Résumé - Explications Analyse I

Olivier Cloux

February 11, 2018

Contents

1 Règles utiles

1.1 La Trigo c'est Rigolo

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$
- $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

1.2 Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

1.3 Nombres complexes

- Forme cartésienne : $z = a + bi$
- complexe conjugué : $\overline{z} = a - bi$
- Parties
  - Réelle : $\Re(z) = a = \frac{z+\overline{z}}{2}$
  - Imaginaire : $\Im(z) = b = \frac{z-\overline{z}}{2}$
- module $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- valeur absolue : $|e^z| = |e^{a+bi}| = e^{\Re(z)}a = e^a$
- formule d'Euler/Moivre ($\varphi(= \theta)$ = argument
  - Euler : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)(= cis(\theta))$
    avec : $\cos(\theta) = \Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$
  - Moivre : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- Forme polaire : $z = |z|e^{i\theta} = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta} = \sqrt{a^2+b^2}cis(\theta$

0	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
	sin	cos

- Racines : $z^n = w = |w|e^{i(\theta+2k\pi)}$
  Les solutions de cette équations se trouvent en remplaçant k par $0, 1, 2, ...n-1$ dans
  $z_{k+1} = |w|^{\frac{1}{2}}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$

2 Ensembles

2.1 Définitions

- **minorant** Tous les éléments plus petits ou égaux au plus petit élément de l'ensemble.
  Les minorants de $[3, 5[$ = minorants de $]3, 5[= \{x : x \leq 3\} =]-\infty, 3]$

- **majorant** Pareil que le minorant, mais inversé. Les éléments qui sont plus grand ou égaux au plus grand élément de l'ensemble.
- **minoré/majoré** L'ensemble contient un minorant/majorant. Il est alors borné inférieurement/supérieurement.
- **infimum** Le plus grand des minorants. Peut être dans ou hors de l'ensemble.
  $\inf([3,5]) = \inf(]3,5]) = 3$
- **supremum** Pareil, le plus petit des minorants.
- **minimum** Le plus grand des minorants contenu dans l'ensemble.
  $\min(]3,5]) = \emptyset, \min([3,5]) = 3$
- **maximum** Pareil que minimum
- Points relatifs à un ensemble $E \subset \mathbb{R}$
  - **Point intérieur $\overset{\circ}{E}$** Tous les points dont à gauche et à droite c'est dans l'ensemble. On exclut donc les points isolés, et les bords. Dans la pratique, ça revient à réécrire l'ensemble, avec des crochets ouverts.
  - **Points isolés** Les points donc il n'y a rien directement à gauche et à droite. Par exemple, les points de $\mathbb{N}$ sont tous isolés.
  - **Points frontières** Tous les éléments tels que à gauche et à droite, on trouve des éléments dans et hors de l'ensemble.
  - **Bord δE** L'ensemble qui contient tous les points frontières.
  - **Points adhérents $\overline{E}$** Les points tels que autour (incluant lui-même), il y a des éléments de l'ensemble. Donc tous les éléments intérieurs, les points frontières et points isolés. Donc les points adhérents à [3] c'est juste 3
  - **Points limites** Les points tels que autour, il y a des éléments de l'ensemble, mais sans compter lui-même. Comme les points adhérents, mais sans lui même (donc sans les points isolés par ex). $\rightarrow$ aucun point limite dans $\mathbb{N}$

3 Suites

3.1 Définitions

- (strictement)(dé)croissante $a_{n+1} \geq (\leq)(>)(<) a_n$

- majorée (minorée): si $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ admet un majorant (minorant)
- bornée : si la suite est majorée et minorée
- monotone : soit majorée soit croissante, soit décroissante

3.2 Suite de Cauchy (récurrentes)

Définition : une suite est de Cauchy $\iff$ elle est convergente
Soit une suite $a_n = \dots$ (par exemple $\frac{2}{3}a_{n-1} + 2$). Pour déterminer si cette suite est "de Cauchy", suivre les points suivants :

1. **Calculer** $|a_n|$ (en général donné)
   $(= \frac{2}{3}a_{n-1} + 2)$
2. **Calculer** $|a_{n+1}|$
   $(= \frac{2}{3}a_n + 2)$
3. **Calculer** $|a_{n+1} - a_n|$
   $(= \frac{2}{3}(a_n - a_{n-1})$
4. **Itérer n-1 fois** (pour avoir $|a_2 - a_1|$ = facteur de n)
   $|a_{n+1} - a_n| = \frac{2}{3}|a_n - a_{n-1}| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|a_2 - a_1| = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ Comme on connaît a_2 et a_1 on peut remplacer pour ne faire dépendre plus que de n, et plus de a_{n-1} (enlever la notion de récursivité).
5. On cherche $|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-1} + a_{n+2} - ... + a_{m+1} - a_m|$ et par l'inégalité triangulaire $\rightarrow$

   $$a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + ... + |a_{m+1} - a_m| = \boxed{\sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|}$$

6. On sait ce que vaut $a_{k+1} - a_k$ (c.f. 4). Donc remplacer avec ce qu'on sait
7. Mettre une puissance de m en évidence (afin de redescendre la somme à $\sum_{k=0}^{n-m-1}$ (pour pouvoir utiliser les définitions qu'on connaît)
8. Effectuer. Et on saura que ce résultat sera $< \epsilon$.
9. De là, travailler pour trouver un m = [ϵ quelque chose]

3.3 Trucs - astuces - théorèmes

- toute suite croissante et majorée (décroissante et minorée) converge. $\rightarrow$ toute suite monotone et bornée converge. $\rightarrow$ toute suite convergente est bornée
- critère du quotient (équivaut a d'Alembert) ; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ alors la limite vaut 0 si $\rho < 1$, diverge si $\rho > 1$ et on ne peut rien dire si $\rho = 1$

4 Séries

4.1 Critères de convergence d'une série ($\sum$)

- Critère d'Alembert : (analyser q)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q$$

- Critère de Cauchy : (analyser q)

$$\lim_{k\to\infty}(|a_k|^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a_k} = q$$

- Critère de Leibnitz (pour les suites alternées): 3 critères nécessaires :
  - Si (a_k) est une suite alternée
  - Si $(|a_k|)$ est strictement décroissante ($|a_{k+1}| < |a_k|$ pour tout k)
  - Si $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

  Alors la série converge

- Critère nécessaire : Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, alors la limite de la suite $(\lim_{k\to\infty} a_k)$ est égale à 0.

  Par contraposée, si $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

- critère de comparaison : Si $a_k \leq b_k \, \forall k$ et que b_k converge, alors a_k converge aussi
  Par contraposée, si $b_k \leq a_k$ pour tout k, et que b_k diverge, alors a_k diverge aussi

4.2 Suites/séries particulières

- La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Tous les multiples (par exemple $\frac{7}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$) divergent aussi.
- La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. De manière générale, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge si $0 < \alpha \leq 1$ et converge si $\alpha > 1$

4.3 Trucs - Astuces - Théorèmes

- avec une série d'une suite du type $\frac{\text{entier}}{\text{truc compliqué avec des n}}$, tenter d'extraire un $\frac{1}{n}$, ou de dire que ceci > cela > truc simple x $\frac{1}{n}$
- Avec des racines **carrées**, chercher le conjugué, et multiplier par $\frac{\text{conjugué}}{\text{conjugué}}$, pour mettre la racine du dessus au carré (donc l'enlever), et en garder une dessous. Après plus facile.
- Avec des racines **cubiques** ou plus, regarder dans les règles.
- Toute suite absolument convergente est convergente

5 Fonctions

5.1 Rappels

- Hyperbolique:
  - $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
  - $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- paire : $f(-x) = f(x)$, impaire $f(-x) = -f(x)$

5.2 Continuité

il faut que la limite lorsque la fonction tend vers un point sensible, le résultat opposé soit le même.

Par exemple : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x > 1 \\ 3, & x \leq 1 \end{cases}$ Il faut que la $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x^3-1}{x-1} \right) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (3) = f(1) (= 3)$. On fait tendre $\frac{x^3-1}{x-1}$ vers 1 (on voit que la fraction se simplifie en

x^2+x+1), ça donne 3, on fait tendre 3 vers... 3, ça donne 3, et on regarde ce que vaut f(1), qui vaut 3, donc tout est égal, donc c'est continu.

5.3 Réciproque

Pour trouver la réciproque de $y = f(x)$, il faut triturer l'équation pour arriver à $x = g(y)$, puis remplacer les variables $x = g(y) \to y = g(x) = f^{-1}(x)$

5.4 Composition de fonctions définies par étapes

Exemple : calculer $f \circ g$ de $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases}$
Il nous faut donc calculer dans quel cas $g(x)$ correspond aux critères de $f(x)$ (ici $> / < 0$) Donc on regarde, on voit que pour tout $x^2 \geq 0$ pour tout x. Le point de "coupure" entre $g(x) > / < 0$ se fait en $g(-2) = 0$. on va donc poser les bornes de $f(x)$ en -2, ce qui nous donnera quelque chose du type $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2g(x)-3 & x \geq -2 \\ g(x) & x < -2 \end{cases}$ Pour $x \geq 1$ pas de problème, $g(x) = x^2$. Pour x entre -2 et 1, on reste ≥ 0 mais $g(x) = x+2$. Et finalement pour x < -2 $g(x)$ redevient = x+2 et plus petit que 0.

donc $f(g(x)) = \begin{cases} 2x^2-3 & x \geq 1 \\ 2x+1 & -2 \leq x < 1 \\ x+2 & x < -2 \end{cases}$

6 Dérivées

6.1 Trucs - Astuces - Théorèmes

- Dérivée de la réciproque $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- Fonction réciproque dérivable sur l'image de tout intervalle sur lequel f' ne s'annule pas
- $f(x) = |x|$ continu (aussi en 0), mais pas dérivable en 0. dérivée de $|x| = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$
- Fonction dérivable sur en tout point $x_o \in]a,b[\to$ fonction dérivable sur $]a,b[$
- Fonction dérivable en $x_0 \to$ fonction continue en x_0

- Fonction dérivable en $x_0 \iff$ fonction dérivable à gauche et à droite en x_0 <u>et</u> $d_+(x_0) = d_-(x_0) = d(x_0)$
- Pour les V/F, penser à :
  - $|x|$. Continu partout, mais pas dérivable en 0, et dérivable à gauche et à droite en 0
- $(f \circ g)'(x) = f'(f(x))f'(x)$
- $f'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$

6.2 Théorème des accroissements finis

Le théorème (ou plutôt le corollaire 1 qui en découle) est :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x + \vartheta h)h$$

Sert à approximer un chiffre de merde, genre $\tan\left(\frac{5\pi}{24}\right)$

i. chercher des "jolies" bornes au composant. Ici, on voit que $\frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24} < \frac{\pi}{4}$
   Donc on va travailler sur $\tan(x)$ dans l'intervalle $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

ii. Vu que $\frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24}$, alors on va utiliser le théorème avec $x = \frac{\pi}{6}$, et $h = \frac{\pi}{24}$

iii. Donc $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan(\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{24} \cdot (\tan)'(\frac{\pi}{6} + \vartheta\frac{\pi}{24})$

iv. On sait que $(\tan)' = \frac{1}{\cos^2}$

v. On cherche a encadrer le terme avec ϑ, qui est $\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{6}+\vartheta\frac{\pi}{24})}$

vi. Sur cet intervalle, cos est décroissant, donc $\frac{1}{\cos^2}$ est croissant. On peut alors utiliser les bornes de l'intervalle comme bornes inf et sup, ce qui donne
   $\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{6})^2} < \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{6}+\vartheta\frac{\pi}{24})} < \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})^2}$

vii. On connaît les deux bornes (respectivement $\frac{4}{3}$ et 2, donc on peut calculer précisément.

viii. Ces bornes peuvent être injectées pour trouver les bornes

7 Dérivée

8 Intégrale

8.1 Trucs - astuces - théorèmes

- $\int f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x) + C$
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = a^x \cdot \frac{1}{\ln(a)}$
- intégrale de $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \arctan(f(x)) + C$
- avec une fraction du type $\frac{g(x)}{f(x)}$, s'arranger (en mettant en évidence des constantes par exemple) pour que $g(x) = f'(x)$. Ensuite l'intégrale de $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(|f(x)|)$

8.2 valeur moyenne

Trouver un u tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(u)(b-a)$. Il suffit de chercher $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Par exemple, la valeur moyenne de $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$. L'intégrale de f(x) peut être décomposée entre 0 et 1, puis entre 1 et 4. faire les intégrales, puis multiplier par $\frac{1}{4}$. L'idée est de diviser l'aire moyenne (l'intégrale) par la taille de l'intervalle.

8.3 Changement de variable

Remplacer x par une fonction $\varphi(u)$ permet d'éviter des complications. Mais attention : si $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, et que l'on effectue le remplacement $x = \varphi(u) \to F(x) = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}x$ De plus, les bornes changent.