]$.

O KMP é útil para pattern matching, ou seja, encontrar todas as ocorrências de uma string t em uma string s , como faz a função `matching` em $\mathcal{O}(|s| + |t|)$.

Codigo: kmp.cpp

```

1 vector<int> pi(string &s) {
2     vector<int> p(s.size());
3     for (int i = 1, j = 0; i < int(s.size()); i++) {
4         while (j > 0 && s[i] != s[j]) j = p[j - 1];
5         if (s[i] == s[j]) j++;
6         p[i] = j;
7     }
8     return p;
9 }
10
11 vector<int> matching(string &s, string &t) { // s = texto, t = padrao
12     vector<int> p = pi(t), match;
13     for (int i = 0, j = 0; i < (int)s.size(); i++) {
14         while (j > 0 && s[i] != t[j]) j = p[j - 1];
15         if (s[i] == t[j]) j++;
16         if (j == (int)t.size()) {
17             match.push_back(i - j + 1);
18             j = p[j - 1];
19         }

```

```

20     }
21     return match;
22 }

```

6.7 Suffix Array

Estrutura que conterá inteiros que representam os índices iniciais de todos os sufixos ordenados de uma determinada string.

Também constrói a tabela LCP (Longest Common Prefix).

* Complexidade de tempo (Pré-Processamento): $\mathcal{O}(|S| \cdot \log(|S|))$

* Complexidade de tempo (Contar ocorrências de S em T): $\mathcal{O}(|S| \cdot \log(|T|))$

Codigo: suffix_array_busca.cpp

```

1 pair<int, int> busca(string &t, int i, pair<int, int> &range) {
2     int esq = range.first, dir = range.second, L = -1, R = -1;
3     while (esq <= dir) {
4         int mid = (esq + dir) / 2;
5         if (s[sa[mid] + i] == t[i]) L = mid;
6         if (s[sa[mid] + i] < t[i]) esq = mid + 1;
7         else dir = mid - 1;
8     }
9     esq = range.first, dir = range.second;
10    while (esq <= dir) {
11        int mid = (esq + dir) / 2;
12        if (s[sa[mid] + i] == t[i]) R = mid;
13        if (s[sa[mid] + i] <= t[i]) esq = mid + 1;
14        else dir = mid - 1;
15    }
16    return {L, R};
17 }
18 // count ocurences of s on t
19 int busca_string(string &t) {
20     pair<int, int> range = {0, n - 1};
21     for (int i = 0; i < t.size(); i++) {
22         range = busca(t, i, range);
23         if (range.first == -1) return 0;
24     }
25     return range.second - range.first + 1;

```

```
26 }
```

Codigo: suffix_array.cpp

```
1  const int MAX_N = 5e5 + 5;
2
3  struct suffix_array {
4      string s;
5      int n, sum, r, ra[MAX_N], sa[MAX_N], auxra[MAX_N], auxsa[MAX_N], c[MAX_N],
        lcp[MAX_N];
6      void counting_sort(int k) {
7          memset(c, 0, sizeof(c));
8          for (int i = 0; i < n; i++) c[(i + k < n) ? ra[i + k] : 0]++;
9          for (int i = sum = 0; i < max(256, n); i++) sum += c[i], c[i] = sum - c[i];
10         for (int i = 0; i < n; i++) auxsa[c[sa[i]] + k < n ? ra[sa[i] + k] : 0]++ =
            sa[i];
11         for (int i = 0; i < n; i++) sa[i] = auxsa[i];
12     }
13     void build_sa() {
14         for (int k = 1; k < n; k <= 1) {
15             counting_sort(k);
16             counting_sort(0);
17             auxra[sa[0]] = r = 0;
18             for (int i = 1; i < n; i++) {
19                 auxra[sa[i]] =
20                     (ra[sa[i]] == ra[sa[i - 1]] && ra[sa[i] + k] == ra[sa[i - 1] + k])
21                     ? r
22                     : ++r;
23             }
24             for (int i = 0; i < n; i++) ra[i] = auxra[i];
25             if (ra[sa[n - 1]] == n - 1) break;
26         }
27     }
28     void build_lcp() {
29         for (int i = 0, k = 0; i < n - 1; i++) {
30             int j = sa[ra[i] - 1];
31             while (s[i + k] == s[j + k]) k++;
32             lcp[ra[i]] = k;
33             if (k) k--;
34         }
35     }
36     void set_string(string _s) {
37         s = _s + '$';
38         n = s.size();
39         for (int i = 0; i < n; i++) ra[i] = s[i], sa[i] = i;
40         build_sa();
41         build_lcp();
```

```
42         // for (int i = 0; i < n; i++)
43         // printf("%2d: %s\n", sa[i], s.c_str() +
44         // sa[i]);
45     }
46     int operator[](int i) { return sa[i]; }
47 } sa;
```

6.8 Suffix Automaton

Constrói o autômato de sufixos de uma string S em $\mathcal{O}(|S|)$ de forma online.

- $\text{len}[u]$ é o tamanho da maior string na classe de equivalência de u .
- $\text{lnk}[u]$ é o nodo que representa o maior sufixo de u que não pertence a classe de equivalência de u .
- $\text{to}[u]$ é um array que representa as possíveis transições de um nodo u .

Codigo: suffix_automaton.cpp

```
1 namespace SA {
2     const int MAXN = 3e5 + 5;
3     const int MAXS = 2 * MAXN + 5;
4     array<int, 26> to[MAXS];
5     int lnk[MAXS], len[MAXS];
6     int last = 1, id = 2;
7
8     void insert(int c) {
9         int cur = id++;
10        len[cur] = len[last] + 1;
11        int p = last;
12        while (p && !to[p][c]) {
13            to[p][c] = cur;
14            p = lnk[p];
15        }
16        if (p == 0) {
17            lnk[cur] = 1;
18        } else {
19            int s = to[p][c];
```

```

20     if (len[p] + 1 == len[s]) {
21         lnk[cur] = s;
22     } else {
23         int clone = id++;
24         len[clone] = len[p] + 1;
25         lnk[clone] = lnk[s];
26         to[clone] = to[s];
27         while (to[p][c] == s) {
28             to[p][c] = clone;
29             p = lnk[p];
30         }
31         lnk[s] = lnk[cur] = clone;
32     }
33 }
34 last = cur;
35 }
36 }

```

6.9 Trie

Estrutura que guarda informações indexadas por palavra.

Útil encontrar todos os prefixos inseridos anteriormente de uma palavra específica.

* Complexidade de tempo (Update): $\mathcal{O}(|S|)$

* Complexidade de tempo (Consulta de palavra): $\mathcal{O}(|S|)$

Codigo: trie.cpp

```

1 struct trie {
2     map<char, int> trie[100005];
3     int value[100005];
4     int n_nodes = 0;
5     void insert(string &s, int v) {
6         int id = 0;
7         for (char c : s) {
8             if (!trie[id].count(c)) trie[id][c] = ++n_nodes;
9             id = trie[id][c];
10        }
11        value[id] = v;
12    }

```

```

13 int get_value(string &s) {
14     int id = 0;
15     for (char c : s) {
16         if (!trie[id].count(c)) return -1;
17         id = trie[id][c];
18     }
19     return value[id];
20 }
21 };

```

6.10 Z function

O algoritmo abaixo computa o vetor Z de uma string, definido por:

$$z[i] = \max\{k \mid s[0, k) = s[i, i+k)\}$$

Em outras palavras, $z[i]$ é o tamanho do maior prefixo de s é prefixo de $s[i, |s| - 1]$.

É muito semelhante ao KMP em termos de aplicações. Usado principalmente para pattern matching.

Codigo: z.cpp

```

1 vector<int> get_z(string &s) {
2     int n = (int)s.size();
3     vector<int> z(n);
4     for (int i = 1, l = 0, r = 0; i < n; i++) {
5         if (i <= r) z[i] = min(r - i + 1, z[i - l]);
6         while (i + z[i] < n && s[i + z[i]] == s[z[i]]) z[i]++;
7         if (i + z[i] - 1 > r) {
8             r = i + z[i] - 1;
9             l = i;
10        }
11    }
12    return z;
13 }
14
15 vector<int> matching(string &s, string &t) { // s = texto, t = padrao
16     string k = t + "$" + s;
17     vector<int> z = get_z(k), match;
18     int n = (int)t.size();
19     for (int i = n + 1; i < (int)z.size(); i++)

```

```
20     if (z[i] == n) match.push_back(i - n - 1);  
21     return match;  
22 }
```

Capítulo 7

Paradigmas

7.1 All Submasks

Percorre todas as submáscaras de uma máscara em $\mathcal{O}(3^n)$.

Codigo: all_submask.cpp

```
1 int mask;
2 for (int sub = mask; sub; sub = (sub - 1) & mask) { }
```

7.2 Busca Binaria Paralela

Faz a busca binária para múltiplas consultas quando a busca binária é muito pesada. A complexidade é $\mathcal{O}((N + Q) \log(N) \cdot \mathcal{O}(F))$, onde N é o tamanho do espaço de busca, Q é o número de consultas, e $\mathcal{O}(F)$ é o custo de avaliação da função.

Codigo: busca_binaria_paralela.cpp

```
1
2 namespace parallel_binary_search {
3     typedef tuple<int, int, long long, long long> query; //{value, id, l, r}
4     vector<query> queries[1123456]; // pode ser um mapa se
5                                     // for muito esperso
```

```
6     long long ans[1123456]; // definir pro tamanho
7                                     // das queries
8     long long l, r, mid;
9     int id = 0;
10    void set_lim_search(long long n) {
11        l = 0;
12        r = n;
13        mid = (l + r) / 2;
14    }
15
16    void add_query(long long v) { queries[mid].push_back({v, id++, l, r}); }
17
18    void advance_search(long long v) {
19        // advance search
20    }
21
22    bool satisfies(long long mid, int v, long long l, long long r) {
23        // implement the evaluation
24    }
25
26    bool get_ans() {
27        // implement the get ans
28    }
29
30    void parallel_binary_search(long long l, long long r) {
31
32        bool go = 1;
33        while (go) {
34            go = 0;
35            int i = 0; // outra logica se for usar
```

```

36         // um mapa
37     for (auto &vec : queries) {
38         advance_search(i++);
39         for (auto q : vec) {
40             auto [v, id, l, r] = q;
41             if (l > r) continue;
42             go = 1;
43             // return while satisfies
44             if (satisfies(i, v, l, r)) {
45                 ans[i] = get_ans();
46                 long long mid = (i + l) / 2;
47                 queries[mid] = query(v, id, l, i - 1);
48             } else {
49                 long long mid = (i + r) / 2;
50                 queries[mid] = query(v, id, i + 1, r);
51             }
52         }
53         vec.clear();
54     }
55 }
56 }
57
58 } // namespace name

```

7.3 Busca Ternaria

Encontra um ponto ótimo em uma função que pode ser separada em duas funções estritamente monotônicas (por exemplo, parábolas).

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(\log(N) \cdot \mathcal{O}(\text{eval}))$, onde N é o tamanho do espaço de busca e $\mathcal{O}(\text{eval})$ é o custo de avaliação da função.

Busca Ternária em Espaço Discreto

Encontra um ponto ótimo em uma função que pode ser separada em duas funções estritamente monotônicas (por exemplo, parábolas).

Versão para espaços discretos.

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(\log(N) \cdot \mathcal{O}(\text{eval}))$, onde N é o tamanho do espaço de busca e $\mathcal{O}(\text{eval})$ é o custo de avaliação da função.

Codigo: busca_ternaria.cpp

```

1
2 double eval(double mid) {
3     // implement the evaluation
4 }
5
6 double ternary_search(double l, double r) {
7     int k = 100;
8     while (k--) {
9         double step = (l + r) / 3;
10        double mid_1 = l + step;
11        double mid_2 = r - step;
12
13        // minimizing. To maximize use >= to
14        // compare
15        if (eval(mid_1) <= eval(mid_2)) r = mid_2;
16        else l = mid_1;
17    }
18    return l;
19 }

```

Codigo: busca_ternaria_discreta.cpp

```

1
2 long long eval(long long mid) {
3     // implement the evaluation
4 }
5
6 long long discrete_ternary_search(long long l, long long r) {
7     long long ans = -1;
8     r--; // to not space r
9     while (l <= r) {
10        long long mid = (l + r) / 2;
11
12        // minimizing. To maximize use >= to
13        // compare
14        if (eval(mid) <= eval(mid + 1)) {
15            ans = mid;
16            r = mid - 1;
17        } else {
18            l = mid + 1;
19        }
20    }
21    return ans;

```

```
22 }
```

7.4 Convex Hull Trick

Otimização de DP onde se mantêm as retas que formam um Convex Hull em uma estrutura que permite consultar qual o melhor valor para um determinado x .

Só funciona quando as retas são monotônicas. Caso não sejam, usar LiChao Tree para guardar as retas.

Complexidade de tempo:

- Inserir reta: $\mathcal{O}(1)$ amortizado
- Consultar x : $\mathcal{O}(\log(N))$
- Consultar x quando x tem crescimento monotônico: $\mathcal{O}(1)$

Código: Convex Hull Trick.cpp

```
1 const ll INF = 1e18 + 18;
2 bool op(ll a, ll b) {
3     return a >= b; // either >= or <=
4 }
5 struct line {
6     ll a, b;
7     ll get(ll x) { return a * x + b; }
8     ll intersect(line l) {
9         return (l.b - b + a - l.a) / (a - l.a); // rounds up for integer
10        // only
11    }
12 };
13 deque<pair<line, ll>> fila;
14 void add_line(ll a, ll b) {
15     line nova = {a, b};
16     if (!fila.empty() && fila.back().first.a == a && fila.back().first.b == b) return;
17     while (!fila.empty() && op(fila.back().second, nova.intersect(fila.back().first)))
18         fila.pop_back();
19     ll x = fila.empty() ? -INF : nova.intersect(fila.back().first);
```

```
20     fila.emplace_back(nova, x);
21 }
22 ll get_binary_search(ll x) {
23     int esq = 0, dir = fila.size() - 1, r = -1;
24     while (esq <= dir) {
25         int mid = (esq + dir) / 2;
26         if (op(x, fila[mid].second)) {
27             esq = mid + 1;
28             r = mid;
29         } else {
30             dir = mid - 1;
31         }
32     }
33     return fila[r].first.get(x);
34 }
35 // O(1), use only when QUERIES are monotonic!
36 ll get(ll x) {
37     while (fila.size() >= 2 && op(x, fila[1].second)) fila.pop_front();
38     return fila.front().first.get(x);
39 }
```

7.5 DP de Permutacao

Otimização do problema do Caixeiro Viajante

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(n^2 * 2^n)$

Para rodar a função basta setar a matriz de adjacência 'dist' e chamar solve(0,0,n).

Código: tsp_dp.cpp

```
1 const int lim = 17; // setar para o maximo de itens
2 long double dist[lim][lim]; // eh preciso dar as
3                             // distancias de n para n
4 long double dp[lim][1 << lim];
5
6 int limMask = (1 << lim) - 1; // 2**(maximo de itens) - 1
7 long double solve(int atual, int mask, int n) {
8     if (dp[atual][mask] != 0) return dp[atual][mask];
9     if (mask == (1 << n) - 1) {
10         return dp[atual][mask] = 0; // o que fazer quando
11        // chega no final
```

```

12     }
13
14     long double res = 1e13; // pode ser maior se precisar
15     for (int i = 0; i < n; i++) {
16         if (!(mask & (1 << i))) {
17             long double aux = solve(i, mask | (1 << i), n);
18             if (mask) aux += dist[atuai][i];
19             res = min(res, aux);
20         }
21     }
22     return dp[atuai][mask] = res;
23 }

```

7.6 Divide and Conquer

Otimização para DP de prefixo quando se pretende separar o vetor em K subgrupos.

É preciso fazer a função `query(i, j)` que computa o custo do subgrupo

i, j

.
* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(n \cdot k \cdot \log(n) \cdot \mathcal{O}(\text{query}))$

Divide and Conquer com Query on demand

Usado para evitar queries pesadas ou o custo de pré-processamento.

É preciso fazer as funções da estrutura **janela**, eles adicionam e removem itens um a um como uma janela flutuante.

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(n \cdot k \cdot \log(n) \cdot \mathcal{O}(\text{update da janela}))$

Código: `dc.cpp`

```

1 namespace DC {
2     vi dp_before, dp_cur;
3     void compute(int l, int r, int optl, int optr) {
4         if (l > r) return;
5         int mid = (l + r) >> 1;
6         pair<ll, int> best = {0, -1}; // {INF, -1} se quiser minimizar
7         for (int i = optl; i <= min(mid, optr); i++) {

```

```

8             // min() se quiser minimizar
9             best = max(best, {(i ? dp_before[i - 1] : 0) + query(i, mid), i});
10        }
11        dp_cur[mid] = best.first;
12        int opt = best.second;
13        compute(l, mid - 1, optl, opt);
14        compute(mid + 1, r, opt, optr);
15    }
16
17    ll solve(int n, int k) {
18        dp_before.assign(n + 5, 0);
19        dp_cur.assign(n + 5, 0);
20        for (int i = 0; i < n; i++) dp_before[i] = query(0, i);
21        for (int i = 1; i < k; i++) {
22            compute(0, n - 1, 0, n - 1);
23            dp_before = dp_cur;
24        }
25        return dp_before[n - 1];
26    }
27 };

```

Código: `dc_query_on_demand.cpp`

```

1 namespace DC {
2     struct range { // eh preciso definir a forma
3         // de calcular o range
4         vi freq;
5         ll sum = 0;
6         int l = 0, r = -1;
7         void back_l(int v) { // Mover o 'l' do range
8             // para a esquerda
9             sum += freq[v];
10            freq[v]++;
11            l--;
12        }
13        void advance_r(int v) { // Mover o 'r' do range
14            // para a direita
15            sum += freq[v];
16            freq[v]++;
17            r++;
18        }
19        void advance_l(int v) { // Mover o 'l' do range
20            // para a direita
21            freq[v]--;
22            sum -= freq[v];
23            l++;
24        }

```



```

25 void back_r(int v) { // Mover o 'r' do range
26                     // para a esquerda
27     freq[v]--;
28     sum -= freq[v];
29     r--;
30 }
31 void clear(int n) { // Limpar range
32     l = 0;
33     r = -1;
34     sum = 0;
35     freq.assign(n + 5, 0);
36 }
37 } s;
38
39 vi dp_before, dp_cur;
40 void compute(int l, int r, int optl, int optr) {
41     if (l > r) return;
42     int mid = (l + r) >> 1;
43     pair<ll, int> best = {0, -1}; // {INF, -1} se quiser minimizar
44
45     while (s.l < optl) s.advance_l(v[s.l]);
46     while (s.l > optl) s.back_l(v[s.l - 1]);
47     while (s.r < mid) s.advance_r(v[s.r + 1]);
48     while (s.r > mid) s.back_r(v[s.r]);
49
50     vi removed;
51     for (int i = optl; i <= min(mid, optr); i++) {
52         best =
53             min(best,
54                 {(i ? dp_before[i - 1] : 0) + s.sum, i}); // min() se quiser
55                     minimizar
56         removed.push_back(v[s.l]);
57         s.advance_l(v[s.l]);
58     }
59     for (int rem : removed) s.back_l(v[s.l - 1]);
60
61     dp_cur[mid] = best.first;
62     int opt = best.second;
63     compute(l, mid - 1, optl, opt);
64     compute(mid + 1, r, opt, optr);
65 }
66
67 ll solve(int n, int k) {
68     dp_before.assign(n, 0);
69     dp_cur.assign(n, 0);
70     s.clear(n);
71     for (int i = 0; i < n; i++) {

```

```

71         s.advance_r(v[i]);
72         dp_before[i] = s.sum;
73     }
74     for (int i = 1; i < k; i++) {
75         s.clear(n);
76         compute(0, n - 1, 0, n - 1);
77         dp_before = dp_cur;
78     }
79     return dp_before[n - 1];
80 }
81 };

```

7.7 Exponenciação de Matriz

Otimização para DP de prefixo quando o valor atual está em função dos últimos K valores já calculados.

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(k^3 \cdot \log n)$

É preciso mapear a DP para uma exponenciação de matriz.

DP:

$$dp[n] = \sum_{i=1}^k c[i] \cdot dp[n-i]$$

Mapeamento:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c[k] & c[k-1] & c[k-2] & \dots & c[1] & 0 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} dp[0] \\ dp[1] \\ dp[2] \\ \dots \\ dp[k-1] \end{pmatrix}$$

• —

Exemplo de DP:

$$dp[i] = dp[i-1] + 2 \cdot i^2 + 3 \cdot i + 5$$

Nesses casos é preciso fazer uma linha para manter cada constante e potência do índice.

Mapeamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} dp[0] \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{mantém } dp[i] \\ \text{mantém } 1 \\ \text{mantém } i \\ \text{mantém } i^2 \end{matrix}$$

Exemplo de DP:

$$dp[n] = c \cdot \prod_{i=1}^k dp[n-i]$$

Nesses casos é preciso trabalhar com o logaritmo e temos o caso padrão:

$$\log(dp[n]) = \log(c) + \sum_{i=1}^k \log(dp[n-i])$$

Se a resposta precisar ser inteira, deve-se fatorar a constante e os valores iniciais e então fazer uma exponenciação para cada fator primo. Depois é só juntar a resposta no final.

Código: matrix_exp.cpp

```
1 using mat = vector<vector<ll>>>;
2 ll dp[100];
3 mat T;
4
5 #define MOD 1000000007
6
```

```
7 mat operator*(mat a, mat b) {
8     mat res(a.size(), vector<ll>(b[0].size()));
9     for (int i = 0; i < a.size(); i++) {
10         for (int j = 0; j < b[0].size(); j++) {
11             for (int k = 0; k < b.size(); k++) {
12                 res[i][j] += a[i][k] * b[k][j] % MOD;
13                 res[i][j] %= MOD;
14             }
15         }
16     }
17     return res;
18 }
19
20 mat operator^(mat a, ll k) {
21     mat res(a.size(), vector<ll>(a.size()));
22     for (int i = 0; i < a.size(); i++) res[i][i] = 1;
23     while (k) {
24         if (k & 1) res = res * a;
25         a = a * a;
26         k >>= 1;
27     }
28     return res;
29 }
30
31 // MUDA MUITO DE ACORDO COM O PROBLEMA
32 // LEIA COMO FAZER O MAPEAMENTO NO README
33 ll solve(ll exp, ll dim) {
34     if (exp < dim) return dp[exp];
35
36     T.assign(dim, vi(dim));
37     // TO DO: Preencher a Matriz que vai ser
38     // exponenciada T[0][1] = 1; T[1][0] = 1;
39     // T[1][1] = 1;
40
41     mat prod = T ^ exp;
42
43     mat vec;
44     vec.assign(dim, vi(1));
45     for (int i = 0; i < dim; i++) vec[i][0] = dp[i]; // Valores iniciais
46
47     mat ans = prod * vec;
48     return ans[0][0];
49 }
```

7.8 Mo

7.8.1 Mo

Resolve queries complicadas Offline de forma rápida.

É preciso manter uma estrutura que adicione e remova elementos nas extremidades de um range (tipo janela).

A complexidade do run é $\mathcal{O}(Q * B + N^2/B)$, onde B é o tamanho do bloco.

Para $B = \sqrt{N}$, a complexidade é $\mathcal{O}((N + Q) * \sqrt{N})$.

Para $B = N/\sqrt{Q}$, a complexidade é $\mathcal{O}(N * \sqrt{Q})$.

Codigo: mo.cpp

```
1 typedef pair<int, int> ii;
2 int block_sz; // Better if 'const';
3
4 namespace mo {
5     struct query {
6         int l, r, idx;
7         bool operator<(query q) const {
8             int _l = l / block_sz;
9             int _ql = q.l / block_sz;
10            return ii(_l, (_l & 1 ? -r : r)) < ii(_ql, (_ql & 1 ? -q.r : q.r));
11        }
12    };
13    vector<query> queries;
14
15    void build(int n) {
16        block_sz = (int)sqrt(n);
17        // TODO: initialize data structure
18    }
19    inline void add_query(int l, int r) {
20        queries.push_back({l, r, (int)queries.size()});
21    }
22    inline void remove(int idx) {
23        // TODO: remove value at idx from data
24        // structure
25    }
26    inline void add(int idx) {
27        // TODO: add value at idx from data
```

```
28        // structure
29    }
30    inline int get_answer() {
31        // TODO: extract the current answer of the
32        // data structure
33        return 0;
34    }
35
36    vector<int> run() {
37        vector<int> answers(queries.size());
38        sort(queries.begin(), queries.end());
39        int L = 0;
40        int R = -1;
41        for (query q : queries) {
42            while (L > q.l) add(--L);
43            while (R < q.r) add(++R);
44            while (L < q.l) remove(L++);
45            while (R > q.r) remove(R--);
46            answers[q.idx] = get_answer();
47        }
48        return answers;
49    }
50
51 };
```

7.8.2 Mo Update

Resolve queries complicadas Offline de forma rápida.

Permite que existam **UPDATES PONTUAIS!**

É preciso manter uma estrutura que adicione e remova elementos nas extremidades de um range (tipo janela). A complexidade é $\mathcal{O}(Q \cdot \sqrt[3]{N^2})$

Codigo: mo_update.cpp

```
1 typedef pair<int, int> ii;
2 typedef tuple<int, int, int> iii;
3 int block_sz; // Better if 'const';
4 vector<int> vec;
5 namespace mo {
6     struct query {
```

```

7     int l, r, t, idx;
8     bool operator<(query q) const {
9         int _l = l / block_sz;
10        int _r = r / block_sz;
11        int _ql = q.l / block_sz;
12        int _qr = q.r / block_sz;
13        return iii(_l, (_l & 1 ? -_r : _r), (_r & 1 ? t : -t)) <
14            iii(_ql, (_ql & 1 ? -_qr : _qr), (_qr & 1 ? q.t : -q.t));
15    }
16 };
17 vector<query> queries;
18 vector<ii> updates;
19
20 void build(int n) {
21     block_sz = pow(1.4142 * n, 2.0 / 3);
22     // TODO: initialize data structure
23 }
24 inline void add_query(int l, int r) {
25     queries.push_back({l, r, (int)updates.size(), (int)queries.size()});
26 }
27 inline void add_update(int x, int v) { updates.push_back({x, v}); }
28 inline void remove(int idx) {
29     // TODO: remove value at idx from data
30     // structure
31 }
32 inline void add(int idx) {
33     // TODO: add value at idx from data
34     // structure
35 }
36 inline void update(int l, int r, int t) {
37     auto &[x, v] = updates[t];
38     if (l <= x && x <= r) remove(x);
39     swap(vec[x], v);
40     if (l <= x && x <= r) add(x);
41 }
42 inline int get_answer() {
43     // TODO: extract the current answer from
44     // the data structure
45     return 0;
46 }
47
48 vector<int> run() {
49     vector<int> answers(queries.size());
50     sort(queries.begin(), queries.end());
51     int L = 0;
52     int R = -1;
53     int T = 0;

```

```

54     for (query q : queries) {
55         while (T < q.t) update(L, R, T++);
56         while (T > q.t) update(L, R, --T);
57         while (L > q.l) add(--L);
58         while (R < q.r) add(++R);
59         while (L < q.l) remove(L++);
60         while (R > q.r) remove(R--);
61         answers[q.idx] = get_answer();
62     }
63     return answers;
64 }
65 };

```

Capítulo 8

Primitivas

8.1 Modular Int

O Mint é uma classe que representa um número inteiro módulo número inteiro MOD. Ela é útil para evitar overflow em operações de multiplicação e exponenciação, e também para facilitar a implementações.

Ao usar o Mint, você deve passar os valores pra ele **já modulados**, ou seja, valores entre $-\text{MOD}$ e $\text{MOD} - 1$, o próprio Mint normaliza depois para ficar entre 0 e $\text{MOD} - 1$.

Para lembrar as propriedades de aritmética modular, consulte a seção Teórico desse Almanaque.

Para usar o Mint, basta criar um tipo com o valor de MOD desejado. O valor de MOD deve ser um número inteiro positivo, podendo ser tanto do tipo `int` quanto `long long`.

```
1 using mint = Mint<7>;
2 // using mint = Mint<(1ll)1e18 + 9> para long long
3 mint a = 4, b = 3;
4 mint c = a * b; // c.v == 5
5 mint d = 1 / a; // d.v == 2, MOD deve ser primo para usar o operador de divisão
6 mint e = a * d // e.v == 1
7 a = a + 2; // a.v == 6
8 a = a + 3; // a.v == 2
9 a = a ^ 5; // a.v == 4
10 a = a - 6; // a.v == 5
```

Obs: para operador de divisão, o Mint usa o inverso multiplicativo de a baseado no Teorema de Euler (consulte o Teórico para mais detalhes), que é $a^{\text{MOD}-2}$, ou seja, para isso o MOD deve ser primo.

Codigo: mint.cpp

```
1 template <auto MOD, typename T = decltype(MOD)>
2 struct Mint {
3     using m = Mint<MOD, T>;
4     T v;
5     Mint(T val = 0) : v(val) {
6         if (v < 0) v += MOD;
7     }
8     bool operator==(m o) const { return v == o.v; }
9     bool operator!=(m o) const { return v != o.v; }
10    bool operator<(m o) const { return v < o.v; }
11    m pwr(m b, ll e) {
12        m res = 1;
13        while (e > 0) {
14            if (e & 1) res *= b;
15            b *= b, e >>= 1;
16        }
17        return res;
18    }
19    m &operator+=(m o) {
20        v -= MOD - o.v;
21        if (v < 0) v += MOD;
22        return *this;
23    }
24    m &operator-=(m o) {
25        v -= o.v;
26        if (v < 0) v += MOD;
27        return *this;
28    }
```

```

29 m &operator*=(m o) {
30     v = (T)((__int128)v * o.v % MOD);
31     return *this;
32 }
33 // se quiser otimizar constante, ao inves de (__int128) use (ll) se o T for 'int'
34 m &operator/=(m o) { return *this *= o.pwr(o, MOD - 2); }
35 m &operator^=(ll e) { return *this = pwr(*this, e); }
36 friend m operator-(m a, m b) { return a -= b; }
37 friend m operator+(m a, m b) { return a += b; }
38 friend m operator*(m a, m b) { return a *= b; }
39 friend m operator/(m a, m b) { return a /= b; }
40 friend m operator^(m a, ll e) { return a.pwr(a, e); }
41 };
42
43 const int MOD = 998244353;
44 using mint = Mint<MOD>;

```

8.2 Ponto 2D

Estrutura que representa um ponto no plano cartesiano em duas dimensões. Suporta operações de soma, subtração, multiplicação por escalar, produto escalar, produto vetorial e distância euclidiana. Pode ser usado também para representar um vetor.

Codigo: point2d.cpp

```

1 template <typename T>
2 struct point {
3     T x, y;
4     point(T _x = 0, T _y = 0) : x(_x), y(_y) { }
5
6     using p = point;
7
8     p operator*(const T o) { return p(o * x, o * y); }
9     p operator-(const p o) { return p(x - o.x, y - o.y); }
10    p operator+(const p o) { return p(x + o.x, y + o.y); }
11    T operator*(const p o) { return x * o.x + y * o.y; }
12    T operator^(const p o) { return x * o.y - y * o.x; }
13    bool operator<(const p o) const { return (x == o.x) ? y < o.y : x < o.x; }
14    bool operator==(const p o) const { return (x == o.x) and (y == o.y); }
15    bool operator!=(const p o) const { return (x != o.x) or (y != o.y); }
16

```

```

17    T dist2(const p o) {
18        T dx = x - o.x, dy = y - o.y;
19        return dx * dx + dy * dy;
20    }
21
22    friend ostream &operator<<(ostream &out, const p &a) {
23        return out << "(" << a.x << ", " << a.y << ")";
24    }
25    friend istream &operator>>(istream &in, p &a) { return in >> a.x >> a.y; }
26 };
27
28 using pt = point<ll>;

```

Capítulo 9

Geometria

9.1 Convex Hull

Algoritmo Graham's Scan para encontrar o fecho convexo de um conjunto de pontos em $\mathcal{O}(n \log n)$. Retorna os pontos do fecho convexo em sentido horário.

Definição: o fecho convexo de um conjunto de pontos é o menor polígono convexo que contém todos os pontos do conjunto.

Obs: utiliza a primitiva Ponto 2D.

Código: convex_hull.cpp

```
1 bool ccw(pt &p, pt &a, pt &b, bool include_collinear = 0) {
2     pt p1 = a - p;
3     pt p2 = b - p;
4     return include_collinear ? (p2 ^ p1) <= 0 : (p2 ^ p1) < 0;
5 }
6
7 void sort_by_angle(vector<pt> &v) { // sorta o vetor por angulo em relacao ao pivo
8     pt p0 = *min_element(begin(v), end(v));
9     sort(begin(v), end(v), [&](pt &l, pt &r) { // sorta clockwise
10         pt p1 = l - p0;
11         pt p2 = r - p0;
12         ll c1 = p1 ^ p2;
13         return c1 < 0 || ((c1 == 0) && p0.dist2(l) < p0.dist2(r));
14     });
15 }
16
```

```
17 vector<pt> convex_hull(vector<pt> v, bool include_collinear = 0) {
18     int n = size(v);
19
20     sort_by_angle(v);
21
22     if (include_collinear) {
23         for (int i = n - 2; i >= 0; i--) { // reverte o ultimo lado do poligono
24             if (ccw(v[0], v[n - 1], v[i])) {
25                 reverse(begin(v) + i + 1, end(v));
26                 break;
27             }
28         }
29     }
30
31     vector<pt> ch{v[0], v[1]};
32     for (int i = 2; i < n; i++) {
33         while (ch.size() > 2 &&
34             (ccw(ch.end()[-2], ch.end()[-1], v[i], !include_collinear)))
35             ch.pop_back();
36         ch.emplace_back(v[i]);
37     }
38
39     return ch;
40 }
```

Capítulo 10

Matemática

10.1 Convolução

10.1.1 AND Convolution

Calcula o vetor C a partir de A e B onde $C[i] = \sum_{(j \wedge k) = i} A[j] \cdot B[k]$ em $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$.

Obs: \wedge representa o bitwise and.

Código: and_convolution.cpp

```
1 vector<mint> and_convolution(vector<mint> A, vector<mint> B) {
2     int n = (int)max(A.size(), B.size());
3     int N = 0, two = 1;
4     while (two < n) two <= 1, N++;
5     A.resize(1 << N);
6     B.resize(1 << N);
7     vector<mint> C(1 << N);
8     for (int j = 0; j < N; j++) {
9         for (int i = (1 << N) - 1; i >= 0; i--) {
10             if (~i >> j & 1) {
11                 A[i] += A[i | (1 << j)];
12                 B[i] += B[i | (1 << j)];
13             }
14         }
15     }
16     for (int i = 0; i < 1 << N; i++) C[i] = A[i] * B[i];
17     for (int j = 0; j < N; j++) {
18         for (int i = 0; i < 1 << N; i++)
```

```
19         if (~i >> j & 1) C[i] -= C[i | (1 << j)];
20     }
21     return C;
22 }
```

10.1.2 GCD Convolution

Calcula o vetor C a partir de A e B onde $C[i] = \sum_{gcd(j,k)=i} A[j] \cdot B[k]$ em $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$.

Código: gcd_convolution.cpp

```
1 vector<mint> gcd_convolution(vector<mint> A, vector<mint> B) {
2     int N = (int)max(A.size(), B.size());
3     A.resize(N + 1);
4     B.resize(N + 1);
5     vector<mint> C(N + 1);
6     for (int i = 1; i <= N; i++) {
7         mint a = 0;
8         mint b = 0;
9         for (int j = i; j <= N; j += i) {
10             a += A[j];
11             b += B[j];
12         }
13         C[i] = a * b;
14     }
15     for (int i = N; i >= 1; i--)
```



```

16     for (int j = 2 * i; j <= N; j += i) C[i] -= C[j];
17     return C;
18 }

```

10.1.3 LCM Convolution

Calcula o vetor C a partir de A e B $C[i] = \sum_{lcm(j,k)=i} A[j] \cdot B[k]$ em $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$.

Código: lcm_convolution.cpp

```

1 vector<mint> lcm_convolution(vector<mint> A, vector<mint> B) {
2     int N = (int)max(A.size(), B.size());
3     A.resize(N + 1);
4     B.resize(N + 1);
5     vector<mint> C(N + 1), a(N + 1), b(N + 1);
6     for (int i = 1; i <= N; i++) {
7         for (int j = i; j <= N; j += i) {
8             a[j] += A[i];
9             b[j] += B[i];
10        }
11        C[i] = a[i] * b[i];
12    }
13    for (int i = 1; i <= N; i++)
14        for (int j = 2 * i; j <= N; j += i) C[j] -= C[i];
15    return C;
16 }

```

10.1.4 OR Convolution

Calcula o vetor C a partir de A e B tal que $C[i] = \sum_{(j||k)=i} A[j] \cdot B[k]$ em $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$

Código: or_convolution.cpp

```

1 vector<mint> or_convolution(vector<mint> A, vector<mint> B) {
2     int n = (int)max(A.size(), B.size());
3     int N = 0, two = 1;
4     while (two < n) two <= 1, N++;
5     A.resize(1 << N);

```

```

6     B.resize(1 << N);
7     vector<mint> C(1 << N);
8     for (int j = 0; j < N; j++) {
9         for (int i = 0; i < 1 << N; i++) {
10            if (i >> j & 1) {
11                A[i] += A[i ^ (1 << j)];
12                B[i] += B[i ^ (1 << j)];
13            }
14        }
15    }
16    for (int i = 0; i < 1 << N; i++) C[i] = A[i] * B[i];
17    for (int j = N - 1; j >= 0; j--) {
18        for (int i = (1 << N) - 1; i >= 0; i--)
19            if (i >> j & 1) C[i] -= C[i ^ (1 << j)];
20    }
21    return C;
22 }

```

10.2 Eliminação Gaussiana

10.2.1 Gauss

Método de eliminação gaussiana para resolução de sistemas lineares com coeficientes reais, a complexidade é $\mathcal{O}(n^3)$.

A função **gauss** recebe como parâmetros:

- **vector<vector<double>>** **a**: uma matriz $N \times (M+1)$, onde N é o número de equações e M é o número de variáveis, a última coluna de **a** deve conter o resultado das equações.
- **vector<double>** **&ans**: um vetor de tamanho M , que será preenchido com a solução do sistema, caso exista.

A função retorna:

- 0: se o sistema não tem solução.
- 1: se o sistema tem uma única solução.
- INF: se o sistema tem infinitas soluções. Nesse caso, as variáveis em que **where[i] == -1** são as variáveis livres.

Código: gauss.cpp

```

1  const double EPS = 1e-9;
2  const int INF = 2; // nao tem que ser infinito ou um numero grande
3                      // so serve para indicar que tem infinitas solucoes
4
5  int gauss(vector<vector<double>> a, vector<double> &ans) {
6      int n = (int)a.size();
7      int m = (int)a[0].size() - 1;
8
9      vector<int> where(m, -1);
10     for (int col = 0, row = 0; col < m && row < n; col++) {
11         int sel = row;
12         for (int i = row; i < n; i++)
13             if (abs(a[i][col]) > abs(a[sel][col])) sel = i;
14         if (abs(a[sel][col]) < EPS) continue;
15         for (int i = col; i <= m; i++) swap(a[sel][i], a[row][i]);
16         where[col] = row;
17
18         for (int i = 0; i < n; i++) {
19             if (i != row) {
20                 double c = a[i][col] / a[row][col];
21                 for (int j = col; j <= m; j++) a[i][j] -= a[row][j] * c;
22             }
23         }
24         row++;
25     }
26
27     ans.assign(m, 0);
28     for (int i = 0; i < m; i++)
29         if (where[i] != -1) ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
30     for (int i = 0; i < n; i++) {
31         double sum = 0;
32         for (int j = 0; j < m; j++) sum += ans[j] * a[i][j];
33         if (abs(sum - a[i][m]) > EPS) return 0;
34     }
35
36     for (int i = 0; i < m; i++)
37         if (where[i] == -1) return INF;
38     return 1;
39 }

```

10.2.2 Gauss Mod 2

Método de eliminação gaussiana para resolução de sistemas lineares com coeficientes em \mathbb{Z}_2 (inteiros módulo 2), a complexidade é $\mathcal{O}(n^3/\sqcup)$, onde \sqcup é a palavra do processador (geralmente 32 ou 64 bits, dependendo da arquitetura).

No código, a constante M deve ser definida como o (número de variáveis + 1).

A função `gauss` recebe como parâmetros:

- `vector<bitset<M>> a`: um vector de bitsets, representando as equações do sistema. Cada bitset tem tamanho M , onde o bit j do bitset i representa o coeficiente da variável j na equação i . A última posição do bitset i representa o resultado da equação i .
- n e m : inteiros representando o número de equações e variáveis, respectivamente.
- `bitset<M> &ans`: um bitset de tamanho M , que será preenchido com a solução do sistema, caso exista.

A função retorna:

- 0: se o sistema não tem solução.
- 1: se o sistema tem uma única solução.
- INF: se o sistema tem infinitas soluções. Nesse caso, as variáveis em que `where[i] == -1` são as variáveis livres. Note que, pela natureza de \mathbb{Z}_2 , o sistema não terá de fato infinitas soluções, mas sim 2^L soluções, onde L é o número de variáveis livres.

Código: gauss_mod2.cpp

```

1  const int M = 105;
2  const int INF = 2; // nao tem que ser infinito ou um numero grande
3                      // so serve para indicar que tem infinitas solucoes
4
5  int gauss(vector<bitset<M>> a, int n, int m, bitset<M> &ans) {
6      vector<int> where(m, -1);
7
8      for (int col = 0, row = 0; col < m && row < n; col++) {
9          for (int i = row; i < n; i++) {
10             if (a[i][col]) {
11                 swap(a[i], a[row]);

```

```

12         break;
13     }
14 }
15 if (!a[row][col]) continue;
16 where[col] = row;
17
18 for (int i = 0; i < n; i++)
19     if (i != row && a[i][col]) a[i] ^= a[row];
20 row++;
21 }
22
23 ans.reset();
24 for (int i = 0; i < m; i++)
25     if (where[i] != -1) ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
26 for (int i = 0; i < n; i++) {
27     int sum = 0;
28     for (int j = 0; j < m; j++) sum += ans[j] * a[i][j];
29     if (abs(sum - a[i][m]) > 0) return 0; // Sem solucao
30 }
31
32 for (int i = 0; i < m; i++)
33     if (where[i] == -1) return INF; // Infinitas solucoes
34 // Unica solucao (retornada no bitset ans)
35 return 1;
36 }

```

10.3 Exponenciação Modular Rápida

Computa $(\text{base}^{\text{exp}}) \bmod MOD$ em $\mathcal{O}(\log(\text{exp}))$.

Codigo: exp_mod.cpp

```

1 ll exp_mod(ll base, ll exp) {
2     ll b = base, res = 1;
3     while (exp) {
4         if (exp & 1) res = (res * b) % MOD;
5         b = (b * b) % MOD;
6         exp /= 2;
7     }
8     return res;
9 }

```

10.4 FFT

Algoritmo que computa a Transformada Rápida de Fourier para convolução de polinômios.

Computa convolução (multiplicação) de polinômios em $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$, sendo N a soma dos graus dos polinômios.

Testado e sem erros de precisão com polinômios de grau até $3 \cdot 10^5$ e constantes até 10^6 . Para convolução de inteiros sem erro de precisão, consultar a seção de NTT.

Codigo: fft.cpp

```

1 struct base {
2     double a, b;
3     base(double _a = 0, double _b = 0) : a(_a), b(_b) { }
4     const base operator+(const base &c) const { return base(a + c.a, b + c.b); }
5     const base operator-(const base &c) const { return base(a - c.a, b - c.b); }
6     const base operator*(const base &c) const {
7         return base(a * c.a - b * c.b, a * c.b + b * c.a);
8     }
9 };
10
11 using poly = vector<base>;
12 const double PI = acos(-1);
13
14 void fft(poly &a, bool inv = 0) {
15     int n = (int)a.size();
16
17     for (int i = 0; i < n; i++) {
18         int bit = n >> 1, j = 0, k = i;
19         while (bit > 0) {
20             if (k & 1) j += bit;
21             k >>= 1, bit >>= 1;
22         }
23         if (i < j) swap(a[i], a[j]);
24     }
25
26     double angle = 2 * PI / n * (inv ? -1 : 1);
27     poly wn(n / 2);
28     for (int i = 0; i < n / 2; i++) wn[i] = {cos(angle * i), sin(angle * i)};
29
30     for (int len = 2; len <= n; len <= 1) {
31         int aux = len / 2;

```

```

32     int step = n / len;
33     for (int i = 0; i < n; i += len) {
34         for (int j = 0; j < aux; j++) {
35             base v = a[i + j + aux] * wn[step * j];
36             a[i + j + aux] = a[i + j] - v;
37             a[i + j] = a[i + j] + v;
38         }
39     }
40 }
41
42 for (int i = 0; inv && i < n; i++) a[i].a /= n, a[i].b /= n;
43 }
44
45 vector<ll> multiply(vector<ll> &ta, vector<ll> &tb) {
46     int n = (int)ta.size(), m = (int)tb.size();
47     int t = n + m - 1, sz = 1;
48     while (sz < t) sz <= 1;
49
50     poly a(sz), b(sz), c(sz);
51
52     for (int i = 0; i < sz; i++) {
53         a[i] = i < n ? base((double)ta[i]) : base(0);
54         b[i] = i < m ? base((double)tb[i]) : base(0);
55     }
56
57     fft(a, 0), fft(b, 0);
58     for (int i = 0; i < sz; i++) c[i] = a[i] * b[i];
59     fft(c, 1);
60
61     vector<ll> res(sz);
62     for (int i = 0; i < sz; i++) res[i] = ll(round(c[i].a));
63
64     while ((int)res.size() > t && res.back() == 0) res.pop_back();
65
66     return res;
67 }

```

10.5 Fatoração e Primos

10.5.1 Crivo

Crivo

Crivo de Eratóstenes para encontrar os primos até um limite P . O `vector<bool>` `is_prime` é um vetor que diz se um número é primo ou não. A complexidade é $\mathcal{O}(P \log(\log P))$.

Obs: Para aplicações mais complexas ou pra fatorar um número, consulte o Crivo Linear.

Obs: Não esquecer de chamar `Sieve::build()` antes de usar.

Codigo: sieve.cpp

```

1 namespace Sieve {
2     const int P = 5e6 + 1;
3     vector<bool> is_prime(P, true);
4     void build() {
5         is_prime[0] = is_prime[1] = 0;
6         for (int i = 2; i < P; i++) {
7             if (is_prime[i])
8                 for (int j = i + i; j < P; j += i) is_prime[j] = 0;
9         }
10    }
11 }

```

Crivo Linear

Crivo de Eratóstenes para encontrar os primos até um limite P , mas com complexidade $\mathcal{O}(P)$.

- `vector<bool> is_prime` é um vetor que diz se um número é primo ou não.
- `int cnt` é o número de primos encontrados.
- `int primes[P]` é um vetor com `cnt` os primos encontrados.
- `int lpf[P]` é o menor fator primo de cada número (usado para fatoração).

A função `Sieve::factorize()` fatora um número N em tempo $\mathcal{O}(\log N)$.

Obs: Não esquecer de chamar `Sieve::build()` antes de usar.

Código: `linear_sieve.cpp`

```
1 namespace Sieve {
2     const int P = 5e6 + 1;
3     vector<bool> is_prime(P, true);
4     int lpf[P], primes[P], cnt = 0;
5     void build() {
6         is_prime[0] = is_prime[1] = 0;
7         for (int i = 2; i < P; i++) {
8             if (is_prime[i]) {
9                 lpf[i] = i;
10                primes[cnt++] = i;
11            }
12            for (int j = 0; j < cnt && i * primes[j] < P; j++) {
13                is_prime[i * primes[j]] = 0;
14                lpf[i * primes[j]] = primes[j];
15                if (i % primes[j] == 0) break;
16            }
17        }
18    }
19    vector<int> factorize(int n) {
20        #warning lembra de chamar o build() antes de fatorar!
21        vector<int> f;
22        while (n > 1) {
23            f.push_back(lpf[n]);
24            n /= lpf[n];
25        }
26        return f;
27    }
28 }
```

10.5.2 Divisores

Divisores Naive

Algoritmo que obtém todos os divisores de um número X em $\mathcal{O}(\sqrt{X})$. Muito similar ao algoritmo naive de fatoração.

Código: `get_divs_naive.cpp`

```
1 vector<int> get_divs(int n) {
2     vector<int> divs;
3     for (int d = 1; d * d <= n; d++) {
4         if (n % d == 0) {
5             divs.push_back(d);
6             if (d * d != n) divs.push_back(n / d);
7         }
8     }
9     sort(divs.begin(), divs.end());
10    return divs;
11 }
```

Divisores Rápido

Algoritmo que obtém todos os divisores de um número em $\mathcal{O}(d(X))$, onde $d(X)$ é a quantidade de divisores do número. Geralmente, para um número X , dizemos que a quantidade de divisores é $\mathcal{O}(\sqrt[3]{X})$.

De fato, para números até 10^{88} , é verdade que $d(n) < 3.6 \cdot \sqrt[3]{n}$.

Obs: Usar algum código de fatoração presente nesse almanaque para obter os fatores do número.

- Crivo/Crivo-Linear/`linear_sieve.cpp` tem uma função de fatoração em $\mathcal{O}(\log X)$.
- Fatores/Fatoração-Rápida/`fast_factorize.cpp` tem uma função de fatoração em tempo médio $\mathcal{O}(\log X)$ que aceita até inteiros de 64 bits.

Código: `get_divs.cpp`

```
1 vector<ll> get_divs(ll n) {
2     vector<ll> divs;
3     auto f = factorize(n); // qualquer código que fatore n
4     sort(f.begin(), f.end());
5     vector<pair<ll, int>> v;
6     for (auto x : f)
7         if (v.empty() || v.back().first != x) v.emplace_back(x, 1);
8         else v.back().second += 1;
9     function<void(int, ll)> dfs = [&](int i, ll cur) {
10         if (i == (int)v.size()) {
```

```

11     divs.push_back(cur);
12     return;
13 }
14 ll p = 1;
15 for (int j = 0; j <= v[i].second; j++) {
16     dfs(i + 1, cur * p);
17     p *= v[i].first;
18 }
19 };
20 dfs(0, 1);
21 sort(divs.begin(), divs.end());
22 return divs;
23 }

```

10.5.3 Fatores

Fatoração Naive

Fatoração de um número. A função `factorize(X)` retorna os fatores primos de X em ordem crescente. A complexidade do algoritmo é $\mathcal{O}(\sqrt{X})$.

Código: `naive_factorize.cpp`

```

1 vector<int> factorize(int n) {
2     vector<int> factors;
3     for (int d = 2; d * d <= n; d++) {
4         while (n % d == 0) {
5             factors.push_back(d);
6             n /= d;
7         }
8     }
9     if (n != 1) factors.push_back(n);
10    return factors;
11 }

```

Fatoração Rápida

Algoritmo que combina o Crivo de Eratóstenes Linear, Miller-Rabin e Pollard Rho para fatorar um número X em tempo médio $\mathcal{O}(\log X)$, no pior caso pode ser $\mathcal{O}(\sqrt[4]{X} \cdot \log X)$, mas na prática é seguro considerar $\mathcal{O}(\log X)$.

Esse código deve ser usado quando se deseja fatorar números $> 10^7$, por exemplo. Caso os números não sejam tão grandes assim, usar apenas o Crivo de Eratóstenes Linear sozinho é mais prático.

Obs: Usa três outros códigos desse Almanaque da seção Matemática:

- Crivo/Crivo-Linear/`linear_sieve.cpp`
- Teste-Primalidade/Miller-Rabin/`miller_rabin.cpp`
- Pollard-Rho/`pollard_rho.cpp`.

Código: `fast_factorize.cpp`

```

1 vector<ll> factorize(ll x) {
2     vector<ll> f;
3     if (x == 1) return f;
4     function<void(ll)> dfs = [&](ll x) {
5         if (x == 1) return;
6         if (x < Sieve::P) {
7             auto fs = Sieve::factorize(x);
8             f.insert(f.end(), fs.begin(), fs.end());
9         } else if (MillerRabin::prime(x)) {
10            f.push_back(x);
11        } else {
12            ll d = PollardRho::rho(x);
13            dfs(d);
14            dfs(x / d);
15        }
16    };
17    dfs(x);
18    sort(f.begin(), f.end());
19    return f;
20 }

```

10.5.4 Pollard Rho

Algoritmo de Pollard Rho. A função `PollardRho::rho(X)` retorna um fator não trivial de X . Um fator não trivial é um fator que não é 1 nem X . A complexidade esperada do algoritmo no pior caso é $\mathcal{O}(\sqrt[4]{X})$ (geralmente é mais rápido que isso).

Obs: cuidado para não passar um número primo ou o número 1 para a função `rho`, o comportamento é indefinido (provavelmente entra em loop e não retorna nunca).

Código: `pollard_rho.cpp`

```
1 namespace PollardRho {
2     mt19937 rng((uint32_t)chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
3     const ll P = 1e6 + 1;
4     ll seq[P];
5     inline ll add_mod(ll x, ll y, ll m) { return (x += y) < m ? x : x - m; }
6     inline ll mul_mod(ll a, ll b, ll m) { return (ll)((__int128)a * b % m); }
7     ll rho(ll n) {
8         if (n % 2 == 0) return 2;
9         if (n % 3 == 0) return 3;
10        ll x0 = rng() % n, c = rng() % n;
11        while (1) {
12            ll x = x0++, y = x, u = 1, v, t = 0;
13            ll *px = seq, *py = seq;
14            while (1) {
15                *py++ = y = add_mod(mul_mod(y, y, n), c, n);
16                *py++ = y = add_mod(mul_mod(y, y, n), c, n);
17                if ((x = *px++) == y) break;
18                v = u;
19                u = mul_mod(u, abs(y - x), n);
20                if (!u) return gcd(v, n);
21                if (++t == 32) {
22                    t = 0;
23                    if ((u = gcd(u, n)) > 1 && u < n) return u;
24                }
25            }
26            if (t && (u = gcd(u, n)) > 1 && u < n) return u;
27        }
28    }
29 }
```

10.5.5 Teste Primalidade

Miller Rabin

Teste de primalidade Miller-Rabin. A função `MillerRabin::prime(X)` retorna verdadeiro se X é primo e falso caso contrário. O teste é determinístico para números

até 2^{64} . A complexidade do algoritmo é $\mathcal{O}(\log X)$, considerando multiplicação e exponenciação constantes.

Para números até 2^{32} , é suficiente usar `primes[] = 2, 3, 5, 7`.

Código: `miller_rabin.cpp`

```
1 namespace MillerRabin {
2     inline ll mul_mod(ll a, ll b, ll m) { return (ll)((__int128)a * b % m); }
3     inline ll power(ll b, ll e, ll m) {
4         ll r = 1;
5         b = b % m;
6         while (e > 0) {
7             if (e & 1) r = mul_mod(r, b, m);
8             b = mul_mod(b, b, m), e >>= 1;
9         }
10        return r;
11    }
12    inline bool composite(ll n, ll a, ll d, ll s) {
13        ll x = power(a, d, n);
14        if (x == 1 || x == n - 1 || a % n == 0) return false;
15        for (int r = 1; r < s; r++) {
16            x = mul_mod(x, x, n);
17            if (x == n - 1) return false;
18        }
19        return true;
20    }
21
22    // com esses "primos", o teste funciona garantido para n <= 2^64
23    int primes[] = {2, 325, 9375, 28178, 450775, 9780504, 1795265022};
24
25    // funciona para n <= 3*10^24 com os primos ate 41, mas tem que cuidar com overflow
26    // int primes[] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41};
27
28    bool prime(ll n) {
29        if (n <= 2 || (n % 2 == 0)) return n == 2;
30        ll d = n - 1, r = 0;
31        while (d % 2 == 0) d /= 2, r++;
32        for (int a : primes)
33            if (composite(n, a, d, r)) return false;
34        return true;
35    }
36 }
```

Teste Primalidade Naive

Teste de primalidade "ingênuo". A função `is_prime(X)` retorna verdadeiro se X é primo e falso caso contrário. A complexidade do algoritmo é $\mathcal{O}(\sqrt{X})$.

Código: `naive_is_prime.cpp`

```
1 bool is_prime(int n) {
2     for (int d = 2; d * d <= n; d++)
3         if (n % d == 0) return false;
4     return true;
5 }
```

10.6 Floor Values

Código para encontrar todos os $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ valores distintos de $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Útil para computar, dentre outras coisas, os seguintes somatórios:

- Somatório de $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ para $i = 1, 2, \dots, n$.
- Somatório de $\sigma(i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, onde $\sigma(i)$ é a soma dos divisores de i .

- Usa o fato de que um número i é divisor de exatamente $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ números entre 1 e n .

Código: `floor_values.cpp`

```
1 void floor_values(ll n) {
2     ll j = 1;
3     while (j <= n) {
4         ll floor_now = n / j;
5         ll last_j = n / floor_now;
6         // j -> primeiro inteiro que tem floor_now como floor
7         // last_j -> ultimo inteiro que tem floor_now como floor
8
9         // faz algo
10
11         j = last_j + 1;
12     }
13 }
```

10.7 GCD

Algoritmo Euclides para computar o Máximo Divisor Comum (MDC em português; GCD em inglês), e variações.

Read in [English](README.en.md)

Algoritmo de Euclides

Computa o Máximo Divisor Comum (MDC em português; GCD em inglês).

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(\log n)$

Mais demorado que usar a função do compilador C++ `__gcd(a,b)`.

Algoritmo de Euclides Estendido

Algoritmo estendido de euclides que computa o Máximo Divisor Comum e os valores x e y tal que $a * x + b * y = \gcd(a, b)$.

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(\log n)$

Código: `gcd.cpp`

```
1 long long gcd(long long a, long long b) { return (b == 0) ? a : gcd(b, a % b); }
```

Código: `extended_gcd.cpp`

```
1 int extended_gcd(int a, int b, int &x, int &y) {
2     x = 1, y = 0;
3     int x1 = 0, y1 = 1;
4     while (b) {
5         int q = a / b;
6         tie(x, x1) = make_tuple(x1, x - q * x1);
7         tie(y, y1) = make_tuple(y1, y - q * y1);
8         tie(a, b) = make_tuple(b, a - q * b);
9     }
10    return a;
11 }
```


10.8. INVERSO MODULAR

Codigo: extended_gcd_recursive.cpp

```

1 ll extended_gcd(ll a, ll b, ll &x, ll &y) {
2     if (b == 0) {
3         x = 1;
4         y = 0;
5         return a;
6     } else {
7         ll g = extended_gcd(b, a % b, y, x);
8         y -= a / b * x;
9         return g;
10    }
11 }
```

10.8 Inverso Modular

Algoritmos para calcular o inverso modular de um número. O inverso modular de um inteiro a é outro inteiro x tal que $a \cdot x \equiv 1 \pmod{MOD}$

O inverso modular de um inteiro a é outro inteiro x tal que $a * x$ é congruente a 1 mod MOD .

Inverso Modular

Calcula o inverso modular de a .

Utiliza o algoritmo Exp Mod, portanto, espera-se que MOD seja um número primo.

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(\log(MOD))$.

* Complexidade de espaço: $\mathcal{O}(1)$.

Inverso Modular por MDC Estendido

Calcula o inverso modular de a .

Utiliza o algoritmo Euclides Estendido, portanto, espera-se que MOD seja coprimo com a .

Retorna -1 se essa suposição for quebrada.

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(\log(MOD))$.

* Complexidade de espaço: $\mathcal{O}(1)$.

Inverso Modular para 1 até MAX

Calcula o inverso modular para todos os números entre 1 e MAX .

Espera-se que MOD seja primo.

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(MAX)$.

* Complexidade de espaço: $\mathcal{O}(MAX)$.

Inverso Modular para todas as potências

Seja b um número inteiro qualquer.

Calcula o inverso modular para todas as potências de b entre b^0 e b^MAX .

É necessário calcular antecipadamente o inverso modular de b , para 2 é sempre $(MOD + 1)/2$.

Espera-se que MOD seja coprimo com b .

* Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(MAX)$.

* Complexidade de espaço: $\mathcal{O}(MAX)$.

Codigo: modular_inverse_linear.cpp

```

1 ll inv[MAX];
2
3 void compute_inv(const ll m = MOD) {
4     inv[1] = 1;
5     for (int i = 2; i < MAX; i++) inv[i] = m - (m / i) * inv[m % i] % m;
6 }
```

Codigo: modular_inverse_pow.cpp

```

1 const ll INVB = (MOD + 1) / 2; // Modular inverse of the base,
2                               // for 2 it is (MOD+1)/2
3
4 ll inv[MAX]; // Modular inverse of b^i
5
6 void compute_inv() {
7     inv[0] = 1;
8     for (int i = 1; i < MAX; i++) inv[i] = inv[i - 1] * INVB % MOD;
9 }
```

Codigo: modular_inverse.cpp

```
1 ll inv(ll a) { return exp_mod(a, MOD - 2); }
```

Código: modular_inverse_coprime.cpp

```
1 int inv(int a) {
2     int x, y;
3     int g = extended_gcd(a, MOD, x, y);
4     if (g == 1) return (x % m + m) % m;
5     return -1;
6 }
```

10.9 NTT

10.9.1 NTT

Computa a multiplicação de polinômios com coeficientes inteiros módulo um número primo em $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$. Exatamente o mesmo algoritmo da FFT, mas com inteiros.

Esse código está com módulo 998.244.353 ($119 \cdot 2^{23} + 1$) e aceita polinômios de tamanho até $2^{23} = 8.388.608 \approx 8 \times 10^6$.

Para se alterar o módulo ou o tamanho máximo do polinômio, basta alterar as constantes MOD, len_ntt e encontrar uma raiz da unidade de ordem len_ntt módulo MOD (onde len_ntt é uma potência de 2 e o tamanho máximo do polinômio), no código, essa raiz é a variável root_ntt.

Formalmente, uma raiz da unidade de ordem n módulo p é um inteiro g tal que $g^n \equiv 1 \pmod{p}$ e $g^k \not\equiv 1 \pmod{p}$ para todo k tal que $0 < k < n$.

Algumas raízes conhecidas para alguns módulos e alguns tamanhos máximos de polinômios:

Módulo	Len	Raiz da Unidade
998.244.353	2^{23}	102.292
1.004.535.809	2^{21}	4.172
1.092.616.193	2^{21}	155

| 9.223.372.036.737.335.297 | 2^{24} | 2.419.180.138.865.645.092 |

Essa última raiz para esse módulo enorme está melhor descrita na seção NTT Big Mod.

Obs: Essa implementação usa a primitiva Mint desse Almanaque. Se você não quiser usar o Mint, basta substituir todas as ocorrências de Mint por int ou long long e tratar adequadamente as operações com aritmética modular.

Código: ntt.cpp

```
1 const int MOD = 998244353;
2 const int root_ntt = 102292;
3 const int len_ntt = 1 << 23;
4
5 using mint = Mint<MOD>;
6 using poly = vector<mint>;
7
8 void ntt(poly &a, bool inv = 0) {
9     int n = (int)a.size();
10
11     for (int i = 0; i < n; i++) {
12         int bit = n >> 1, j = 0, k = i;
13         while (bit > 0) {
14             if (k & 1) j += bit;
15             k >>= 1, bit >>= 1;
16         }
17         if (i < j) swap(a[i], a[j]);
18     }
19
20     poly wn(n / 2);
21     mint root = root_ntt; // change according to MOD
22     int root_len = len_ntt; // change according to MOD
23
24     while (root_len > n) {
25         root *= root;
26         root_len >>= 1;
27     }
28
29     if (inv) root = mint(1) / root;
30
31     for (int i = 0; i < n / 2; i++) wn[i] = (i == 0) ? 1 : wn[i - 1] * root;
32
33     for (int len = 2; len <= n; len <= 1) {
34         int aux = len / 2;
35         int step = n / len;
36         for (int i = 0; i < n; i += len) {
37             for (int j = 0; j < aux; j++) {
```

```

38         mint v = a[i + j + aux] * wn[step * j];
39         a[i + j + aux] = a[i + j] - v;
40         a[i + j] = a[i + j] + v;
41     }
42 }
43 }
44 if (inv) {
45     mint invn = mint(1) / n;
46     for (int i = 0; i < n; i++) a[i] *= invn;
47 }
48 }
49
50 vector<int> multiply(vector<int> &ta, vector<int> &tb) {
51     int n = (int)ta.size(), m = (int)tb.size();
52     int t = n + m - 1, sz = 1;
53     while (sz < t) sz <= 1;
54
55     poly a(sz), b(sz), c(sz);
56
57     for (int i = 0; i < sz; i++) {
58         a[i].v = i < n ? ta[i] : 0;
59         b[i].v = i < m ? tb[i] : 0;
60     }
61
62     ntt(a, 0), ntt(b, 0);
63     for (int i = 0; i < sz; i++) c[i] = a[i] * b[i];
64     ntt(c, 1);
65
66     vector<int> res(sz);
67     for (int i = 0; i < sz; i++) res[i] = c[i].v;
68
69     while ((int)res.size() > t && res.back() == 0) res.pop_back();
70
71     return res;
72 }

```

10.9.2 NTT Big Mod

Computa a multiplicação de polinômios com coeficientes inteiros módulo um número primo em $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$. Esse código usa do mesmo código da NTT padrão, com alguns ajustes especificados nos comentários do código.

Esse código está com módulo $9.223.372.036.737.335.297 \cdot 2^{24} + 1$ e

aceita polinômios de tamanho até $2^{24} = 16.777.216 \approx 1.7 \times 10^7$.

Obs: Essa implementação usa a primitiva `Mint` desse Almanaque. Se você não quiser usar o `Mint`, basta substituir todas as ocorrências de `Mint` por `int` ou `long long` e tratar adequadamente as operações com aritmética modular.

Código: `big_ntt.cpp`

```

1 const ll BIG_MOD = 9223372036737335297LL; // 549755813881 * 2^24 + 1
2 ll root_ntt = 2419180138865645092LL; // essa constante pode ser calculada
3                                     // fazendo 3 ^ ((MOD - 1) / (1 << 24))
4 int len_ntt = 1 << 24;
5
6 using mint = Mint<BIG_MOD>;
7
8 using poly = vector<mint>;
9
10 void big_ntt(poly &a, bool inv = 0) {
11     // exatamente o mesmo código da ntt
12 }
13
14 vector<ll> big_multiply(vector<ll> &ta, vector<ll> &tb) {
15     // exatamente o mesmo código da multiply, porem usando vector<ll> ao inves de
16     // vector<int> e chamando big_ntt ao inves de ntt
17     // ...
18     vector<ll> res(sz); // lembrando, usar vector<ll> ao inves de vector<int>
19     // ...
20     return res;
21 }

```

10.10 Teorema do Resto Chinês

Algoritmo que resolve o sistema $x \equiv a_i \pmod{m_i}$, onde m_i são primos entre si.

Retorna -1 se a resposta não existir.

Código: `crt.cpp`

```

1 ll extended_gcd(ll a, ll b, ll &x, ll &y) {
2     if (b == 0) {
3         x = 1;
4         y = 0;

```

10.11. TOTIENTE DE EULER

```

5     return a;
6 } else {
7     ll g = extended_gcd(b, a % b, y, x);
8     y -= a / b * x;
9     return g;
10 }
11 }
12
13 ll crt(vector<ll> rem, vector<ll> mod) {
14     int n = rem.size();
15     if (n == 0) return 0;
16     __int128 ans = rem[0], m = mod[0];
17     for (int i = 1; i < n; i++) {
18         ll x, y;
19         ll g = extended_gcd(mod[i], m, x, y);
20         if ((ans - rem[i]) % g != 0) return -1;
21         ans = ans + (__int128)1 * (rem[i] - ans) * (m / g) * y;
22         m = (__int128)(mod[i] / g) * (m / g) * g;
23         ans = (ans % m + m) % m;
24     }
25     return ans;
26 }

```

10.11 Totiente de Euler

Código para computar a função Totiente de Euler, que conta quantos números inteiros positivos menores que N são coprimos com N . A função é denotada por $\phi(N)$.

É possível computar o totiente de Euler para um único número em $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ e para todos os números entre 1 e N em $\mathcal{O}(N \cdot \log(\log N))$.

Codigo: phi_1_to_n.cpp

```

1 vector<int> phi_1_to_n(int n) {
2     vector<int> phi(n + 1);
3     for (int i = 0; i <= n; i++) phi[i] = i;
4     for (int i = 2; i <= n; i++) {
5         if (phi[i] == i)
6             for (int j = i; j <= n; j += i) phi[j] -= phi[j] / i;
7     }
8     return phi;

```

```

9 }

```

Codigo: phi.cpp

```

1 int phi(int n) {
2     int result = n;
3     for (int i = 2; i * i <= n; i++) {
4         if (n % i == 0) {
5             while (n % i == 0) n /= i;
6             result -= result / i;
7         }
8     }
9     if (n > 1) result -= result / n;
10    return result;
11 }

```