Série 1

Olivier Cloux

236079

Problème 1.1

m =	1	2	3	4	5	6
p(S = m) =	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1. $\underline{(1)}$ $P(E_1) = P(1) + P(3) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

   $\underline{(2)}$ $P(E_2) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

   $\underline{(3)}$ $P(E_3) = P(1) + P(2) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

2. $E_1 \cap E_2 = E_{1,2} = \{3, 4\}$

   $\rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_{1,2}) = P(3) + P(4) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

   Avec la même idée :

   $E_1 \cap E_3 = E_{1,3} = \{1\} \rightarrow P(E_{1,3}) = P(1) = \boxed{\frac{1}{6}}$.

   $E_2 \cap E_3 = E_{2,3} = \emptyset \rightarrow P(E_{2,3}) = \boxed{0}$

   $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_{2,3} \cap E_1 = E_{1,2,3} = \emptyset \rightarrow P(E_{1,2,3}) = P(E_{1,2}) = \boxed{0}$

3. $E_1 \cup E_2 = E'_{1,2} = \{1,3,4,5,6\} \rightarrow P(E'_{1,2}) = \boxed{\frac{5}{6}}$
   $E_1 \cup E_3 = E'_{1,3} = \{1,2,3,4\} \rightarrow P(E'_{1,3}) = \boxed{\frac{2}{3}}$
   $E_2 \cup E_3 = E'_{2,3} = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow P(E'_{2,3}) = \frac{6}{6} = \boxed{1}$
   $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = E_{2,3} \cup E_1 = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow P(E'_{1,2,3}) = P(E_{2,3}) = \boxed{1}$

4. Selon les lois d'indépendance d'un point de vue de probabilités, deux événements E_i, E_j sont indépendants si et seulement si : $P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j)$. Analysons ainsi deux à deux les couples possibles :

   - $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = P(E_1) \cdot P(E_2) \rightarrow E_1$ et E_2 sont indépendants.
   - $P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(E_1) \cdot P(E_2) \rightarrow E_1$ et E_3 sont indépendants.
   - $P(E_2 \cap E_3) = 0 \neq \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(E_2) \cdot P(E_3) \rightarrow E_2$ et E_3 sont dépendants.

   Comme nous venons de le voir, l'indépendance n'est pas transitive. En effet, E_3 et E_1 sont indépendants, E_1 et E_2 aussi, mais E_2 et E_3 sont dépendants.

Problème 1.2

1. $H(S_1) = H(S_2)$, car les densités de probabilité sont les mêmes pour x_{i1} et x_{i2}, les deux étant égaux. Leur entropie (selon la formule vue en cours) vaut :
   $\underline{H(S_1) = -q\log_2(q) - (1-q)\log_2(1-q) = H(S_2)}$

Ce qui est alors étonnant, c'est que $H(S) = H(S_1) = H(S_2)$. En effet, une fois que x_{i1} est tiré, on connaît directement a_1, ainsi, les densités de probabilité de x_{i1} sont les mêmes que celles de x_{i2}, et donc de a_i

$\rightarrow \underline{H(S) = H(S_1) = H(S_2) = -q\log_2(q) - (1-q)\log_2(1-q)}$

Cela illustre le phénomène de dépendance. En effet, $H(S) < H(S_1) + H(S_2) = 2H(S)$. Cela montre très clairement que S_1 et S_2 sont dépendants (selon les lois d'entropie). En effet, la donnée précise que S_1 et S_2 sont "totalement" dépendants (en savoir un donne l'entièreté de l'information sur le second).

2. Il est évident ici que $H(S_1)$ et $H(S_2)$ restent identique par rapport à l'exercice précédent. En effet, leur densité de probabilité ne change pas, donc leurs entropies non plus. En revanche, celle de S change, car connaître S_1 ne permet pas de déterminer S.

   S peut prendre 4 formes différentes possibles :

   (0,0), avec une probabilité q^2,

   (1,0) ou (0,1), chacun avec une probabilité $q(1-q)$

   (1,1), avec une probabilité $(1-q)^2$

   Ainsi, l'entropie de S vaut

$$
\begin{aligned}
H(S) &= -q^2\log_2(q^2) - 2q(1-q)\log_2\Big(q(1-q)\Big) - (1-q)^2\log_2\Big((1-q)^2\Big)\\
&= -2q^2\log_2(q) - 2q(1-q)\Big(\log_2(q)+\log_2(1-q)\Big) - 2(1-q)^2\log_2(1-q)\\
&= \log_2(q)\Big(-2q^2-2q(1-q)\Big) + \log_2(1-q)\Big(-2q(1-q)-2(1-q)^2\Big)\\
&= -q\log_2(q)\Big(2q+2(1-q)\Big) - (1-q)\log_2(1-q)\Big(2q+2(1-q)\Big)\\
&= 2\Big(\underbrace{-q\log_2(q)-(1-q)\log_2(1-q)}_{=H(S_1)=H(S_2)}\Big)\\
&= H(S_1)+H(S_2)
\end{aligned}
$$

$\rightarrow H(S) = H(S_1) + H(S_2)$.

Cela montre bien que S_1 et S_2 sont indépendants (par les lois d'entropie)

3. Nous avons vu précédemment les probabilités d'apparition des couples (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Les probabilités d'apparition de w et z sont donc respectivement celles de (1,0) et (1,1) (également respectivement $q(1-q)$ et $(1-q)^2$). En revanche y peut s'obtenir soit avec (0,0), soit (0,1) (donc seulement si le premier tirage est 0). Cette probabilité est de $q^2 + q(1-q) = q\Big(q + (1-q)\Big) = q$. En résumé, la densité de probabilité est :

w	y	z
$q(1-q)$	q	$(1-q)^2$

.

L'entropie de cette source devient donc :

$$
\begin{aligned}
H(S_{wyz}) &= -q(1-q)\log_2\Big(q(1-q)\Big) - q\log_2(q) - (1-q)^2\log_2\Big((1-q)^2\Big)\\
&= -q(1-q)\Big(\log_2(q) + \log_2(1-q)\Big) - q\log_2(q) - 2(1-q)^2\log_2(1-q)\\
&= \log_2(q)\Big(-q(1-q) - q\Big) + \log_2(1-q)\Big(-q(1-q) - 2(1-q)^2\Big)\\
&= \log_2(q)\Big(-q + q^2 - q\Big) + \log_2(1-q)\Big(-q + q^2 - 2(1 - 2q + q^2)\Big)\\
&= \log_2(q)(q^2 - 2q) + \log_2(1-q)(q^2 - q - 2 + 4q - 2q^2)\\
&= \log_2(q)(q^2 - 2q) + \log_2(1-q)(-q^2 + 3q - 2)\\
&= -q\log_2(q)(2-q) - (2-q)(1-q)\log_2(1-q)\\
&= (2-q)\Big(\underbrace{-q\log_2(q) - (1-q)\log_2(1-q)}_{=H(S_1)\ =H(S_2)}\Big)\\
&= 2H(S_1) - qH(S_1)\\
&= H(S_1) + H(S_2) - qH(S_1)\\
&= H(S) - qH(S_1)
\end{aligned}
$$

Sachant que $0 \leq q \leq 1$ (règle élémentaire des probabilités), alors $H(S_{wyz}) \leq H(S) = H(S_1) + H(S_2)$. Cela s'explique par différentes raisons. Déjà, l'alphabet est réduit (de 4 à 3 “caractères”). Ensuite, connaître le premier tirage nous donnera beaucoup plus d'information sur la suite ; car si c'est un 0 qui sort en premier, alors il est garanti que w sortira. Donc, nous avons besoin de moins d'informations pour pouvoir deviner l'issue du tirage, donc l'entropie s'en trouve diminuée d'autant.

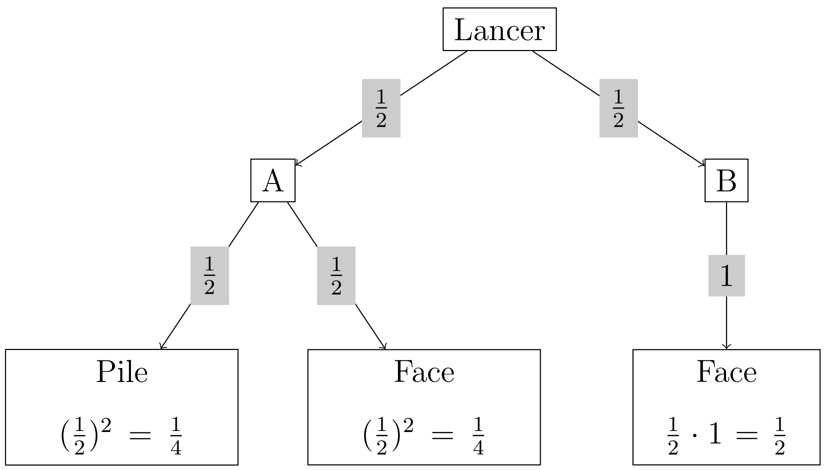
Problème 1.3

1. (a) Oui, les deux lancers sont indépendants. En effet, savoir le résultat du premier lancer ne nous permet pas de deviner le second, ou au moins entrevoir un résultat. Chaque lancer sera aussi aléatoire que les précédents (car la pièce est standard entre autres).

(b) L'alphabet contient 2 “caractères” (“P” et “F”), chacun avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Selon notre cours, l'entropie d'une telle source vaut la somme négative des probabilités de chaque résultat multiplié par le logarithme en base 2 de cette même probabilité
$\rightarrow H(S_1) = -p(P)\log_2(p(P)) - p(F)\log_2(p(F))$
$= 0.5\log_2(2) + 0.5\log_2(2) = 1$. <u>L'entropie de S_1 est donc d'un bit</u>. De plus, <u>celle de S_2 vaut la même chose</u> (les conditions initiales et les probabilités sont les même, donc le calcul et le résultat sont aussi les mêmes). Enfin, sachant que S_1 et S_2 sont indépendants (voir 1.2(a)), l'entropie de S vaut $S_1 + S_2 =$ <u>2 bits</u>

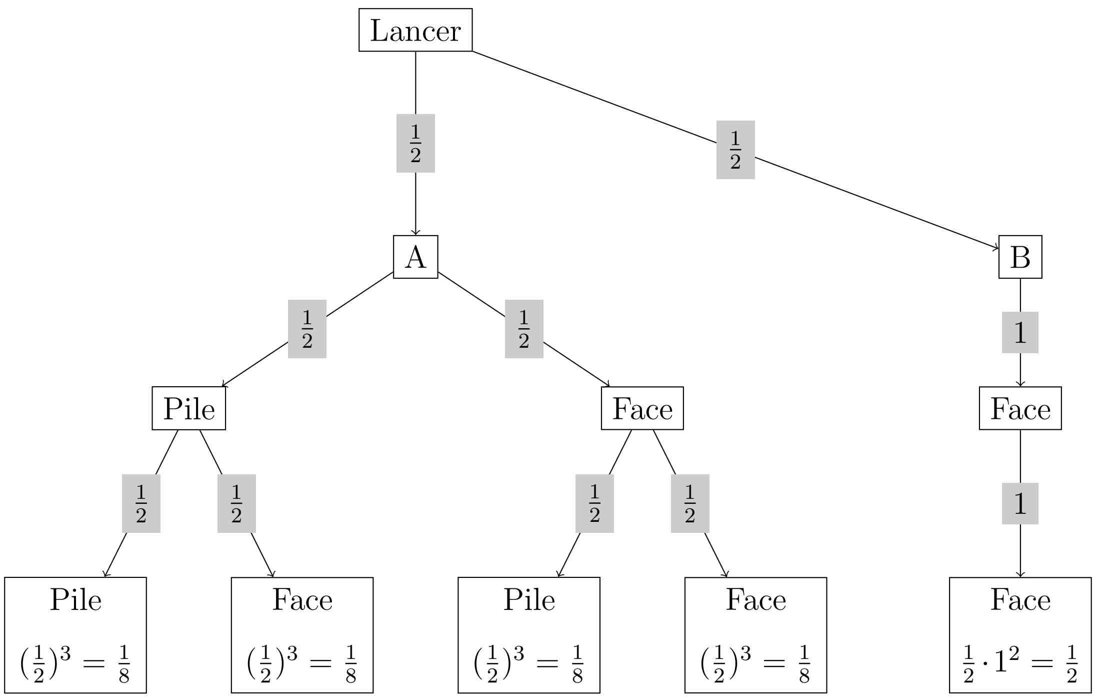
2.

(a)



Ainsi, Pile arrivera avec $\frac{1}{4}$, alors que Face arrivera avec $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(b)



Nous voyons, grâce à l'arbre de probabilité ci-dessus, que :

$\boxed{p(PP) = p(PF) = p(FP) = \frac{1}{8}}$

et que

$\boxed{p(FF) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}}$

(c) Selon la formule de calcul de l'entropie vue en cours, et en ne considérant que S_1 (c.f. (a)).

$\rightarrow H(S_1) = \frac{1}{4}\log_2(4) + \frac{3}{4}\log_2(\frac{4}{3}) \simeq \boxed{0.811}$

L'entropie de S_2 est la même que celle que S_1 car nous n'avons pas encore regardé la pièce ; elle a donc toujours autant de chances d'être la pièce A que la B, et ainsi la densité de probabilité pour le second tire d'être pile ou face reste la même.

$\rightarrow H(S_2) = H(S_1) \simeq \boxed{0.811}$

L'entropie de S se calcule de la même manière, en considérant simplement l'alphabet et les densités de probabilités calculées en (b).

$\rightarrow H(S) = \frac{1}{8}\log_2(8) + \frac{5}{8}\log_2(\frac{8}{5}) \simeq \boxed{1.548}$

(d) Deux sources S_1 et S_2 sont indépendantes seulement si $H(S)(= H(S_1, S_2)) = H(S_1) + H(S_2)$.

Or $H(S_1) + H(S_2) = 2 \cdot H(S_1) \simeq 2 \cdot 0.811 > 1.548 \simeq H(S)$. Ainsi, selon l'argument entropie, <u>ces deux sources sont dépendantes</u>

D'un point de vue de probabilités, deux sources sont indépendantes si et seulement si $p(S_1 = i \text{ et } S_2 = j) = p(S_1 = i) \cdot p(S_2 = j)$ pour tout i et j dans les alphabets concernés. Nous considérons donc ici n'importe quelle couple, par exemple $S_1 = P$ et $S_2 = F$, mais le calcul fonctionne également pour n'importe quelle couple (PP, PF, FP ou FF).

$p(S_1 = P \text{ et } S_2 = F) = p(PF) = \frac{1}{8}$[1] $\neq \frac{3}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = p(S_1 = P) \cdot p(S_2 = F)$. Selon l'argument densité de probabilité,

<u>ces deux sources sont donc dépendantes</u>

[1] c.f. (b)