

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

NOTES DE COURS EN

Analyse I



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

OLIVIER CLOUX

AUTOMNE 2014



Contents

1	Rappels	7
1.1	Fonctions trigonométriques	7
1.2	Logarithme	7
1.3	Paires de fonctions réciproques	7
2	Chapitre 1 : Ensembles	8
2.1	Notations	8
2.1.1	Le produit cartésien	9
2.1.2	Classes d'équivalence	9
2.1.3	Fonctions, applications	9
2.1.4	Notation et terminologie	10
2.1.5	Le graphe d'une fonction f	10
2.1.6	Définition d'une fonction par son graphe	11
2.1.7	Composition de fonction	11
2.1.8	Compositions multiples	11
2.1.9	Fonction réciproque	11
2.2	Les entiers (\mathbb{N}, \mathbb{Z})	12
2.2.1	Relation d'ordre (totale) \leq	12
2.2.2	Opérations :	12
2.2.3	Élément neutre	13
2.2.4	Compatibilité de \leq avec $+$ et \cdot	13
2.2.5	Les entiers (relatifs)	13
2.2.6	PGDC	13
2.3	Raisonnement par récurrence (principe d'induction)	14
2.3.1	Notation \sum, \prod	14
2.4	Les nombres rationnels \mathbb{Q}	15
2.4.1	Proposition : \mathbb{Q} est un corps ordonné	16
2.4.2	Démonstration par l'absurde :	17

2.5	Les nombres réels \mathbb{R}	18
2.6	Minorants, majorants	19
2.6.1	1	20
2.6.2	2	20
2.6.3	Exemples	20
2.6.4	Intervalles (notation	20
2.6.5	Sous ensembles (générales) de \mathbb{R}	21
2.6.6	Valeur absolue	22
2.7	un truc qu'on verra après	22
2.8	Introduction aux nombres complexes	22
2.8.1	Définition du corps des nombres complexes \mathbb{C}	22
2.8.2	Représentation cartésienne	22
2.8.3	Définitions	23
2.8.4	Élément inverse pour la multiplication	24
2.8.5	Formules d'Euler et de Moivre	24
2.8.6	Forme polaire d'un nombre complexe	25
2.8.7	Exemples	27
2.8.8	La fonction et sa réciproque	28
2.9	Résolution des équations	29
2.9.1	"Racines" n-ièmes	29
2.9.2	Le cas $n = 2$ (méthode cartésienne)	30
2.9.3	Théorème fondamental de l'algèbre	30
2.9.4	Quelques résultats généraux	30
3	Suite de nombres réels	31
3.1	Exemples :	31
3.1.1	Suite harmonique	31
3.1.2	Suite harmonique alternée	31
3.1.3	Suite arithmétique	32

3.1.4	Suite géométrique	32
3.2	Suites définies par récurrence	33
3.3	Définitions	34
3.4	Limite d'une suite	35
3.5	Suite divergentes et fortement divergentes	36
3.6	Opérations algébriques sur les limites	37
3.7	Théorème des deux gendarmes	38
3.8	Critères de convergence	39
3.9	Convergence d'une suite définie par récurrence (un exemple)	40
3.10	Suites de Cauchy	41
3.11	Application : Suites récurrentes linéaires	42
3.12	Généralisation : théorème de point fixe de Banach	43
3.13	Théorème de Bolzano-Weierstrass	43
3.14	Limites inférieurs et limite supérieure d'une suite a_n bornée	44
4	Séries numériques	44
4.1	Définition	44
4.2	Exemples	45
4.2.1	La série harmonique	45
4.2.2	La série harmonique alternée	46
4.2.3	La série géométrique	46
4.3	Critères de convergence	46
4.3.1	Critère nécessaire	46
4.3.2	Critère de Leibnitz	47
4.3.3	Critère de comparaison	47
4.3.4	Critère de d'Alembert et de Cauchy	48
4.4	Série avec paramètres	48
5	Fonctions réelles d'une variable réelle	49
5.1	Terminologie, conventions	49

5.1.1	Fonctions polynômes	49
5.1.2	Fonctions rationnelles	49
5.1.3	Fonctions algébriques	49
5.1.4	Fonctions transcendantes	49
5.2	Définitions	50
5.3	Les fonctions \sinh et \cosh	51
5.4	Opérations algébriques	51
5.4.1	Fonctions avec parité	51
5.4.2	Fonctions périodiques	52
5.5	Exemples	52
5.5.1	Composition (un exemple)	53
5.5.2	Les fonction signum et Heaviside	54
5.6	Transformation affines (rappel, voir les pré-requis)	54
5.7	Limites	54
5.7.1	Définitions	54
5.7.2	Limites	56
5.7.3	Opérations algébriques sur les limites	57
5.7.4	Limites épointées et composition de fonctions	57
5.7.5	"Limites infinies" et comportement à ∞	58
5.7.6	Théorème des deux gendarmes	58
5.7.7	Exemples	59
5.7.8	Définition de la limite (épointée) avec ϵ et δ	60
5.8	Fonctions continues	61
5.8.1	Exemple :	61
5.8.2	Propriétés des fonctions continues	62
5.8.3	Fonctions "élémentaires"	62
5.8.4	Intervalles fermés	63
6	Dérivée d'une fonction d'une variable	66

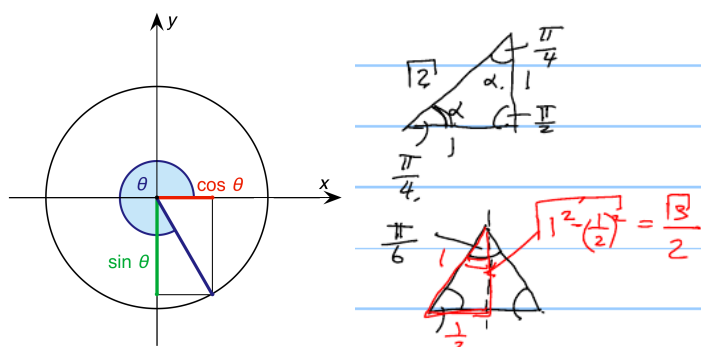
6.1	Définitions	66
6.2	Exemples (à savoir par coeur	67
6.3	Dérivabilité implique continuité	68
6.4	Intervalles fermées	69
6.5	Opérations algébriques sur les dérivées	69
6.6	Dérivée de la composition de deux fonctions	70
6.7	Continuité de la fonction dérivée	70
6.8	Dérivée logarithmique	71
6.9	Dérivée des fonctions réciproques	72
6.9.1	Continuité des fonctions réciproques	72
6.9.2	Dérivabilité de la fonction réciproque	72
6.9.3	Identité	72
6.10	Application du calcul différentiel	73
6.10.1	Théorème de Rolle	73
6.10.2	Théorème des accroissements finis	74
6.10.3	Exemples	75
6.10.4	Théorème des accroissements finis généralisés	76
6.10.5	Règle de Bernoulli de l'Hospital	76
6.11	Etude des fonctions	78
6.11.1	Définitions	78
6.11.2	Discuter le graphe d'une fonction	80
6.11.3	Exemples	81
6.11.4	Exemples avec limites	82
6.12	Développement en séries et développement limité	83
6.12.1	Définitions	83
6.12.2	Fonctions définies par une série entière	84
6.12.3	Dérivée des fonctions définies par une série	84
6.12.4	Théorème de Taylor	85
6.12.5	Développement d'une fonction en une série	86

6.12.6	Les fonctions $\exp, \sinh, \cosh, \sin, \cos, \ln, (1-x)^\alpha$	88
6.12.7	La notation o et O	89
7	Intégrales indéfinies et définies	91
7.1	Définition de l'intégrale indéfinie	91
7.2	Définition de l'intégrale définie	93
7.3	Propriétés de l'intégrale définie	94
7.4	Théorème de la moyenne	94
7.5	Théorème fondamental du calcul intégral	95
7.6	Application du théorème de la moyenne	99
7.7	Méthode d'intégration	99
7.7.1	Intégration "immédiate"	99
7.7.2	Intégration par changement de variable	100
7.7.3	Intégration par partie	101
7.8	Intégration d'un développement limité	102
7.9	Intégration d'une série entière	103
7.10	Intégrales généralisées (ou impropres)	104
7.11	Intégration des fonctions rationnelles	107
7.11.1	Exemple	108
7.11.2	Le cas général	109
7.12	Divers	110
7.13	Glossaire	110
7.14	Règles	111
7.14.1	Complexes	111
7.14.2	Limites	111
7.15	Fonctions	111

1 Rappels

1.1 Fonctions trigonométriques

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$



1.2 Logarithme

- $\log_a(x) = y \iff x = a^y, \forall$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x \log_a(a) = x \cdot 1 = x$
- $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$

1.3 Paires de fonctions réciproques

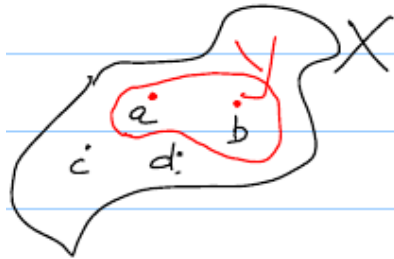
Deux fonctions f et g sont réciproques si $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

Par exemple :

- x^2 et \sqrt{x} sont réciproques pour tout nombre ≥ 0
- $e^x = \exp(x)$ et $\ln(x)$ ($e \simeq 2.71828$) sont réciproques pour tout nombre positif.
- a^x et $\log(x)$

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{1}{x}) = \log_a(x^{-1}) = -\log(x)$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x \cdot \frac{1}{y}) = \log_a(x) + \log_a(\frac{1}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

2 Chapitre 1 : Ensembles



On peut définir $Y = \{x \in X : \text{couleur}(x) = \text{rouge}\}$

2.1 Notations

\in	est élément de	$a \in y$
\notin	n'est pas élément de	$c \notin y$
\subset	est un sous-ensemble	$y \subset y$
$\not\subset$	n'est pas un sous-ensemble	$x \not\subset y$
$=$	est le même ensemble que	$y = y$
\neq	n'est pas le même ensemble que	$x \neq y$
\emptyset	ensemble vide, ensemble sans élément	

Nota bene :

- $\emptyset \subset x \forall x$
- $x \subset x$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$, mais $\{a, b\} \neq \{\{a\}, \{b\}\}$
- $|\mathbf{X}|$ Cardinalité d'un ensemble. $\mathbf{X} = \{a, b, c, d\} \rightarrow |\mathbf{X}| = 4$
- $P(\mathbf{X})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X. Il vaut $2^{|\mathbf{X}|} = 2^4 = 16$ sous-ensembles.

2.1.1 Le produit cartésien

\mathbf{X}, \mathbf{Y} des ensembles. $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} := \{(x, y) : x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$

Exemple : $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$. $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\}$

2.1.2 Classes d'équivalence

On peut vouloir décomposer un ensemble \mathbf{X} en classes d'équivalences.

Remarque : Le symbole \sim définit une relation d'équivalence

3 relations d'équivalence sur X :

Réflexive $x \sim x, \forall x \in \mathbf{X}$

Symétrique $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

Transitive $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Définition : $C_x := \{y \in \mathbf{X} : y \sim x\} \equiv [x]$

$C_x \in \mathbf{X}$ la classe d'équivalence de x

Définition : L'ensemble quotient \mathbf{X}/\sim est l'ensemble des classes d'équivalences distinctes de X

Terminologie : Soit $C \in X/\sim$ alors $x \in C$ est appelé un représentant de C

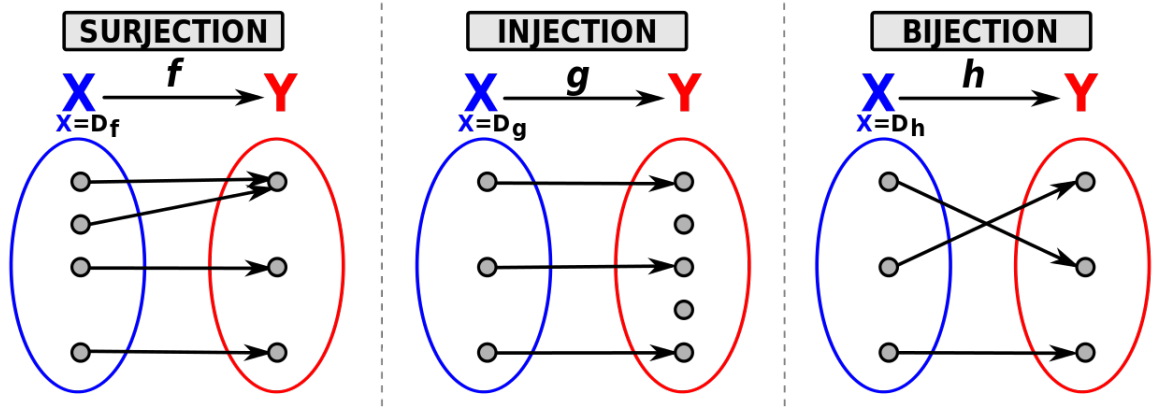
2.1.3 Fonctions, applications

Surjection Tout point de \mathbf{Y} est atteint par au moins un x , soit si $\text{Im}(f) = Y$

Injection Tous les points de \mathbf{X} ont un et un seul y . \mathbf{Y} peut avoir des points "vides" \rightarrow

$$\underline{f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2}$$

Bijection Chaque point de X et de Y a une et une seule réciproque



Domaine de définition de f :

$D \equiv D_f \equiv D(f) := \{x \in X : \text{une flèche (et une seule) va de } x \in X \text{ vers un } y \in Y\}$

Si $D = X$, on parle aussi d'une application

Image de f : $Im(f) \equiv f(D) := \{y \in Y : y = f(x) \text{ pour un } x \in D\}$

Remarque: Toute fonction $f : D \rightarrow Y$ définit une fonction surjective si on remplace Y par $Im(f)$

Définition : Une fonction qui est injective et surjective est appelée bijective.

Remarque : Toute fonction $f : D \rightarrow Y$ qui est injective définit une fonction bijective de $D \rightarrow Im(f)$.

2.1.4 Notation et terminologie

1. Donnée g . $h = g|_{D_h} = "$ h est égal à g restreint à $D_h \subset D_g$ ou h est une restriction de g .
2. Donnée h : $g|_{D_h} = h = g$ est un prolongement de h .

2.1.5 Le graphe d'une fonction f

Définition : Le graphe d'une fonction $f : D \rightarrow Y$ est l'ensemble $G_f \equiv G(f) := \{(x, y) \in D \times Y : y = f(x)\}$

2.1.6 Définition d'une fonction par son graphe

Soit $G \subset \mathbf{D} \times \mathbf{Y}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{D}$, alors il existe un y et un seul tel que $(x, y) \in G$. Alors G est le graphe d'une fonction (application) $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Y}$, qui pour $(x, y) \in G$ associe y à x

2.1.7 Composition de fonction

$$h = f \circ g \quad (1)$$

Soit

$$\mathbf{D} := \{x \in \mathbf{D}_f : y = f(x) \in \mathbf{D}_g\} \subset \mathbf{D}_f \quad (2)$$

Alors on peut définir la fonction $h : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Z}$ par $h(x) := g(f(x))$. **Notation** on écrit $h = g \circ f$ pour une fonction définie ainsi. On dit que h est la composition de g avec f , ou que h est “ g rond f ”

2.1.8 Compositions multiples

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f \quad (3)$$

La loi de composition de fonctions est associative

2.1.9 Fonction réciproque

Soit $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ avec $\mathbf{D}_f = \mathbf{X}$ une fonction bijective. Alors on peut définir une fonction dite *réciproque* $g(f(x)) = x$, $x \in \mathbf{X}$

$$f(g(y)) = y, y \in \mathbf{Y}$$

$$\text{ou } g \circ f = \text{Id (identité)}$$

$$f \circ g = \text{Id.}$$

Définition : Soit $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ avec $\mathbf{D}_f = \mathbf{X}$ une fonction bijective. Alors on peut définir une fonction dite réciproque $g \equiv f^{-1} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$. par : $g(y) = x$ où x est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$. On a $\mathbf{D}_{f^{-1}} = \mathbf{Y}$ et f^{-1} est bijective

2.2 Les entiers (\mathbb{N}, \mathbb{Z})

Les entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} &= \mathbb{N} \text{ privé de } 0 \\ &= \mathbb{N} \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Nota bene : 0 est un nombre pair.

2.2.1 Relation d'ordre (totale) \leq

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N}$

1. $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
2. $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$
3. on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$ (ordre totale)

Notation : on écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$, $x \geq y$ si $y \leq x$, $x > y$ si $y < x$

Remarque : $\Leftrightarrow 3'$: on a soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$

Propriété de bon ordre : Tout sous-ensemble non-vide X de \mathbb{N} a un plus petit élément, CàD :

$$\forall X \subset \mathbb{N}, \exists x \in X \text{ tel que } x \leq y \text{ pour tout } y \in X \quad (4)$$

Exemple : $X = \{1, 2, 3\}$, $x = 1$, le plus petit élément car pour tout $x \in X$, on a $1 \leq x$

2.2.2 Opérations :

$$+ \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (m, n) & \rightarrow & (m+n) \end{array}$$

$$\cdot \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (m, n) & \rightarrow & (m \cdot n) \end{array}$$

2.2.3 Élément neutre

- 0 pour l'addition : $n + 0 = n \forall n \in \mathbb{N}$
- 1 pour la multiplication : $n \cdot 1 = n \forall n \in \mathbb{N}$

On n'a pas encore (sur \mathbb{N}) d'élément "inverse" pour l'addition et la multiplication.

2.2.4 Compatibilité de \leq avec $+$ et \cdot

1. Si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z \forall z \in \mathbb{N}$
2. Si $0 \leq x$ et $0 \leq y$ alors $0 \leq x \cdot y$

2.2.5 Les entiers (relatifs)

$$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \text{le même sans le } 0.$$

Élément inverse pour $+$ Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x+y = 0$

Notation : on écrit $2 - 3$ au lieu de $2 + (-3)$ car $-(-3) = 3$

2.2.6 PGDC

Algorithme d'Euclide, Algorithme de Joseph Stein.

Remarque de base : Soit $0 \leq b \leq a$. Si r divise a et si r divise b , alors r divise $a-b$.

Algorithme de Stein

1. $\text{pgdc}(a, b) = \text{pgdc}(b, a)$.
2. $\text{pgdc}(a, b) = 2 \cdot \text{pgdc}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ si a et b pairs
3. $\text{pgdc}(a, b) = \text{pgdc}(\frac{a}{2}, b)$ si a pair b impair.
4. $\text{pgdc}(a, b) = \text{pgdc}(\frac{a-b}{2}, b)$, $a \geq b$, a, b impair
5. $\text{pgdc}(a, 0) = a$.

2.3 Raisonnement par récurrence (principe d'induction)

Exemple : on aimerait démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 : P(n) \quad (5)$$

Théorème:

1. Si $P(n)$ est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ (initialisation)
2. Si pour tout $n \geq n_0$ $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

Alors $P(n)$ es vrai pour tout $n \geq n_0$

Dans notre exemple, :

- $n_0 = 1 : 1 = 1^2 = 1$
- $1 + 3 + 5 + \dots + 2((n + 1) - 1) \stackrel{?}{=} (n + 1)^2 P(n + 1) \iff 1 + 3 + 5 + \dots + 2(n - 1) + 2(n + 1)[\text{trou}]$

Si les points 1 et 2 sont vrais, ils impliquent que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$

attention ! 1 est obligatoire !

$P(n) : 3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7

2. $P(n+1) : 3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1} = 9 \cdot (3^{2n+4} - 2^n) + 2^n \cdot (9 - 2)$ Donc $P(n) \rightarrow P(n+1)$
pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $P(1) : 3^6 - 2 = 727$, qui n'est pas un multiple de 7 (car $\text{pgcd}(727, 7) = 1$)

Donc $P(1)$ n'est pas vrai, donc $P(n)$ n'est pas démontré.

Il reste la possibilité logique que $P(n)$ soit vrai à partir de $n_0 > 1$ mais en fait $P(n)$ est faux pour tout n . Ceci suit 2. par une démonstration par l'absurde.

2.3.1 Notation \sum, \prod

$\sum_{k=m}^n a_k$ est la somme : $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$
 $\prod_{k=m}^n a_k$ est la multiplication : $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$

Par exemple :

$$\sum_{k=1}^n (2k+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Définition

Si $n < m$, il s'agit d'une somme / un produit vide, donc :

$$\sum_{k=m}^n a_k = 0, \prod_{k=m}^n a_k = 1 \quad (6)$$

Règles de calcul

$$\begin{aligned} \sum_{k=l}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k &= \sum_{k=l}^n a_k \\ \left(\prod_{k=l}^m a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^n a_k \right) &= \prod_{k=l}^n a_k \\ \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k \\ \prod_{k=m}^n (a_k \cdot b_k) &= \prod_{k=m}^n a_k \cdot \prod_{k=m}^n b_k \end{aligned}$$

2.4 Les nombres rationnels \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\begin{aligned} + \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &\rightarrow \frac{ad+bc}{bd} \\ \cdot \quad \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) &\rightarrow \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \right) \end{aligned}$$

Sur \mathbb{Q} on a une relation d'équivalence. $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ si $ad = bc$.

Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ car $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

Notation : on écrit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ au lieu de \sim

Important : $+$, \cdot sont compatibles avec la relation d'équivalence (vérifier !), c'est à dire : si $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$ alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$ et $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

Le représentant privilégié d'un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ est $\frac{p}{q}$ avec $q > 0$ et $\text{pgcd}(|p|, q) = 1$

Soit $x = \frac{a}{1}, y = \frac{b}{1}$. Alors $x + y = \frac{a+b}{1}$ et $x \cdot y = \frac{a \cdot b}{1}$. On récupère donc les opérateurs donc les opérations sur \mathbb{Z} . on identifie donc $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$.

"Inverse" pour $+$ pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on définit $-x \in \mathbb{Q}$ par $-x = \frac{-p}{q} (= \frac{p}{-q})$. et on a

$$x + (-x) = \frac{p}{q} + \left(\frac{-p}{q}\right) = \frac{p-p}{q} = \frac{0}{q} = 0$$

Inverse pour \cdot soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p, q \neq 0$. Alors $y = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ est bien défini, et on a

$$x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{qp}{pq} = \frac{1}{1} = 1$$

Notation pour l'inverse de $x \in \mathbb{Q}^*$, on écrit x^{-1} ou $\frac{1}{x}$

2.4.1 Proposition : \mathbb{Q} est un corps ordonné

$x, y, z \in \mathbb{Q}$, \mathbb{Q} est un corps ordonné car

- L'addition dans \mathbb{Q}
 - est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$
 - est commutative : $x + y = y + x$
 - a un élément neutre : $x + 0 = x$
 - a un élément "inverse" : $x + (-x) = 0$
- La multiplication dans \mathbb{Q}
 - est associative : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
 - est commutative : $x \cdot y = y \cdot x$
 - a un élément neutre : $x \cdot 1 = x$
 - a un élément inverse pour $x \neq 0$: $x \cdot x^{-1} = 1$
- Distributé des opérations "multiplications" et "addition" :
 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

relation d'ordre totale sur \mathbb{Q}

Pour ordonner $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}, b, d > 0$, on utilise les représentants

$$x = \frac{ad}{bd}, y = \frac{bc}{bd} \tag{7}$$

Définition

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, b, d > 0$, alors $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc$ dans \mathbb{Z}

Remarques

- \leq définit une relation d'ordre totale
- \leq est compatible avec les opérations $+, \cdot$
- \leq est compatible avec \sim

Propriété importante \mathbb{Q} est *archimédien* (Axiome d'Archimède)

Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}, x, y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \cdot x = y$

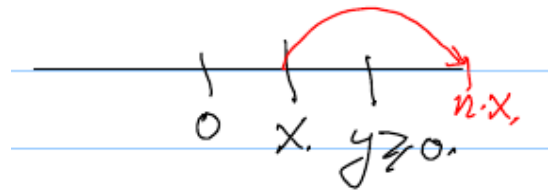
Démonstration

Si $x > y$ alors $x > y$ (trivial, $n = 1$).

En revanche, si $y \geq x > 0$, alors on peut écrire $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$, avec $a, b, c, d > 0$. On choisit $n = (b \cdot c) + 1$

$$(ad) \cdot n = (ad) \cdot ((bc) + 1) = (ad)(bc) + (ad)$$

$$\text{Donc } n \cdot x = n \cdot \frac{a}{b} = \frac{ad \cdot bc}{bd} = cd = y$$



2.4.2 Démonstration par l'absurde :

Proposition Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors $x^2 \neq 2$

Démonstration (Par l'absurde)

Soit $x^2 = 2$, on a $x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(p, q) = 1$

$$\begin{aligned} x^2 = 2 &\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \\ &\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \\ &\Rightarrow p^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow (2a)^2 = 2q^2, a \in \mathbb{N}^* \text{ (p es pair)} \\ &\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot a^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow 2a^2 = q^2 \\ &\Rightarrow 1 = \text{pgdc}(p, q) \\ &\Rightarrow 1 = \text{pgdc}(2p, 2q) \text{ Contradiction !} \end{aligned}$$

Donc $x^2 \neq 2$ donc l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans \mathbb{Q}

2.5 Les nombres réels \mathbb{R}

Introduction Axiomatique de \mathbb{R}

On demande de l'ensemble \mathbb{R} la même structure algébrique que pour \mathbb{Q} .

1. \mathbb{R} est un corps
2. \mathbb{R} est pourvu d'une relation d'ordre totale,

Puis on demande en plus :

1. \mathbb{R} a la propriété de la borne inférieure

"Tout sous ensemble non-vide *minoré* de \mathbb{R} admet (dans \mathbb{R}) un plus grand *minorant*."

Remarque : 3 est équivalent à la propriété " \mathbb{R} a la propriété de la borne supérieure" ou " \mathbb{R} a la propriété de la complétude"

Remarque : \mathbb{R} est *archimédien* (sans démonstration)

Remarque : L'axiome d'Archimède implique que si $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors $a = 0$

Remarque : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: les nombres irrationnels.

Existence de \mathbb{R}^2

1. la droite numérique
2. L'ensemble des nombres à virgule. Attention : $0.999999... \sim 1.000000...$
3. Des classes d'équivalence des *suites de Cauchy* d'un nombre rationnel

Définition

Pour avoir la droite numérique achevée, on ajoute deux symboles. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty \equiv \infty\}$

Propriétés

- $-\inf < +\infty$
- $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

2.6 Minorants, majorants

Définition :

$a \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de $\mathbf{A} \cap \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$ si $a \leq x \forall x \in \mathbf{A}$

Définition :

$a \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de $\mathbf{A} \cap \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$ si $a \geq x \forall x \in \mathbf{A}$

Définition :

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$ est *minoré* ou *borné inférieurement* si \mathbf{A} admet un minorant.

Définition :

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$ est *majoré* ou *borné supérieurement* si \mathbf{A} admet un majorant.

Définition :

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$ est *borné* s'il est majoré ou minoré.

Définition :

Un minorant (majorant) a de $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$ est appelé *infimum* (*supremum*) ou *borne inférieure* (*borne supérieure*) si a est le plus grand minorant (plus petit majorant) de \mathbf{A} , c'est à dire si tout minorant (majorant) b de \mathbf{A} satisfait la condition $b \leq a$ ($b \geq a$)

Autrement dit on a :

1. $\forall x \in \mathbf{A}$ on a $a := \inf(\mathbf{A}) \leq x$
2. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, il existe $x \in \mathbf{A}$ tel que $x \geq a + \epsilon$

Remarque $\inf(\mathbf{A})$ et $\sup(\mathbf{A})$ existent par définition de \mathbb{R} (axiome 3). **Remarque**

Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$, et soit $\mathbf{B} := \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbf{A}\}$. Alors $\sup(\mathbf{A}) = -\inf(\mathbf{B})$

Exemple : $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$ Alors $\inf(\mathbf{A}) = 1, \sup(\mathbf{A}) = 2$. Voir avec ' $-\mathbf{A}$ '

Définition (minimum)

Si $\inf(\mathbf{A}) \in \mathbf{A}$, alors $\inf(\mathbf{A}) = \min(\mathbf{A})$

Définition (maximum)

Si $\sup(\mathbf{A}) \in \mathbf{A}$, alors $\sup(\mathbf{A}) = \max(\mathbf{A})$

2.6.1 1**2.6.2 2****2.6.3 Exemples**

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$. "inf(A) = $-\infty$ ", sup(A) = 1
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ "inf(A) = $-\infty$, sup(A) = 1 = max(A).
3. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^2 < 2\}$, inf(A) = min(A) = 0. sup(A) = $\sqrt{2}$, ou par déf : $\sup(A)^2 = 2$.

Proposition : $a := \sup(A) = \sqrt{2}$ = solution de $x^2 = 2$.

⌈ Soit $a = \sup(A)$. On a $1 \in A$ car $1^2 \leq 2$ et donc $a \geq 1$

1. supposons que $a^2 < 2$ puisque \mathbb{R} est archimédien. $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot (\frac{2-a^2}{2a+1}) > 1 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{n} < 2 - a^2 < a^2 + 2 - a^2 = 2$
avec de n : $(a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n}$, et donc $a + \frac{1}{n} \in A$ est en contradiction avec $a = \sup(A)$.

2. supposons que $a^2 > 2$ Puisque \mathbb{R} est archimédien.

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n(\frac{a^2-2}{2a}) > 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} < a^2 - 2 \Leftrightarrow -\frac{2a}{n} > 2 - a^2$$

avec ce n : [trou =3] 1 et 2 impliquent que $a^2 = 2$ car $a^2 \geq 2$ par 1 et $a^2 \leq 2$...[trou mika]

2.6.4 Intervalles (notation

Soit $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

Intervalle ouvert $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Intervalle fermé $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$$]a, a[= \emptyset$$

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

$$[-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq b\}$$

2.6.5 Sous ensembles (générales) de \mathbb{R}

exemple : $A = [1, 2[\cup \{3\}$ [trou mika]

Définitions :

- $E \subset \mathbb{R}$ est ouvert si pour tout $a \in E$ il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset E$.

Exemple : $E =]0, 1[$ est (un ensemble) ouvert.

- L'intérieur \dot{E} de E est le plus grand ensemble ouvert contenu dans E . C'est à dire si $A \subset E, A$ ouvert, alors $A \subset \dot{E}$

- $E \subset \mathbb{R}$ est fermé si $E^c \equiv \mathbb{R} \setminus E$ est ouvert

exemple : $E =]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup [2, \infty[$ est fermé, alors $E^c =]0, 1[\cup]1, 2[$

- L'adhérence \overline{E} de E est le plus petit sous-ensemble formé de \mathbb{R} qui contient E . C'est à dire si $\mathbb{R} \supset A \supset E$, A fermé, alors $A \supset \overline{E}$. On a $\overline{E} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus E)$ ou encore $\overline{E} = \{a \in \mathbb{R} : \forall r > 0,]a - r, a + r[\cap E \neq \emptyset\}$

- le bord ∂E de E On a $\partial E = \overline{E} \setminus \dot{E}$ ou encore $\partial E = \{a \in \mathbb{R} : \forall r > 0,]a - r, a + r[\cap E \neq \emptyset,]a - r, a + r[\cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \emptyset\}$

- $a \in E$ est un point isolé de E s'il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\cap E = \{a\}$

- $\{\text{points limites}\} = \overline{E} \setminus \{\text{point isolés}\}$

Remarques :

- Soit $E \subset \mathbb{R}$ est borné et fermé, alors $\inf(E) \in E$ et $\sup(E) \in E$
- \inf et \sup d'un ensemble sont uniques
- \emptyset, \mathbb{R} sont à la fois ouverts et fermés.
- $E = \dot{E} \Leftrightarrow E$ est ouvert
 $E = \overline{E} \Leftrightarrow E$ est fermé

2.6.6 Valeur absolue

Définition : pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la valeur absolue par $|x| := x$ pour $x > 0$, $-x$ pour $x < 0$

propriétés : trou]

inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$|x + y| \geq ||x| - |y||$$

Identités (voir les exercices :)

$$|x + y| + |x - y| = |x| + |y| + ||x| - |y|| = 2\max\{|x|, |y|\}$$

$$||x + y| - |x - y|| = |x| + |y| - ||x| - |y|| = 2\min\{|x|, |y|\}$$

2.7 un truc qu'on verra après**2.8 Introduction aux nombres complexes**

motivation : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 + 1 \neq 0$

2.8.1 Définition du corps des nombres complexes \mathbb{C}

$$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2 \text{ donc } (a, b), (c, d) \in X$$

$$\mathbb{C} = \{X, +, \cdot\}$$

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(a, b)(c, d) := (a + c, b + d)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

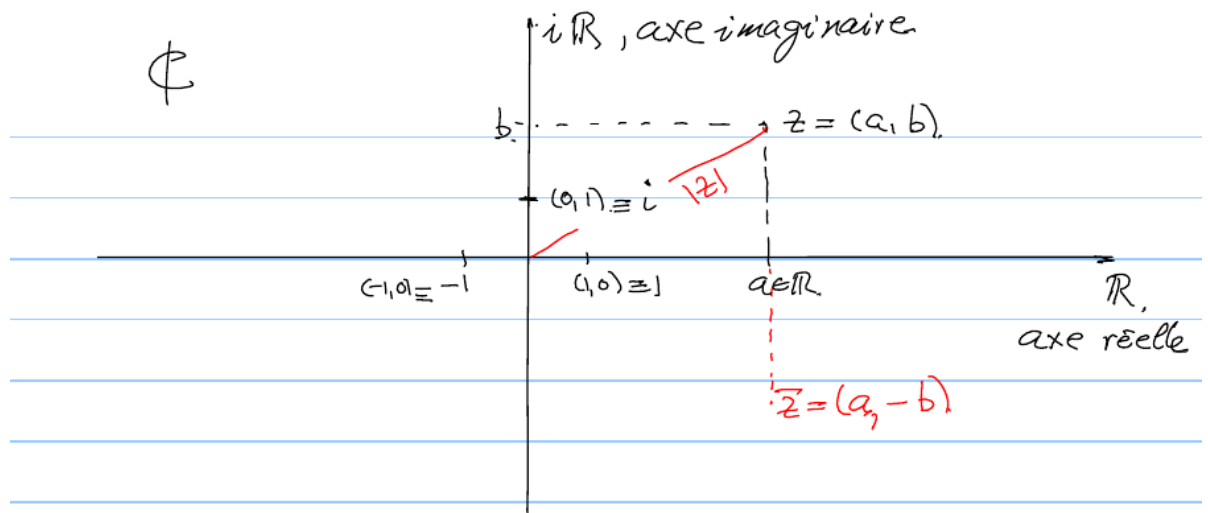
$$(a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

\mathbb{C} est un corps, appelé le corps des nombres complexes.

2.8.2 Représentation cartésienne

$$\text{On a } (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

on identifie $(a, 0) \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$



on a $(0, 1)[\equiv i] \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) \equiv -1$

$$(0, 1) \equiv i$$

Donc $i^2 = -1$, ou encore $i^2 + 1 = 0$

Pour $z = (a, b) \in \mathbb{C}$

$$z = (a, 0)[\equiv a] \cdot (1, 0)[\equiv 1] + (b, 0)[\equiv b](0, 1)[\equiv i] \equiv a + bi$$

donc

$$z = a + bi$$

C'est la forme ou représentation cartésienne de $z \in \mathbb{C}$ Soit $z_1 = a + bi, z_2 = c + id, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

En utilisant les règles de calculs "habituelles", plus $i^2 = -1$, on trouve

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

et on retrouve les opérations $+$ et \cdot de la définition de \mathbb{C}

2.8.3 Définitions

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$

Complexe conjugué de Z : $\bar{z} = a - bi \equiv a + i(-b)$ Propriétés:

- $\bar{\bar{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Partie réelle de $z = a + ib$: $Re(z) \equiv R(z) := a \in \mathbb{R}$

Partie imaginaire de $z = a + ib$: $Im(z) := b \in \mathbb{R}$

Valeur absolue (ou module) de z : $|z| = (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

En fait, on a pour $z = a + ib$

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - b^2 \geq 0$$

Remarque :

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \in \mathbb{R}$$

2.8.4 Élément inverse pour la multiplication

Soit $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot \bar{z} = 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

On a $z_1 = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$

En effet $z \cdot z_1 = z \cdot \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \cdot z$ or $\bar{z} \cdot z = |z|^2$ par définition, alors $= 1$

Notation pour l'inverse $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}

Remarque : " $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$ "

explicitement, pour $z = a + ib$ [trou cours]... $= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

2.8.5 Formules d'Euler et de Moivre

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$.

On pose $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ Formule d'Euler

avec les règles de calcul habituelles pour la fonction exponentielle :

pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$(e^z)^n = e^{nz}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

ainsi que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

avec $z = a + ib$, $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$

$e^a \in \mathbb{R}$ (exponentielle réelle)

$e^{ib} = \cos(b) + i \sin(b)$

$Re(e^{a+ib}) = e^a \cos(b)$, $Im(e^{a+ib}) = e^a \sin(b)$

On a aussi (Euler et règles pour Re, Im)

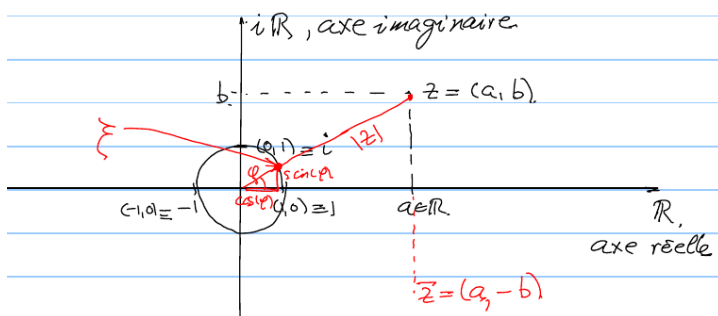
$\cos(\varphi) = Re(e^{i\varphi})$ [trou cours]

Formule de Moivre : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$, on a

$\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n$ [trou cours] $n = 3$:

$\sin(3\varphi) = Im(\cos(\varphi) + i(\sin(\varphi)))^3 = \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3$

2.8.6 Forme polaire d'un nombre complexe



$z \neq 0$, $z = |z| \cdot \zeta$ où $\zeta = \frac{1}{|z|}z$, $|\zeta| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$.

$\zeta = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$

Donc tout $z \neq 0$ est de la forme

$$a + ib = z = |z| \cdot e^{i\varphi} \quad (8)$$

où $\varphi = 2 \arctan(\frac{b}{1+\sqrt{a^2+b^2}})$ si $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ (ou π sinon)

la forme ou la représentation polaire de z .

Définition : Le nombre $\varphi \in]-\pi, \pi]$ est appelé l'argument de $z \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg(z)$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} 2 \cdot \arctan \frac{y}{x + \sqrt{y^2 + x^2}} & \text{si } y \neq 0 \text{ et si } x > 0, y > 0 \\ \pi & \text{si } x < 0, y = 0 \end{cases}$$

la forme polaire est mieux adaptée à la multiplication des nombres complexes.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors

$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$ et

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (9)$$

Soit $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. L'inverse :



$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$


$$= r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$


$$= r \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi)$$


$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$$

2.8.7 Exemples

1)  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$,  $-1 = e^{i\pi}$


2)  $-i = e^{i(\frac{3\pi}{2})} (= e^{-i\frac{\pi}{2}})$

Donc $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$, 

3)  $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc :

$$2i = 1 + 2i + i^2 = (1+i)^2 = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = 2 \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} = 2i$$

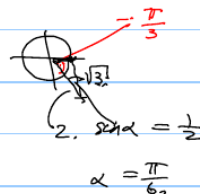
4) $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos(\frac{7\pi}{4}) + i \sin(\frac{7\pi}{4})} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{2}$



$$5) \quad z_1 = -1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{3}{4} \pi}$$



$$6) \quad z_2 = 1 - \sqrt{3} i = 2 \cdot e^{-i \frac{\pi}{3}}$$



$$7) \quad z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\pi(\frac{3}{4} - \frac{1}{3})} \\ = 2\sqrt{2} e^{i\pi \frac{5}{12}}$$

$$8) \quad (1 - \sqrt{3} i)^{30} = \left(2 \cdot e^{-i \frac{\pi}{3}} \right)^{30} = 2^{30} \underbrace{e^{-i \frac{\pi}{3} \cdot 30}}_{e^{-i\pi \cdot 10} = (e^{-i\pi \cdot 2})^5 = 1} = 2^{30} \\ = (2^{10})^3 = (1024)^3 = 1'073'741'824$$

$$9) \quad \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}} \right)^4 = \left(e^{-i \frac{\pi}{2}} \right)^4 = (-i)^4 = (-1)^2 = 1$$

$$10) \quad \sin(3\varphi) = \operatorname{Im}(e^{i3\varphi}) = \operatorname{Im}((e^{i\varphi})^3)$$

$$= \operatorname{Im}((\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^3)$$

$$= 3 \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3$$

2.8.8 La fonction et sa réciproque

Soit $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$z^2 = r^2 \cdot e^{i2\varphi}$, $2\varphi \in]-\pi, \pi[$

$$z = \sqrt{\omega} = \begin{cases} \sqrt{\omega} = \sqrt{x} & \text{pour } y = 0, x > 0 \quad \text{cas 1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\omega| + x} + i\sqrt{|\omega| - x}) & \text{pour } y > 0 \quad \text{cas 2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\omega| + x} - i\sqrt{|\omega| - x}) & \text{pour } y < 0 \quad \text{cas 3} \end{cases}$$

Cas 2 $(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\omega| + x} + i\sqrt{|\omega| - x}))^2 = \frac{1}{2}(|\omega| + x - |\omega| + x + 2i\sqrt{\omega^2 - x^2}) = x + iy$

2.9 Résolution des équations

2.9.1 "Racines" n-ièmes

Dans \mathbb{C} , l'équation

$$z^n = \omega \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^* \quad (10)$$

a toujours n solutions si $\omega \neq 0$. $z = \omega$ est la seule solution pour $\omega = 0$

Méthode "polaire"

- $\omega = |\omega| \cdot e^{i(\varphi+k2\pi)}$, avec $k = 0, \dots, n-1$
- $z_k = |\omega|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n} \cdot 2\pi)}$ avec $k = 0, \dots, n-1$

Exemples

- $z^2 = 1 = e^{i(0+k2\pi)}$ avec $k = 0, 1$
 $z_k = e^{i\frac{k}{2}2\pi}$ avec $k = 0, 1$
 $z_0 = e^0 = 1, z_1 = e^{i\pi} = -1$
- $z^3 = 1 = e^{i(0+k2\pi)}$ avec $k = 0, 1, 2$
 $z_k = e^{i\frac{k}{3}2\pi}$ avec $k = 0, 1, 2$
 $z_0 = e^0 = 1, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
- $z^3 = i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$, $k = 0, 1, 2$
 $z_0 e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
 $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
 $z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$
- $z^6 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+k2\pi)}$, $k = 0-5$
 $z_k = 2^{\frac{1}{12}} e^{i(\frac{\pi}{24} + \frac{k}{6}\pi)}$

2.9.2 Le cas $n = 2$ (méthode cartésienne)

Le cas $z^2 = \omega = x + iy$.

$$y = 0, x \geq 0 \rightarrow z_0 = \sqrt{x} \text{ et } z_1 = -\sqrt{x}$$

$$y = 0, x < 0 \rightarrow z_0 = i\sqrt{|x|} \text{ et } z_1 = -i\sqrt{|x|}$$

$$y \neq 0 \rightarrow z_0 = \sqrt{\omega}, z_1 = -\sqrt{\omega}$$

avec $\sqrt{\cdot}$ la fonction réelle ($y = 0$) ou complexe ($y \neq 0$)

Puisque $z^2 + pz + q = (z + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q$ l'équation $z^2 + pz + q = 0$ peut [trouver mikal]

2.9.3 Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme $p(z) = a_n z^n + \dots + a_i z^i + a_0, n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ admet dans \mathbb{C} n "racines" c'est à dire il existent $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $p(z_k) = 0, k = 0, \dots, n-1$ et on a la représentation $p(z) = a_n(z - z_0)\dots(z - z_{n-1})$

Exemples :

$$\begin{aligned} p(z) &= z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = (z-1) \cdot (z-1) \\ p(z) &= z^2 - 1 = (z+1) \cdot (z-1) \\ p(z) &= z^3 - 1 = (z-1) \cdot (z^2 + z + 1) \\ &= (z-1) \cdot (z - (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (z - (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{aligned}$$

2.9.4 Quelques résultats généraux

Si les a_k sont réels (polynôme réel), alors $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$ (vérifier. Dans ce cas, $p(\bar{z}_k) = 0$ si $p(z_k) = 0$, car $\bar{0} = 0$.

Explication : ou bien $z_k \in \mathbb{R}$ et on a un facteur réel, ou $z_k \notin \mathbb{R}$ ce qui donne des facteurs complexes conjugués $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$

Théorème : Tout polynôme à coefficients réels peut être factorisé dans \mathbb{R} en facteurs linéaires ou quadratiques

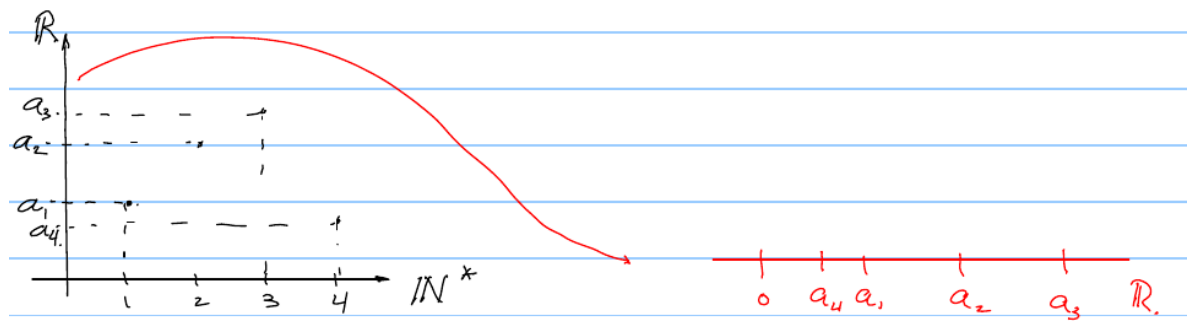
$$\text{Explication : } (z - z_k)(z - \bar{z}_k) = (z^2 - (z + \bar{z}_k)z + z_k \bar{z}_k)$$

3 Suite de nombres réels

Définition : On appelle suite de nombres réels toute application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Notation : On pose $a_n = f(n)$ et on écrit (a_n) ou $(a_n)_{n \geq 0}$ ou a_0, a_1, \dots pour la suite

Remarque : On écrira $(a_n)_{n \geq n_0}$ pour une suite numérotée par n_0, n_0+1, \dots



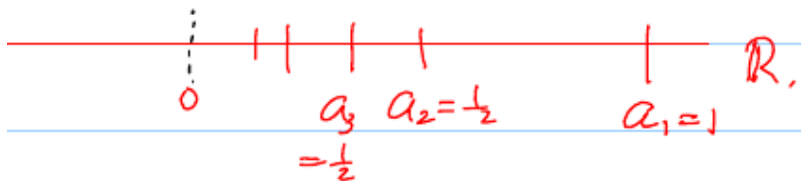
On s'intéresse à l'image de f : $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

3.1 Exemples :

3.1.1 Suite harmonique

$$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

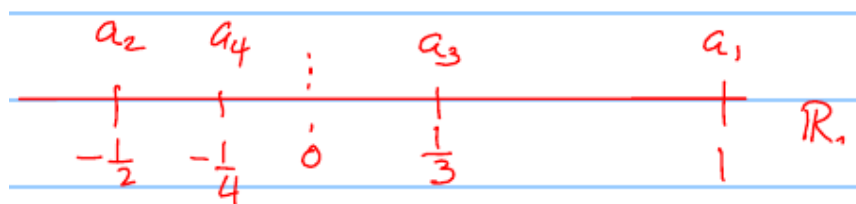
$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$



3.1.2 Suite harmonique alternée

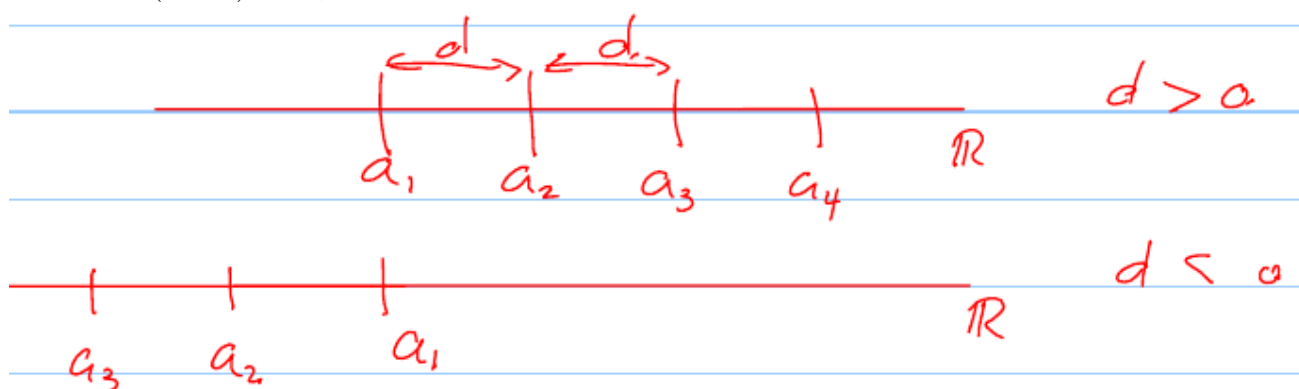
$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{4}, \dots$$



3.1.3 Suite arithmétique

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d, a, d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$



3.1.4 Suite géométrique

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, a, q \in \mathbb{R}, q \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$$

- Si $q = 1$: $a_n = a_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- si $q = -1$:

- si $q > 1$: pour $a=1, q=2$

- si $q < 1$: Exemple $q = \frac{1}{2}$

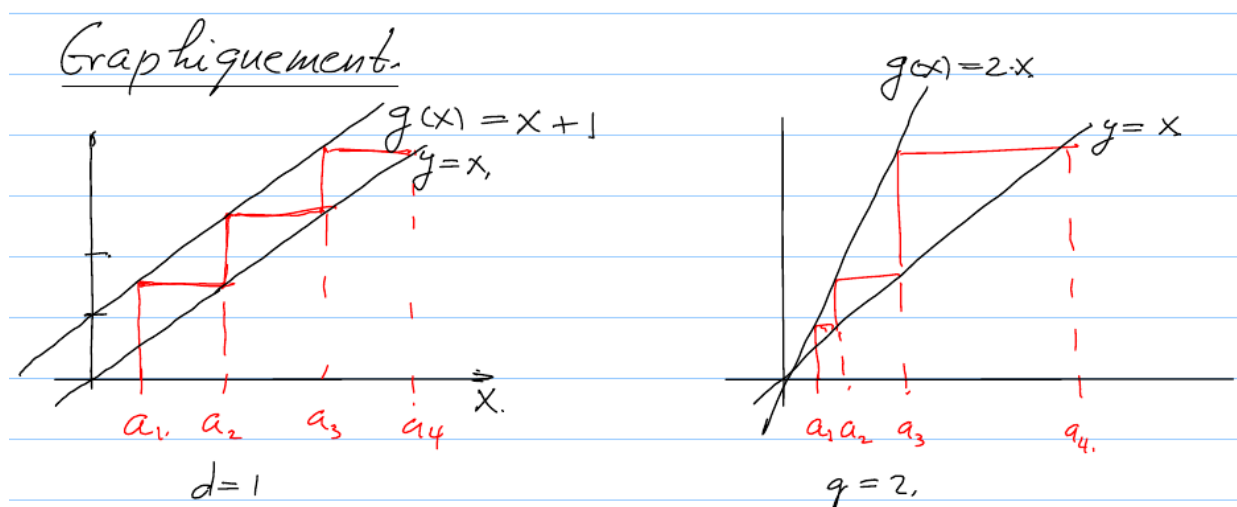
3.2 Suites définies par récurrence

Soit $a_1 \in \mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{D}(g) = \mathbb{R}$

$$a_n = g(a_{n-1}), n = 2, 3, 4, \dots$$

Exemples :

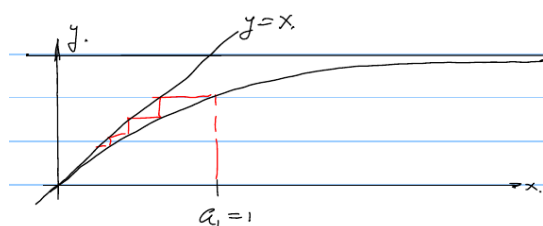
- $g(x) = x + d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d$ Suite arithmétique (démonstration par récurrence)
- $g(x) = x \cdot q \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q$ suite géométrique (démonstration par récurrence également)



- $g(x) = \frac{x}{x+1}$ pour $a_1 = 1$ on obtient la suite harmonique.
démonstration par récurrence :

$$- a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

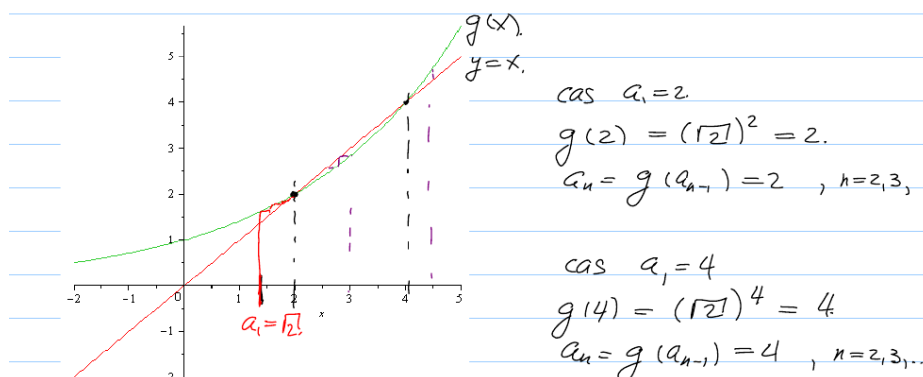
$$- g(a_{n-1}) = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} = \frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n} = a_n$$



- $a_1 = \sqrt{2}, g(x) = (\sqrt{2})^x = (1.414\dots)^x$

$$a_n = (\sqrt{2})^{a_{n-1}}$$

$$a_1 = \sqrt{2} = 1.414\dots, a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = 1.63\dots, a_3 = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}, \dots, a_{10} = 1.983\dots, a_{1000} = 1.999\dots$$



3.3 Définitions

Suite croissante une suite (a_n) est croissante si $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Suite décroissante une suite (a_n) est décroissante si $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Suite monotone Une suite (a_n) est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Suite majorée Une suite (a_n) est majorée si $E = \{a_0, a_1, \dots\} \subset \mathbb{R}$ est majoré

Suite minorée Une suite (a_n) est minorée si $E = \{a_0, a_1, \dots\} \subset \mathbb{R}$ est minoré

Suite bornée Une suite (a_n) est bornée si elle est minorée et majorée

Plus petit majorant d'une suite $\sup(a_n) := \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

Plus grand minorant d'une suite $\inf(a_n) := \inf\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

Minimum et maximum d'une suite

$\max(a_n) := \max\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ s'il existe

$\min(a_n) := \min\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ s'il existe

Exemple 2.3

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}$$

$1 \leq a_n \leq 2$ La suite est bornée

$$\sup(a_n) = \max(a_n) = 2$$

$\inf(a_n) = 1$, pas de minimum.

3.4 Limite d'une suite

Définition : une suite (a_n) est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $a \in \mathbb{R}$ et l'on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (1)$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe n_0 tel que $|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq n_0$

remarque : $\Rightarrow a$ est un point adhérent à $\{a_0, a_1, \dots\}$

remarque : $|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$

remarque : La démonstration dans l'exemple 2.3 montre que la suite $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ converge vers $a = 1$, car $\forall \epsilon > 0$ on a $1 \leq a_n \leq 1 + \epsilon, \forall n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$

Notations équivalentes

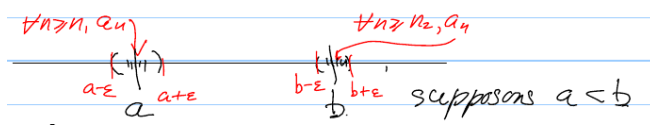
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a : n \rightarrow a \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

exemples :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ même démonstration que dans l'exemple 2.3
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n}$ pas de limite

Proposition : Si une suite converge, sa limite est unique.

Démonstration par l'absurde

Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ avec $b \neq a$. 

Soit $\epsilon \leq \frac{1}{3}(b - a)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists n_1 \forall n \geq n_1 |a - a_n| < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \Leftrightarrow \exists n_2 \forall n \geq n_2 |b - a_n| < \epsilon$$

Soit $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, alors pour $n \geq n_0$ on a

$$|a - a_n| < \epsilon \text{ ET } |b - a_n| < \epsilon$$

$$\text{Donc } |b - a| = |(b - a_n) - (a - a_n)| \leq |b - a_n| + |a - a_n| < \epsilon + \epsilon < \frac{2}{3}|b - a|$$

$$\text{Donc } 0 < \frac{1}{3}|b - a| < 0$$

$$\text{Donc } b - a = 0 \rightarrow b = a$$

3.5 Suite divergentes et fortement divergentes

Définition : Une suite (a_n) qui n'est pas convergente est appelée divergente.

Exemple : $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ est une suite divergente. Suites "fortement divergentes"

Définition : Soit (a_n) une suite telle que pour tout $r \geq 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, a_n \geq r$ alors on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Exemple : $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$

Définition : Soit (a_n) une suite telle que pour tout $r > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, a_n \leq -r$, alors on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Exemple : $\lim_{n \rightarrow \infty} -n = -\infty$

Attention : Par abus de langage, on dit souvent que la suite (a_n) "converge"

vers ∞ ou $-\infty$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Remarque : La suite $a_n = (-1)^n \cdot n$ diverge, et elle ne "converge" pas non plus vers ∞ ou $-\infty$

3.6 Opérations algébriques sur les limites

Si ! $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

alors (à vérifier en utilisant les définitions !)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha a + \beta b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \dots = \frac{a}{b}$ si $b_n \neq 0, b \neq 0$

Conséquences : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(a_n - a)}_{a_n} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Exemples : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot (1 + \frac{3}{2n})}{3n(1 - \frac{5}{3n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 - \frac{5}{3n}} \right) = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 - \frac{5}{3n}} = \frac{2}{3} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{2n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{3n})} = \\ \frac{2}{3} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{3}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{5}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)} &= \frac{2}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} \cdot 0}{1 - \frac{5}{3} \cdot 0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Attention aux hypothèses:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{\infty}{\infty}$$

Manipulation de ∞ et 0 :

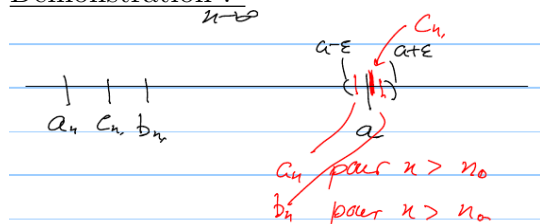
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{0}{\infty} = 0$

- $c + \infty = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = 0 \forall c \in \mathbb{R}$
- $c \cdot \infty = \infty, c > 0$

3.7 Théorème des deux gendarmes

Théorème : Soit $(a_n), (b_n), (c_n)$, trois suites telles que $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

Démonstration :



$\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tel que $|a_n - a| \leq \epsilon$ et $|b_n - a| \leq \epsilon$

Donc

$$\underbrace{-\epsilon}_{\leq} \leq a_n - a \leq \underbrace{c_n - a}_{\leq} \leq b_n - a \leq \underbrace{\epsilon}_{\leq} \quad (2)$$

$$\Rightarrow |c_n - a| \leq \epsilon$$

Exemples :

- $a_n := \underbrace{\frac{-1}{n^2 + 1}}_{n \rightarrow \infty, \text{ donc } 0} \leq c_n = \frac{\cos(7n^2 + 3)}{n^2 + 1} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2 + 1}}_{n \rightarrow \infty, \text{ donc } 0}$

donc $c_n = 0$
- $a_n := \underbrace{1}_{n \rightarrow \infty, \text{ donc } 1} \leq c_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{n \rightarrow \infty, \text{ donc } 0}$

1
-

3.8 Critères de convergence

Théorème : Toute suite croissante et majorée (décroissante et minorée) est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n)$ (et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(a_n)$)

Corollaire : Toute suite monotone et bornée est convergente

Démonstration (pour le sup, pour l'inf voir l'Exemple 2.3)

- $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tel que $a_{n_0} > a - \epsilon$ par définition du sup.
- $\forall n, a_n \leq a$ Par définition du sup
- $a_n \geq a_{n_0}, \forall n \geq n_0$ car la suite est croissante

Donc : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0, a - \epsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq a \leq a + \epsilon$

C'est à dire $|a_n - a| < \epsilon$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ par définition de la suite.

Rappels :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, 0! = 1$$

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = A^n + nA^{n-1}B + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$$

Exemple : (majoré + croissant \Rightarrow converge)

$$a^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ (série 6, exo 6)}$$

La suite est majorée $a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$k! = 1 \cdot 2 \dots \cdot k \geq 2^k - 1$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

La suite est croissante $a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 1(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})$

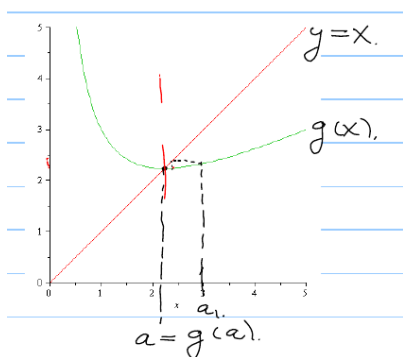
$$\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 1(1 - \frac{1}{n+1}) \dots (1 - \frac{k-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!} 1(1 - \frac{1}{n+1}) \dots (1 - \frac{n}{n+1}) = a_{n+1}$$

1+2 implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n := e = 2.718..$ (nombre d'Euler)

3.9 Convergence d'une suite définie par récurrence (un exemple)

$$a_1 = 3, a_n = g(a_{n-1}), n = 2, 3, g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \frac{1}{x}$$

c'est à dire : $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}}$



Montrons que la suite est minorée et décroissante (converge)

1. $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (la suite est bien définie)

par récurrence : $a_1 = 3 > 0 \rightarrow a_n > 0$ si $a_{n-1} > 0, n = 2...$

2. On calcule la limite sous l'hypothèse qu'elle existe

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} = \frac{1}{2}a + \frac{5}{2} \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{5} \text{ } (-\sqrt{5} \text{ n'est pas possible})$$

3. La suite est minorée par $\sqrt{5}$ ($\sqrt{5} = \inf(a_n)$)

Démonstration par récurrence ($P_n : a_n \geq \sqrt{5}$)

- $a_1 = 3 \geq \sqrt{5}$
- $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}}) = \frac{1}{2a_{n-1}}(a_{n-1}^2 + 5) = \frac{1}{2a_{n-1}}(a_{n-1} - \sqrt{5})^2 + \sqrt{5} \geq \sqrt{5} (P_n)$

4. La suite est décroissante (car $a_n \geq \sqrt{5}$ ou par récurrence)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{-a_{n-1}^2 + 5}{2a_{n-1}} \leq 0$$

$2 + \underbrace{3 + 4}_{\text{série convergente}} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{5}$

Remarques

- Toute suite convergente est bornée
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ et si pour $n \geq n_0$ on a $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$
- Critère du quotient pour les suites : si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ existe, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ si $0 \leq \rho < 1$ et la suite diverge si $\rho > 1$. Aucune conclusion si $\rho = 1$
- Si a_n est une suite croissante, et b_n est une suite décroissante, et si $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, alors :
 - $a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0$
 - $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ existent

3.10 Suites de Cauchy

Critère de convergence \Leftrightarrow à la définition de convergence pour les suites de nombres réels

Définition : Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad (3)$$

Théorème : Une suite de nombres réels est une suite de Cauchy si et seulement si la suite est une suite convergente.

Démonstration :

$$\Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a : \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 |a - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{donc, } \forall m, n \geq n_0 |a_n - a_m| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

" \Rightarrow " nécessite B.W. (Bolzano-Weierstrass), voir 2.13

3.11 Application : Suites récurrentes linéaires

Soit $g(x) = qx + b, q \neq 1$ et $a : \frac{b}{1-q}$

On a $g(a) = a$

Théorème : Soit $a \in R, a_n = g(a_{n-1}), n = 2, \dots$

- si $|q| < 1$ alors la suite converge
- si $|q| > 1$ et $a_1 \neq a$ la suite diverge

Exemple : $(a_1 = 3), a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1, n = 2$

Démonstration:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = ag(a)$ si la limite existe
- $n \geq 2, |a_n - a_{n-1}| = |(qa_{n-1} + b) - (qa_{n-2} + b)| = |q(a_{n-1} - a_{n-2})| = |q||a_{n-1} - a_{n-2}| = \dots = |q|^{n-2}|a_2 - a_1|$ (= par récurrence)
 \Rightarrow divergente si $|q| > 1, a_2 \neq a_1 \neq a$

- Soit $n > m \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{m+1} - a_m)| \\ &\leq (|q|^{n-2} + |q|^{n-3} + \dots + |q|^{m-1})|a_2 - a_1| \\ &= |q|^{m-1} \underbrace{(1 + |q| + \dots + |q|^{n-m-1})}_{\sum_{k=0}^{n-m-1} |q|^k = \frac{1-|q|^{n-m}}{1-|q|}} |a_2 - a_1| \\ &\leq \frac{1}{1-|q|} |q|^m [trou] \end{aligned}$$

$$2+3 : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Cauchy, limite existe

3.12 Généralisation : théorème de point fixe de Banach

Théorème : Soit I un intervalle fermé et $g: I \rightarrow I$ tel que

$$|g(x) - g(y)| \leq |q| \cdot |x - y|, \forall x, y \in I, |q| < 1 \quad (4)$$

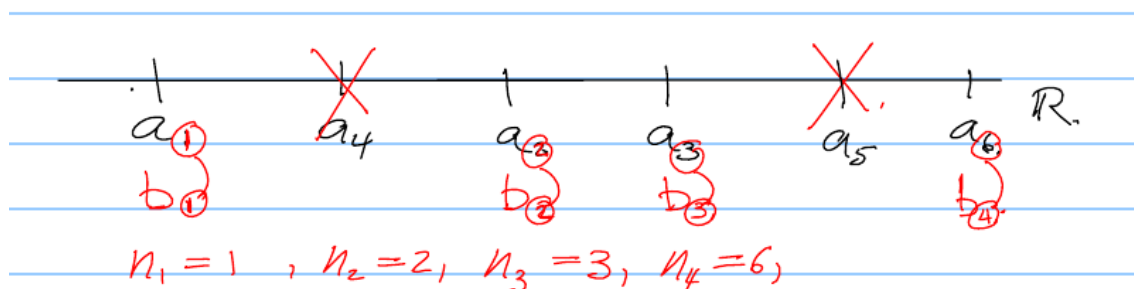
alors

- il existe un unique $a \in I$ tel que $a = g(a)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ pour toute suite $a_n, a \in I$
et $a_n = g(a_{n-1}), n = 2, \dots$

3.13 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition : Soit (n_k) une suite d'entiers naturels telle que $n_k > n_l$ si $k > l$

Alors la suite $(b_k), b_k = a_{n_k}$ est appelée une sous-suite de la suite a_k



Théorème : B.W. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exemple : $a_n = (-1)^n$

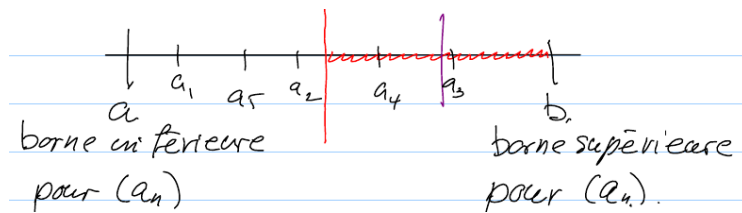
$a_n \in [-2, 2]$, donc (a_n) bornée

$$b_k = a_{\underbrace{2k}_{n_k}} = (-1)^{2k} = 1$$

$$c_k = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$$

Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = -1$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ n'existe pas.

Explication :



On divise par deux l'intervalle $[a, b]$ qui contient tous les (a_n) et on retient une moitié qui contient un nombre infini des a_n . Puis on recommence. Par récurrence on détermine l'existence d'une limite

3.14 Limites inférieures et limite supérieure d'une suite a_n bornée

Définition : $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de (a_n) s'il existe une sous-suite (b_k) telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a$

$$E_1 = \{a_1, \dots\} \inf(E_1) = b_1, \sup(E_1) = c_1$$

$$E_2 = \{a_2, \dots\} \inf(E_2) = b_2, \sup(E_2) = c_2$$

$$E_3 = \{a_n, \dots\} \inf(E_n) = b_n, \sup(E_n) = c_n$$

(b_n) une suite croissante et bornée

(c_n) une suite décroissante et bornée

$$\Rightarrow b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\Rightarrow c := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n =: \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Remarque : Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (5)$$

4 Séries numériques

4.1 Définition

On aimerait définir des "sommes infinies" $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, pour $a_k \in \mathbb{R}$, c'est à dire pour (a_k) une suite donnée. Une telle somme infinie est appelée une série numérique.

Définition : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^n$

Donc : $s_0 = a_0$

$$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$

Terminologie

- les a_n sont appelés les termes de la "somme infinie"
- La somme finie s_n est appelée n-ième somme partielle de la somme infinie.

Exemple : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} := \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Définition : une série numérique est dite convergente si la suite (s_n) des sommes partielles converge. La limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ est appelée la somme de la série

Définition : une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge

Remarques :

- toute série absolument convergente est convergente
- La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de la numérotation de ses termes.

4.2 Exemples

4.2.1 La série harmonique

$$(S =) \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} \text{ cette série diverge}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ (la limite n'existe pas)

Démonstration (raisonnement par l'absurde)

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, b_n = s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Supposons que $\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}}_{\text{Hypothèse}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{b_n}_{\text{par définition de la limite}} = s$

$$\text{Alors } b_n - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

4.2.2 La série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} (= \ln 2), (-1)^0 = 1 \quad (1)$$

- La série converge, mais pas absolument.

4.2.3 La série géométrique

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, q \in \mathbb{R} \quad (2)$$

- La série géométrique converge absolument pour $0 \leq |q| < 1$
- La série géométrique diverge pour $|q| \geq 1$

Démonstration

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (3)$$

si $|q| < 1, n \rightarrow \infty$ alors

$$\frac{1}{1 - q} \quad (4)$$

4.3 Critères de convergence

4.3.1 Critère nécessaire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} &\rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 &\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{ ne converge pas} \end{aligned}$$

Démonstration

Si la série numérique converge, la suite $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ est une suite de Cauchy. Cela veut dire que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n, m \geq n_0, |s_n - s_m| < \epsilon$. En particulier $|s_n - s_{n-1}| < \epsilon$. Mais si $|s_n - s_{n-1}| = |a_n|$, alors $|a_n| < \epsilon$. On a donc que $\forall \epsilon > 0$ il existe n_0 tel que $|a_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

4.3.2 Critère de Leibnitz

Si (a_k) est une suite alternée ($(-1)^{k-1}a_k \geq 0$ ou ≤ 0 pour tout k). Si $(|a_k|)$ est strictement décroissante ($|a_{k+1}| < |a_k| \forall k$) et si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, alors la série converge.

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}, a_k = \frac{1}{k} \quad (5)$$

Les 3 critères sont donc à respecter pour que ce soit une suite de Leibnitz :

- La suite doit être alternée
- $|a_k|$ doit être strictement décroissant
- $|a_k|$ doit tendre vers 0

4.3.3 Critère de comparaison

- Si $(0 \leq) |a_k| \leq b_k \forall k$ et si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge (absolument)
- si $0 \leq b_l \leq a_k$ et si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

4.3.4 Critère de d'Alembert et de Cauchy

Théorème Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q \text{ existe (d'Alembert)} \quad (6)$$

ou si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} \text{ existe (Cauchy)} \quad (7)$$

Alors

- si $0 \leq q < 1$ La série converge
- si $q \geq 1$ La série diverge
- si $q = 1$, pas de conclusion par cette méthode

Remarque Les deux méthodes donnent la même valeur pour q . [trou exemple]

4.4 Série avec paramètres

1. Soit la série

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{b^k}, b \neq 0 \text{ un paramètre} \quad (8)$$

La convergence dépend du choix de b . Selon d'Alembert,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(k+1)^2}{b^{k+1}}}{\frac{k^2}{b^k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)^2}{bk^2} \right| = \frac{1}{b} = q \quad (9)$$

- La série converge absolument pour $|b| > 1$
- La série diverge pour $0 < |b| < 1$
- Le critère ne s'applique pas pour $b = \pm 1$.

Dans ce cas, on a $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$ ou $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2$. Ces séries divergent par les critères des sections précédentes.

2. Soit la série $s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, $x \in \mathbb{R}$. Selon d'Alembert,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{1}{k!} x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{k+1} \right| = 0 = q$$

La série converge donc pour tout x .

5 Fonctions réelles d'une variable réelle

5.1 Terminologie, conventions

Nous considérons des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x)$ pour $x \in D(f) \subset \mathbb{R}$ le domaine de définition de f

Convention :

En pratique, une fonction est souvent donnée par une expression (une formule, par exemple $f(x) = x^2$). Alors, il est entendu que le domaine de définition que $D(f)$ soit le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R} sur lequel l'expression est bien définie.

Exemples

$$f(x) = \sin(x) \iff \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, D(f) = \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = \sin(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2}{1-x^2} \iff \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ x &\rightarrow y = \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

5.1.1 Fonctions polynômes

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, D(f) = \mathbb{R} \quad (1)$$

5.1.2 Fonctions rationnelles

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, p, q, \text{ des fonctions polynômes } D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\} \quad (2)$$

5.1.3 Fonctions algébriques

Fonctions construites à partir de fonctions polynômes et un nombre fini d'opérations $+, -, \cdot, /$, $\sqrt[n]{}$

5.1.4 Fonctions transcendentes

Toutes les fonctions qui ne sont pas algébriques.

Par exemple : $\sin(x), \ln(x), e^x, \cos(x), \dots$

5.2 Définitions

Croissant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *croissante* si $x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in D(f)$. Elle est *strictement croissante* si $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Décroissant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *décroissante* si $x_1 \geq x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in D(f)$. Elle est *strictement décroissante* si $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Monotone Une fonction est *monotone* si elle est soit croissante soit décroissante.

Symétrique Un ensemble est *symétrique* (par rapport à 0) si $x \in \mathbf{X} \rightarrow -x \in \mathbf{X} \forall x \in \mathbf{X}$.

Exemples : $[-1, 2]$ et $[-2, 1]$ ne sont pas symétriques, alors que $[-3, 3]$ et $[-2, 1] \cup [1, 2]$ le sont.

Paire Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *paire* si $D(f)$ est symétrique et si $f(x) = f(-x) \forall x \in D(f)$

Exemples : $0, 1, x^2, \cos x, \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \dots$

Impaire Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *impaire* si $D(f)$ est symétrique et si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D(f)$

Exemples : $0, x, x^3 \sin(x), \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Périodique Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *périodique* de période $\mathbf{T} > 0$ si $D(f) = \mathbb{R}$ et si $f(x + \mathbf{T}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Le plus petit $\mathbf{T} > 0$ tel que les conditions sont respectées est appelé la période de f

Exemple : la fonction $\sin^2(x)$ est 2π périodique, mais la période est de π

5.3 Les fonctions sinh et cosh

Remarque Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D(f)$ symétrique. Alors $f = f_+ + f_-$, avec f_+ une fonction paire, et f_- une fonction impaire. On a

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$

$$f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Exemple : $f(x) = e^x$

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

5.4 Opérations algébriques

5.4.1 Fonctions avec parité

Soient p_1, p_2, p_3 des fonctions paires, et i_1, i_2, i_3 des fonctions impaires définies sur un domaine symétrique $D, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors :

- $p_1 + p_2$ est pair
- $p_1 \cdot p_2$ est pair
- $i_1 + i_2$ est impair
- $i_1 \cdot i_2$ est **pair**
- $p \cdot i$ est impair

- $i_1 \circ i_2$ est impair, $\mathfrak{S}(i_2) \in D(i_1)$
- $f \circ p$ est pair, $\mathfrak{S}(p) \in D(f)$
- $p \circ 1$ est pair, $\mathfrak{S}(i) \in D$

Vérification-Exemple : $(i_1 \circ i_2)(-x) = i_1(i_2(-x)) = i_1(-i_2(x)) = -i_1(i_2(x)) = -(i_1 \circ i_2)(x)$

Exemples:

Fonction pairs $\cos(x) + x^2, \sin(x^2), \cos(\sin(x)), \exp(\cosh(x))$

Fonction impairs $\sin(x) + x, \sin(x^3), \sin(\sinh(x)), \sin^3(x)$

5.4.2 Fonctions périodiques

Soient f, g ds fonctions périodiques de période T_f et T_g ($T_f, T_g > 0$), $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Alors

$$\left. \begin{array}{l} f + g \\ f \cdot g \end{array} \right\} \text{ est T-périodique } \Longleftrightarrow \frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$$

$h \circ f$ est T_f périodique

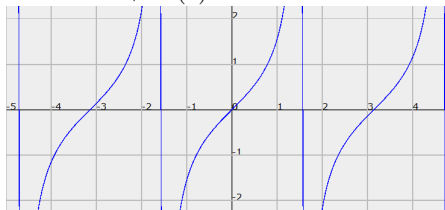
Remarque $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q} \rightarrow \frac{T_f}{T_g} = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N}^*$

$$T = T_f \cdot s = T_g \cdot r$$

Attention Même si T_f et T_g sont la période de f et g , T n'est typiquement pas la période de $f+g$ ou $f \cdot g$, et T_f n'est typiquement pas la période de $h \circ f$

5.5 Exemples

1. $f(x) = \frac{x^3 \cos(x)}{x + \tan(x)}$



$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

- la fonction est paire
- f n'est pas périodique

2. $\frac{\sin(3x)}{\cos(5x)}, \mathbf{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(5x) \neq 0\}$

la période de $\cos(x)$ est de $2\pi \rightarrow$ la période de $\cos(5x)$ est de $\frac{2\pi}{5} = T_f$

la période de $\sin(3x)$ est de $\frac{2\pi}{3} = T_g$

on a $\frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q} \rightarrow f$ est périodique de $\frac{2\pi}{5} \cdot 5 = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi$

- f est une fonction impaire
- Après inspection du graph, on trouve que la période est de π

la période est de 2

3. $f(x) = -\overbrace{\sin(\pi \cdot x)} + \underbrace{\cos(x)}$
la période est de 2π

- fonction pas périodique, car $\frac{2\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$
- f n'a pas de parité

Définie sur le domaine de $\tan(x)$

4. $f(x) = \overbrace{\sin(\tan(x))} - \underbrace{\tan(\sin(x))}$
Bien définie sur $x \in \mathbb{R}$

- période de 2π
- impaire

5.5.1 Composition (un exemple)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x > 1 \\ -x & \text{pour } x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \geq 0 \\ 2x + 3 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

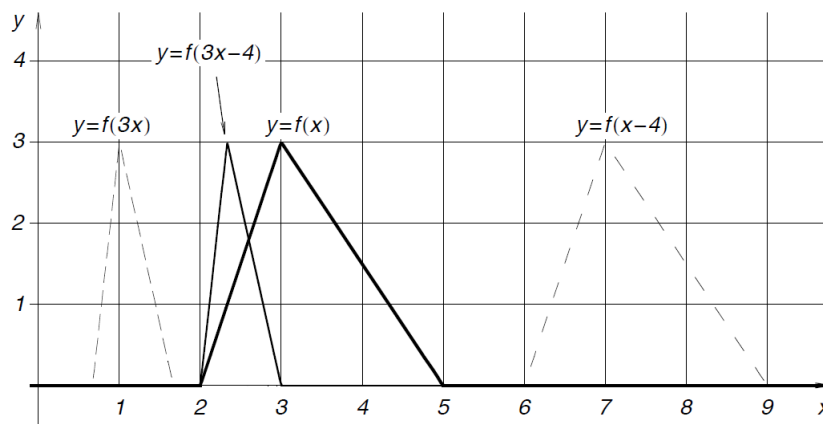
$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \geq 1 \\ -x^2 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 2x + 3 & \text{pour } -1 \geq x < 0 \\ -(2x + 3) & \text{pour } x < -1 \end{cases}$$

5.5.2 Les fonction signum et Heaviside

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ -1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

5.6 Transformation affines (rappel, voir les pré-requis)



$$f(3x - 4) \equiv f(3x) - 4 \equiv g(3x) \rightarrow g(x) = f(x - 4)$$

$$f(3x - 4) \equiv f(3(x - \frac{4}{3})) = h(x - \frac{4}{3}) \rightarrow h(x) = f(3x)$$

5.7 Limites

5.7.1 Définitions

Dans ce chapitre, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{D}(f) \subset]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que $x_n \in \mathbf{D}(f)$ et supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \in]a, b[$

Question : Que peut-on dire de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ où $y_n = f(x_n)$ pour f quelconque ?

Réponse : Rien du tout : Donnés (x_n) et (y_n) on peut trouver une fonction telle que $f(x_n) = y_n$ (on définit f de cette manière).

Définition (limite épointée)

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite (épointée) $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend

1. vers x^* . Si pour toute suite $(x_n), x_n \in \mathbf{D}(f) \setminus \{x^*\}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. La suite $(y_n), y_n = f(x_n)$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$ (\iff la même limite pour toutes les suites admises)

2.

Définition (limite du doc de référence)

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^* . Si pour toute suite $(x_n), x_n \in \mathbf{D}(f)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. La suite $(y_n), y_n = f(x_n)$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$ (\iff la même limite pour toutes les suites admises)

Remarques importantes

1. Si $x^* \notin \mathbf{D}(f)$, les deux définitions coïncident
2. Si $x^* \in \mathbf{D}(f)$
 - la limite dans 1. (la valeur de n) peut être différente de $f(x^*)$ car on ne regarde jamais la valeur de $f(x^*)$ dans le calcul de l
 - On a $l = f(x^*)$ dans 2. (si la limite existe) car (x_n) avec $x_n = x^*$ pour tout n est une suite admise dans 2. (mais pas dans 1.)

Notations :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = l$ Limite épointée
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = l$ Limite selon le document de référence.

Remarques (au cas ou $x^* \in \mathbf{D}(f)$)

- Il se peut que 1. existe mais pas 2
- ex: $\begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ n'existe pas

- Il se peut que 2 existe mais pas 1 ex: $f : [0, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 1$

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} f(x)$ n'existe pas
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Exemple : (avec $x \notin \mathbf{D}(f)$)

1. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, p(x) = x^2 + 2x + 1, q(x) = x + 1$

$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on choisit $x^* = -1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} (x+1) \underbrace{=}_{\text{Def}} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) \text{ Il faut}$$

contrôler toutes les suites (x_n) telles que $x_n \neq -1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$

$$= (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) + 1 = 0$$

2. Non-existence d'une limite

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Soit $x^* = 0$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x)$ n'existe pas. Pour montrer cela :

- Il suffit de trouver une suite (x_n) telle que $x_n \neq x^*$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ mais telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ n'existe pas.

ou

- on trouve deux suites (x_n) et (\tilde{x}_n) telles que $x_n \neq x^*, \tilde{x}_n \neq x^*, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l, \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = \tilde{l}$ [trou mika, jusqu'aux 2 graphiques concentrés]

5.7.2 Limites

Définition : Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite à droite (à gauche) $l_+ \in \mathbb{R}$ ($l_- \in \mathbb{R}$) lorsque q tend vers x^* , si pour toute suite $(x_n), x_n \in \mathbf{D}(f)$ telle que $x_n > x^*$ ($x_n < x^*$). La suite $(y_n), y_n = f(x_n)$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l_+$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l_-$).

Notations

$$\lceil \lim_{x \rightarrow x^*+} f(x) \rceil \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x > x^*}} f(x) = l_+$$

$$\lceil \lim_{x \rightarrow x^*-} f(x) \rceil \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x < x^*}} f(x) = l_-$$

petit trou

Exemple : $f(x) = \frac{|x|}{x}$. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}$ n'existe pas. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} cf(x) = 1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} cf(x) = -1$ et $-1 \neq 1$

5.7.3 Opérations algébriques sur les limites

\lim

$$x \rightarrow x^*$$

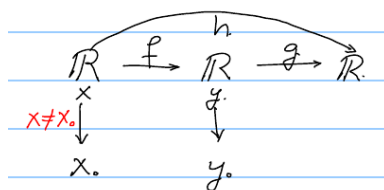
Si $x \neq x^*$

$$x > x^*$$

$$x < x^*$$

[trou mika]

Exemple $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} (3x^2 - 2xx + 5) = \dots = 3(\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} x)^2 - 2(\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} x) + 5 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 3$

5.7.4 Limites épointées et composition de fonctions

(attention au piège) soit

$$\text{avec } \lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = y^*, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow y^* \\ y \neq y^*}} g(x) = l$$

Alors (attention aux conditons)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} h(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} g(f(x)) = l$$

Pourvu que pour toute suite (x_n) , $x_n = x^*$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ il existe un n_0 tel que $f(x_n) \neq y^*$ pour tout $n \geq n_0$

Remarque : Cette difficulté disparaîtra pour f,g des fonctions continues.

Exemple : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 1 \\ 2 & \text{pour } x \neq 1 \end{cases}$

$$f(x) = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$g(f(x)) = 0$ pour tout x , mais $\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = 1 = y^*$ et $\lim_{\substack{y \rightarrow y^* \\ y \neq y^*}} g(y) = 2 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 = x^* \\ x \neq 0}} [\text{petit trou}]$

5.7.5 "Limites infinies" et comportement à ∞

Conventions :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) veut dire que pour toute suite $x_n, x_n \in \mathbf{D}(f), x_n \neq x^*, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ on a (ou $-\infty$)
- encore un trou...

5.7.6 Théorème des deux gendarmes

Théorème soit f, g , des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

- $\mathbf{D}(h) \subset \mathbf{D}(f) \cap \mathbf{D}(g)$ pour x proche de x^*
- pour x proche de x^*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad (3)$$

- $f(x) = g(x) = l$

Alors $h(x) = l$

" x proche de x^* " : $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \neq x_0$ avec $|x - x^*| < \epsilon$

Démonstration

soit (x_n) une suite dans $\mathbf{D}(h), x_n \neq x^*, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Par hypothèse 1 et 2, on a

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n) \quad (4)$$

pour n suffisamment grand. En utilisant le point 3. et le théorème des deux gendarmes pour les suites, alors $h(x_n)$ tend vers l

5.7.7 Exemples

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}}_{=h(x)}$$

Sans restriction $x > 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &\leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = \frac{1}{2} \\ &\geq \frac{x}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{2\sqrt{x^2 + x}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2 \underbrace{\sqrt{x^2 + x}}_{\geq x} \underbrace{(\sqrt{x^2 + x} + x)}_{\geq 2x}} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{2} &\geq h(x) \geq \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4x}}_{x \rightarrow \infty: \frac{1}{2} - \frac{1}{4\infty} = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \geq \frac{1}{2}$ et donc $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{1}{2}$

$$2. \text{ Reminder : pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x$$

$\lim_{x \rightarrow \neq 0} \cos(x) = 1$. Une fonction paire : on peut se limiter à $x > 0$. On va prendre $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2} \geq \sqrt{1 - 2\sin(x)^2 + \sin(x)^4} \\ &= 1 - \sin(x)^2 \geq 1 - x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\underbrace{1}_{\geq 1} \geq \cos(x)}_{\geq 1} \geq \underbrace{1 - x^2}_{\geq 1}$$

Remarque : $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\frac{1}{n})$

$$3. \lim_{x \rightarrow \neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1; \frac{\sin(x)}{x} \text{ est une fonction paire.}$$

Pour $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On multiplie par $\frac{1}{\sin(x)}$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow \underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow 0} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

$$\begin{aligned} 4. \lim_{x \rightarrow \neq 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \geq 0} \left(\overbrace{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}^{\sin^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} \right) = \left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} \right) \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

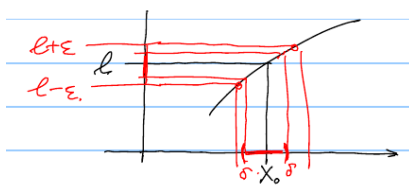
$$6. f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow > 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = 0$$

5.7.8 Définition de la limite (épointée) avec ϵ et δ

(Définition équivalente à la définition avec les suites)

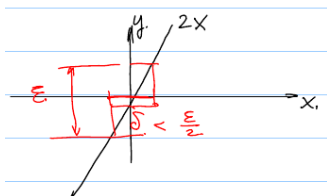


Définition : La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet par limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^* , si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|f(x) - l| < \epsilon, \forall x \in \mathbf{D}(f)$ tels que $0 < |x - x^*| < \delta$

Exemple : $f(x) = 2x, x^* = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} = 0 = l$

A montrer : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ tel que $|2x - 0| < \epsilon$ (ok pour $\delta = \frac{\epsilon}{2}$)

Car $|2x - 0| = |2x| = 2|x| = 2|x - 0| \leq 2\delta \leq \epsilon$



5.8 Fonctions continues

Notation : A partir de maintenant, on écrira x_0 au lieu de x^* pour les points qui nous intéressent

Définition : La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in \mathbf{D}(f)$ si

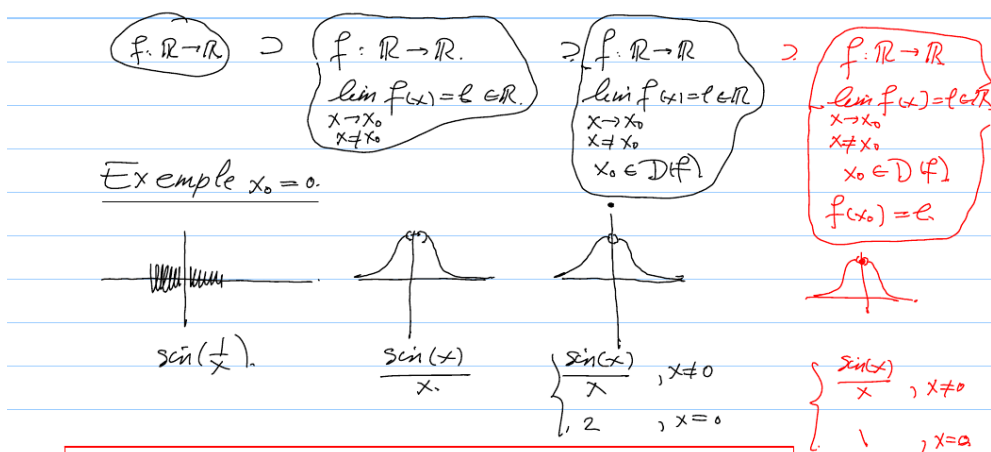
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0) (\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe})$$

5.8.1 Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 (\rightarrow f(0)) \end{cases} \quad \text{est continu en } x_0 = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) \quad (5)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \supset \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$



$$\text{Remarque : } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

Si f est continue en x_0

Prolongement par continuité

(voir exemple 4.9.1) Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq 0}} f(x) = l \in \mathbb{R}$ mais $x_0 \notin \mathbf{D}(f)$ alors on peut définir une fonction g sur $\mathbf{D}(f) \cup \{x_0\}$ par

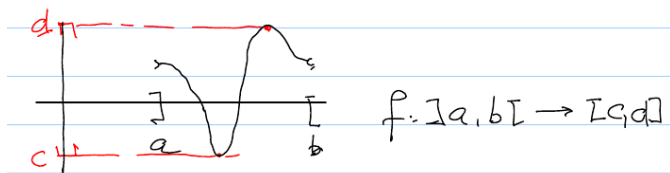
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \neq x_0 \\ l & \text{pour } x = x_0 \end{cases} \quad \text{Par définition } g \text{ est continue en } x_0$$

= Définition La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $I =]a, b[\subset \mathbf{D}(f)$ si f est continue en tout point $x_0 \in I$

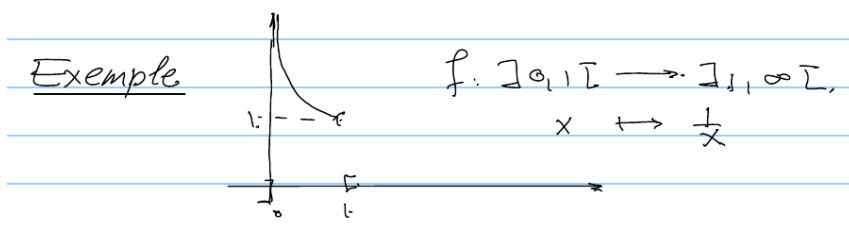
5.8.2 Propriétés des fonctions continues

Remarque La composition de deux fonctions continues (sur $]a, b[$) est une fonction continue

Remarque L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle, mais pas forcément ouvert et pas forcément borné



Remarque L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue strictement monotone est un intervalle ouvert (éventuellement non-borné)



5.8.3 Fonctions "élémentaires"

Théorème: Les fonctions "élémentaires" sont toutes continues sur leur domaine de définition

Conséquences pour les fonctions "élémentaires" on a pour $x_0 \in \mathbf{D}(f)$ que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Exemple $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \cos(x) = \cos(0) = 1$

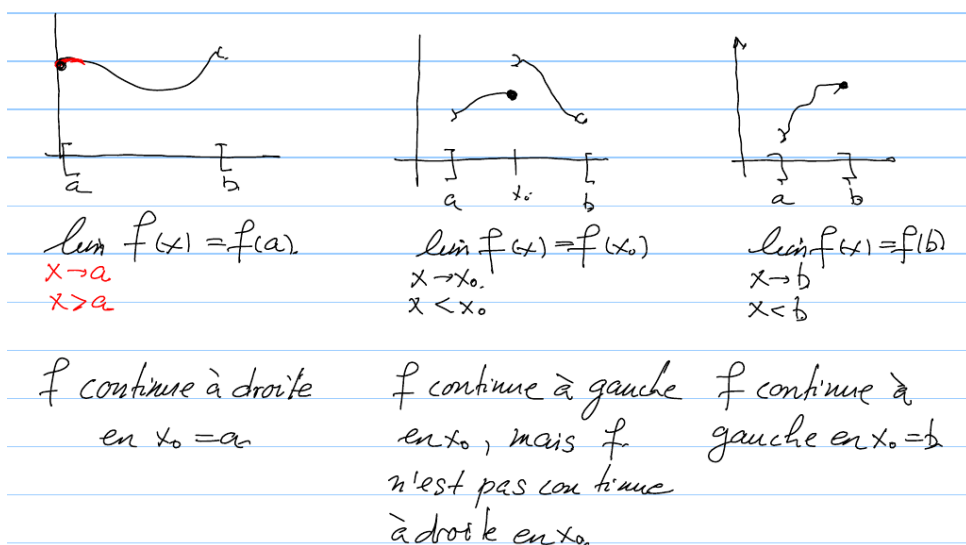
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \exp(\cos(\ln(\sqrt{\cosh(x)}))) = e$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x_0}\right), \forall x_0 \in \mathbf{D}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \mathbb{R}^*$$

5.8.4 Intervalles fermés

Définition La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue à droite (à gauche) en $x_0 \in I = [a, b[$ ($]a, b]$) $\subset \mathbf{D}(f)$ si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) \right) \quad (6)$$



Remarque continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ continue à droite en x_0
 et f continue à gauche en x_0

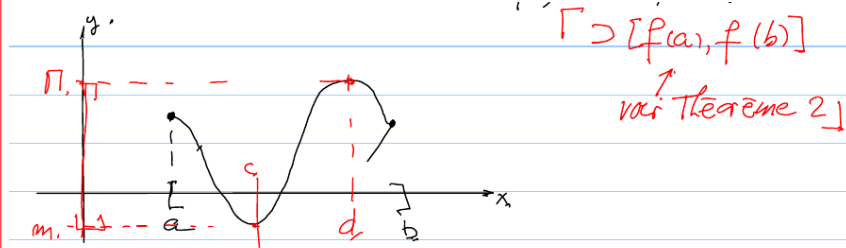
Définition La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $I = [a, b] \subset \mathbf{D}(f)$ si f est continue sur $]a, b[$, continue à droite en $x_0 = a$ et continue à gauche en $x_0 = b$

Théorème 1 :: Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum c'est à dire il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ pour tout $x \in [a, b]$

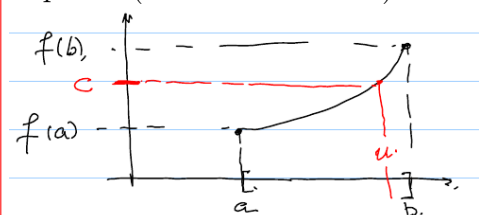
Démonstration utilise B.W.

Notation $\underbrace{m}_{\min} = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $\underbrace{M}_{\max} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

Théorème 3: Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors $Im(f) = [m, M]$



Théorème 2 : (de la valeur intermédiaire) Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ prend (une fois au moins) toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$



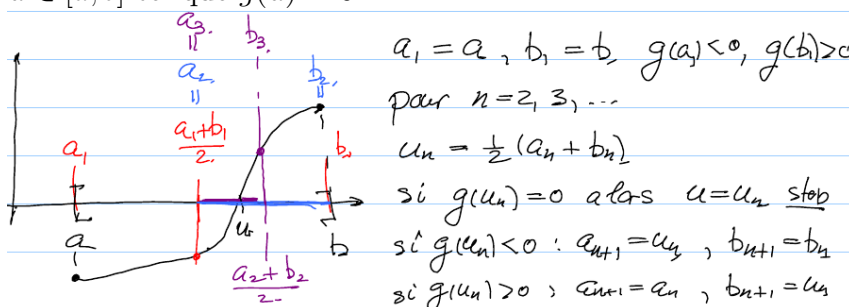
Démonstration Supposons que $f(a) < f(b)$. On cherche $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = c$ pour $c \in [f(a), f(b)]$ pour c donné.

$$\begin{aligned}
 & a_n \leq u, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u, \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u, \quad b_n \geq u \\
 & \text{t.q.} \\
 & f(a_n) \leq c \leq f(b_n) \\
 & \downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty, \text{ car } f \text{ continue} \\
 & f(u) \leq c \leq f(u) \quad \rightarrow c = f(u)
 \end{aligned}$$

Les suites (a_n) et (b_n) se construisent en appliquant la méthode de bisection à la fonction $g(x) = f(x) - c$ / $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c$

Méthode de bisection

Si la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$, alors il existe $u \in [a, b]$ tel que $g(u) = 0$



Exemple Soit $g(x) = x^2 - 2, g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(1) = -1 < 0, g(2) = 2 > 0$

$$\begin{array}{l}
 a_1 = 1 \quad b_1 = 2 \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0 \\ \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}, g\left(\frac{5}{4}\right) < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_2 = \frac{3}{2} \\ b_2 = \frac{5}{4} \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{4}}{2} = \frac{11}{8}, g\left(\frac{11}{8}\right) < 0 \\ \frac{\frac{5}{4} + \frac{11}{8}}{2} = \frac{13}{8}, g\left(\frac{13}{8}\right) < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_3 = \frac{11}{8} \\ b_3 = \frac{13}{8} \end{array} \dots
 \end{array}$$

$$\text{Donc } \frac{5}{4} \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$$

$\frac{5}{4} \approx 1.25 \quad \frac{3}{2} = 1.5$

Avantages :

- la convergence est garantie
- convergence seulement linéaire

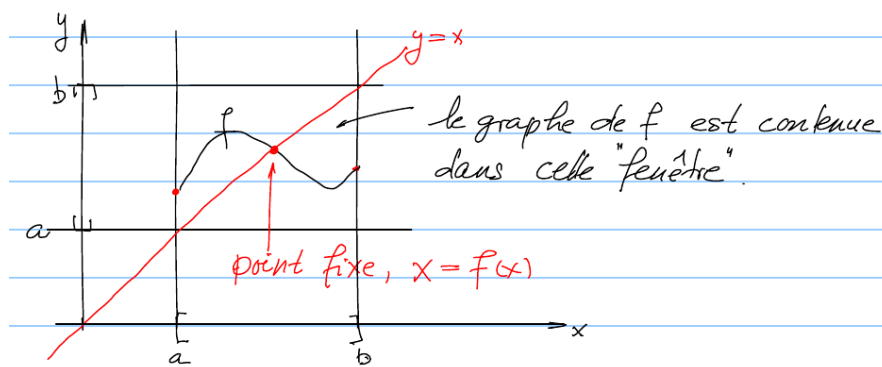
On a $u_n \in [a_n, b_n]$, longueur de $[a_n, b_n] = \frac{b-a}{2^n}$

On a $\ln\left(\frac{b-a}{2^n}\right) = \ln(b-a) - \underbrace{n \cdot \ln(2)}_{\text{linéaire en } n}$

(le # de digits corrects croît linéairement)

Définition la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un point fixe si l'équation $f(x) = x$ admet une solution

Théorème(du point fixe) Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet un point fixe



Démonstration appliquer la méthode de bisection à $g(x) = f(x) - x$ (ou $g(x) = x - f(x)$)

6 Dérivée d'une fonction d'une variable

Dans ce chapitre $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[\subset D(f)$

6.1 Définitions

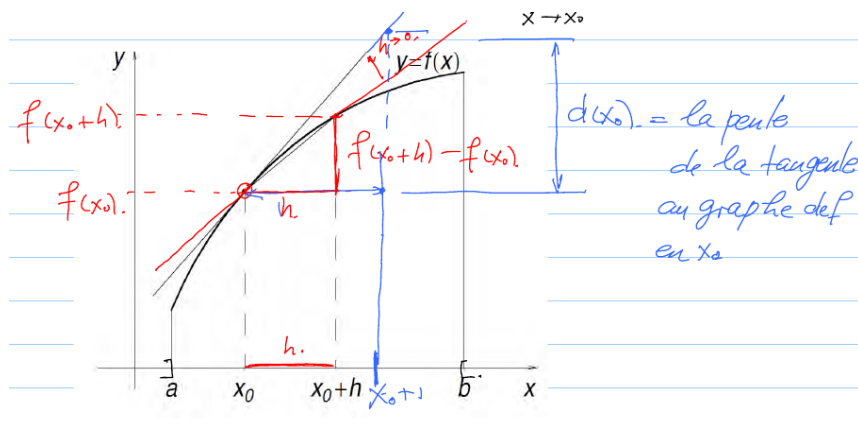
Définition (dérivable) La fonction f est dérivable en x_0 , si la limite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv d_{x_0} \text{ existe} \quad (1)$$

Nota Bene d_{x_0} est un nombre

Remarque : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Remarque Si f est continue en x_0 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) - f(x_0) = 0$



Définition (différentiable) La fonction f est différentiable en $x_0 \in]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ s'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ et une fonction $r :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + r(x_0 + h) \cdot h \quad (2)$$

avec $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} r(x_0 + h) = 0$

$$\iff \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(x_0 + h) \cdot h}{h} = 0$$

$r(x_0 + h) = 0$ est $o(h)$

Remarque dérivable \iff différentiable

$$\text{"} \rightarrow \text{"} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = d(x_0) =: \alpha$$

on a

$$r(x_0 + h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\alpha h}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \alpha$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(x_0 + h) = d(x_0) - \alpha = 0 \text{ pour } \alpha = d(x_0)$$

$$\text{"} \leftarrow \text{"} \text{ on a } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \alpha + r(x_0 + h)$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \alpha + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} r(x_0 + h) = \alpha$$

Définition

On dit que f est dérivable (différentiable) sur $]a, b[\subset D(f)$ si f est dérivable (différentiable) en tout point $x_0 \in]a, b[$

Définition

Soit la fonction f dérivable sur $]a, b[$. Alors on peut définir la fonction f' , appelée la dérivée de f par

$$f'(x) = dx \equiv \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3)$$

Définition (fonction dérivée d'ordre n)

Si la fonction f' est dérivable sur $]a, b[$, on peut définir la fonction f'' appelée la deuxième dérivée (ou dérivée seconde) de f par $f''(x) = (f')'(x)$ et puis par récurrence, si la $(n-1)$ ème dérivée de la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ on peut définir la fonction $f^{(n)}$ (la n -ième dérivée de f) par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), n = 2, 3, \dots$

6.2 Exemples (à savoir par cœur)

(Sans démonstration)

f	f'	$f^{(n)} n = 2, \dots$
1	0	0
x	1	0
x^m	$m \cdot x^{m-1}$	$\begin{cases} m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n} & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$
	[trou]	
e^x	e^x	e^x
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	pas nécessaire

6.3 Dérivabilité implique continuité

Théorème

Une fonction qui est $\underbrace{\text{dérivable en } x_0}_A$ est $\underbrace{\text{continue en } x_0}_B$

$A \rightarrow B$

Démonstration $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right)$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{d(x_0) \in \mathbb{R}} \underbrace{\left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (x - x_0) \right)}_{=0} = 0$$

La réciproque du théorème est fausse ! ($B \not\rightarrow A$)

Contre exemple $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{pour } x \geq 0 \\ -x & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

$x_0 = 0$: f est continue en x_0 [TROU]

6.4 Intervalles fermées

Définition (voir l'exemple précédent)

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite (à gauche) en $x_0 \in I, I = [a, b[(]a, b], \subset D(f)$ si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + H) - f(x_0)}{h} \equiv d_+(x_0) \in \mathbb{R} \text{ existe} \quad (4)$$

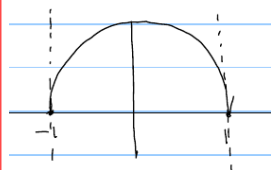
$$\left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + H) - f(x_0)}{h} \equiv d_-(x_0) \in \mathbb{R} \text{ existe} \right) \quad (5)$$

Remarque

f dérivable en $x_0 \in]a, b[\iff f$ dérivable à droite en x_0 et f dérivable à gauche en x_0 et $d_+(x_0) = d_-(x_0) (= d(x_0))$

Définition La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $I = [a, b] \subset D(f)$ si f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b

Exemple $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$ dérivable sur $] -1, 1[$ (mais pas $[-1, 1]$)



$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \infty, \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\infty$$

6.5 Opérations algébriques sur les dérivées

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[\subset D(f) \cap D(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= \alpha f' + \beta g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \end{aligned}$$

Exemple $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + \dots$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) x^k$$

6.6 Dérivée de la composition de deux fonctions

$]a, b[\xrightarrow{f}]c, d[\xrightarrow{g} \mathbb{R}$ f dérivable en x_0 , g dérivable en y_0 [trou]

Théorème (dérivation en chaîne)

$$(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0) \cdot f'(x_0)$$

Ceci se généralise par récurrence (exemple)

$$f(x) = \cos(\ln(\sqrt{1+x^2})), D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -\sin(\ln(\sqrt{1+x^2})) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

Démonstration

$$((g \circ f)(x_0 + h) = (g \circ f)(x_0) + (g \circ f)'(x_0)h + o(h) \text{ [trou mika]}$$

6.7 Continuité de la fonction dérivée

(Ne pas confondre avec 5.3 !)

Un contre-exemple: (f n'est pas nécessairement continue)

$$\text{soit } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

$D(f) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue sur \mathbb{R} (vérifier !)

f est dérivable sur \mathbb{R} ($\rightarrow f$ est continue sur \mathbb{R})

i. pour $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{2}{x}) + x^2 \cos(\frac{1}{x}) \frac{-1}{x^2} \quad (6)$$

ii. Pour $x = 0$ on a (utiliser la définition)

$$f'(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (h \sin(\frac{1}{h})) \underset{\substack{\text{Théorème des} \\ \text{deux gendarmes}}}{=} 0 \quad (7)$$

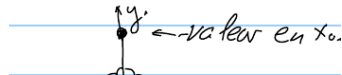
Donc $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R}$

f' n'est pas continue sur \mathbb{R} , car f' n'est pas continue en $x = 0$.

Démonstration Soit $x_n = \frac{1}{2\pi n}, n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{2\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) \right) = -1 \neq 0 = f'(0)$$



Par contre, f' n'est pas possible comme dérivée d'une fonction.

Théorème: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[\subset D(f)$. Soit f continue sur $]a, b[$, et dérivable. $[a, b] \setminus \{x_0\}$ et soit $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f'(x)) = l$
Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x) = l$

Attention à la logique Dans exemple (i), $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f'(x)) = l$ n'existe pas. Néanmoins la dérivée en $x_0 = 0$ existe !

6.8 Dérivée logarithmique

Une astuce pour :

- Calculer $\frac{f'}{f}$ pour f donné
- calculer facilement la dérivée d'un produit de plusieurs fonctions

À propos

i. $g(x) = \ln(|f(x)|)$ alors $g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

Exemple $f(x) = (x+1)^2(x^2+1)^3$

$g(x) = 2 \ln(|x+1|) + 3 \ln(|x^2+1|)$

6.9 Dérivée des fonctions réciproques

Rappel (critère) Toute fonction strictement monotone est injective

Explication

3dessins

6.9.1 Continuité des fonctions réciproques

Théorème La réciproque d'une fonction injective continue est continue sur l'image de tout intervalle

Explication

dessin

Démonstration Utiliser la définition de la continuité

6.9.2 Dérivabilité de la fonction réciproque

Théorème La réciproque d'une fonction injective dérivable est dérivable sur l'image de tout intervalle I , tel que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$

Explication

2dessins

6.9.3 Identité

On a pour $y = f(x), f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in D(f^{-1})$ ou encore $f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in D(f^{-1})$ Par dérivation en chaîne :

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in D(f^{-1}) \quad (8)$$

donc

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

i $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f^{-1}(x) = \ln(x), (f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}}$

ii $f(x) = \sin(x) \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = \cos(x), f'(x) = 0, \text{ pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f^{-1} = \arcsin(x) \text{ [??]}$

6.10 Application du calcul différentiel

6.10.1 Théorème de Rolle

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset D(f), b > a, f$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe un $u \in]a, b[$ tel que $f'(u) = 0$

Explication (des hypothèses)

$$f(x) = \sqrt{-x^2}$$

$$D(f) = [-1, 1]$$

f continue sur $[-1, 1]$

f dérivable sur $] - 1, 1[$

Démonstration

i f continue sur $[a, b]$. Alors il existe un maximum M et un minimum m .

ii $M = 0, m = 0 \iff f(x) = 0 \forall x \in I \rightarrow f'(u) = 0 \forall u \in]a, b[$

iii ou bien M ou m est différent de 0.

• Cas $M \neq 0 \rightarrow \exists x \in]a, b[$ tel que $f(x) = M$, c'est à dire

$$f(x) \leq M = f(c), \forall x \in [a, b] \quad (9)$$

$$0 \leq \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{(1) x < c} \leq \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{(2) x > 0} \leq 0 \quad (10)$$

$$1. 0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = f'(c)$$

$$2. 0 \geq \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = f'(c)$$

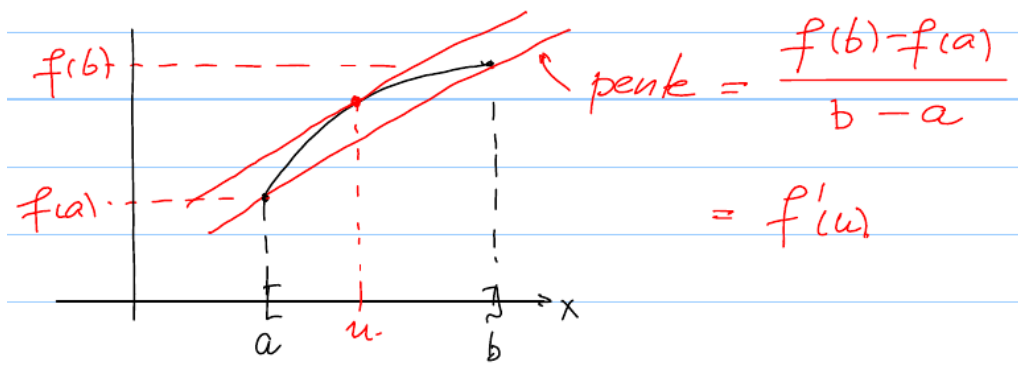
$$1+2 \text{ + } \mathbb{R} \text{ ordonné} \rightarrow f'(c) = 0$$

6.10.2 Théorème des accroissements finis

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [a, b] \subset D(f)$, $b > a$ f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un $u \in]a, b[$ tel que

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (11)$$

Explications



Démonstration

Soit $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$

$g(a) = g(b) = 0$, g continue sur $[a, b]$, g dérivable sur $]a, b[$

Par le théorème de Rolle, $\exists u \in]a, b[$ tel que $g'(u) = 0$

$g'(u) = f'(u) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, donc $f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Corollaire 1 Soit $[a, b] = [x, x + h] \in D(f)$, $\overbrace{h}^{b-a} > 0$, f continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$. Alors il existe $\vartheta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x + h) = f(x) + f'(x + \vartheta h)h \quad (12)$$

Corollaire 2 Soit $[a, b] \subset D(f)$, $b > a$, f continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors

- i) $f'(x) \geq 0$ sur $]a, b[\rightarrow f$ croissant sur $[a, b]$
- ii) $f' > 0$ sur $]a, b[\rightarrow f$ strictement croissant sur $[a, b]$
- iii) $f'(x) \leq 0$ sur $]a, b[\rightarrow f$ décroissant sur $[a, b]$
- iv) $f' < 0$ sur $]a, b[\rightarrow f$ strictement décroissant sur $[a, b]$

Corollaire 3 Soit $[a, b] \subset D(f)$, $b > a$, f continue sur a, b , dérivable sur $]a, b[$. Alors $f(a) = 0$, $f' \geq 0 \rightarrow f > 0$ sur $[a, b]$

Corollaire 4: Soit $[a, b] \subset D(f)$, $b > a$, f continue sur a, b , dérivable sur $]a, b[$. Alors $f' = 0$ sur $]a, b[\rightarrow f$ est constant sur $[a, b]$

6.10.3 Exemples

- i) Estimer la valeur de $\sin(31^\circ)$ ($f(x) = \sin(x)$)

$$\frac{\pi}{6} < \frac{31}{180}\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} < \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{1}{2}} + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \vartheta \frac{\pi}{180}\right) \frac{\pi}{180}$$

$g(x) = \cos(x)$ est strictement décroissant sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ car $g'(x) = -\sin(x) < 0$ pour $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{180} \leq \sin(31^\circ) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180}$$

- ii) Montrer que $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Puisque f est pair, il suffit de contrôler $x \geq 0$. On a

$$f(0) = \cos(0) - 1 = 0 \xrightarrow[\text{coroll.3}]{} \text{il suffit de montrer } f'(x) \geq 0 \text{ pour } x \geq 0 \quad (13)$$

$$\text{On } f'(x) = -\sin(x) + x$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow \text{il suffit de montrer } f''(x) \geq 0 \text{ pour } x \geq 0$$

On a

$$f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0 \rightarrow f'(x) \text{ [trou]}$$

6.10.4 Théorème des accroissements finis généralisés

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, [a, b] \subset D(f) \cap D(g), f, g$ continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[, g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$. Alors Il existe $u \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (14)$$

Pour $g(x) = x$ c'est le théorème des accroissements finis. Démonstration

On pose $h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)) \right)$ puis on utilise le théorème de Rolle.

6.10.5 Règle de Bernoulli de l'Hospital

Théorème Soit f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[\subset D(f) \cap D(g)$ avec $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$. Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (f)(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (g)(x) = 0$ et si

Remarque (généralisation, BH) On a le théorème analogue pour $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} (.)$.. pour le cas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ au lieu de $\frac{0}{0}$ et pour $a = -\infty$ ou $b = +\infty$

Exemples

$$I) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\cos(x)}{1} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\cos(x)) = \cos(0) = 1$$

II)

III)

IV)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^{x \ln(x)}) \stackrel{\text{expcontinue}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x)) = e^0 = 1$$

$$V) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1 + \frac{2}{x})} \stackrel{\text{expcontinue}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} (x \ln(1 + \frac{2}{x})) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}} =$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{2}{x}} \cdot \frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}} = ???$$

$$VI) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^x} e^{-\frac{1}{x}} \right) = ???$$

i.

ii. $0 < p \leq 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^p} e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(e^{-\frac{2}{x}} \right) ???$$

iii. ????

Bémol : Attention !!!!! La réciproque e BH est fausse !

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \sin(\frac{2}{x})) \stackrel{\text{th.des2gendarmes}}{=} 0$$

$$0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \sin(\frac{1}{x})) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} \right) \stackrel{BH}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1} \right) \text{ n'existe pas.}$$

Démonstration de BH

i) f,g continues sur $]a, x[\subset]a, b[$ pour tout $a < x < b$

ii) f,g continues sur $[a, x]$ par prolongement continu, si on définit $f(a) = g(a) = 0$.

iii) On a le théorème des accroissements finis généralisé sur $[a, x]$ (si $g'(u) \neq 0$ pour tout $u \in]a, x[$)

$$\text{iv) } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \stackrel{\text{th.desaccroissementsfinis}}{=} \frac{f'(u)}{g'(u)} \text{ pour } u \in]a, x[.$$

Puisque $u \rightarrow a$ lorsque $x \rightarrow a$ on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow a \\ u > a}} \left(\frac{f'(u)}{g'(u)} \right) \text{ Si cette limite existe !}$$

Ici on regarde toutes les suites (u_n) telles que $u_n > a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$. Mais $u \in]a, x[$ Dépend de x et on ne devrait regarder que les suites (u_n) générées par les suites (x_n) dans la limite originale.

Démonstration du théorème de la section 5.7 Rappel :

Théorème: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[\subset D(f)$. Soit f continue sur $]a, b[$, et dérivable. $[a, b] \setminus \{x_0\}$ et soit $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} (f'(x)) = l$
Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x) = l$

$$\text{Démonstration } f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) \stackrel{BH}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0 \\ \text{ou} \\ h < 0}} \left(\frac{f'(x_0+h)}{1'} \right) \stackrel{\text{hypothesel}}{=}$$

6.11 Etude des fonctions

Dans ce chapitre, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset D(f)$, $a < b$.

6.11.1 Définitions

[dessin courbe étrange]

Convexe f est convexe sur I_0 si $\forall x_1, x_2 \in I_0, x_1 \neq x_2, x_1 < x_2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in [x_1, x_2]$
pour $\lambda \in [0, 1]$ -

$$\text{Si } f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Concave f est concave sur I_0 si $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Point critique f admet un point critique en $x_0 \in]a, b[$ si $f'(x_0) = 0$

Maximum local f admet un maximum local en $x_0 \in]a, b[$ si $f'(x_0) \geq f(x)$ pour x proche de x_0
) $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x$ tels que $|x - x_0| < \epsilon$

Maximum local f admet un maximum local en $x_0 \in]a, b[$ si $f'(x_0) \leq f(x)$ pour x proche de x_0
) $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x$ tels que $|x - x_0| < \epsilon$

Extremum local f admet un maximum local ou un minimum local.

Maximum local f admet un maximum global en $x_0 \in [a, b]$ si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Minimum local f admet un minimum global en $x_0 \in [a, b]$ si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Points d'inflexion f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$, si f est dérivable en x_0 et s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que f soit convexe (concave) sur $[x_0 - \epsilon, x_0]$ et concave (convexe) sur $[x_0, x_0 + \epsilon]$

Théorème(convexe)

Si f' est une fonction croissante sur I_0 (en particulier si $f'' \geq 0$ sur I_0 voir corollaire 2, section 5.10.2) Alors f est convexe sur I_0

Théorème(concave)

Si f' est une fonction décroissante sur I_0 (en particulier si $f'' \leq 0$ sur I_0 voir corollaire 2, section 5.10.2) Alors f est concave sur I_0

Remarque Toujours avoir en tête les exemples.

$$f(x) = x^2 \text{ (convexe sur } \mathbb{R} \text{)}$$

$$f(x) = -x^2 \text{ (concave sur } \mathbb{R} \text{)}$$

Théorème(extremum local)

1. si f admet un extremum local en $x_0 \in]a, b[$ et si $f'(x_0)$ existe, alors $f'(x_0) = 0$
2. f admet un maximum local en x_0 , si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$
3. f admet un minimum local en x_0 , si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$

Remarque (cas général, voir développement limités)

1. maximum local si $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) < 0$ (n pair)
2. minimum local si $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) > 0$ (n impair)

Théorème(extremum global)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}[a, b] \subset D(f)$, f continue sur $[a, b]$. Les points $x_0 \in [a, b]$ pour lesquels f admet un extremum global sont éléments de :

- i) $\{a, b\}$
- ii) $\{\text{des points où } f' \text{ n'existe pas}\}$
- iii) $\{\text{les points où } f' = 0\}$

Théorème(points d'inflexion)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $]a, b[\subset D(f)$

- i) si f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$, alors $f''(x) = 0$
- ii) f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$ si $f''(x) = 0$, si $f'''(x)$ existe et si $f'''(x) \neq 0$

Remarque (cas général)

f admet un point d'inflexion si $f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0, f^{(n)}(x) \neq 0, n$ impair

L'exemple à retenir : x^5, x^7, \dots

6.11.2 Discuter le graphe d'une fonction

1. Trouver $D(f), \mathfrak{S}(f)$
2. symétries (paire, impaire, périodique)
3. zéros de f
4. continuité (limites à gauche et à droite pour les points de discontinuité de f et les points au bord du domaine)
5. Dérivabilité de f ("calculer" f', f'', \dots trouver le domaine de définition de ces fonctions)
6. Points particuliers (points critiques, extremums, points où f' n'existe pas)
7. monotonie de f (signe de f'), convexité/concavité de f (signe de f'')
8. Asymptotes
9. Tracer le graphe

6.11.3 Exemples

[magnifique dessin qui ressemble a une paire de fesses]

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x - 1| - x^2 + 1 \text{ sur } [-3, 3] \\ &= \begin{cases} 2x - x^2 & \text{pour } x \in [\frac{1}{2}, 3] \\ 2 - 2x - x^2 & \text{pour } x \in [-3, \frac{1}{2}] \end{cases} \end{aligned}$$

1. $D(f) = [-3, 3]$, $\mathfrak{S}(f) = [m, M]$ à trouver
2. pas de symétrie
3. $2x - x^2 = 0$ sur $[\frac{1}{2}, 3]$, $x = 2$
 $2 - 2x - x^2 = 0$ sur $[-3, \frac{1}{2}]$, $x = 1 - \sqrt{1 + 2} = -1 - \sqrt{3}$ $\$ = 2, 7 \dots$
4. f continue sur $[-3, 3]$ (composition de fonctions continues)
5. f dérivable sur $[-3, \frac{1}{2}[(I_1)$ et sur $[\frac{1}{2}, 3](I_2)$ (mais f pas dérivable sur $[-3, 3]$)

$$\text{Sur } I_1 : f(x) = -2x - x^2 + 2$$

$$f'(x) = -2 - 2x$$

$$f''(x) = -2$$

$$I_2 : f(x) = 2 - x^2$$

$$f(x) = 2 - 2x$$

$$f''(x) = -2$$

6. Points particuliers : $x = \frac{1}{2}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} (f'(x)) = 1 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} (f'(x)) = -3$

on a $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ (minimum local)

Points où $f' = 0$:

sur $[\frac{1}{2}, 3]$, $2 - 2x = 0$, $x = 1$, $f''(1) = -2 \rightarrow f$ admet un maximum local :

$$f(1) = 1$$

sur $[-3, \frac{1}{2}[$, $-2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1$, $f''(-1) = -2 \rightarrow f$ admet un maximum local en $f(-1) = 3$

Maximum et minimum global

valeurs aux bords : $f(-3) = -1$, $f(3) = -3$

$$M = \max\{-1, -3, 1, 3\} = 3$$

$$m = \min\{-1, -3, \frac{3}{4}\} = -3$$

d'où $\mathfrak{S}(f) = [-3, 3]$.

7. monotonie (tableau des signes)

$$f'(-1) = f'(1) = 0, f' \text{ pas défini en } x = \frac{1}{2}$$

i) sur $[-3, -1]$, $f'(-3) = 4$ et $f''(x) = -2$ sur cet intervalle. f' est donc décroissant sur $[-3, -1]$ et $0 \leq f'(x) \leq 4$. f est donc croissant sur cet intervalle.

ii) Sur $[-1, \frac{1}{2}]$: $f'(-1) = 0$ et $f''(x) = -2$, f' est décroissant sur $[-1, \frac{1}{2}]$ et $-3 \leq f'(x) \leq 0$. f est donc décroissant sur cet intervalle

iii) Sur $[\frac{1}{2}, 1]$, $f'(\frac{1}{2}) = 1$ et $f''(x) = -2$, f' est décroissant et $0 \leq f'(x) \leq 1 \rightarrow f$ est donc croissant

iv) Sur $[1, 3]$: $f'(1) = 0$ et $f''(x) = -2$, f est décroissant et $- \leq f'(x) \leq 0$. f est donc décroissant

concavité, convexité f est concave sur I_1 et I_2 et f n'a donc aucun point d'inflexion. Attention ! f est concave sur I_1 et I_2 mais f n'est ni concave ni convexe sur $I = I_1 \cup I_2$

6.11.4 Exemples avec limites

(Discussions à compléter!)

Exemple $f(x) = \ln(x)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x)) = -\infty \text{ (tangente verticale)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b_{\pm} \in \mathbb{R}, \text{ asymptote horizontale}$$

exemple e^x

Cas de droites de la forme $y = ax + b$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a_{\pm}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - a_{\pm}x) = b_{\pm}$$

[trou exemple x5]

6.12 Développement en séries et développement limité

6.12.1 Définitions

Définition une série de la forme

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k(x-a)^k}_{b_k} := \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k}_{s_n} \quad (15)$$

avec $a \in \mathbb{R}, a_k \in \mathbb{R}$ (donnés) et $x \in \mathbb{R}$ (un paramètre) est appelé *une série entière* (à cause des puissances "entières" de (x-a), au lieu de $|x-a|^{\frac{1}{3}k}$ par exemple.

- Le nombre a et les a_k sont considérés comme fixes, et on s'intéresse à la convergence de la série et sa somme en fonction du paramètre x
- Souvent on pose $x = a + \xi$ (étude locale proche de $x=a$). Donc $|\zeta| < r \iff |x-a| < r \iff$ [dessin]

Théorème Il existe $r \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq \infty$, tel que la série entière

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \quad (16)$$

Converge absolument pour $|\xi| < r$ (r dans l'intervalle $]a-r, a+r[$). La série diverge pour $|\xi| > r$ ($x \notin [a-r, a+r]$)

Définition Le nombre r dans le théorème est appelé "rayon de convergence" de la série

Théorème(*) On a

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} (|a_k|^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{1-1}} \text{ Cauchy}$$

$$\text{ou } r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \text{ D'Alembert}$$

Si ces limites existent

Remarques

- Le théorème ne dit rien sur la convergence de la série pour $x = a+r$ et $x = a-r$ (à contrôler séparément)
- Si $r = \infty$ (d'Alembert) la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Si $r = 0$ la série ne converge que pour $x = a$ et $s = a_0$

Remarque La série converge en fait pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - a| < r$, c'est à dire pour z dans un disque centré en a de rayon r d'où le nom rayon de convergence.

Démonstration du théorème (*) $s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{b_k}_{a_k(x-a)^k}$

Critère de d'Alembert

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = |x - a| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \text{ [trou]}$$

6.12.2 Fonctions définies par une série entière

Nouveau point de vue : une série entière définit une fonction (pour a_1, a_k donnés)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \text{ (si } r > 0) \quad (17)$$

et $D(f) \supset]a-r, a+r[$

6.12.3 Dérivée des fonctions définies par une série

Théorème Soit $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ et soit le rayon de convergence $r > 0$.

Alors

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)(x-a)^k \quad (18)$$

Explication On dérive terme par terme dans la série pour

$$f : \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \right)}_{a_0 + a_1(x-a) + \dots} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-a)^{k-1} \quad [\text{trou}]$$

Théorème Soit $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ et soit le rayon de convergence $r > 0$.

Alors

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(k+n)!}{k!} (x-a)^k \quad (19)$$

et le rayon de convergence de la série pour $f^{(n)}$ est r .

Conséquence Si f est définie par série entière, on a $f^{(n)}(a) = n!a_n$, ou

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$$

Notation Soit I un intervalle ouvert. Alors on note

- $C^0(I) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : I \subset D(f), f \text{ continue sur } I\}$
- $\underbrace{C^k(I)}_{\substack{\text{des fonctions de} \\ \text{classe } C^k \\ \text{i}}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : I \subset D(f), f \text{ k-fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(k)} \text{ est continue sur } I\}$ [trou]

6.12.4 Théorème de Taylor

Théorème (formule de Taylor avec reste, ou développement limité d'ordre n)

Soit f une fonction de classe $C^{n+1}(I)$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et soit $a, x \in I$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k}_{p_n(x)} + R_n(a, x) \quad (20)$$

avec $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$. Alors

$$R_n(a, x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u) (x-a)^{n+1}$$

où $u \in]a, x[$ si $x > a$ et $u \in]x, a[$ si $x < a$

Remarque Pour $n=0$ on a $f(x) = f(a) + R_0(a, x)$ avec $R_0(a, x) = f'(u)(x - a)$ ce qui n'est rien d'autre que le théorème des accroissements finis.

Idée de la démonstration

Interprétation géométrique du théorème de Taylor

graphique Pour $f(x) = \sin(x)$ et $a = 0$ on trouve

$$a_0 = \frac{1}{0!} f(0) = 0 \quad p_0(x) = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{1!} f'(0) = 1 \quad p_1(x) = x$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} f''(0) = 0 \quad p_2(x) = x$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) = -\frac{1}{6} \quad p_3(x) = x$$

6.12.5 Développement d'une fonction en une série

Remarque Si f est de classe $C^\infty(I)$ on peut utiliser la formule de Taylor avec reste pour n arbitraire (mais à priori $n \leq \infty$).

Théorème (série de Taylor)

Si f est de classe $C^\infty(I)$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a, x) = 0$ on obtient à partir du théorème de Taylor avec reste (pour x fixe)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k \quad (\text{série de Taylor}) \quad (21)$$

et si $a=0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (\text{Série de Mac Laurin}) \quad (22)$$

trou

Donc (formule de Taylor)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{1}_{a_k} x^k + R_n(x) \quad (23)$$

avec

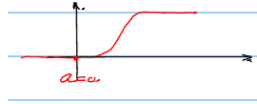
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u) x^{n+1} = \frac{1}{(1-u)^{n+2}} x^{n+1} = \frac{1}{1-u} \left(\frac{x}{1-u} \right)^{n+1} \quad (24)$$

avec $u \in]0, x[$ si $x > 0$ et $u \in]x, 0[$ si $x < 0$

Puisque $x \in I =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ trou

En fait on a cette égalité pour $x \in]-1, 1[$ mais pas dans $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **Contre exemple** remarque la condition $f \in C^\infty(I)$ n'est pas suffisant pour que f puisse être développé en une série entière

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$



On a

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x)) = 0 = f(0) \rightarrow f$ continue sur \mathbb{R}
- $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$
 $f'(x) = 0$ pour $x \leq 0$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f'(x)) = 0 = f'(0)$ (voir le théorème chapitre 5.7 pour cette égalité)
- Par récurrence, on montre que $D(f^k) = \mathbb{R}$ et que $f^{(k)}(0) = 0$

Donc $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

Formule de Taylor avec reste en $x = a = 0$

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0$$

- $x < 0 : f(x) = 0 = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{=0} + R_n(x)$
 $\rightarrow R_n(x) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$
- $x > 0 : f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{=0} + R_n(x)$
 $\rightarrow R_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Donc pour $x > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} (= f(x))$

Conclusion : $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mais $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$ car f ne peut pas être représenté proche de $x=0$ par une série entière.

6.12.6 Les fonctions $\exp, \sinh, \cosh, \sin, \cos, \ln, (1-x)^\alpha$

Développement limité de e^x

Soit $I = \mathbb{R}, a = 0$, et $f(x) = e^x, f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} e^u x^{n+1}}_{=R_n(x), |u| < |x|} \quad (25)$$

Développement de e^x en une série entière

On a $|R_n(0, x)| \leq \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{n \rightarrow \infty = 0}, \forall x \in \mathbb{R}$

et donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \forall x \in \mathbb{R}$$

$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$ Les fonctions \sinh et \cosh

Avec la même procédure :

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (26)$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \quad (27)$$

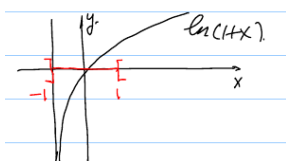
Les fonction \sin, \cos

Avec la même procédure

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (28)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (29)$$

La fonction $\ln(1+x)$



$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, x \in]-1, 1[$$

Démonstration

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \ln(1+x)}_{= \frac{1}{1+x}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot k \cdot x = \sum_{k-1=l, l=0}^{\infty} (-1)^l x^l = \sum_{l=0}^{\infty} (-x)^l = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad \text{La}$$

fonction $(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (1+x)^\alpha = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = \binom{\alpha}{n}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \forall x \in]-1, 1[\quad (30)$$

Fonction exponentielle complexe et formule d'Euler

Démonstration de la formule d'Euler :

$$\text{On définit l'exponentielle } \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k x^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}_{\cos(x)} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}_{\sin(x)} = \cos(x) + i \sin(x)$$

6.12.7 La notation o et O

Définition Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit que $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$

si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \left(\frac{f(x)}{(x-a)^n} \right) = 0 \quad (31)$$

et on écrit que $f(x) = O((x-a)^n), x \rightarrow a$

Si

$$\left| \frac{f(x)}{(x-a)^n} \right| < C \in \mathbb{R} \text{ Proche de } x=a, x \neq a \quad (32)$$

Remarque Cas $n=0$: $f(x) = o(1), x \rightarrow a$ veut dire

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = 0 \quad (33)$$

Remarque Si $f(x) = o(x^n), x \rightarrow 0$, alors $cf(x) = o(x^n), x \rightarrow 0$ Remarque Si

$$f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m}), x \rightarrow a \quad (34)$$

$$0 < m < n, m, n \in \mathbb{N}$$

Pour le développement limité d'une fonction en $x = a$, on a avec cette notation:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + R_n(a, x) \\ &= p_n(x) + o((x-a)^n), x \rightarrow a \end{aligned}$$

Car $\frac{R_n(a, x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{f^{(n+1)}(u)}_{=f^{(n+1)}(a)} (x-a) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} 0$ **Exemples :**

- $\frac{1}{1-x} = 1 + \underbrace{x + x^2 + x^3 + o(x^3)}_{o(x)} = 1 + o(1)$
- —
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$
- $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!x^4 + o(x^4)}$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$
- $\ln(x) = \ln(1 + \underbrace{(x-1)}_{X \rightarrow 0(x \rightarrow 1)}) = \dots$

Exemples de limites $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x+o(x)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} ((1 + o(1))) = 1$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{1-\cos(x)}{x^2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}$ **Composition de développements limités**

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1+\underbrace{(\cos(x)-1)}_X} \\ X &= -\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}_{o(x^2)}, \text{ donc } x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1+X)} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &= 1 - \left(\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right)}_{o(x^2)} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \frac{1}{\cos(x)}, x \rightarrow 0 \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) \\ &= x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!x^4+o(x^4)} \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}(x + o(x))^3 \\ &\quad - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{3}(x + o(x))^3 \right) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= o(x^3) \end{aligned}$$

En fait (vérifier !)

$$f(x) = -\frac{1}{30}x^7 + o(x^7)$$

7 Intégrales indéfinies et définies

7.1 Définition de l'intégrale indéfinie

∂ = dérivée

$\partial : C^1([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$ (C^1 : les fonctions dérivées une fois, et qui sont encore continues sur la fonction dérivée) (pas injectif)

$f \mapsto D(f) = f'$ (surjectif). Il s'agit de la fonction dérivée.

attention, $f + c$ arrive aussi sur f' . c est une constante.

$$\partial^{-1} : C^1([a, b]) \leftarrow C^0([a, b])$$

$$\mathfrak{D}^{-1}(f) \leftarrow f$$

$$\mathfrak{D}^{-1}(f) =: \{F \in C^1(]a, b[) : F' = f\}$$

Définition Soit $f \in C^0(]a, b[)$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(]a, b[)$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour $x \in]a, b[$

Remarque F est dérivable sur $[a, b]$ car $F' = f$ et continue sur $[a, b]$ (voir le théorème de la section 5.7)

Remarque Deux primitives d'une fonction ne diffèrent que d'une constante.

Définition On appelle intégrale indéfinie de f l'ensemble des primitives de f .

Notation $F(x) = \int f(x)dx$ ou $\int^x f(t)dt$.

Exemples :

f	F	Domaine de Définition
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \neq -1, C \in \mathbb{R} (n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
e^x	$e^x + c$	
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$	$x > 0$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln(\cos(x)) + C$	$x \in D(\tan(x))$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(f(x)) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	
$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\arctan(f(x)) + C$	
$e^{x^2} 2x$	e^{x^2}	
$nx^{n-1} + 2xn + 1e^{x^2}$	$x^n e^{x^2} + C$	

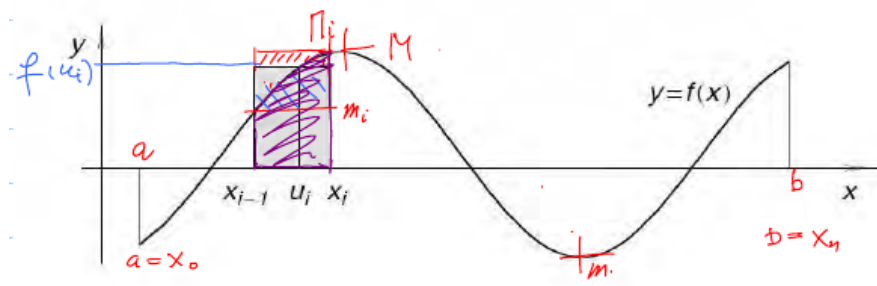
Remarque

L'application $\mathfrak{D} : C^1(]a, b[) \rightarrow C^0(]a, b[)$ est Linéaire : $\mathfrak{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathfrak{D}(f) + \beta \mathfrak{D}(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in C^1(]a, b[)$. \mathfrak{D}^{-1} est aussi linéaire.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \quad (1)$$

7.2 Définition de l'intégrale définie

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b] \subset D(f)$, $a \leq b$



Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. alors une suite (x_n) , $a \equiv x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_n \equiv b$ est appelée une partition de $[a, b]$

Notation On écrira $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ pour une partition d'une intervalle $[a, b]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ une partition de $[a, b]$, $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Alors on appelle

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (2)$$

La somme de Riemann de f pour la partition $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ et le choix de $(u_i)_{i=1, \dots, n}$

Remarque Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$, alors la somme de Riemann est une approximation de la "surface sous le graph de f ".

Remarque Puisque la fonction f est continue sur $[a, b]$ on a

$$m \cdot (b - a) \leq S_n \leq M(b - a) \quad (3)$$

où m et M sont le minimum et le maximum global de f sur $[a, b]$.

Remarque Puisque f est continue sur $[a, b]$, f est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et f admet un minimum m_i et un maximum M_i sur $[x_{i-1}, x_i]$ et

$(b - a)m \leq \underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n \leq (b - a)M$, ou :

$$\bullet \quad \underline{S}_n = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donnée une partition $\varphi(x_0, \dots, x_n)$, on définit $\Delta x \equiv \Delta x(\varphi) := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots\}$ la taille de la partition.

Exemple (découpage régulier).

On définit

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, i = 0, 1, \dots, n$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Définition / Théorème (intégrale définie de f sur [a,b])

Soit f une fonction continue sur [a,b] $\varphi_n \equiv \varphi(x_0, \dots, x_n), n \in \mathbb{N}^*$ une suite de partitions telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x(\varphi_n) = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}$ et $\overline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}$ existent, sont indépendants du choix de la suite des partitions et $\underline{S} = \overline{S} =: S$. Le nombre S est appelé "intégrale définie de f sur [a,b]"

Explication de $\underline{S} = \overline{S}$

La continuité de f sur [a,b] implique^(*) que $\forall \epsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |M_i - m_i| < \frac{\epsilon}{b-a}, i=1, \dots, n$, c'est à dire $|\overline{S} - \underline{S}| \leq \epsilon$

Limite épointée trou

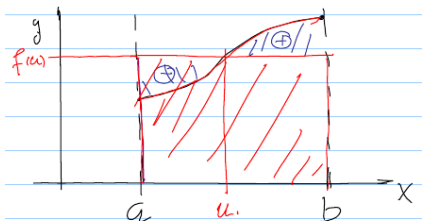
continuité en $x \in D(f)$ trou **Notation** on écrit $\int_a^b f(x)dx$ pour l'intégrale définie sur [a, b]

trou

7.3 Propriétés de l'intégrale définie

1. linéarité trou

7.4 Théorème de la moyenne



Théorème Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, [a, b] \subset D(f), b > a, f$ continue sur $[a, b]$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = f(u)(b - a) \quad (4)$$

Remarque $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx =$ valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Démonstration : Théorème des accroissements finis (donné le théorème fondamental du calcul intégral).

Théorème généralisé

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, [a, b] \subset D(f) \cap D(g), f, g$ continues sur $[a, b], g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(u) \cdot \int_a^b g(x) dx \quad (5)$$

Pour $g(x) = 1$ c'est le théorème précédent **Démonstration** Théorème ds accroissements finis généralisé + théorème fondamental du calcul intégral.

7.5 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, [a, b] \subset D(f), f$ continue sur $[a, b]$, alors

1. La fonction G définie par $G(x) = \int_a^b f(t) dt$ est une primitive de f sur $]a, b[$, c'est à dire G est dérivable sur $]a, b[$ et $G'(x) = f(x)$.
2. Si F est une primitive de f sur $]a, b[$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (6)$$

i) Soit $x \in]a, b[$ alors $\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) =$
 $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \underbrace{=}_{\substack{\text{par le théorème de la} \\ \text{avec } g(x) = 1}} \frac{1}{h} f(u) h = f(u)$ pour $u \in]x, x+h[, h > 0$ et $u \in]x+h, x[, h <$

0

Donc $u \rightarrow x$ lorsque $h \rightarrow 0$ et $f(u) \rightarrow f(x)$ car f est une fonction continue sur $[x, x+h]([x+h, x])$

ii) Soit F une primitive de f . Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = G(x) + C \text{ Pour tout } x \in [a, b] \quad (7)$$

Pour $x = a$ on a $F(a) = 0 + C = C$

Donc $F(x) = G(x) + F(a)$ et on trouve

$$F(b) = \underbrace{G(b)}_{=\int_a^b f(x) dx} + F(a)$$

$$\text{D'où } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Remarque Pour f continue sur $]a, b[$ la fonction $G(x) = \int_c^x f(t) dt$ est une primitive de f pour tout choix de $c \in]a, b[$. L'application $\mathfrak{D} : C^1(]a, b[) \rightarrow C^0(]a, b[)$ est donc surjective.

Notation On écrira

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)$$

Exemples

$$1) \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$2) \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$$

Résumé du Théorème fondamental du calcul Intégral

Définition Soit $f \in C^0([a, b])$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(]a, b[)$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$

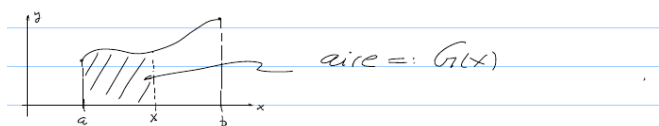
Remarque F est dérivable sur $[a, b]$ (voir le théorème section 5,7) et F est donc continue sur $[a, b]$

Définition Soit $f \in C^0([a, b])$. La limite $S := \underline{S} = \overline{S}$ où $\overline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n$, $\underline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n$ est appelé intégrale définie de f sur $[a, b]$

Notation

$\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R} \rightarrow$ intégrale définie

$\int f(x) dx \equiv \int^x f(t) dt \rightarrow$ intégrale indéfinie = $\{F \in C^1(]a, b[) : F' = f\}$



$$G :]a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

on montre que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (G(x)) = 0 =: G(a)$

Théorème Soit $f \in C^0([a, b])$. Alors

i) G est une primitive de f

ii) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

pour toute primitive F de f

Théorème de la moyenne

soit $f \in C^0([a, b])$, $g \in C^0([a, b])$, $g(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$, Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(u) \int_a^b g(x) dx \quad (8)$$

Démonstration Soient m et M le minimum et le maximum global de f sur $[a, b]$.

Alors $m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ et donc

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (9)$$

et il existe donc $v \in [m, M]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = v \int_a^b g(x) \, dx \quad (10)$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $u \in]a, b[$ tel que $v = f(u)$

7.6 Application du théorème de la moyenne

Proposition : $\frac{2}{7} \leq \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{5 + \sqrt[3]{x}} dx}_I \leq \frac{2}{5}$

Démonstration On a $\sin(x) > 0$ pour $x \in]0, \pi[$. On pose

$$f(x) = \frac{1}{5 + \sqrt[3]{x}}, g(x) = \sin(x)$$

$\exists u \in]0, \pi[$ tel que

$$I = f(u) \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin(x) dx}_{=[-\cos(x)]_0^\pi = 1+1=2}$$

f est une fonction décroissante sur $[0, \pi]$ et $f(0) = \frac{1}{5}, f(\pi) = \frac{1}{5 + \sqrt[3]{\pi}} > \frac{1}{7}$

Donc $\frac{2}{7} \leq I \leq \frac{2}{5}$

7.7 Méthode d'intégration

7.7.1 Intégration "immédiate"

Voir le tableau

$$1. a > 0, \int a^x dx = \int e^{x \ln(a)} dx = \frac{1}{\ln(a)} e^{x \ln(a)} + C = a^x \frac{1}{\ln(a)} + C$$

$$2. \int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + C$$

Exemple : $\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin(x)^2 + C = -\frac{1}{2} \cos(x)^2 + C$ (à cause de la constante)

$$3. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$

$$\text{Exemple : } \int \tan(x) dx = - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \ln(|\cos(x)|) + C$$

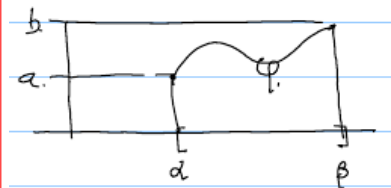
$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$5. \int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 dx = n \cdot \frac{\pi}{4} \text{ (on fait } n \text{ fois la même aire)}$$

7.7.2 Intégration par changement de variable

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset D(f)$, f continue sur $[a, b]$. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, φ dérivable sur $[\alpha, \beta]$, et φ' continue sur $[\alpha, \beta]$. De plus :

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$



Alors
$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, alors la fonction $G(u) = F(\varphi(u))$ est une primitive de $f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$ sur $[\alpha, \beta]$, car

$$G'(u) = F'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \quad (11)$$

$$\text{En plus } \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du = [G(u)]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Remarque : Si φ est bijective, alors $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$

Exemples :

1. $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$. On pose $x = \varphi(u) = \sin(u)$; $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(u)}}_{|\cos(u)|} \cdot \underbrace{\cos(u)}_{\varphi'(u)} du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u)) du = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) du = \frac{\pi}{4}$$

2. Cas d'une intégrale indéfinie (voir la remarque)

$$F(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$x = \varphi(u) = \sin(u), \varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$$

$$G(u) = \int (1 - \sin^2(u)) du = u - (\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin(2u)) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \underbrace{\sin(2u)}_{=2\sin(u)\cos(u)}$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin(u)\sqrt{1-\sin^2(u)}$$

$$\text{Donc } F(x) = G(\varphi^{-1}(x)) = G(\arcsin(x)) = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

7.7.3 Intégration par partie

Théorème Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable sur $[a, b]$ (= dérivable avec une fonction dérivée qui est continue). Alors

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \quad (12)$$

Remarque

En pratique, on écrit l'identité plutôt comme

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) \, dx \quad (13)$$

Avec f continue sur $[a, b]$ et g continûment dérivable sur $[a, b]$.

Remarque (cas d'une intégrale indéfinie)

$$\int f(x)g'(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) \, dx \quad (14)$$

f continue, g continûment dérivable, F une primitive de f .

Démonstration

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (15)$$

et donc

$$\int_a^b (f \cdot g)' \, dx = \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \quad (16)$$

Exemples

$$1. \int_0^1 e^x x \, dx = [e^x x]_0^1 - \int_0^1 e^x 1 \, dx$$

$$2. \int_0^1 x^2 e^x \, dx = [e^x x^2]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^x (2x) \, dx}_{2 \int_0^1 e^x x \, dx}$$

$$3. \int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \underbrace{\int \frac{1}{x} \, dx}_{=1} = x \ln(x) - x + C$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx = I_n, I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1, n \in \mathbb{N}^* \\
 & n \geq 2 : I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin(x)^{n-1} dx \\
 & = [-\cos(x) \sin(x)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)(n-1)(\sin(x)^{n-2} \cos(x)) dx \\
 & = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{n-2} (1 - \sin(x)^2) dx \\
 & = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
 & \text{Donc } nI_n = (n-1)I_{n-2} \text{ ou } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
 & \text{Donc } I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = I_n, I_0 = x + C, I_1 = \arctan(x) + C. \\
 & n \geq 1 : I_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} dx \\
 & = x \frac{1}{(x^2+1)^n} + 2n \int \underbrace{x \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}}_{= \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}} dx \\
 & I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \\
 & \text{Donc } I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, n = 1, 2, 3, \dots \\
 & \rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C
 \end{aligned}$$

7.8 Intégration d'un développement limité

Proposition : Soit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (17)$$

lorsque $x \rightarrow a$ Alors :

$$\begin{aligned}
 F(x) &:= \int_a^x f(t) dt \\
 &= f(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n+1} + o((x-a)^n)
 \end{aligned}$$

lorsque $x \rightarrow a$

Démonstration Soit $x > a$, g continue sur $[x, a]$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \left(\frac{g(x)}{(x-a)^n} \right) = 0$

$$\int_a^x g(t) dt \underbrace{=}_{\text{theoreme de la moyenne}} g(u)(x-a) \text{ avec } u \in]a, x[$$

$$\text{Donc } \left| \frac{\int_a^x g(t) dt}{(x-a)^{n+1}} \right| = [trou\dots]$$

Idem pour $x < a$

Exemples

Soit $F(x) := \int_0^x \sin(\cos(t)) dt$. calculer le DL_5 (développement limité d'ordre 5) de F en $x = 0$. ON a besoin du DL_4 de $f(t) = \sin(\cos(t))$ en $t = 0$.

$$\text{i) } \cos(t) = 1 - \underbrace{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)}_{=T \text{ et } T \rightarrow 0 \text{ pour } t \rightarrow 0}$$

ii) il nous faut le développement limité de \sin en $x=1$ (car $\cos(0) = 1$). Il suffit de calculer le DL_2 de $\sin(x)$ en $x=1$ (car $T \equiv t^2$)

$$\sin(x) = \sin(1) + \cos(1)(x-1) - \frac{1}{2}\sin(1)(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

$$\sin(\cos(t)) = \sin(1+T) = \sin(1) + \cos(1)T - \frac{1}{2}\sin(1)T^2 + o(T^2)$$

$$\text{iii) } f(t) = \sin(1) + \cos(1)(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)) - \frac{1}{2}\sin(1)(-\frac{1}{2}t^2 + o(t^2))^2 + o(t^4)$$

$$f(t) = \sin(1) - \frac{1}{2}\cos(1)t^2 + (\frac{1}{24}\cos(1) - \frac{1}{8}\sin(1))t^4 + o(t^4)$$

$$\text{iv) } F(x) = \sin(1)x - \frac{1}{6}\cos(1)x^3$$

7.9 Intégration d'une série entière

Théorème Une Série entière peut être intégrée terme par terme. Soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad (18)$$

avec rayon de convergence $r > 0$. Alors

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k+1} (x-a)^{k+1} \quad (19)$$

avec rayon de convergence r .

Démonstration : $F(a) = 0, F'(x) = f(x)$

Exemple:

$$\text{Soit } f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(-1)^k x^{2k}}$$

Alors $\operatorname{erf}(x) := \int_0^x f(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2k+1} (-1)^k x^{2k+1}$

7.10 Intégrales généralisées (ou impropres)

$I = \int_a^b f(x) dx$, trois types :

1. **Type 1 :**

f continue sur $[a, b[$, ou $]a, b]$, ou $]a, b[$ [image]

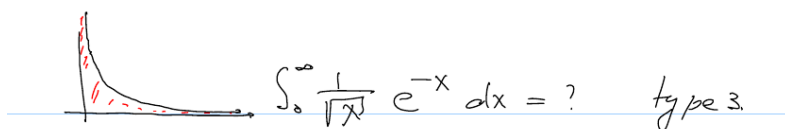
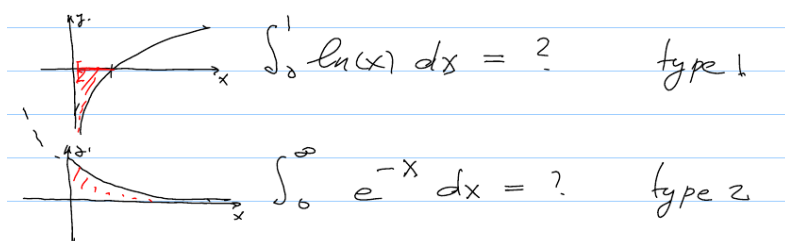
2. **Type 2 :**

f continue sur $] -\infty, b]$, $[a, \infty[$, $] -\infty, \infty[$ ($a = -\infty, b = \infty$, ou les deux) [image]

3. **Type 3 :**

Combinaison des types 1 et 2.

Exemples explicites :



Définition (type 1)

- Si f est continue sur $]a, b]$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \neq 0}} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x) \, dx \right) \quad (20)$$

- Si f est continue sur $[a, b[$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \neq 0}} \left(\int_a^{b-\epsilon} f(x) \, dx \right) \quad (21)$$

- Si f est continue sur $]a, b[$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_1 > 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 > 0}} \int_{a+\epsilon_1}^{b-\epsilon_2} f(x) \, dx \quad (22)$$

(une limite après l'autre, l'ordre ne joue pas d'ordre).

Exemples

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_0^1 \ln(x) \, dx &\stackrel{def}{=} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left(\int_\epsilon^1 1 \ln(x) \, dx \right) \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left(([x \ln(x)]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 1 \, dx) \right) \text{ trou} \end{aligned}$$

2. trou

3.

Définition (type 2)

- Si f est continue sur $[a, \infty[$

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) \, dx \quad (23)$$

- Si f est continue sur $] -\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^b f(x) \, dx \quad (24)$$

- Si f est continue sur $] -\infty, \infty[$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \lim_{\substack{R_2 \rightarrow \infty \\ R_1 \rightarrow -\infty}} \left(\int_{R_1}^{R_2} f(x) \, dx \right) \quad (25)$$

De nouveau, n'importe quel ordre.

Exemples:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^\infty e^{-x} \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} \, dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (-e^{-R} + 1) = 1 \end{aligned}$$

2. trou

$$\begin{aligned} 3. \, r \neq 1, r > 0 \int_1^\infty \frac{1}{x^r} \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^r} \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-r} \frac{1}{x^{r-1}} \right]_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-r} \frac{1}{R^{r-1}} - \frac{1}{1-r} \right) = \begin{cases} +\infty & r < 1 \\ \frac{1}{r-1} & r > 1 \end{cases} \\ \text{cas } r = 1 : \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} \, dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(R) - 0) = +\infty \end{aligned}$$

Définition : (type 3)

Si f est continue sur $]a, \infty[$ ou $] - \infty, b[$:

$$\int_a^\infty f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx \text{ avec } c \in]a, \infty[\quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ avec } c \in] - \infty, b[\quad (27)$$

Remarque :

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) dx &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{a+\epsilon}^R f(x) dx \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{\substack{R \rightarrow -\infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_R^{b-\epsilon} f(x) dx \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_\epsilon^R \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx =: I. \text{ Pour se débarrasser de la racine, on pose} \\ x &= \varphi(u) = u^2, u > 0, \varphi(\sqrt{\epsilon}) = \epsilon, \varphi(\sqrt{R}) = R \\ I &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{R}} \frac{1}{u} e^{-u^2} \cdot 2u du \text{ (on se rappelle que } erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du) \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} [\sqrt{\pi} erf(x)]_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{R}} \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} (\sqrt{\pi} erf(\sqrt{R}) - \sqrt{\pi} erf(\sqrt{\epsilon})) = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

7.11 Intégration des fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec p, q des polynômes, de degré de p trou

Exemple : $\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{-x+1}{x^2+1}$

Soit donc degré $p <$ degré de q .

7.11.1 Exemple

1. Décomposition de $q(x)$ (sur \mathbb{R}) en facteurs irréductibles.

Exemple :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 1 \text{ pas de factorisation sur les reals}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \text{ voir le chapitre des nombres complexes}$$

2. Décomposition de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ en éléments simples

Exemple : $f(x) = \frac{2x^3}{x^4 - 1} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x + 1} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2 + 1}$

$$2x^3 = \alpha(x + 1)(x^2 + 1) + \beta(x - 1)(x^2 + 1) + (\gamma x + \delta)(x^2 - 1)$$

On regarde les coefficients de chaque puissance :

$$\left. \begin{array}{l} x^3 : 2 = \alpha + \beta + \gamma \\ x^2 : 0 = \alpha - \beta + \delta \\ x : 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 : 0 = \alpha - \beta - \gamma \end{array} \right\} \text{ algèbre linéaire : } \alpha = \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1, \delta = 0$$

3. Intégration des éléments simples

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(|x - 1|) + \frac{1}{2} \ln(|x + 1|) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(|(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)|)) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(|x^4 - 1|) + C = \ln(\sqrt{x^4 - 1}) + C \text{ En fait (ouvrir les yeux):}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ avec } g(x) = x^4 - 1$$

$$\text{Donc } \int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln|x^4 - 1| + C$$

7.11.2 Le cas général

Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\deg p < \deg q$

1. Décomposition de $q(x)$ en facteurs irréductibles

$$q(x) = (\dots)(\dots)(\dots)\dots$$

2. Décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{p(x)}{(\quad)(\quad)(\quad)} = \underbrace{\quad} + \underbrace{\quad} + \dots \\ &\quad \text{facteurs dans } q(x) \quad \quad \quad \text{termes dans } f(x) \\ &\quad x-a, \quad \quad \quad \frac{\alpha}{x-a} \\ &\quad (x-a)^2, \quad \quad \quad \frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} \\ &\quad (x-a)^m, \quad \quad \quad \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{(x-a)^k} \\ &\quad x^2+bx+c, \quad \quad \quad \frac{\beta x + \gamma}{x^2+bx+c} \\ &\quad (x^2+bx+c)^m, \quad \quad \quad \sum_{k=1}^m \frac{\beta_k x + \gamma_k}{(x^2+bx+c)^{k_1}} \end{aligned}$$

Remettre sur le même dénominateur, comparer les puissances, utiliser algèbre linéaire pour déterminer les coefficients α, β, γ

3. Intégration des éléments simples.

- $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln(|x-a|) + C$
- $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, k \geq 2$
- $\int \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{\beta}{2}(2x+b) + \gamma - \frac{1}{2}\beta b}{x^2 + bx + c} dx$
 $= \frac{\beta}{2} \ln(|x^2 + bx + c|) + (\gamma + \frac{1}{2}\beta b) \int \frac{1}{\underbrace{x^2 + bx + c}_{=(x+\frac{b}{2})^2 + c + \frac{b^2}{4}}} dx$

On a $c - \frac{b^2}{4} > 0$ sinon on aurait des facteurs linéaires !

On pose $x = \varphi(u) = \sqrt{x - \frac{b^2}{4}} u - \frac{b}{2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+bx+c} dx &= \frac{1}{\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}} \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{\beta}{2} \ln(|x^2+bx+c|) + \frac{\gamma\frac{1}{2}\beta b}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + C \end{aligned}$$

Finalement, pour $k \geq 2$

$$\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2+bx+c)^k} = \text{même procédure que pour } k = 1$$

trou

7.12 Divers

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} dt.$$

On pose $t = \varphi(s) = s^2$, avec $s > 0$

$$1 = \varphi(1), 3 = \varphi(\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \text{Donc notre : } \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} dt &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(1+s^2)} 2s ds = 2[\arctan(s)]_1^{\sqrt{3}} = 2(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (voir dessins)} = \frac{\pi}{12} 2 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Cas indéfini : } \int \frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} dt = 2 \arctan(s) + C = 2 \arctan(\sqrt{t}) + C$$

7.13 Glossaire

\sim Relation d'équivalence

$:=$ est défini par

\equiv Équivalent à

\forall Pour tout (x par exemple)

\in est élément de

C_x Classe d'équivalence de x

: tel que

7.14 Règles

7.14.1 Complexes

7.14.2 Limites

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

7.15 Fonctions

- $g(x) = |x| \rightarrow g'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ et pas dérivable en $x = 0$
- dérivée de la fonction réciproque donnée par $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$