Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Notes de Cours en

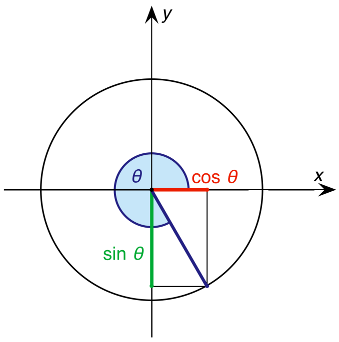
Analyse I

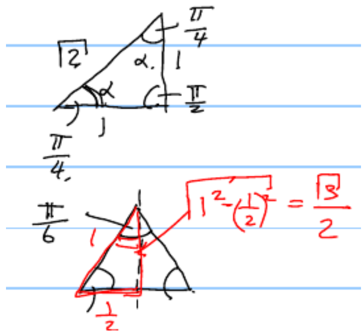
Contents

1 Rappels

1.1 Fonctions trigonométriques

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$$





1.2 Logarithme

- $\log_a(x) = y \iff x = a^y, \forall$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x \log_a(a) = x \cdot 1 = x$
- $log_a(1) = 0, log_a(a) = 1$

1.3 Paires de fonctions réciproques

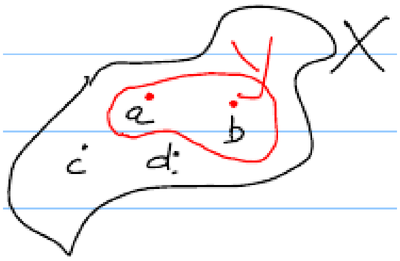
Deux fonctions f et g sont réciproques si $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

Par exemple :

- x^2 et $\sqrt{x}$ sont réciproques pour tout nombre ≥ 0
- $e^x = \exp(x)$ et $\ln(x)(e \simeq 2.71828)$ sont réciproques pour tout nombre positif.
- a^x et $\log(x)$

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{1}{x}) = \log_a(x^{-1}) = -\log(x)$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x \cdot \frac{1}{y}) = \log_a(x) + \log_a(\frac{1}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

2 Chapitre 1 : Ensembles



On peut définir $Y = \{x \in X : \text{couleur(x)} = \text{rouge}\}$

2.1 Notations

$\in$	est élément de	$a \in y$
$\notin$	n'est pas élément de	$c \notin y$
$\subset$	est un sous-ensemble	$y \subset y$
$\not\subset$	n'est pas un sous-ensemble	$x \not\subset y$
$=$	est le même ensemble que	y = y
$\neq$	n'est pas le même ensemble que	$x \neq y$
$\emptyset$	ensemble vide, ensemble sans élément	

Nota bene :

- $\emptyset \subset x \forall x$
- $x \subset x$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$, mais $\{a, b\} \neq \{\{a\}, \{b\}\}$
- $|\mathbf{X}|$ Cardinalité d'un ensemble. $\mathbf{X} = \{a, b, c, d\} \to |\mathbf{X}| = 4$
- $P(\mathbf{X})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X. Il vaut $2^{|\mathbf{X}|} = 2^4 = 16$ sous-ensembles.

2.1.1 Le produit cartésien

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ des ensembles. $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} := \{(x, y) : x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$

Exemple : X = {1,2}, Y = {3,4}. $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(1,3),(2,3),(1,4)(2,4)\}$

2.1.2 Classes d'équivalence

On peut vouloir décomposer un ensemble **X** en classes d'équivalences.

Remarque : Le symbole $\sim$ définit une relation d'équivalence

3 relations d'équivalence sur X :

Réflexive $x \sim x, \forall x \in \mathbf{X}$

Symétrique x $\sim$ y $\Rightarrow$ y $\sim$ x

Transitive x $\sim$ y, y $\sim$ z $\Rightarrow$ x $\sim$ z

Définition : $C_x := \{y \in \mathbf{X} :\sim x\} \equiv [x]$

$C_x \in \mathbf{X}$ la classe d'équivalence de x

Définition : L'ensemble quotient $\mathbf{X}/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalences distinctes de X

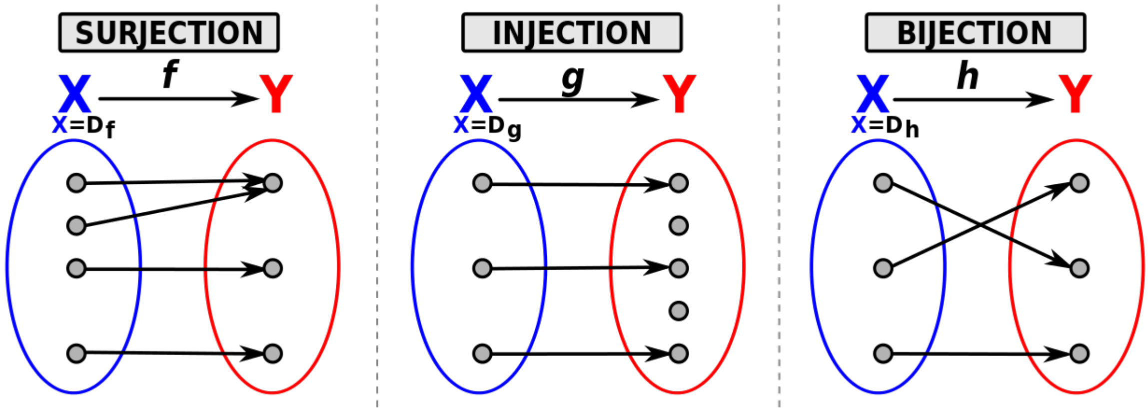
Terminologie : Soit C $\in$ X/$\sim$ alors x $\in$ C est appelé un représentant de C

2.1.3 Fonctions, applications

Surjection Tout point de **Y** est atteint par au moins un x, soir si Im(f) = Y

Injection Tous les points de **X** ont un et un seul y. **Y** peut avoir des points "vides" $\rightarrow$ $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Bijection Chaque point de X et de Y a une et une seule réciproque



Domaine de définition de f:

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_f \equiv \mathbf{D}(f) := \{x \in \mathbf{X} :$ une flèche (et une seule) va de $x \in \mathbf{X}$ vers un $y \in \mathbf{Y}\}$

Si $\mathbf{D} = \mathbf{X}$, on parle aussi d'une application

Image de f : $Im(f) \equiv f(\mathbf{D}) := \{y \in \mathbf{Y} : y = f(x)$ pour un $x \in \mathbf{D}\}$

Remarque: Toute fonction $f : \mathbf{D} \to$ Y définit une fonction surjective si on remplace Y par Im(f) < y

Définition : Une fonction qui est injective et surjective est appelée bijective.

Remarque : Toute fonction $f : \mathbf{D} \to \mathbf{Y}$ qui est injective définit une fonction bijective de $\mathbf{D} \to Im(f)$.

2.1.4 Notation et terminologie

1. Donné g. h = $g|_{\mathbf{D}_h}$. = "h est égal à g restreint à $\mathbf{D}_h \subset \mathbf{D}_g$ ou h est une restriction de g.
2. Donné h : $g||_{\mathbf{D}_h}$ = h = g est un prolongement de h.

2.1.5 Le graphe d'une fonction f

Définition : Le graphe d'une fonction f : $\mathbf{D} \to \mathbf{Y}$ est l'ensemble $G_f = \equiv G(f) := \{(x, y) \in \mathbf{D} \times \mathbf{Y} : y = f(x)\}$

2.1.6 Définition d'une fonction par son graphe

Soit $G \subset \mathbf{D} \times \mathbf{Y}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{D}$, alors il existe un y et un seul tel que $(x, y) \in G$. Alors G est le graphe d'une fonction (application) f : $\mathbf{D} \to Y$, qui pour $(x, y) \in G$ associe y à x

2.1.7 Composition de fonction

$$h = f \circ g \tag{1}$$

Soit

$$\mathbf{D} := \{x \in \mathbf{D}_f : y = f(x) \in \mathbf{D}_g\} \subset \mathbf{D}_f \tag{2}$$

Alors on peut définir la fonction $h : \mathbf{D} \to Z$ par $h(x) := g(f(x))$. **Notation** on écrit $h = g \circ f$ pour une fonction définie ainsi. On dit que h est la composition de g avec f, ou que h est "g rond f"

2.1.8 Compositions multiples

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f \tag{3}$$

La loi de composition de fonctions est associative

2.1.9 Fonction réciproque

Soit $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ avec $D_f = x$ une fonction bijective. Alors on peut définir une fonction dite *réciproque* g(f(x)) = x , x ∈ X

f(g(y)) = y , y ∈ Y

ou g ∘ f = Id (identité)

f ∘ g = Id.

Définition : Soit f : $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ avec $\mathbf{D}_f = X$ une fonction bijective. Alors on peut définir une fonction dite réciproque $g \equiv f^{-1} : Y \to X$. par : g(y) = x où x est l'unique solution de l'équation f(x) = y. On a $\mathbf{D}_{f^{-1}} = Y$et f^{-1} est bijective

2.2 Les entiers $(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$

Les entiers naturels

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{N}* = \{1, 2, 3, ...\}$ $= \mathbb{N}$ privé de 0

$= \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Nota bene : 0 est un nombre pair.

2.2.1 Relation d'ordre (totale) $\leq$

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N}$

1. $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
2. $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$
3. on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$ (ordre totale)

Notation : on écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$, $x \geq y$ si $y \leq x$, $x > y$ si $y < x$

Remarque : $\Leftrightarrow$ 3' : on a soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$

Propriété de bon ordre : Tout sous-ensemble non-vide X de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, CàD :

$$\forall X \subset \mathbb{N}, \exists x \in X \text{ tel que } x \leq y \text{ pour tout } y \in X \tag{4}$$

Exemple : X = {1,2,3} , x = 1, le plus petit élément car pour tout $x \in X$, on a $1 \leq x$

2.2.2 Opérations :

$$+ \quad \underset{(m,n)}{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{(m+n)}{\mathbb{N}}$$

$$\cdot \quad \underset{(m,n)}{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{(m \cdot n)}{\mathbb{N}}$$

2.2.3 Élément neutre

- 0 pour l'addition : $n + 0 = n \forall n \in \mathbb{N}$
- 1 pour la multiplication : $n \cdot 1 = n \forall n \in \mathbb{N}$

On n'a pas encore (sur $\mathbb{N}$)d'élément "inverse" pour l'addition et la multiplication.

2.2.4 Compatibilité de $\leq$ avec + et $\cdot$

1. Si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z \forall z \in \mathbb{N}$
2. Si $0 \leq x$ et $0 \leq y$ alors $0 \leq x \cdot y$

2.2.5 Les entiers (relatifs)

$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ = le même sans le 0.

Élément inverse pour + Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que x+y = 0

Notation : on écrit 2 -3 au lieu de 2 + (-3) car -(-3) = 3

2.2.6 PGDC

Algorithme d'Euclide, Algorithme de Joseph Stein.

Remarque de base : Soit $0 \leq b \leq a$. Si r divise a et si r divise b, alors r divise a-b.

Algorithme de Stein

1. pgdc(a,b) = pgdc(b,a).
2. pgdc(a,b) = 2·pgdc($\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$) si a et b pairs
3. pgdc(a,b) = pgdc ($\frac{a}{2}, b$) si a pair b impair.
4. pgdc (a,b) = pgdc($\frac{a-b}{2}, b$), $a \geq b$, a,b impair
5. pgdc (a,0) = a.

2.3 Raisonnement par récurrence (principe d'induction)

Exemple : on aimerait démontrer que pour $n \in \mathbb{N}*$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 : P(n) \tag{5}$$

Théorème:

1. Si P(n) est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ (initialisation)

2. Si pour tout $n \geq n_0$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors P(n) es vrai pour tout $n \geq n_0$

Dans notre exemple, :

- $n_0 = 1 : 1 = 1^2 = 1$

- $1 + 3 + 5 + ... + 2((n+1) - 1) \stackrel{?}{=} (n+1)^2 P(n+1) \iff 1 + 3 + 5 + ... + 2(n - 1) + 2(n+1)$[trou]

Si les points 1 et 2 sont vrais, ils impliquent que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$

attention ! 1 est obligatoire !

$P(n) : 3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7

2. $P(n+1) : 3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1} = 9 \cdot (3^{2n+4} - 2^n) + 2^n \cdot (9-2)$ Donc $P(n) \rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $P(1) : 3^6 - 2 = 727$, qui n'est pas un multiple de 7 (car $pgcd(727, 7) = 1$)

Donc $P(1)$ n'est pas vrai, donc $P(n)$ n'est pas démontré.

Il reste la possibilité logique que $P(n)$ soit vrai à partir de $n_0 > 1$ mais en fait $P(n)$ est faux pour tout n. Ceci suit 2. par une démonstration par l'absurde.

2.3.1 Notation $\sum, \prod$

$\sum_{k=m}^{n} a_k$ est la somme : $a_m + a_{m+1} + ... + a_n$

$\prod_{k=m}^{n} a_k$ est la multiplication : $a_m \cdot a_{m+1} \cdot ... \cdot a_n$

Par exemple :

$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Définition

Si $n < m$, il s'agit d'une somme / un produit vide, donc :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0, \prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \tag{6}$$

Règles de calcul

$$\sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_k$$
$$\left(\prod_{k=l}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=l}^{n} a_k$$
$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$
$$\prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} b_k$$

2.4 Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}*\}$

$$+ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{N} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} & \to & \frac{ad+bc}{bd} \end{array}$$

$$\cdot \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) & \to & (\frac{a \cdot c}{b \cdot d}) \end{array}$$

Sur $\mathbb{Q}$ on a une relation d'équivalence. $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ si ad = bc.

Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ car $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

Notation : on écrit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ au lieu de $\sim$

Important : $+, \cdot$ sont compatibles avec la relation d'équivalence (vérifier !), c'est à dire : si $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$ alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$ et $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

Le représentant privilégié d'un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ est $\frac{p}{q}$ avec $q > 0$ et pgdc($|p|$, q) = 1

Soit $x = \frac{a}{1}, y = \frac{b}{1}$. Alors $x + y = \frac{a+b}{1}$ et $x \cdot y = \frac{a \cdot b}{1}$. On récupère donc les opérateurs donc les opérations sur $\mathbb{Z}$. on identifie donc $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$.

"Inverse" pour + pour $x\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on définit $-x \in \mathbb{Q}$ par $-x = \frac{-p}{q}(= \frac{p}{-q})$. et on a

$x + (-x) = \frac{p}{q} + (\frac{-p}{q}) = \frac{p-p}{q} = \frac{0}{q} = 0$

Inverse pour $\cdot$ soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p, q \neq 0$. Alors y $= \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ est bien défini, et on a $x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{qp}{pq} = \frac{1}{1} = 1$

Notation pour l'inverse de $x \in \mathbb{Q}*$, on écrit x^{-1} ou $\frac{1}{x}$

2.4.1 Proposition : $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné

$x, y, z \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné car

- L'addition dans $\mathbb{Q}$
  - est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$
  - est commutative : $x + y = y + x$
  - a un élément neutre : $x + 0 = x$
  - a un élément "inverse": $x + (-x) = 0$
- La multiplication dans $\mathbb{Q}$
  - est associative : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  - est commutative : $x \cdot y = y \cdot x$
  - a un élément neutre : $x \cdot 1 = x$
  - a un élément inverse pour $x \neq 0 : x \cdot x^{-1} = 1$
- Distributé des opérations "multiplications" et "addition" : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

relation d'ordre totale sur $\mathbb{Q}$

Pour ordonner $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}, b, d > 0$, on utilise les représentants

$$x = \frac{ad}{bd}, y = \frac{bc}{bd} \tag{7}$$

Définition

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, b, d > 0$, alors $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc$ dans $\mathbb{Z}$

Remarques

- $\leq$ définit une relation d'ordre totale
- $\leq$ est compatible avec les opérations $+, \cdot$
- $\leq$ est compatible avec $\sim$

Propriété importante $\mathbb{Q}$ est *archimédien* (Axiome d'Archimède)

Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}, x, y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}*$ tel que $n \cdot x = y$

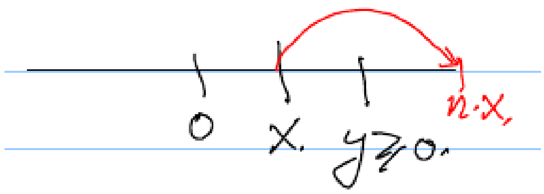
Démonstration

Si $x > y$ alors $x > y$ (trivial, n = 1).

En revanche, si $y \geq x > 0$, alors on peut écrire $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$, avec $a, b, c, d > 0$. On choisit $n = (b \cdot c) + 1$

$(ad) \cdot n = (ad) \cdot ((bc) + 1) = (ad)(bc) + (ad)$

Donc $n \cdot x = n\frac{a}{b} = n \cdot \frac{ad}{bd}\frac{bc}{bd} = cd = y$



2.4.2 Démonstration par l'absurde :

Proposition Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors $x^2 \neq 2$

Démonstration(Par l'absurde)

Soit $x^2 = 2$, on a $x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}*, pgcd(p, 1) = 1$

$$\begin{aligned}
x^2 = 2 &\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \\
&\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \\
&\Rightarrow p^2 = 2q^2 \\
&\Rightarrow (2a)^2 = 2q^2, a \in \mathbb{N}* \;\; \text{(p es pair)} \\
&\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot a^2 = 2q^2 \\
&\Rightarrow 2a^2 = q^2 \\
&\Rightarrow 1 = pgdc(p, q) \\
&\Rightarrow 1 = pgdc(2p, 2q) \text{ Contradiction !}
\end{aligned}$$

Donc $x^2 \neq 2$ donc l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$

2.5 Les nombres réels $\mathbb{R}$

Introduction Axiomatique de $\mathbb{R}$

On demande de l'ensemble $\mathbb{R}$ la même structure algébrique que pour $\mathbb{Q}$.

1. $\mathbb{R}$ est un corps

2. $\mathbb{R}$ est pourvu d'une relation d'ordre totale,

Puis on demande en plus :

1. $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne inférieure

"Tout sous ensemble non-vide *minoré* de $\mathbb{R}$ admet (dans $\mathbb{R}$) un plus grand *minorant.*

Remarque : 3 est équivalent à la propriété "$\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure" ou "$\mathbb{R}$ a la propriété de la complétude"

Remarque : $\mathbb{R}$ est *archimédien* (sans démonstration)

Remarque : L'axiome d'Archimède implique que si $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}*$ alors $a = 0$

Remarque : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: les nombres irrationnels.

Existence de $\mathbb{R}^2$

1. la droite numérique
2. L'ensemble des nombres à virgule. Attention : 0.999999... $\sim$ 1.000000...
3. Des classes d'équivalence des *suites de Cauchy* d'un nombre rationnel

Définition

Pour avoir la droite numérique achevée, on ajoute deux symboles. $\overline{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty \equiv \infty\}$

Propriétés

- $-\inf < +\infty$

- $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

2.6 Minorants, majorants

<u>Définition</u> :

$a \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de $\mathbf{A} \cap \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset$ si $a \leq x \forall x \in \mathbf{A}$

<u>Définition</u> :

$a \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de $\mathbf{A} \cap \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset$ si $a \geq x \forall x \in \mathbf{A}$

<u>Définition</u> :

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset$ est *minoré* ou *borné inférieurement* si $\mathbf{A}$ admet un minorant.

<u>Définition</u> :

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset$ est *majoré* ou *borné supérieurement* si $\mathbf{A}$ admet un majorant.

<u>Définition</u> :

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset$ est *borné* s'il est majoré ou minoré.

<u>Définition</u> :

Un minorant (majorant) a de $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset$ est appelé *infimum* (*suppremum*) ou *borne inférieur* (*borne supérieur*) si a est le plus grand minorant (plus petit minorant) de $\mathbf{A}$, c'est à dire si tout minorant (majorant) b de $\mathbf{A}$ satisfait la condition $b \leq a$ $(b \geq a)$

Autrement dit on a :

1. $\forall x \in \mathbf{A}$ on a $a := \inf(\mathbf{A}) \leq x$

2. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, il existe $x \in \mathbf{A}$ tel que $x \geq a + \epsilon$

<u>**Remarque**</u> $\inf(\mathbf{A}) et \sup(\mathbf{A})$ existent par définition de $\mathbb{R}$ (axiome 3). <u>**Remarque**</u> Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset$, et soit $\mathbf{B} := \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbf{A}\}$. Alors $\sup(\mathbf{A}) = -\inf(\mathbf{A})$
<u>Exemple :</u> $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$ Alors $\inf(\mathbf{A}) = 1, \sup(\mathbf{A}) = 2$. Voir avec '-**A** '

<u>Définition</u> (minimum)

Si $\inf(\mathbf{A}) \in \mathbf{A}$, alors $\inf(\mathbf{A}) = \min(\mathbf{A})$

<u>Définition</u> (maximum)

Si $\sup(\mathbf{A}) \in \mathbf{A}$, alors $\sup(\mathbf{A}) = \max(\mathbf{A})$

2.6.1 1

2.6.2 2

2.6.3 Exemples

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$. "inf(A) $= -\infty$", sup(A) $= 1$
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ "inf(A) $= -\infty$, sup(A) $= 1 =$ max(A).
3. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^2 < 2\}$, inf(A) = min(A) = 0. sup(A) $= \sqrt{2}$, ou par déf : $\sup(A)^2 = 2$.

Proposition : a := sup(A) $= \sqrt{2}$ = solution de $x^2 = 2$.

⌜Soit a = sup(A). On a $1 \in A$ car $1^2 \leq 2$ et donc $a \geq 1$

1. supposons que $a^2 < 2$ puisque $\mathbb{R}$ est archimédien. $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot (\frac{2-a^2}{2a+1}) > 1 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{n} < 2 - a^2 < a^2 + 2 - a^2 = 2$
   avec de n : $(a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n}$, et donc $a + \frac{1}{n} \in A$ est en contradiction avec a = sup(A).
2. supposons que $a^2 > 2$ Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien.
   $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n(\frac{a^2-2}{2a}) > 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} < a^2 - 2 \Leftrightarrow -\frac{2a}{n} > 2 - a^2$

avec ce n : [trou =3] 1 et 2 impliquent que $a^2 = 2$ car $a^2 \geq 2$ par 1 et $a^2 \leq 2$ ...[trou mika]

2.6.4 Intervalles (notation

Soit $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

Intervalle ouvert $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Intervalle fermé $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$]a, a[= \emptyset$

$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

$[-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq b\}$

2.6.5 Sous ensembles (générales) de $\mathbb{R}$

exemple : A = [1, 2[∪ {3} [trou mika]

Définitions :

- $E \subset \mathbb{R}$ est ouvert si pour tout $a \in E$ il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset E$.
  Exemple : E =]0, 1[est (un ensemble) ouvert.
- L'intérieur $\dot{E}$ de E est le plus grand ensemble ouvert contenu dans E. C'est à dire si $A \subset E$,A ouvert, alors $A \subset \dot{E}$
- $E \subset \mathbb{R}$ est fermé si $E^c \equiv \mathbb{R} \setminus E$ est ouvert
  exemple : $E =]-\infty, 0[\cup\{1\} \cup [2, \infty[$ est fermé, alors $E^c =]0, 1[\cup]1, 2[$
- L'adhérence $\overline{E}$ de E est le plus petit sous-ensemble formé de $\mathbb{R}$ qui contient E. C'est à dire si $\mathbb{R} \supset A \supset E$, A fermé, alors $A \supset \overline{E}$. On a $\overline{E} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus E)$ ou encore $\overline{E} = \{a \in \mathbb{R} : \forall r > 0,]a-r, a+r[\cap E \neq \emptyset\}$
- le bord ∂E de E On a $\partial E = \overline{E} \setminus \dot{E}$ ou encore $\partial E = \{a \in \mathbb{R} : \forall r > 0,]a-r, a+$
  $r[\cap E \neq \emptyset,$
  $]a-r, a+r[\cap(\mathbb{R} \setminus E)\}$
- $a \in E$ est un point isolé de E s'il existe r ¿ 0 tel que $]a-r, a+r[\cap E = \{a\}$
- {points limites} = $\overline{E} \setminus$ {point isolés}

Remarques :

- Soit $E \subset \mathbb{R}$ est borné et fermé, alors inf(E) $\in E$ et sup(E) $\in E$
- inf et sup d'un ensemble sont uniques
- $\emptyset, \mathbb{R}$ sont à la fois ouverts et fermés.
- $E = \dot{E} \Leftrightarrow E$ est ouvert
  $E = \overline{E} \Leftrightarrow E$ est fermé

2.6.6 Valeur absolue

Définition : pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la valeur absolue par $|x| := x$ pour $x > 0, -x$ pour $x < 0$

propriétés :trou]

<u>inégalité triangulaire :</u> $|x + -y| \leq |x| + |y|$

$|x + -y| \geq ||x| - |y||$

<u>Identités</u> (voir les exercices :)

$|x + y| + |x - y| = |x| + |y| + ||x| - |y|| = 2max\{|x|, |y|\}$

$||x + y| - |x - y|| = |x| + |y| - ||x| - |y|| = 2min\{|x|, |y|\}$

2.7 un truc qu'on verra après

2.8 Introduction aux nombres complexes

<u>motivation :</u> Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 + 1 \neq 0$

2.8.1 Définition du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ donc $(a, b), (c, d) \in X$

$\mathbb{C} = \{X, +, \cdot\}$

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(a, b)(c, d) := (a + c, b + d)$

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

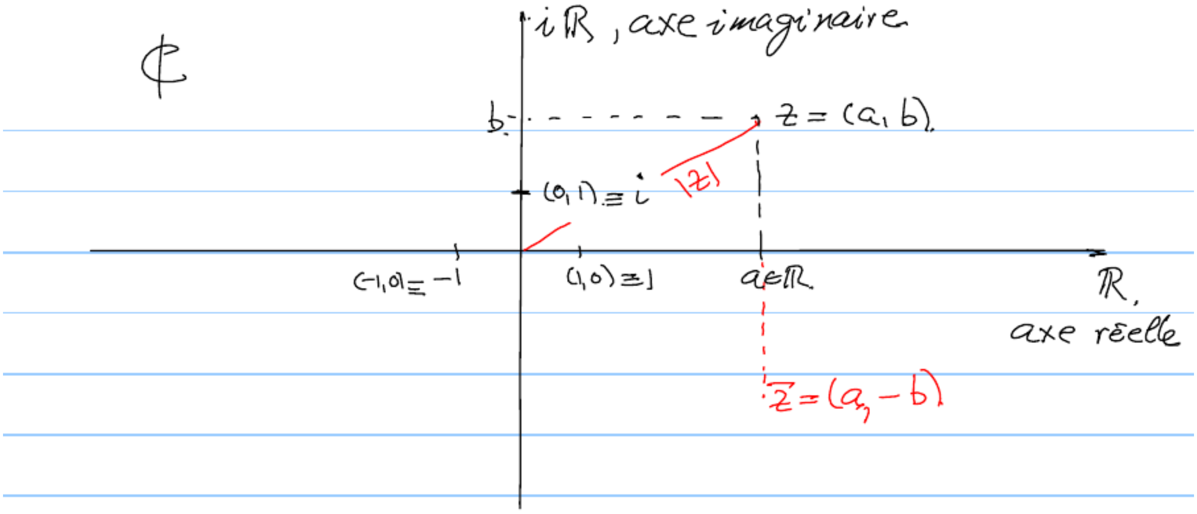
$(a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

$\mathbb{C}$ est un corps, appelé le corps ds nombres complexes.

2.8.2 Représentation cartésienne

On a $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, o)$

on identifie (a,0) $\in \mathbb{C}$ avec a $\in \mathbb{R}$



on a $(0, 1)[= i] \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) \equiv -1$

$$\boxed{(0, 1) \equiv i}$$

Donc $i^2 = -1$, ou encore $i^2 + 1 = 0$

Pour $z = (a, b) \in \mathbb{C}$

$z = (a, 0)[\equiv a] \cdot (1, 0)[\equiv 1] + (b, 0)[\equiv b](0, 1)[\equiv i] \equiv a + bi$

donc

$$\boxed{z = a + bi}$$

C'est la forme ou représentation cartésienne de $z \in \mathbb{R}$ Soit $z_1 = a + bi, z_2 = c + id, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

En utilisant les règles de calculs "habituelles", plus $i^2 = -1$, on trouve

$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$

$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + ib) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

et on retrouve les opérations + et $\cdot$ de la définition de $\mathbb{C}$

2.8.3 Définitions

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$

Complexe conjugué de Z : $\overline{z} = a - bi \equiv a + i(-b)$ Propriétés:

- $\overline{\overline{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Partie réelle de $z = a + ib$: $Re(z) \equiv R(z) := a \in \mathbb{R}$

Partie imaginaire de $z = a + ib$: $Im(z) := b \in \mathbb{R}$

Valeur absolue (ou module) de Z : $|z| = (z \cdot \overline{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

En fait, on a pour $z = ib$

$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - b^2 \geq 0$

Remarque :
$Re(z) = \frac{z \cdot \overline{z}}{2} \in \mathbb{R}$
$Im(z) = \frac{z \cdot \overline{z}}{2i} \in \mathbb{R}$

2.8.4 Élément inverse pour la multiplication

Soit $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot \overline{z} = 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

On a $z_1 = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$

En effet $z \cdot z_1 = z \cdot \frac{1}{|z|^2}\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \cdot z$ or $\overline{z} \cdot z = |z|^2$ par définition, alors $= 1$

Notation pour l'inverse $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}

Remarque : "$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{z \cdot \overline{z}}\overline{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$"

explicitement, pour z = ib [trou cours]...$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

2.8.5 Formules d'Euler et de Moïvre

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{On pose } e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \text{ Formule d'Euler}}$

avec les règles de calcul habituelles pour la fonction exponentielle :

pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$(e^z)^n = e^{nz}$ pour $n \in \mathbb{N}*$

ainsi que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

avec $z = a + ib$, $e^z = e^{a+ib} = e^i + e^{ib}$

$e^a \in \mathbb{R}$ (exponentielle réelle)

$e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$

$Re(e^{a+ib}) = e^a\cos(b), Im(e^{a+ib}) = e^a\sin(b)$

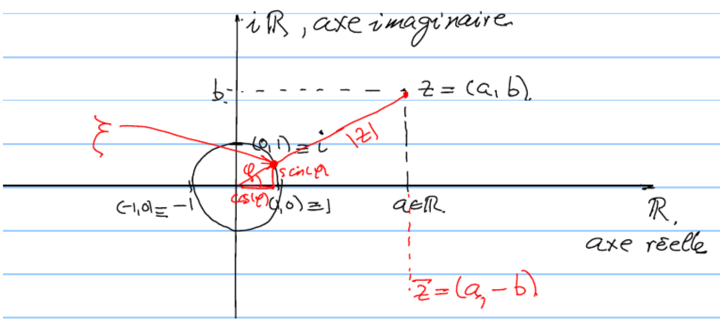
On a aussi (Euler et règles pour Re, Im)

$\cos(\varphi) = Re(e^{i\varphi} = [troucours]$

Formule de Moïvre : Pour $n \in \mathbb{N}*, \varphi \in \mathbb{R}$, on a

$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n$ [trou cours] $n = 3$: $\sin(3\varphi) = Im(\cos(\varphi) + i(\sin(\varphi))^3 = \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3$

2.8.6 Forme polaire d'un nombre complexe



$z \neq 0$, $z = |z| \cdot \zeta$ où $\zeta = \frac{1}{|z|}z$, $|\zeta| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$.

$\zeta = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = e^{1\varphi}$

Donc tout $z \neq 0$ est de la forme

$$a + ib = z = |z| \cdot e^{i\varphi} \tag{8}$$

où $\varphi = 2\arctan(\frac{b}{1+\sqrt{a^2+b^2}})$si $z \in \mathbb{C}\backslash] - \infty, 0]$ (ou π sinon)

la forme ou la représentation polaire de z.

<u>Définition :</u> Le nombre $\varphi \in] - \pi, \pi]$ est appelé l'argument de $z \in \mathbb{C}, \varphi = \arg(z)$

$$arg(z) = \varphi = \begin{cases} 2 \cdot \arctan \frac{y}{y+\sqrt{y^2+x^2}} & \text{si } y \neq 0 \text{ et si } x > 0, y > 0 \\ \pi & \text{si } x < 0, y = 0 \end{cases}$$

la forme polaire est mieux adaptée à la multiplication des nombres complexes. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}* \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors

$z_1 = |z_1| \cdot e^{e\varphi_1}, z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$ et

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{9}$$

Soit $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$. L'inverse :

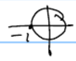
$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$= r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

$= r\cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi)$

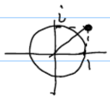
$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$

2.8.7 Exemples

1)  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$,  $-1 = e^{i\pi}$

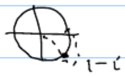
2).  $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $\left(= e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$

Donc $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$. 

3)  $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc :

$$2i = 1 + 2i + i^2 = (1+i)^2 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} = 2\cdot i$$

4). $$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{e^{i\frac{7\pi}{4}}}_{\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = \frac{1-i}{2}$$



5) $z_1 = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i \frac{3}{4}\pi}$

6) $z_2 = 1 - \sqrt{3}\, i = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$-\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

7) $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \sqrt{2}\, e^{i\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)}$

$= 2\sqrt{2}\, e^{i\pi\frac{5}{12}}$

8) $(1 - \sqrt{3}\, i)^{30} = \left(2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} = 2^{30} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{3}\cdot 30}}_{e^{-i\pi\cdot 10} = \left(e^{-i\pi\cdot 2}\right)^5 = 1} = 2^{30}$

$= (2^{10})^3 = (1024)^3 = 1'073'741'824$

9) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^4 = (-i)^4 = (-1)^2 = 1$

10) $\sin(3\varphi) = \operatorname{Im}\left(e^{i3\varphi}\right) = \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\varphi}\right)^3\right)$

$= \operatorname{Im}\left(\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^3\right)$

$= 3\cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3$

2.8.8 La fonction et sa réciproque

Soit $z = r \cdot e^{i\varphi}, r > 0, \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$z^2 = r^2 \cdot e^{12\varphi}, 2\varphi \in]-\pi, \pi[$

$$z = \sqrt{\omega} = \begin{cases} \sqrt{\omega} = \sqrt{x} & \text{pour} \quad y = 0, x > 0 \quad \text{cas 1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\omega| + x} + i\sqrt{|\omega| - x}) & \text{pour} \quad y > 0 \quad \text{cas 2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\omega| + x} - i\sqrt{|\omega| - x}) & \text{pour} \quad y < 0 \quad \text{cas 3} \end{cases}$$

Cas 2 $(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\omega| + x} + i\sqrt{|\omega| - x}))^2 = \frac{1}{2}(|\omega| + x - |\omega| + x + 2i\sqrt{\omega^2 - x^2}) = x + iy$

2.9 Résolution des équations

2.9.1 "Racines" n-ièmes

Dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^n = \omega \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}* \tag{10}$$

a toujours n solutions si $\omega \neq 0$. $z = \omega$ est la seule solution pour $\omega = 0$

Méthode "polaire"

- $\omega = |\omega| \cdot e^{i(\varphi + k2\pi)}$, avec $k = 0, ..., n-1$
- $z_k = |\omega|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n} \cdot 2\pi)}$ avec $k = 0, ..., -n1$

Exemples

- $z^2 = 1 = e^{i(0+k2\pi)}$ avec $k = 0, 1$

  $z_k = e^{1\frac{k}{2}2\pi}$ avec $k = 0, 1$

  $z_0 = e^0 = 1, z_1 = e^{i\pi} = -1$

- $z^3 = 1 = e^{i(0+k2\pi)}$ avec $k = 0, 1, 2$

  $z_k = e^{1\frac{k}{3}2\pi}$ avec $k = 0, 1, 2$

  $z_0 = e^0 = 1, z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

- $z^3 = i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$, k = 0,1,2

  $z_0 e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

  $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

  $z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

- $z^6 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + k2\pi}$, k = 0-5

  $z_k = 2^{\frac{1}{12}} e^{i(\frac{\pi}{24} + \frac{k}{6}\pi}$

2.9.2 Le cas n = 2 (méthode cartésienne)

Le cas $z^2 = \omega = x + iy$.

$y = 0, x \geq 0 \rightarrow z_0 = \sqrt{x}$ et $z_1 = -\sqrt{x}$

$y = 0, x < 0 \rightarrow z_0 = i\sqrt{|x|}$ et $z_1 = -i\sqrt{|x|}$

$y \neq 0 \rightarrow z_0 = \sqrt{\omega}, z_1 = -\sqrt{\omega}$

avec $\sqrt{.}$ la fonction réelle (y = 0) ou complexe ($y \neq 0$)

Puisque $z^2 + pz + q = (z + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q$ l'équation $z^2 + pz + q = 0$ peut [trou mika]

2.9.3 Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polyne p(z) = $a_n z^n + ... + a_i z^i + a_0, n \in \mathbb{N}{*}a_0, ...a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ admet dans $\mathbb{C}$ n "racines" c'est à dire il existent $z_0, ...z_n \in \mathbb{C}$ tels que $p(z_k) = 0, k = 0, ...n - 1$ et on a la représentation $p(z) = a_n(n_n - z_0)...(z - z_n - 1)$

Exemples :

$p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = (z-1)\cdot(z-1)$

$p(z) = z^2 - 1 = (z+1)\cdot(z-1)$

$p(z) = z^3 - 1 = (z-1)\cdot(z^2+z+1)$

$= (z-1)\cdot(z-(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}))\cdot(z-(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}))$

2.9.4 Quelques résultats généraux

Si les a_k sont réels (polynôme réel), alors $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ (vérifier. Dans ce cas, $p(\overline{z_k} = 0$ si $p(z_k) = 0, car\overline{0} = 0$.

Explication : ou bien $z_k \in \mathbb{R}$ et on a un facteur réel, ou $z_k \notin \mathbb{R}$ ce qui donne des facteurs complexes conjugués $(z - z_k)(z - \overline{z_k})$

Théorème : Tout polynôme à coefficients réels peut être factorisé dans $\mathbb{R}$ en facteurs linéaires ou quadratiques

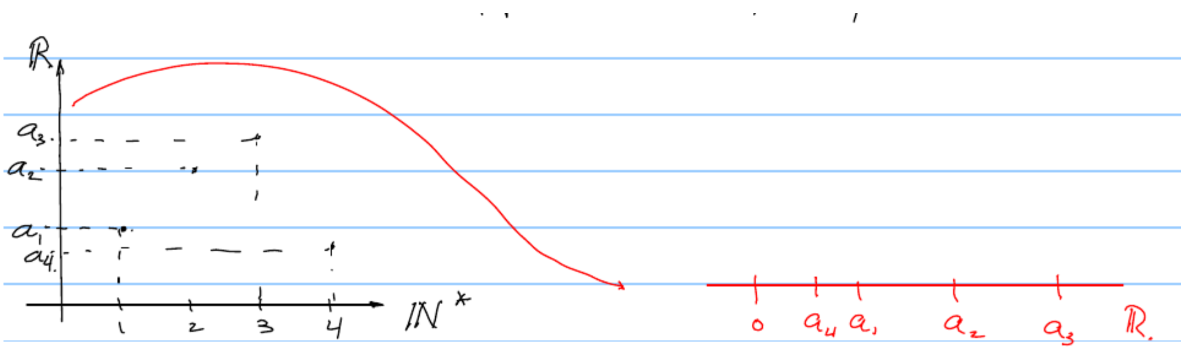
Explication : $(z - z_k)(z - \overline{z_k}) = (z^2 - (z + \overline{z_k}) - z + z_k\overline{z_k}$

3 Suite de nombres réels

Définition : On appelle suite de nombres réels toute application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Notation : On pose $a_n = f(n)$ et on écrit (a_n) ou $(a_n)_{n\geq 0}$ ou $a_0, a_1, ...$ pour la suite

Remarque : On écrira $(a_n)_{n\geq n_0}$ pour une suite numérotée par $n_0, n_{0+1}, ...$



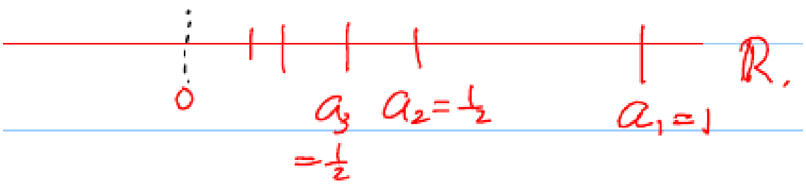
On s'intéresse à l'image de f : $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$

3.1 Exemples :

3.1.1 Suite harmonique

$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}*$

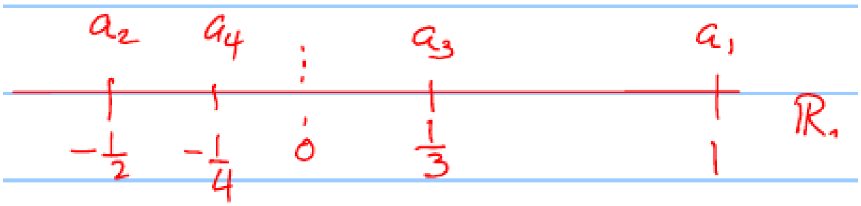
$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, ...$



3.1.2 Suite harmonique alternée

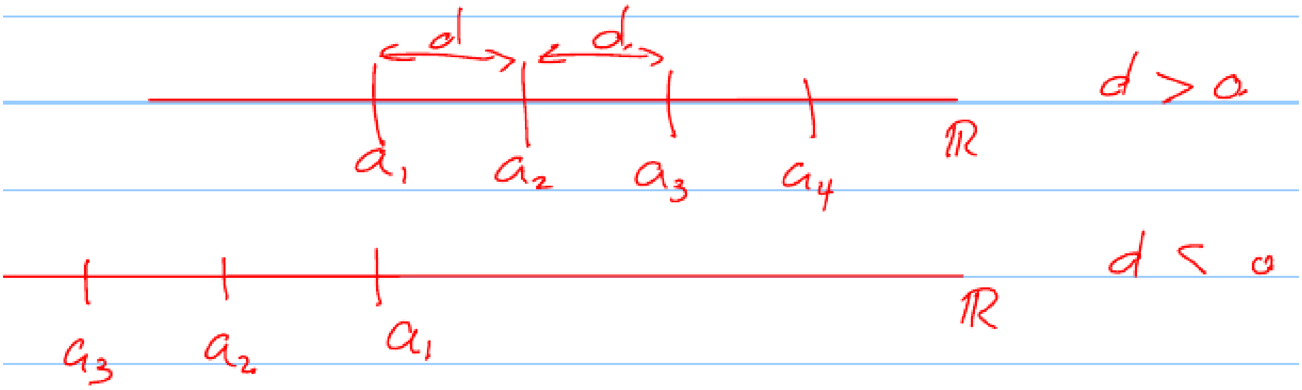
$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}*$

$a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{4}, ...$



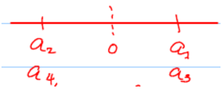
3.1.3 Suite arithmétique

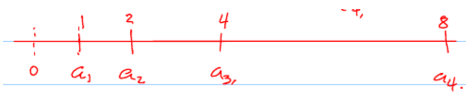
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, a, d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

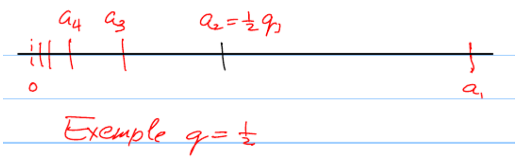


3.1.4 Suite géométrique

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, a, q \in \mathbb{R}, q \neq 0, n \in \mathbb{N}*$

- Si q = 1 : $a_n = a1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- si q = -1 : 

- si $q > 1$ 

pour a=1, q=2
- si $q < 1$: 

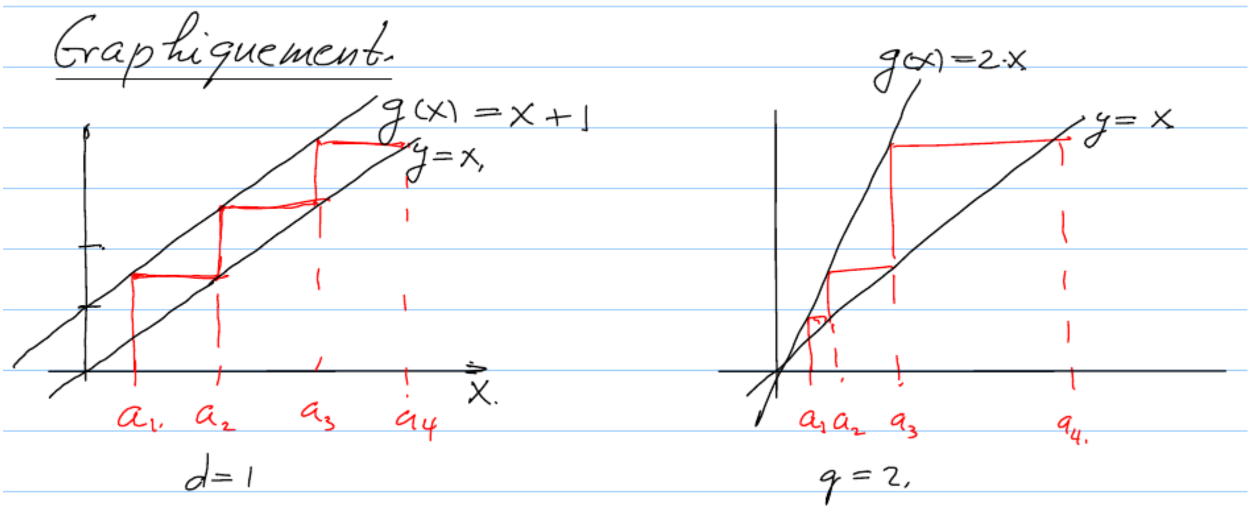
3.2 Suites définies par récurrence

Soit $a_1 \in \mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbf{D}(g) = \mathbb{R}$

$a_n = g(a_{n-1}), n = 2, 3, 4, ...$

Exemples :

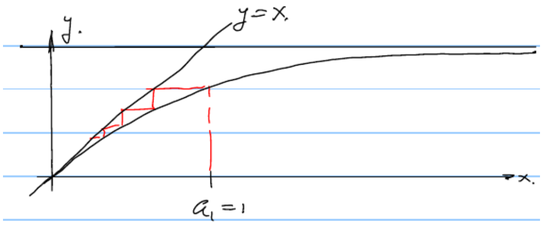
- $g(x) = x + d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d$ Suite arithmétique (démonstration par récurrence)
- $g(x) = x \cdot q \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q$ suite géométrique (démonstration par récurrence également)



- $g(x) = \frac{x}{x+1}$ pour $a_1 = 1$ on obtient la suite harmonique.

  démonstration par récurrence :

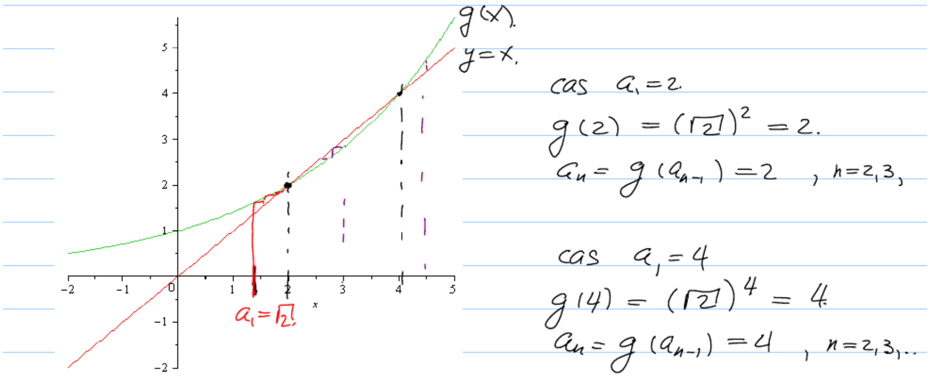
  - $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
  - $g(a_{n-1}P(n-1).g(\frac{1}{n-1}) = \frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n} = a_n$



- $a_1 = \sqrt{2}, g(x) = (\sqrt{2})^x = (1.414...)^x$

  $a_n = (\sqrt{2})^{a_{n-1}}$

  $a_1 = \sqrt{2} = 1.414..., a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = 1.63..., a_3 = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}, ...a_{10} = 1.983..., a_{1000} =$ 1.999...



3.3 Définitions

Suite croissante une suite (a_n) est croissante si $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Suite décroissante une suite (a_n) est décroissante si $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Suite monotone Une suite (a_n) est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Suite majorée Une suite (a_n) est majorée si $E = \{a_0, a_1. - --\} \subset \mathbb{R}$ est majoré

Suite minorée Une suite (a_n) est minorée si $E = \{a_0, a_1. - --\} \subset \mathbb{R}$ est minoré

Suite bornée Une suite (a_n) est bornée si elle est minorée et majorée

Plus petit majorant d'une suite $\sup(a_n) := \sup\{a_0, a_1, a_2, ...\}$

Plut grand minorant d'une suite $\inf(a_n) := \inf\{a_0, a_1, a_2, ...\}$

Minimum et maximum d'une suite

$\max(a_n) := \max\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ s'il existe

$\min(a_n) := \min\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ s'il existe

Exemple 2.3

$a_n = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, a_1 = 2, a; 2 = \frac{3}{2}$

$1 \leq a_n \leq 2$ La suite est bornée

$\sup(a_n) = \max\ (a_n) = 2$

$\inf(a_n) = 1$, pas de minimum.

3.4 Limite d'une suite

Définition : une suite (a_n est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $a \in \mathbb{R}$ et l'on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{1}$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe n_0 tel que $|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq n_0$

remarque : $\Rightarrow a$ est un point adhérent à $\{a_0, a_1, ...\}$

remarque : $|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$

remarque : La démonstration dans l'exemple 2.3 montre que la suite $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ converge vers a = 1, car $\forall\epsilon > 0$ on a $1 \leq a_n \leq 1 + \epsilon, \forall n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$

Notations équivalentes

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a_n \to a \Leftrightarrow a : n \to a$ lorsque $n \to \infty$

exemples :

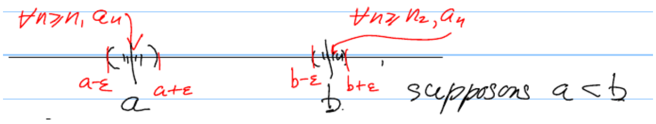
1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}=1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ même demonstration que dans l'exemple 2.3

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{(-1)^n}_{a_n}$ pas de limite

<u>Proposution :</u> Si une suite converge, sa limite est unique.

<u>Démontration par l'absurde</u>



oit $\lim\limits_{n\to\infty}=a$ et $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$ avec $b\neq a$

Soit $\epsilon\leq\frac{1}{3}(b-a)$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\exists n_1 t.q.\forall n\geq n_1|a-a_n|<\epsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b\Leftrightarrow\exists n_2 t.q.\forall n\geq n_2|b-a_n|<\epsilon$

Soit $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, alors pour $n\geq n_0$ on a

$|a-a_n|<\epsilon$ <u>ET</u> $|b-a_n|<\epsilon$

Donc $|b-a|=|(b-a_n)-(a-a_n)|\leq|b-a_n|+a-a_n|\leq\epsilon+\epsilon\leq\frac{2}{3}|b-a|$

Donc $0\leq\frac{1}{3}|b-a|\leq 0$

Donc $b-a=0\to b=a$

3.5 Suite divergentes et fortement divergentes

<u>Définition :</u> Une suite (a_n) qui n'est pas convergente est appelée divergente.

<u>Exemple :</u> $a_n=(-1)^n, n\in\mathbb{N}$ est une suite divergente. <u>Suites "fortement divergentes"</u>

<u>Définition :</u> Soit (a_n) une suite telle que pour tout $r\geq 0$ il existe n_0 tel que $\forall n\geq n_0, a_n\geq r$ alors on écrit $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

<u>Exemple :</u> $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$

<u>Définition :</u> Soit (a_n) une suite telle que pour tout $r>0$ il existe n_0 tel que $\forall n\geq n_0, a_n\leq r$, alors on écrit $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$

<u>Exemple :</u> $\lim\limits_{n\to\infty}-n=-\infty$

Attention :Par abus de langage, on dit souvent que la suite (a_n) "converge" vers ∞ ou $-\infty$ si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Remarque : La suite $a_n = (-1)^n \cdot n$ diverge, et elle ne "converge" pas non plus vers ∞ ou $-\infty$

3.6 Opérations algébriques sur les limites

Si ! $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
alors (à vérifier en utilisant les définitions !)

- $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha a + \beta b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = ... = \frac{a}{b}$ si $b_n \neq 0, b \neq 0$

Conséquences : $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\underbrace{a_n - a}_{a_n}) = 0$

Exemples : $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot(1+\frac{3}{2n})}{3n(1-\frac{5}{3n})} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3}\frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{5}{3n}}) = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{5}{3}} = \frac{2}{3}\frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n})}{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{5}{3n})} = \frac{2}{3}\frac{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{2}(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})}{(\lim_{n\to\infty} 1)-\frac{5}{3}(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})} = \frac{2}{3}\frac{1+\frac{3}{2}0}{1-\frac{5}{3}0} = \frac{2}{3}$

Attention aux hypothèses:
$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{\infty}{\infty}$

Manipulation de ∞ et 0 :

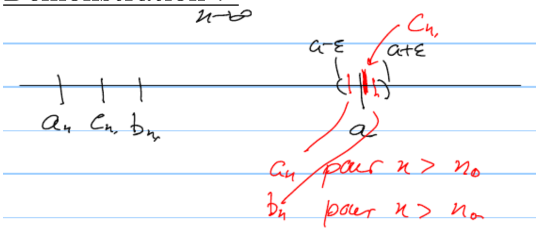
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{0}{\infty} = 0$

- $c + \infty = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = 0 \forall c \in \mathbb{R}$
- $c \cdot \infty = \infty, c > 0$

3.7 Théorème des deux gendarmes

<u>Théorème :</u> Soit $(a_n), (b_n), (c_n)$, trois suites telles que $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall b \geq n_o \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

<u>Démonstration :</u>



$\forall \epsilon > 0, \exists n_o$ tel que $|a_n - a| \leq \epsilon$ et $|b_n - a| \leq \epsilon$

Donc

$$\underbrace{-\epsilon} \leq a_n - a \leq \underbrace{c_n - a} \leq b_n - a \leq \underbrace{\epsilon} \tag{2}$$

$\Rightarrow |c_n - a| \leq \epsilon$

<u>Exemples :</u>

- $$\underbrace{a_n := \underbrace{\frac{-1}{n^2+1}}_{n\to\infty,\text{ donc } 0} \leq c_n = \frac{\cos(7n^2+3)}{n^2+1} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{n\to\infty,\text{ donc } 0}}_{\text{donc } c_n = 0}$$
- $$\underbrace{a_n := \underbrace{1}_{n\to\infty,\text{ donc } 1} \leq c_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq \sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{n\to\infty,\text{ donc } 1}}_{1}$$
-

3.8 Critères de convergence

Théorème : Toute suite croissante et majorée (décroissante et minorée) est convergente et $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)$ (et $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(a_n)$)

Corollaire : Toute suite monotone et bornée est convergente

Démonstration (pour le sup, pur l'inf voir l'Exemple 2.3

- $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tel que $a_{n_0} > a - \epsilon$ par définition du sup.
- $\forall n a_n \leq a$ Par définition du sup
- $a_n \geq a_{n_o}, \forall n \geq n_0$ car la suite est croissante

Donc : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0, a - \epsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq a \leq a + \epsilon$

C'est à dire $|a_n - a| < \epsilon$ et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ par définition de la suite.

Rappels :

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}, 0! = 1$

$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}B^k = A^n + nA^{n-1}B + ...$

$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$

Exemple : (majoré + croissant $\Rightarrow$ converge)

$a^n = (1+\frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}*$ (série 6, exo 6)

La suite est majorée $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (\frac{1}{n})^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} (\frac{1}{n}^k$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 1(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n}$

$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k$

$k! = 1 \cdot 2 ... \cdot k \geq 2^k - 1$

$= 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

La suite est croissante $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 1(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n}$

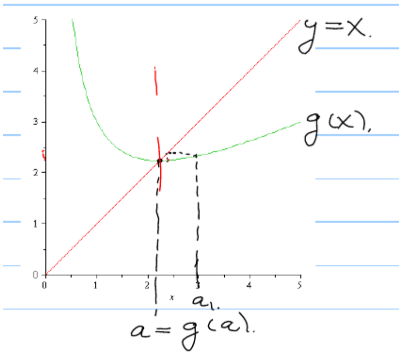
$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 1(1-\frac{1}{n+1})...(1-\frac{k-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!} 1(1-\frac{1}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1}) = a_{n+1}$

1+2 implique que $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n := e = 2.718..$ (nombre d'Euler)

3.9 Convergence d'une suite définie par récurrence (un exemple)

$a_1 = 3, a_n = g(a_{n-1}), n = 2, 3, g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\frac{1}{x}$

c'est à dire : $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{a_{n-1}}$



Montrons que l asuite est minorée et décroissante (converge)

1. $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}*$ (éa suite est bien définie)

   par récurrence : $a_1 = 3 > 0 \to a_n > 0$ si $a_{n-1} > 0, n = 2...$

2. On calcule la limite sous l'hypothèse qu'elle existe

   $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}} = \frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\frac{1}{a}$

   $\Rightarrow \frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{5}$ ($-\sqrt{5}$ n'est pas posible)

3. La suite est minorée par $\sqrt{5}(\sqrt{5} = \inf(a_n)$

   Démonstration par récurrence ($P_n : a_n \geq \sqrt{5}$)

   - $a_1 = 3 \geq \sqrt{5}$
   - $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{5}{<_{n-1}} = \frac{1}{2a_{n_1}}(a_{n-1}^2 + 5) = \frac{1}{2a_{n-1}}(a_{n-1} - \sqrt{5})^2 + \sqrt{5} \geq \sqrt{5}(P_n)$

4. La suite est décroissante (car $a_n \geq \sqrt{5}$ ou par récurrence)

   $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{-a_{n-1}^2+5}{2 \cdot a_{n-1}} \leq 0$

$2+\underbrace{3+4}_{\text{série convgergente}}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$

Remarques

- Toute suite convergente est bornée
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ et si pour $n \geq n_0$ on a $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$
- Critère du quotient pour les suites : si
  $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$
  existe, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ si $0 \leq \rho < 1$ et la suite diverge si $\rho > 1$. Aucune conclusion si $\rho = 1$
- Si a_n est une suite croissante, et b_n est une suite décroissante, et si $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors :
  - $a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_0$
  - $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ existent

3.10 Suites de Cauchy

Critère de convergence $\Leftrightarrow$ à la définition de convergence pour les suites de nombres réels

Définition : Une suite $(a_n)a_n \in \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| < \epsilon \tag{3}$$

Théorème : Une suite de nombres réels est une suite de Cauchy si et seulement si la suite est une suite convergente.

Démonstration :

$\Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a : \forall\epsilon > 0, \exists n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0 |a - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$

donc, $\forall m, n \geq n_0 |a_n - a_m| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

" $\Rightarrow$ " nécessite B.W. (Bolzano-Weierstrass), voir 2.13

3.11 Application : Suites récurrentes linéaires

Soit $g(x) = qx + b, q \neq 1$ et $a : \frac{b}{1-q}$

On a $g(a) = a$

Théorème : Soit $a \in R, a_n = g(a_{n-1}), n = 2, ...$

- si $|q| < 1$ alors la suite converge
- si $|q| > 1$ et $a_1 \neq a$ la suite diverge

Exemple : $(a_1 = 3), a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1, n = 2$

Démonstration:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a = ag(a)$ si la simite eciste
- $n \geq 2.|a_n - a_{n-1}| = |(qa_{n-1} + b) - (qa_{n-a} + b| = |q(a_{n-1} - a_{n-2})| = |q||a_{n-1} - a_{n-2}| = ... = |q|^{n-2}|a_2 - a_1|$ (= par récurrence)

  $\Rightarrow$ divergente si $|q| > 1, a_2 \neq a_1 \neq a)$

- Soit $n > m \geq n_0$

  $|a_n - a_m| = |(a_n - a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_{m+1} - a_m)|$

  $\leq (|q|^{n-2} + |q|^{n-3} + ... + |q|^{m-1})|a_2 - a_1|$

  $= |q|^{m-1}\underbrace{(1 + |q| + ... + |q|^{n-m-1})}_{\sum_{k=0}^{n-m-1}|q|^k = \frac{1-|q|^{n-m}}{1-|q|}}|a_2 - a_1|$

  $\leq \frac{1}{1-|q|}|q|^m[trou]$

2+3 : $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Cauchy, limite existe

3.12 Généralisation : théorème de point fixe de Banach

Théorème : Soit I un intervalle fermé et g:I $\to$ I tel que

$$|g(x) - g(y)| \leq |q| \cdot |x - y|, \forall x, y \in I, |q| < 1 \tag{4}$$

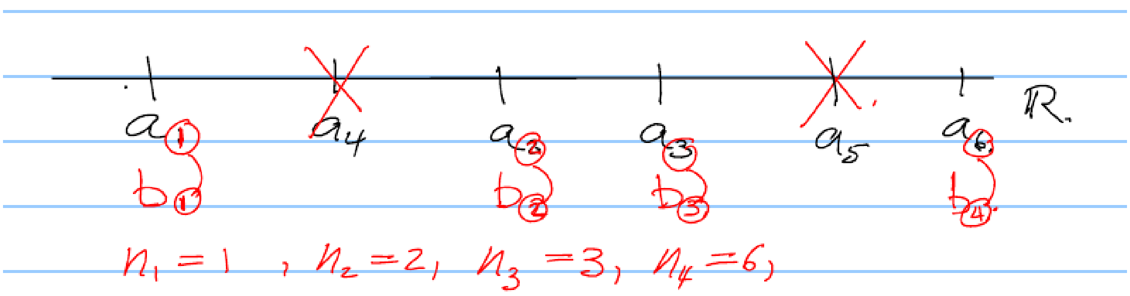
alors

- il existe un unique $a \in I$ tel que $a = g(a)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ pour toute suite $a_n, a \in I$
  et $a_n = g(a_{n-1}), n = 2. - - -$

3.13 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition : Soit (n_k) une suite d'entiers naturels telle que $n_k > n_l$ si $k > l$

Alors la suite $(b_k), b_k = a_{n_k}$ est appelée une sous-suite de la suite a_k



Théorème : B.W. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exemple : $a_n = (-1)^n$

$a_n \in [-2, 2]$, donc (a_n) bornée

$b_k = a_{\underbrace{2k}_{n_k}} = (-1)^{2k} = 1$

$c_k = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$

Donc $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1$ et $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = -1$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas.

Explication :

On divise par deux l'intervalle [a,b] qui contient tous les (a_n) et on retient une moitié qui contient un nombre infini des a_n. Puis on recommence. Par récurrence on détermine l'existence d'une limite

3.14 Limites inférieurs et limite supérieure d'une suite a_n bornée

Définition : $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de (a_n) s'il existe une sous-suite (b_k) telle que $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = a$

$E_1 = \{a_1, ...\}\, \inf(E_1) = b_1, \sup(E_1) = c_1$

$E_2 = \{a_2, ...\}\, \inf(E_2) = b_2, \sup(E_2) = c_2$

$E_3 = \{a_n, ...\}\, \inf(E_n) = b_n, \sup(E_n) = c_n$

(b_n) une suite croissante et bornée

(c_n) une suite décroissante et bornée

$\Rightarrow b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

$\Rightarrow c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n =: \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

Remarque : Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} = a$ alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{5}$$

4 Séries numériques

4.1 Définition

On aimerait définir des "sommes infinies" $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, pour $a_k \in \mathbb{R}$, c'est à dire pour (a_k) une suite donnée. Une telle somme infinie est appelée une série numérique.

Définition : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n$, $s_n = \sum_{k=0}^{n}$

Donc : $s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$

Terminologie

- les a_n sont appelés les termes de la "somme infinie"
- La somme finie s_n est appelée n-ième somme partielle de la somme infinie.

Exemple : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k}_{=s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Définition : une série numérique est dite convergente si la suite (s_n)des sommes partielles converge. La limite $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ est appelée la somme de la série

Définition : une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge

Remarques :

- toute série absolument convergente est convergente
- La somme dune série absolument convergente ne dépend pas de la numérotation de ses termes.

4.2 Exemples

4.2.1 La série harmonique

$(S =) \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k}$ cette série diverge

$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (la limite n'existe pas)

<u>Démonstration</u> (raisonnement par l'absurde)

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, b_n = s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$

Supposons que $\underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}}_{\text{Hypothèse}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \underbrace{=}_{\text{par définition de la limite}} s$

Alors $b_n - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$

4.2.2 La série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} (= ln2), (-1)^0 = 1 \tag{1}$$

- La série converge, mais pas absolument.

4.2.3 La série géométrique

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, q \in \mathbb{R} \tag{2}$$

- La série géométrique converge absolument pour $0 \leq |q| < 1$
- La série géométrique diverge pour $|q| \geq 1$

<u>Démonstration</u>

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{3}$$

si $|q| < 1, n \to \infty$ alors

$$\frac{1}{1-q} \tag{4}$$

4.3 Critères de convergence

4.3.1 Critère nécessaire

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \to \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \neq 0 \to \sum_{k=1}^{\infty} \text{ ne converge } \underline{\text{pas}}$$

Démonstration

Si la série numérique converge, la suite $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ est une suite de Cauchy. Cela veut dire que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n, m \geq n_0, |s_n - s_m| < \epsilon$. En particulier $|s_n - s_{n-1}| < \epsilon$. Mais si $|s_n - s_{n-1}| = a_n$, alors $|a_n| < \epsilon$. On a donc que $\forall \epsilon > 0$ il existe n_0 tel que $|a_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

4.3.2 Critère de Leibnitz

Si (a_k) est une suite alternée ($(-1)^{k-1} a_k \geq 0$ ou ≤ 0 pour tout k). Si($|a_k|$) est strictement décroissante ($|a_{k+1} < |a_k| \forall k$) et si $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$, alors la série converge.

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}, a_k = \frac{1}{k} \tag{5}$$

Les 3 critères sont donc à respecter pour que ce soit une suite de Leibnitz :

- La suite doit être alternée
- $|a_k|$ doit être strictement décroissant
- $|a_k|$ doit tendre vers 0

4.3.3 Critère de comparaison

- Si $(0 \leq)|a_k| \leq b_k \forall k$ et si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, alors $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge (absolument)
- si $0 \leq b_l \leq a_k$ et si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, alors $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

4.3.4 Critère de d'Alembert et de Cauchy

Théorème Si

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \text{ existe (d'Alembert)} \tag{6}$$

ou si

$$\lim_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}} \text{ existe (Cauchy)} \tag{7}$$

Alors

- si $0 \leq q < 1$ La série converge
- si $q \geq 1$ La série diverge
- si q = 1, pas de conclusion par cette méthode

Remarque Les deux méthodes donnent la même valeur pour q. [trou exemple]

4.4 Série avec paramètres

1. Soit la série

$$s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{b^k}, b \neq 0 \text{ un paramètre} \tag{8}$$

La converge dépend du choix de b. Selon d'Alembert,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)^2}{b^{k+1}}}{\frac{k^2}{b^k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2}{bk^2}\right| = \frac{1}{b} = q \tag{9}$$

- La série converge absolument pour $|b| > 1$
- La série diverge pour $0 < |b| < 1$
- Le critère ne s'applique pas pour $b = \pm 1$.

  Dans ce cas, on a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2$ ou $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^2$. Ces séries divergent par les critères des sections précédentes.

2. Soit la série $s = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k, x \in \mathbb{R}$. Selon d'Alembert,
$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{1}{k!}x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x}{k+1}\right| = 0 = q$
La série converge donc pour tout x.

5 Fonctions réelles d'une variable réelle

5.1 Terminologie, conventions

Nous considérons des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = f(x)$ pour $x \in D(f) \subset \mathbb{R}$ le domaine de définition de f

Convention :

En pratique, une fonction est souvent donnée par une expression (une formule, par exemple $f(x) = x^2$). Alors, il est entendu que le domaine de définition que $D(f)$ soit le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression est bien définie.

Exemples

$$f(x) = \sin(x) \iff \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, D(f) = \mathbb{R} \\ x \to y = \sin(x) \end{array}$$

$$f(x) = \tfrac{2}{1-x^2} \iff \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ x \to y = \tfrac{2}{1-x^2} \end{array}$$

5.1.1 Fonctions polynômes

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, D(f) = \mathbb{R} \tag{1}$$

5.1.2 Fonctions rationnelles

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ p,q, des fonctions polynômes} D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\} \tag{2}$$

5.1.3 Fonctions algébriques

Fonctions construites à partir de fonctions polynômes et un nombre fini d'opérations $+, -, \cdot, /, \sqrt[n]{\ }$

5.1.4 Fonctions transcendantes

Toutes les fonctions qui ne sont pas algébriques.

Par exemple : $\sin(x), \ln(x), e^x, \cos(x), \ldots$

5.2 Définitions

Croissant une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *croissante* si $x_1 \leq x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in D(f)$. Elle est *strictement croissante* si $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$

Décroissantune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *décroissante* si $x_1 \geq x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in D(f)$. Elle est *strictement décroissante* si $x_1 > x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$

Monotone Une fonction est *monotone* si elle est soit croissante soit décroissante.

Symétrique Un ensemble est *symétrique* (par rapport à 0) si $x \in \mathbf{X} \to -x \in \mathbf{X} \forall x \in \mathbf{X}$.

Exemples : $[-1, 2]$ et $[-2, 1]$ ne sont pas symétriques, alors que $[-3, 3]$ et $[-2, 1] \cup [1, 2]$ le sont.

Paire Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si $D(f)$ est symétrique et si $f(x) = f(-x) \forall x \in D(f)$

Exemples : $0, 1, x^2, \cos x \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ldots$

Impaire Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *impaire* si $D(f)$ est symétrique et si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D(f)$

Exemples : $0, x, x^3 \sin(x), \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Périodique Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée *périodique* de période $\mathbf{T} > 0$ si$D(f) = \mathbb{R}$ et si $f(x + \mathbf{T}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Le plus petit $\mathbf{T} > 0$ tel que les conditions sont respectées est appelé la *période* de f

Exemple : la fonction $\sin^2(x)$ est 2π périodique, mais la période est de π

5.3 Les fonctions sinh et cosh

Remarque Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $D(f)$ symétrique. Alors $f = f_+ + f_-$, avec f_+ une fonction paire, et f_- une fonction impaire. On a

$$
\begin{aligned}
f_+(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\
f_-(x) &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))
\end{aligned}
$$

Exemple : $f(x) = e^x$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \cosh(x) + \sinh(x) \\
\cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \\
\sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

5.4 Opérations algébriques

5.4.1 Fonctions avec parité

Soient p_1, p_2, p_3 des fonctions paires, et i_1, i_2, i_3 des fonctions impaires définies sur un domaine symétrique D, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Alors :

- $p_1 + p_2$ est pair
- $p_{1 \cdot 2}$ est pair
- $i_1 + i_2$ est impair
- $i_1 \cdot i_2$ est **pair**
- $p \cdot i$ est impair

- $i_1 \circ i_2$ est impair ,$\Im(i_2) \in D(i_1)$
- $f \circ p$ est pair, $\Im(p) \in D(f)$
- $p \circ 1$ est pair, $\Im(i) \in D$

Vérification-Exemple : $(i_1 \circ i_2)(-x) = i_1(1_2(-x)) = i_1(-i_2(x)) = -i_1(i_2(x) = -(i_1 \circ i_2)(x)$

Exemples:

Fonction pairs $\cos(x) + x^2, \sin(x^2), \cos(\sin(x)), \exp(\cosh(x))$

Fonction impairs $\sin(x) + x, \sin(x^3), \sin(\sinh(x)), \sin^3(x)$

5.4.2 Fonctions périodiques

Soient f, g ds fonctions périodiques de période T_f et T_g $T_f, T_g > 0), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Alors

$$\left.\begin{array}{l} f+g \\ f \cdot g \end{array}\right\} \text{est T-périodique} \iff \frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$$
$h \circ f$ est T_f périodique

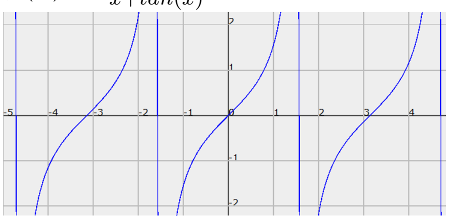
Remarque $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q} \to \frac{T_f}{T_g} = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N}*$

$$\boxed{T = T_f \cdot s = T_g \cdot r}$$

Attention Même si T_f et T_g sont la période de f et g, T n'est typiquement pas la période de f+g ou $f \cdot g$, et T_f n'est typiquement pas la période de $h \circ f$)

5.5 Exemples

1. $f(x) = \frac{x^3 cos(x)}{x+tan(x)}$



$\mathbf{D}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\}$

- la fonction est paire
- f n'est pas périodique

2. $\frac{sin(3x)}{cos(5x)}, \mathbf{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(5x) \neq 0\}$

   la période de cos(x) est de 2π $\rightarrow$la période de cos(5x) est de $\frac{2\pi}{5} = T_f$

   la période de sin(3x) est de $\frac{2\pi}{3} = T_g$

   on a $\frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q} \rightarrow$ f est périodique de $\frac{2\pi}{5} \cdot 5 = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi$

   - f est une fonction impaire
   - Après inspection du graph, on trouve que la période est de π

3. $f(x) = -\overbrace{\sin(\pi \cdot x)}^{\text{la période est de } 2} + \underbrace{\cos(x)}_{\text{la période est de } 2\pi}$

   - fonction pas périodique, car $\frac{2\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$
   - f n'a pas de parité

4. $f(x) = \overbrace{\sin(\tan(x))}^{\text{Définie sur le domaine de } \tan(x)} - \underbrace{\tan(\sin(x))}_{\text{Bien définie sur } x\in\mathbb{R}}$

   - période de 2π
   - impaire

5.5.1 Composition (un exemple)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x > 1 \\ -x & \text{pour} \quad x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour} \quad x \geq 0 \\ 2x+3 & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

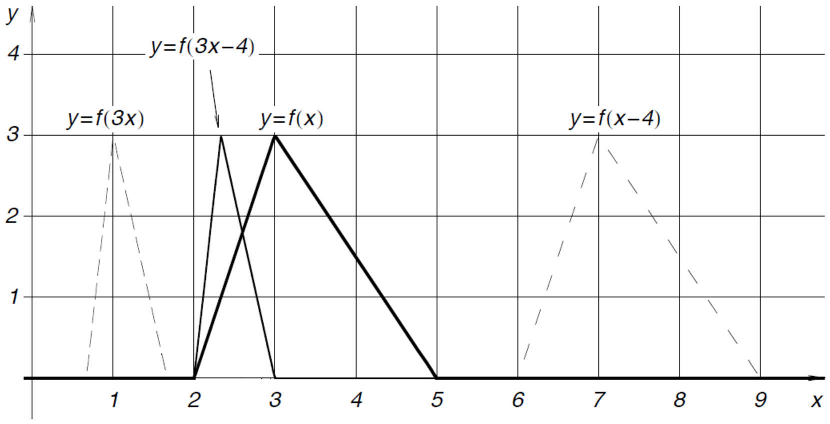
$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & \text{pour} \quad x \geq 1 \\ -x^2 & \text{pour} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2x+3 & \text{pour} \quad -1 \geq x < 0 \\ -(2x+3) & \text{pour} \quad x < 1 \end{cases}$$

5.5.2 Les fonction signum et Heaviside

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0 \\ -1 & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

5.6 Transformation affines (rappel, voir les pré-requis)



$f(3x-4) \equiv f(3x)-4) \equiv g(3x) \rightarrow g(x) = f(x-4)$

$f(3x-4) \equiv f(3(x-\frac{4}{3})) = h(x-\frac{4}{3}) \rightarrow h(x) = f(3x)$

5.7 Limites

5.7.1 Définitions

Dans ce chapitre, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{D}(f) \subset]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a < b$ Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $x_n \in \mathbf{D}(f)$ et supposons que $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} x_n = x^* \in]a,b[$

Question : Que peut-on dire de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ où $y_n = f(x)$ pour f quelconque ?

Réponse : Rien du tout : Donnés (x_n) et (y_n) on peut trouver une fonction telle que $f(x_n) = y_n$ (on définit f de cette manière).

1. Définition (limite épointée)

   La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour limite (épointée) $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^*. Si pour toute suite $(x_n), x_n \in \mathbf{D}(f) \setminus \{x^*\}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. La suite $(y_n), y_n = f(x_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l(\iff$ la même limite pour toutes les suites admises)

2. Définition (limite du doc de référence)

   La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^*. Si pour toute suite $(x_n), x_n \in \mathbf{D}(f)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. La suite $(y_n), y_n = f(x_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l(\iff$ la même limite pour toutes les suites admises)

Remarques importantes

1. Si $x^* \notin \mathbf{D}(f)$, les deux définitions coïncident
2. Si $x^* \in \mathbf{D}(f)$
   - la limite dans 1. (la valeur de n) peut être différente de $f(x^*)$ car on ne regarde jamais la valeur de $f(x^*)$ dans le calcul de l
   - On a l $= f(x^*)$ dans 2. (si la limite existe) car (x_n) avec $x_n = x^*$ pour tout n est une suite admise dans 2. (mais pas dans 1.)

Notations :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) \equiv \lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x) = l$ Limite épointée
2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = l$ Limite selon le document de référence.

Remarques (au cas ou $x^* \in \mathbf{D}(f)$

- Il se peut que 1. existe mais pas 2

  ex: $\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{pour} \quad x = 0 \end{cases}$

1. $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = 0$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x)$ n'existe pas

- Il se peut que 2 existe mais pas 1 ex: $f : [0, 0] \to \mathbb{R}, f(0) = 1$

1. $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x)$ n'existe pas
2. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = 1$

Exemple : (avec $x \notin \mathbf{D}(f)$

1. f(x) $= \frac{p(x)}{q(x)}, p(x) = x^2 + 2x + 1, q(x) = x + 1$

   $\mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on choisit $x^* = -1$

   $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} (x + 1) \underbrace{=}_{\text{Def}} \lim\limits_{n \to \infty} (x_n + 1)$ Il faut contrôler toutes les suites (x_n) telles que $x_n \neq -1$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -1$

   $=(\lim\limits_{n \to \infty} x_n) + 1 = 0$

2. Non-existence d'une limite

   $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Soit $x^* = 0$

   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x)$ n'existe pas. Pour montrer cela :

   - Il suffit de trouver une suite (x_n) telle que $x_n \neq x^*$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$ mais telle que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ n'existe pas.

     ou

   - on trouve deux suites(x_n) et $\widetilde{x_n}$ telles que $x_n \neq x^*, \widetilde{x_n} \neq x^*$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$ $\lim\limits_{n \to \infty} \widetilde{x_n} = \widetilde{l}$ [trou mika, jusqu'aux 2 graphiques concentrés]

5.7.2 Limites

Définition : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour limite à droite (à gauche) $l_+ \in \mathbb{R}(l_- \in \mathbb{R})$ lorsque q tend vers x^*, si pour toue suite $(x_n), x_n \in \mathbf{D}(f) tellequex_n > x^*(x_n < x^*)$. La suite $(y_n), y_n = f(x_n)$ converge et $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = l_+(\lim\limits_{n \to \infty} y_n = l_-)$.

Notations

$\ulcorner \lim\limits_{x \to x^*+} f(x) \lrcorner \equiv \lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = l_+$

$\ulcorner \lim\limits_{x \to x^*-} f(x) \lrcorner \equiv \lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x) = l_-$

petit trou

Exemple : $f(x) = \frac{|x|}{x}$.$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}$ n'existe pas. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} c f(x) = 1, \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} c f(x) = -1$ et -1 $\neq$ 1

5.7.3 Opérations algébriques sur les limites

lim

$x \to x^*$

Si $x \neq x^*$

$x > x^*$

$x < x^*$

[trou mika]

Exemple $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} (3x^2 - 2xx + 5) = ... = 3(\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} x)^2 - 2(\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} x) + 5 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 3$

5.7.4 Limites épointées et composition de fonctions

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[d, "x \neq x_0"'] & y \arrow[d] & \\
x_0 & y_0 &
\end{tikzcd}$$

(attention au piège) soit

avec $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = y^*, \lim\limits_{\substack{y \to y^* \\ y \neq y^*}} g(x) = l$

Alors (attention aux conditons)

$\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} g(f(x)) = l$

Pourvu que pour toute suite $(x_n), x_n = x^*$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$ il existe un n_0 tel que $f(x_n) yequivy_n \neq y^*$ pour tout $n \geq n_0$

Remarque : Cette difficulté disparaîtra pour f,g des fonctions continues.

Exemple : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x = 1 \\ 2 & \text{pour} \quad x \neq 1 \end{cases}$

$f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$g(f(x)) = 0$ pour tout x, mais $\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x) = 1 = y^*$ et $\lim\limits_{\substack{y\to y^* \\ y\neq y^*}} g(y) = 2 \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0=x^* \\ x\neq 0}}$ [petit trou]

5.7.5 "Limites infinies" et comportement à ∞

Conventions :

- $\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x) = +\infty (ou - \infty)$ veut dire que pour toute suite $xn, x_n \in \mathbf{D}(f), x_n \neq x^* m \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ on a (ou $-\infty$)
- encore un trou...

5.7.6 Théorème des deux gendarmes

Théorème soit f,g, des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

- $\mathbf{D}(h) \subset \mathbf{D}(f) \cap \mathbf{D}(g)$ pour x proche de x^*
- pour x proche de x*

$$f(x) \leq h() \leq g(x) \tag{3}$$

- f(x) = g(x) = l

Alors h(x) = l

"x proche de x*" : $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \neq x_0$ avec $|x - x^*| < \epsilon$

Démonstration

soit (x_n) une suite dans $\mathbf{D}(h), x_n \neq x^*, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Par hypothèse 1 et 2, on a

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n) \tag{4}$$

pour n suffisamment grand. En utilisant le point 3. et le théorème des deux gendarmes pour les suites, alors $h(x_n)$ tend vers l

5.7.7 Exemples

1. $\lim\limits_{xto\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}}_{=h(x)}$

   Sans restriction $x > 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &\leq \frac{x}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \\ &\geq \frac{x}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\geq x}\underbrace{(\sqrt{x^2+x}+x)}_{\geq 2x}} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{2} \geq h(x) &\geq \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4x}}_{x\to\infty : \frac{1}{2}-\frac{1}{4\infty}=\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

   Donc $\frac{1}{2} \geq \lim\limits_{x\to\infty} h(x) \geq \frac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{2}$

2. $\boxed{\text{Reminder : pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \to 0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x}$

   $\lim\limits_{x\to\neq 0} \cos(x) = 1$. Une fonction paire : on peut se limiter à $x > 0$. On va prendre $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} 1 \geq \cos(x) &= \sqrt{1-\sin(x)^2} \geq \sqrt{1-2\sin(x)^2+\sin(x)^4} \\ &= 1-\sin(x)^2 \geq 1-x^2 \end{aligned}$$

   Donc $\underbrace{\underbrace{1}_{1} \geq \cos(x) \geq \underbrace{1-x^2}_{1}}_{1}$

   Remarque : $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{n})$

3. $\lim\limits_{x\to\neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\frac{\sin(x)}{x}$ est une fonction paire.

   Pour $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

   $0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On multiplie par $\frac{1}{\sin(x)}$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow \underbrace{\cos(x)}_{\to 1 \text{ quand x } \to 0} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

4. $\lim\limits_{x \to \neq 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \geq 0} (\frac{\overbrace{1-\cos(x)^2}^{\sin^2}}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} = ((\frac{\sin(x)}{x})^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(x)})$
   $= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{n \to \infty} e^x = \infty$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

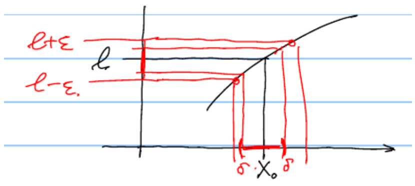
6. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

   $\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}^*$

   $\lim\limits_{x \to > 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y \to \infty} e^y = 0$

5.7.8 Définition de la limite (épointée) avec ϵ et δ

(Définition équivalente à la définition avec les suites)

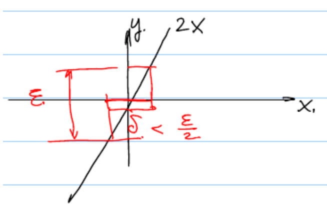


Définition :La fonction f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet par limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^*, si $\forall \epsilon > a, \exists \delta > 0$ tel que $|f(x) - l| < \epsilon, \forall x \in \mathbf{D}(f)$ tels que $0 < |x - x^*| < \delta$

Exemple : $f(x) = 2x, x^* = 0, \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} = 0 = l$

A montrer : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ tel que $|2x - 0| < \epsilon$ (ok pour $\delta = \frac{\epsilon}{2}$)

Car $|2x - 0| = |2x| = 2|x| = 2|x - 0| \leq 2\delta \leq \epsilon$



5.8 Fonctions continues

Notation : A partir de maintenant, on écrira x_0 au lieu de x^* pour les points qui nous intéressent

Définition : La fonction f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in \mathbf{D}(f)$ si

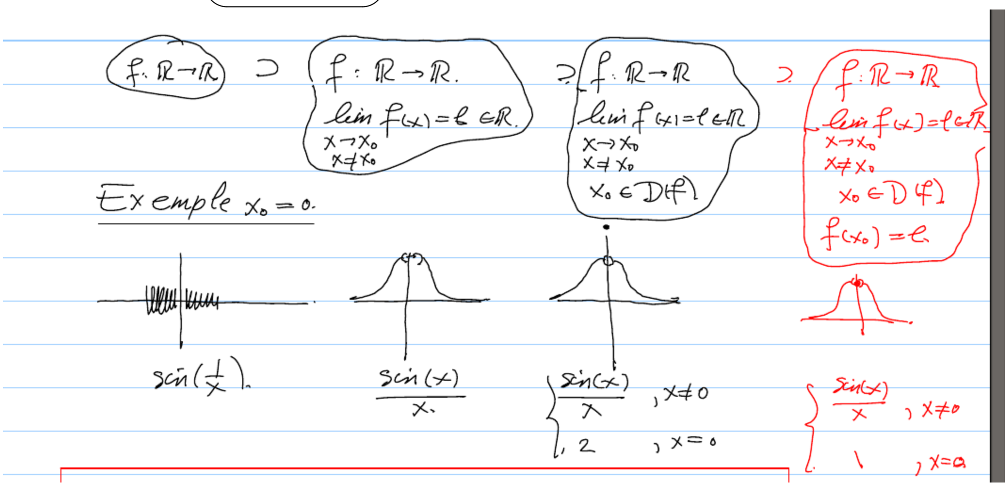
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = f(x_0)$ ($\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe)

5.8.1 Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pour} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{pour} \quad x = 0 (\to f(0) \end{cases}$$ est continu en $x_0 = 0$ car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) \tag{5}$$

$\boxed{\text{f: } \mathbb{R} \to \mathbb{R}} \supset \boxed{\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}} f(x) = l \in \mathbb{R} \end{array}} \supset$



Remarque : $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ x\neq x_0}} f(x) = f(x_o) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$

Si f est continue en x_0

Prolongement par continuité

(voir exemple 4.9.1) Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ x\neq 0}} f(x) = l \in \mathbb{R}$ mais $x_0 \notin \mathbf{D}(f)$ alors on peut définir une fonction g sur $\mathbf{D}(f) \cup \{x_0\}$ par

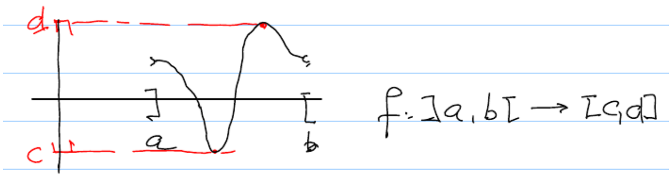
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{pour} \quad x = x_0 \end{cases}$$ Par définition g est continue en x_0

= Définition La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $I =]a, b[\subset \mathbf{D}(f)$ si f est continue en tout point $x_0 \in I$

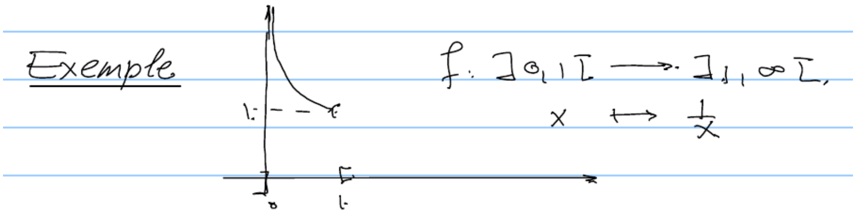
5.8.2 Propriétés des fonctions continues

RemarqueLa composition de deux fonctions continues (sur $]a, b[$) est une fonction continue

RemarqueL'image d'une intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle, ais pas forcément ouvert et pas forcément borné



RemarqueL'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue strictement monotone est un intervalle ouvert (éventuellement non-borné)



5.8.3 Fonctions "élémentaires"

Théorème: Les fonctions "élémentaires" sont toutes continues sur leur domaine de définition

Conséquences pour les fonctions "élémentaires" on a pour $x_0 \in \mathbf{D}(f)$ que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$

Exemple $\lim\limits_{\substack{x\ to x_0 \\ x \neq x_0}} \cos(x) = \cos(0) = 1$

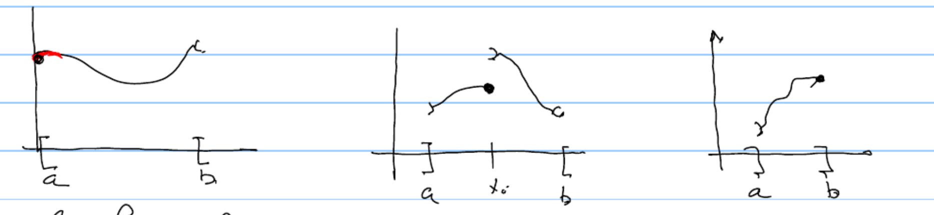
$\lim\limits_{\substack{x\ to x_0 \\ x \neq x_0}} \exp(\cos(\ln(\sqrt{\cosh(x)}))) = e$

$\lim\limits_{\substack{x\ to x_0 \\ x \neq x_0}} \sin(\frac{1}{x}) = \sin(\frac{1}{x_0}), \forall x_0 \in \mathbf{D}(\sin(\frac{1}{x}) = \mathbb{R}*$

5.8.4 Intervalles fermés

Définition La fonction f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue à droite (à gauche) en $x_0 \in I = [a, b[(]a, b]) \subset \mathbf{D}(f)$ si

$$\lim_{\substack{x\ tox_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)(\lim_{\substack{x\ tox_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) \qquad (6)$$



$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ — $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$ — $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b)$

f continue à droite en $x_0 = a$

f continue à gauche en x_0, mais f n'est pas continue à droite en x_0

f continue à gauche en $x_0 = b$

Remarquef continue en $x_0 \Leftrightarrow$ f continue à droite en x_0

et f continue à gauche en x_0

Définition La fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $I = [a, b] \subset \mathbf{D}(f)$ si f est continue sur $]a, b[$, continue à droite en $x_0 = a$ et continue à gauche en $x_0 = b$

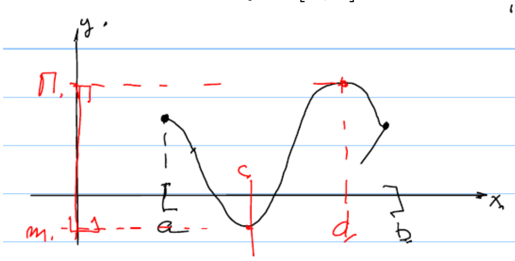
Théorème1 :; Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum c'est à dire il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ pour tout $x \in [a, b]$

Démonstration utilise B.W.

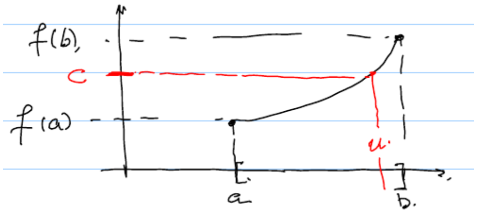
Notation $\underbrace{m}_{\min} = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, $\underbrace{M}_{\max} = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

Théorème3: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur [a,b]. Alors $Im(f) = [m, M]$ $\Gamma \supset [f(a), f(b)]$

voir Théorème 2



Théorème2 : (de la valeur intermédiaire) Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ prend (une fois au moins) toutes les valeurs entre $f(a) et f(b)$



Démonstration Supposons que $f(a) < f(b)$. On cherche $u \in [a,b]$ tel que $f(u) = c$ pour $c \in [f(a), f(b)]$ pour c donné.

$a_n \leq u$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \xleftarrow[n\to\infty]{} b_n$, $b_n \geq u$

t.q.

$$f(a_n) \leq c \leq f(b_n)$$

$n \to \infty$ $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ $n\to\infty$, car f continue

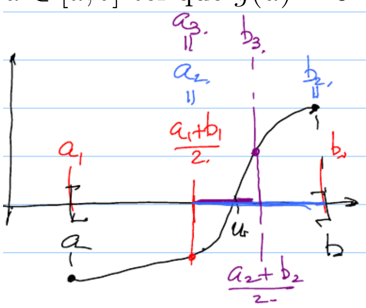
$$f(u) \leq c \leq f(u)$$

$\to c = f(u)$

Les suites (a_n) et (b_n) se construisent en appliquant la méthode de bissection à la fonction $g(x) = f(x) - c/\ g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c$

Méthode de bissection

Si la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$, alors il existe $u \in [a,b]$ tel que $g(u) = 0$



$a_1 = a$, $b_1 = b$, $g(a) < 0$, $g(b) > 0$

pour $n = 2, 3, \dots$

$u_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

si $g(u_n) = 0$ alors $u = u_n$ stop

si $g(u_n) < 0$: $a_{n+1} = u_n$, $b_{n+1} = b_n$

si $g(u_n) > 0$: $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = u_n$

Exemple Soit $g(x) = x^2 - 2, g : [1,2] \to \mathbb{R}$ $g(1) = -1 < 0, g(2) => 0$

$a_1 = 1$, $b_1 = 2$. $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, $g(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4} > 0$.

$a_2 = 1$, $b_2 = \frac{3}{2}$. $\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$, $g(\frac{5}{4}) < 0$

$a_3 = \frac{5}{4}$, $b_3 = \frac{3}{2}$ ...

Donc $\underset{1.25}{\frac{5}{4}} \leq \sqrt{2} \leq \underset{1.5}{\frac{3}{2}}$

Avantages :

- la convergence est garantie
- convergence seulement linéaire

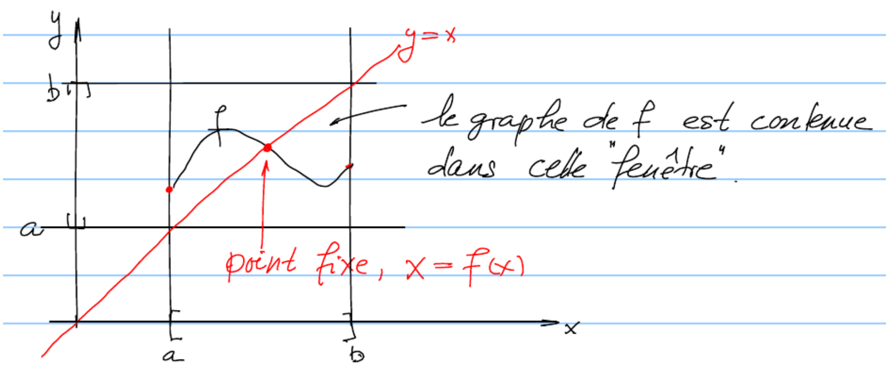
On a $u_n \in [a_n, b_n]$, longueur de $[a_n, b_n] = \frac{b-a}{2^n}$

On a $\ln(\frac{b-a}{n^2}) = \ln(b-a) - \underbrace{n \cdot \ln(2)}_{\text{linéaire en n}}$

(le # de digits corrects croit linéairement)

Définition la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un point fixe si l'équation $f(x) = x$ admet une solution

Théorème(du point fixe) Toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ admet un point fixe



Démonstration appliquer la méthode de bissection à $g(x) = f(x) - x$ (ou $g(x) = x - f(x)$

6 Dérivée d'une fonction d'une variable

Dans ce chapitre $f_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[\subset \mathbf{D}(f)$

6.1 Définitions

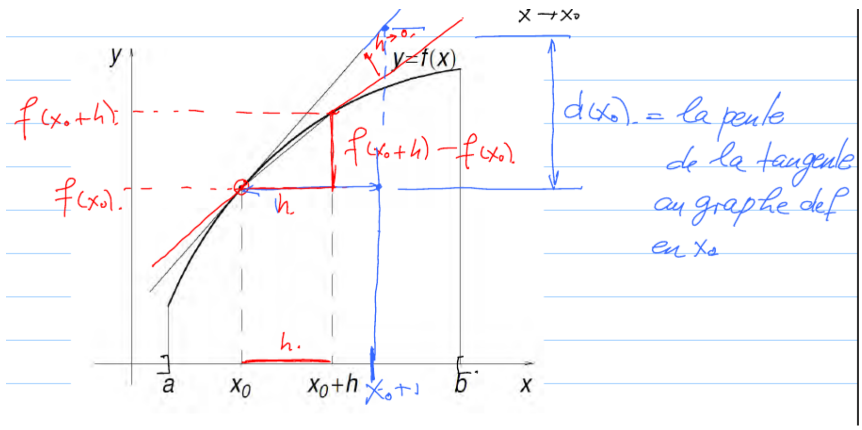
Définition (dérivable) La fonction f est dérivable en x_0, si la limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv d_{x_0} \text{ existe} \tag{1}$$

Nota Bene d_{x_0} est un nombre

Remarque : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{x_0+h \Leftrightarrow h = x - x_0}}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Remarque Si f est continue en x_0 $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) - f(x_0) = 0$



Définition (différentiable) La fonction f est différentiable en $x_0 \in]a, b[\to \mathbb{R}$ s'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ et une fonction $r :]a, b[\to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(h_0) + \alpha h + \boxed{r(x_0 + h) \cdot h} \tag{2}$$

avec $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \boxed{r(x_0 + h) = 0}$

$\Longleftrightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(x_0+h) \cdot h}{h} = 0$

$\boxed{r(x_0 + h) = 0}$ est o(h)

Remarque dérivable $\iff$ différentiable

" $\rightarrow$" $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = d(x_0) =: \alpha$

on a

$r(x_0+h)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\alpha h}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \alpha$

Donc

$\lim\limits_{h\to 0} r(x_0+h) = d(x_0) - \alpha = |0 \text{ pour } \alpha = d(x_0)$

" $\leftarrow$ "$ona\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \alpha + r(x_0+h)$

donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \alpha + \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} r(x_0+h) = \alpha$

Définition

On dit que f est dérivable (différentiable) sur $]a,b[\subset D(f)$ si f est dérivable (différentiable) en tout point $x_0 \in]a,b[$

Définition

Soit la fonction f dérivable sur $]a,b[$. Alors on peut définir la fonction f', appelée la dérivée de f par

$$f'(x) = dx \equiv \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{3}$$

Définition (fonction dérivée d'ordre n)

Si la fonction f' est dérivable sur $]a,b[$, on peut définir la fonction f'' appelée la deuxième dérivée (ou dérivée seconde) de f par $f''(x) = (f')'(x)$ et puis par récurrence, si la (n-1)ème dérivée de la fonction f est dérivable sur $]a,b[$ on peut définir la fonction $f^{(n)}$ (la n-ième dérivée de f) par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), n = 2,3,...$

6.2 Exemples (à savoir par coeur

(Sans démonstration)

f	f'	$f^{(n)} n = 2, \ldots$
1	0	0
x	1	0
x^m	$m \cdot x^{m-1}$	$\begin{cases} m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n} & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$
	$[trou]$	
e^x	e^x	e^x
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	pas nécessaire

6.3 Dérivabilité implique continuité

Théorème

Une fonction qui est $\underbrace{\text{dérivable en } x_0}_{A}$ est $\underbrace{\text{continue en } x_0}_{B}$

$A \to B$

Démonstration $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} (x - x_0) \right)$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{d(x_0) \in \mathbb{R}} \underbrace{\left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (x - x_0) \right)}_{=0} = 0$$

La réciproque du théorème est fausse ! $(B \not\to A)$

Contre exemple $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$

$x_0 = 0$: f est continue en x_0 [TROU]

6.4 Intervalles fermées

Définition (voir l'exemple précédent)

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable à droite (à gauche) en $x_0 \in I, I = [a, b[(]a, b]), \subset D(f)$ si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+H)-f(x_0)}{h} \equiv d_+(x_0) \in \mathbb{R} \text{ existe} \tag{4}$$

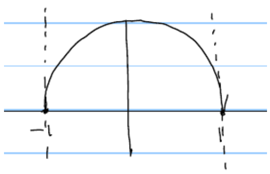
$$\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+H)-f(x_0)}{h} \equiv d_-(x_0) \in \mathbb{R} \text{ existe}\right) \tag{5}$$

Remarque

f dérivable en $x_0 \in]a, b[\iff$ f dérivable à droite en x_0 et f dérivable à gauche en $x_0$et $d_+(x_0) = d_-(x_0)(= d(x_0))$

Définition La fonction f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $I = [a, b] \subset D(f)$ si f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b

Exemple $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$ dérivable sur $]-1, 1[$ (mais pas $[-1, 1]$)



$\lim_{substackh\to 0h>0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \infty, \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\infty$

6.5 Opérations algébriques sur les dérivées

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[\subset D(f) \cap D(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= \alpha f' + \beta g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \end{aligned}$$

Exemple $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, ...n$

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + ...$

$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)x^k$

6.6 Dérivée de la composition de deux fonctions

$]a, b[\xrightarrow{f}]c, d[\xrightarrow{g} \mathbb{R}$ f dérivable en x_0, g dérivable en y_0 [trou]

Théorème(dérivation en chaine

$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0) \circ f'(x_0)}$

Ceci se généralise par récurrence (exemple)

$f(x) = \cos(\ln(\sqrt{1 + x^2})), D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = -\sin(\ln(\sqrt{1 + x^2})) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$

Démonstration

$((g \circ f)(x_0 + h) = (g \circ f)(x_0) + (g \circ f)'(x_0)h + o(h)$ [trou mika]

6.7 Continuité de la fonction dérivée

(Ne pas confondre avec 5.3 !)

Un contre-exemple: (f n'est pas nécessairement continue)

soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pour} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0 \end{cases}$

$D(f) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (vérifier !)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\rightarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$)

i. pour $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{2}{x}) + x^2 \cos(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2} \tag{6}$$

ii. Pour $x = 0$ on a (utiliser la définition)

$$f'(0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} (h \sin(\frac{1}{h})) \underbrace{=}_{\text{Théorème des deux gendarmes}} 0 \quad (7)$$

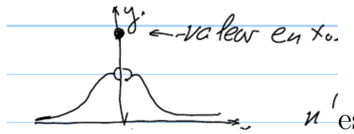
Donc $f'(x) = \left\{ \frac{1}{1}[???] \right.$

D(f') = $^{\circ}$

f' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, car f' n'est pas continue en x = 0.

Démonstration Soit $x_n = \frac{1}{2\pi n}, n \in \mathbb{N}*$

$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{2\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)) = -1 \neq 0 = f'(0)$

Par contre, 

n'est pas possible comme dérivée d'une fonction.

Théorème: Soit f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[\subset D(f)$. Soit f continue sur $]a, b[$, et dérivable. $[a, b] \setminus \{x_0\}$ et soit $\lim_{\substack{x\to x_0\\ c\neq x_0}} (f'(x)) = l$

Alors f est dérivable enx_0 et $f'(x) = l$

Attention à la logique Dans exemple (i), $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} (f'(x)) =$ n'existe pas. Néanmoins la dérivée en $x_0 = 0$ existe !

6.8 Dérivée logarithmique

Une astuce pour :

i. Calculer $\frac{f'}{f}$ pour f donné

ii. calculer facilement la dérivée d'un produit de plusieurs fonctions

À propos

i. $g(x) = \ln(|f(x)|)$ alors $g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

Exemple $f(x) = (x+1)^2(x^2 11)^3$

$g(x) = 2\ln(|x+1|) + \ln|x^2+1|[???]$

6.9 Dérivée des fonctions réciproques

Rappel (critère) Toute fonction strictement monotone est injective

Explication

$3 dessins$

6.9.1 Continuité des fonctions réciproques

ThéorèmeLa réciproque d'une fonction injective continue est continue sur l'image de tout intervalle

Explication

$dessin$

Démonstration Utiliser la définition de la continuité

6.9.2 Dérivabilité de la fonction réciproque

ThéorèmeLa réciproque d'une fonction injective dérivable est dérivable sur l'image de tout intervalle I, tel que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$

Explication

$2 dessins$

6.9.3 Identité

On a pour $y = f(x), f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in D(f^{-1})$ ou encore $f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in D)f^{-1})$ Par dérivation en chaine :

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in D(f^{-1}) \tag{8}$$

donc

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

i $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f^{-1}(x) = \ln(x), (f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}}$

ii $f(x) = \sin(x) sur]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = \cos(x), f'(x) = 0,$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f^{-1} = \arcsin(x)$ [???]

6.10 Application du calcul différentiel

6.10.1 Théorème de Rolle

Théorème Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset D(f), b > a, f$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe un $u \in]a, b[$ tel que $f'(u) = 0$

Explication (des hypothèses)

$f(x) = \sqrt{-x^2}$

$D(f) = [-1, 1]$

f continue sur $[-1, 1]$

f dérivable sur $]-1, 1[$

Démonstration

i f continue sur [a,b]. Alors il existe un maximum M et un minimum m.

ii $M = 0, m = 0 \iff f(x) = 0 \forall x \in I \to f'(u) = 0 \forall u \in]a, b[$

iii ou bien M ou m est différent de 0.

- Cas $M \neq 0 \to \exists x \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$, c'est à dire

$$f(x) \leq M = f(c), \forall x \in [a, b] \tag{9}$$

$$0 \underbrace{\leq}_{(1)x<c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \underbrace{\leq}_{(2)x>0} 0 \tag{10}$$

1. $0 \leq \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \right) = f'(c)$

2. $0 \geq \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = f'(c)$

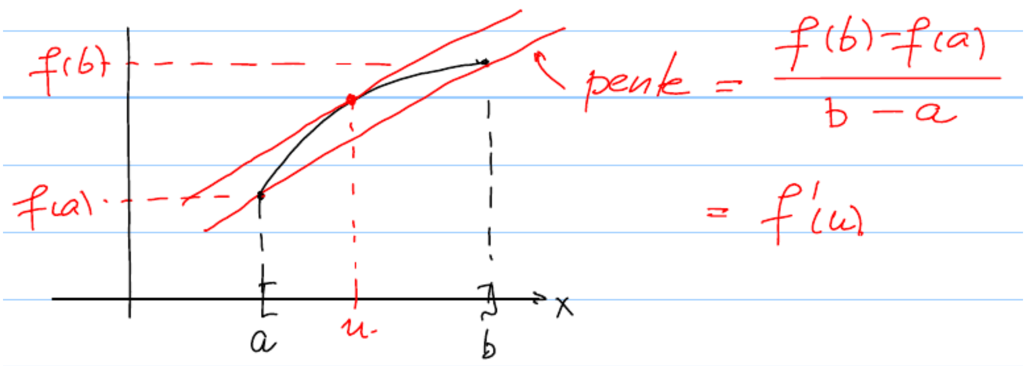
1+2 $+\mathbb{R}$ ordonné $\rightarrow f'(c) = 0$

6.10.2 Théorème des accroissements finis

<u>Théorème</u>Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}[a, b] \subset D(f), b > a$ f continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[. Alors il existe un $u \in]a, b[$ tel que

$$f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{11}$$

<u>Explications</u>



<u>Démonstration</u>

Soit $g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a)}(x - a))$

$g(a) = g(b) = 0$,g continue sur [a,b], g dérivable sur]a,b[

Par le théorème de Rolle, $\exists u \in]a, b[$ tel que g'(u) = 0

$g'(u) = f'(u) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, donc $f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

<u>Corollaire 1</u> Soit $[a, b] = [x, x + h] \in D(f), \overbrace{h}^{b-a} > 0$, f continue sur [x, x+h] et dérivable sur]x,x+h[- Alors il existe $\vartheta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x + h) = f(x) + f'(x + \vartheta h)h \tag{12}$$

Corollaire 2 Soit $[a,b] \subset D(f), b > a, f$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$. Alors

i) $f'(x) \geq 0$ sur $]a,b[\to f$ croissant sur $[a,b]$

ii) $f' > 0$ sur $]a,b[\to f$ strictement croissant sur $[a,b]$

iii) $f'(x) \leq 0$ sur $]a,b[\to f$ décroissant sur $[a,b]$

iv) $f' < 0$ sur $]a,b[\to f$ strictement décroissant sur $[a,b]$

Corollaire 3 Soit $[a,b] \subset D(f), b > a, f$ continue sur a, b, dérivable sur $]a,b[$. Alors $f(a) = 0, f' \geq 0 \to f > 0$ sur $[a,b]$

Corollaire 4: Soit $[a,b] \subset D(f), b > a, f$ continue sur a, b, dérivable sur $]a,b[$. Alors $f' = 0$ sur $]a,b[\to f$ est constant sur $[a,b]$

6.10.3 Exemples

i) Estimer la valeur de $\sin(31°)(f(x) = \sin(x))$

$\frac{\pi}{6} < \frac{31}{180}\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} < \frac{\pi}{4}$

$\sin(\frac{\pi}{6} + h) = \underbrace{\sin(\frac{\pi}{6})}_{\frac{1}{2}} + \cos(\frac{\pi}{6} + \vartheta\frac{\pi}{180})\frac{\pi}{180}$

$g(x) = \cos(x)$ est strictement décroissant sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ car $g'(x) = -\sin(x) < 0$ pour $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

Donc $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} \leq \sin(31°) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}$

ii) Montrer que $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Puisque f est pair, il suffit de contrôler $x \geq 0$. On a

$$f(0) = \cos(0) - 1 = 0 \underbrace{\to}_{coroll.3} \text{ il suffit de montrer } f'(x) \geq 0 \text{ pour } x \geq 0 \quad (13)$$

On $f'(x) = -\sin(x) + x$

$f'(0) = 0 \to$ il suffit de montrer $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

On a

$f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 9(\to f'(x)[\text{trou}]$

6.10.4 Théorème des accroissements finis généralisés

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} [a, b] \subset D(f) \cap D(g), f, g$ continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[, g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$. Alors Il existe $u \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{14}$$

Pour $g(x) = x$ c'est le théorème des accroissements finis. **Démonstration**
On pose $h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))\right)$ puis on utilise le théorème de Rolle.

6.10.5 Règle de Bernoulli de l'Hospital

Théorème Soit f et g deux fonctions déribales sur $]a, b[\subset D(f) \cap D(g)$ avec $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$. Si $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} (f)(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} (g)(x) = 0}$ et si

Remarque (généralisation, BH) On a le théorème analogue pour $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} (.)$.. pour le cas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ au lieu de $\frac{0}{0}$ et pour a $= -\infty$ ou b $= +\infty$

Exemples

I) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{sin(x)}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{sin(x)}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{cos(x)}{1}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (cos(x)) = cos(0) = 1$

II)

III)

IV)

$$limitex \to 0x > 0x^x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(e^{x \ln(x)}\right) \overbrace{=}^{expcontinue} e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \ln(x))} = e^0 = 1$$

V) $\lim\limits_{n \to \infty} (1+\frac{2}{n})^n \overset{!}{=} \lim\limits_{x \to \infty} (1+\frac{2}{x})^x = \lim\limits_{x \to \infty} e^{x \ln(1+\frac{2}{x})} \overbrace{x}^{expcontinue} e^{\lim\limits_{x \to \infty} (x \ln(1+\frac{2}{x}))} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}} =$
$e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}} \frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}} = ???$

VI) $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^p} e^{-\frac{1}{x} = 0}\right)}$???

i.

ii. $0 < p \leq 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{1}{x^p}e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{\frac{1}{x^p}}{e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{\frac{-p}{x^{p+1}}}{e^{\frac{2}{x}}\frac{-1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left((p\frac{1}{x^{p-1}}e^{-\frac{1}{x}}\right)???$

iii. ????

Bémol : Attention !!!!!! La réciproque e BH est fausse !

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(xsin(\tfrac{2}{x}\right) \overbrace{=}^{th.des2gendarmes} 0$$

$$0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x\sin(\tfrac{1}{x})\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{x^2\sin(\frac{1}{x}}{x}\right) \overbrace{=}^{BH} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{2x\sin(\frac{1}{x}-\cos(\frac{1}{x})}{1}\right) \text{ n'existe pas.}$$

Démonstration de BH

i) f.g continues sur$]a,x[\subset]a,b[$ pour tout $a<x<b$

ii) f,g continues sur $[a,x]$ par prolongement continu, si on définit $f(a)=g(a)=0$.

iii) On a le théorème des accroissements finis généralisé sur $[a,x]$ (si $g'(u)\neq 0$ pour tout $u\in]a,x[$)

iv) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overbrace{=}^{th.desaccroissementsfinis} \frac{f'(u)}{g'(u)}$ pour $u\in]a,x[$.

Puisque $u\to a$ lorsque $x\to a$ on a

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim\limits_{\substack{u\to a\\u>a}}\left(\frac{f'(u=}{g'(u)}\right)$ Si cette limite existe !

Ici on regarde toutes les suites (u_n) telles que $u_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Mais $u\in]a,x[$ Dépend de x et on ne devrait regarder que les suites (u_n) générées par les suites (x_n) dans la limite originale.

Démonstration du théorème de la section 5.7 Rappel :

Théorème: Soit f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in]a,b[\subset D(f)$. Soit f continue sur $]a,b[$, et dérivable. $[a,b]\setminus\{x_0\}$ et soit $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\c\neq x_0}}(f'(x)) = l$

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x) = l$

Démonstration $f'(x_0) \overbrace{=}^{def} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\x\neq 0}}\left(\frac{f(x_o+h)-f(x_0)}{h}\right) \overbrace{=}^{BH} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\h>0\\ou\\h<0}}\left(\frac{f'(x_0+h}{1'}\right) \overbrace{=} hypothesel$

6.11 Etude des fonctions

Dans ce chapitre, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I = [a,b]$\subset D(f), a < b$.

6.11.1 Définitions

[dessin courbe étrange]

Convexe f est convexe sur $I_0 si \forall x_1, x_2 \in I_0, x_1 \neq x_2, x_1 < x_2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in [x_1, x_2]$ pour $\lambda \in [0,1]$-

Si $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

Concave f est concave sur I_0 si $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

Point critique f admet un point critique en $x_0 \in]a, b[$ si f'$(x_0) = 0$

Maximum local f admet un maximum local en $x_0 \in]a.b[$ si $f'(x_0) \geq f(x)$ pour x proche de x_0 $)\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x$ tels que $|x - x_0 < \epsilon)$

Maximum local f admet un maximum local en $x_0 \in]a.b[$ si $f'(x_0) \leq f(x)$ pour x proche de x_0 $)\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x$ tels que $|x - x_0 < \epsilon)$

Extremum local f admet un maximum local ou un minimum local.

Maximum local f admet un maximum global en $x_0 \in [a, b]$ si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Minimum local local f admet un minimum global en $x_0 \in [a, b]$ si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Points d'inflexion f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$, si f est dérivable en x_0 et s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que f soit convexe (concave) sur $[x0 - \epsilon, x_0]$ et concave (convexe) sur $[x_0, x_0 + \epsilon]$

Théorème(convexe)

Si f' est une fonction croissante sur I_0 (en particulier si $f'' \geq 0$ sur I_0 voir corollaire 2, section 5.10.2) Alors f est convexe sur I_0

Théorème(concave)

Si f' est une fonction décroissante sur I_0 (en particulier si $f'' \leq 0$ sur I_0 voir corollaire 2, section 5.10.2) Alors f est concave sur I_0

Remarque Toujours avoir en tête les exemples.

$f(x) = x^2$ (convexe sur $\mathbb{R}$)

$f(x) = -x^2$ (convexe sur $\mathbb{R}$)

Théorème(extremum local)

1. si f admet un extremum local en $x_0 \in]a, b[$ et si $f'(x_0)$ existe, alors $f'(x_0) = 0$
2. f admet un maximum local en x_0, si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$
3. f admet un minimum local en x_0, si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$

Remarque (cas général, voir développement limités)

1. maximum local si $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) < 0$ (n pair)
2. maximum local si $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) > 0$ (n impair)

Théorème(extremum global)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}[a, b] \subset D(f), f$ continue sur $[a, b]$. Les points $x_0 \in [a, b]$ pour lesquels f admet un extremum global sont éléments de :

i) $\{a, b\}$

ii) {des points où f' n'existe pas}

iii) {les points ou f' = 0}

Théorème(points d'inflexion)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $]a, b[\subset D(f)$

i) si f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$, alors $f''(x) = 0$

ii) f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a, b[$ si $f''(x) = 0$, si $f'''(x)$ existe et si $f'''(x) \neq 0$

Remarque (cas général)

f admet un point d'inflexion si $f''(x) = ... = f^{(n-1)} = 0, f^{((n)} \neq 0, n$ impair

L'exemple a retenir : $x^5, x^7, ...$

6.11.2 Discuter le graphe d'une fonction

1. Trouver $D(f), \Im(f)$
2. symétries (paire, impaire, périodique)
3. zéros de f
4. continuité (limites à gauche et à droite pour les poins de discontinuité de f et les points au bord du domaine)
5. Dérivabilité de f ("calculer" $f', f'', ...$ trouver le domaine de définition de ces fonctions)
6. Points particuliers (points critiques, extremums, points ou f' n'existe pas)
7. monotonie de f (signe de f'), convexité/concavité de f (signe de f'')
8. Asymptotes
9. Tracer le graphe

6.11.3 Exemples

[magnifique dessin qui ressemble a une paire de fesses]

$$f(x) = |2x-1| - x^2 + 1 \text{ sur } [-3,3]$$
$$= \begin{cases} 2x - x^2 & \text{pour} \quad x \in [\frac{1}{2}, 3] \\ 2 - 2x - x^2 & \text{pour} \quad x \in [-3, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

1. $D(f) = [-3,3], \Im(f) = [m, M]$ à trouver
2. pas de symétrie
3. $2x - x^2 = 0$ sur $[\frac{1}{2}, 3], x = 2$
   $2 - 2x - x^2 = 0$ sur $[-3, \frac{1}{2}], x = 1 - \sqrt{1+2} = -1 - \sqrt{3}\$ = 2,7...$
4. f continue sur $[-3,3]$ (composition de fonctions continues)
5. f dérivable sur $[-3, \frac{1}{2}[(I_1)$ et sur $[\frac{1}{2}, 3](I_2)$ (mais f pas dérivable sur $[-3,3]$

$$\begin{aligned} \text{Sur } I_1 : & f(x) = -2x - x^2 + 2 \\ & f'(x) = -2 - 2x \\ & f''(x) = -2 \\ I_2 : & f(x) = 2 - x^2 \\ & f(x) = 2 - 2x \\ & f''(x) - 2 \end{aligned}$$

6. Points particuliers : $x = \frac{1}{2}, \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} (f'(x)) = 1 \neq \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} (f'(x)) = -3$
   on a $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ (minimum local)
   Points où $f' = 0$:
   sur $[\frac{1}{2}, 3], 2 - 2x = 0, x = 1, f''(1) = -2 \to f$ admet un maximum local : $f(1) = 1$

sur $[-3, \frac{1}{2}[, -2-2x = 0x = -1, f''(-1) = -2 \rightarrow f$ admet un maximum local en $f(-1) = 3$

Maximum et minimum global

valeurs aux bords : $f(-3) = -1, f(3) = -3$

$M = \max\{-1, -3, 1, 3\} = 3$

$m = \min\{-1, -3, \frac{3}{4}\} = -3$

d'où $\Im(f) = [-3, 3]$.

7. monotonicité (tableau des signes)

   $f'(-1) = f'(1) = 0, f'$ pas défini en $x = \frac{1}{2}$

   i) sur $[-3, -1], f'(-3) = 4$ et $f''(x) = -2$ sur cet intervalle. f' est donc décroissant sur [-3,-1] et $0 \leq f'(x) \leq 4$. f est donc croisant sur cet intervalle.

   ii) Sur $[-1, \frac{1}{2}]$: $f'(-1) = 0$ et $f''(x) = -2, f'$ est décroissant sur $[-1, \frac{1}{2}]$ et $-3 \leq f'(x) \leq 0$. f est donc décroissant sur cet intervalle

   iii) Sur $[\frac{1}{2}, 1], f'(\frac{1}{2}) = 1$ et $f''(x) = -2, f'$ est décroissant et $0 \leq f'(x) \leq 1 \rightarrow$ f est donc croissant

   iv) Sur [1,3] : $f'(1) = 0$ et $f''(x) = -2, f$ est décroissant et $- <\leq f'(x) \leq 0$. f est donc décroissant

   concavité, convexité f est concave sur I_1 et I_2 et f n'a donc aucun point d'inflexion. Attention ! f est concave sur I_1 et I_2 mais f n'est ni concave ni convexe sur $I = I_1 \cup I_2$

6.11.4 Exemples avec limites

(Discussions à compléter!)

Exemple $f(x) = \ln(x)$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (f(x)) = -\infty \text{ (tangente verticale)}}$$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b_{\pm} \in \mathbb{R}$, asymptote horizontal

exemple e^x

Cas de droites de la forme $y = ax + b$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a_{\pm}, \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - a_{\pm}x) = b_{\pm}$

[trou exemple x$\hat{5}$]

6.12 Développement en séries et développement limité

6.12.1 Définitions

Définition une série de la forme

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k(x-a)^k}_{b_k} := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k}_{s_n} \tag{15}$$

avec $a \in \mathbb{R}, a_k \in \mathbb{R}$ (donnés) et $x \in \mathbb{R}$ (un paramètre) est appelé *une série entière* (à cause des puissances "entières" de (x-a), au lieu de $|x-a|^{\frac{1}{3}k}$ par exemple.

- Le nombre a et les a_k sont considérés comme fixes, et on s'intéresse à la convergence de la série et sa somme en fonction du paramètre x

- Souvent on pose $x = a + \xi$ (étude locale proche de x=a). Donc $|\zeta| < r \iff |x-a| < r \iff$ [dessin]

Théorème Il existe r $\in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq \infty$, tel que la série entière

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_x(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \tag{16}$$

Converge absolument pour $|\xi| < r$ (r dans l'intervalle $]a-r, a+r[$). La série diverge pour $|\xi| > r (x \notin [a-r, a+r])$

Définition Le nombre r dans le théorème est appelé "rayon de convergence" de la série

Théorème(*) On a

$r = [\lim\limits_{k\to\infty}(|a_k|^{\frac{1}{k()}-1}$ Cauchy

ou $r = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ D'Alembert

Si ces limites existent

Remarques

- Le théorème ne dit rien sur la convergence de la série pour $x = a+r$ et $x = a-r$ (à contrôler séparément)
- Si $r = \infty$ (d'Alembert) la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Si $r = 0$ la série ne converge que pour $x = a$ et $s = a_0$

Remarque La série converge en fait pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-a| < r$, c'est à dire pour z dans un disque centré en a de rayon r d'où le nom rayon de convergence.

Démonstration du théorème (*) $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{b_k}_{a_k(x-a)^k}$

Critère de d'Alembert

$q = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{k_k}\right| = |x-1| \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ [trou]

6.12.2 Fonctions définies par une série entière

Nouveau point de vue : une série entière définie une fonction (pour a_1, a_k donnés)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_x(x-a)^k (\text{si r} > 0) \tag{17}$$

et $D(f) \supset]a-r, a+r[$

6.12.3 Dérivée des fonctions définies par une série

ThéorèmeSoit $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ et soit le rayon de converge $r > 0$. Alors

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)(x-a)^k \tag{18}$$

Explication On dérive terme par terme dans la série pour

$$f : \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k\right)'}_{a_0+a_1(x-1)+..)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(x-a)^{k-1} \text{ [trou]}$$

Théorème Soit $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ et soit le rayon de convergence $r > 0$. Alors

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(k+n)!}{k!}(x-a)^k \tag{19}$$

et le rayon de convergence de la série pour $f^{(n)}$ est r.

Conséquence Si f est définie par série entière, on a $f^{(n)}(a) = n!a_n$, ou

$$\boxed{a_k = \frac{1}{x!} f^{(k)}(a)}$$

Notation Soit I un intervalle ouvert. Alors on note

- $C^{\circ}(I) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : I \subset D(f)$, f continue sur I$\}$
- $\underbrace{C^k(I)}_{\text{des fonctions de classe } C^k} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} I \subset D(f), f k$-fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur i$\}$ [trou]

6.12.4 Théorème de Taylor

Théorème(formule de Taylor avec reste, ou développement limité d'ordre n)

Soit f une fonction de classe $C^{n+1}(I)$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et soit $a, x \in I$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k}_{p_n(x)} + R_n(a,x) \tag{20}$$

avec $\boxed{a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$. Alors

$$\boxed{R_n(a,x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)(x-a)^{n+1}}$$

où $u \in]a, x[$ si $x > a$ et $u \in]x, a[$ si $x < a$

Remarque Pour n=0 on a $f(x) = f(a) + R_0(a,x)$ avec $R_0(a,x) = f'(u)(x-a)$ ce qui n'est rien d'autre que le théorème des accroissements finis.

Idée de la démonstration

Interprétation géométrique du théorème de Taylor

graphique Pour $f(x) = \sin(x)eta = 0$ on trouve

$$\begin{array}{llll}
a_0 & = \frac{1}{0!}f(0) & = 0 & p_0(x) = 0 \\
a_1 & = \frac{1}{1!}f'(0) & = 1 & p_1(x) = x \\
a_2 & = \frac{1}{2!}f''(0) & = 0 & p_2(x) = x \\
a_3 & = \frac{1}{3!}f'''(0) & = -\frac{1}{6} & p_3(x) = x
\end{array}$$

6.12.5 Développement d'une fonction en une série

Remarque Si f est de classe $C^\infty(I)$ on peut utiliser la formule d Taylor avec reste pour n arbitraire (mais à priori $n \leq \infty$).

Théorème(série de Taylor)

Si f est de classe $C^\infty(I)$ et si $\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n(a,x) = 0}$ on obtient à partir du théorème de Taylor avec reste (pour x fixe)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_x(x-a)^k \text{ (série de taylor)} \tag{21}$$

et si a=0

$$fx) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ (Série de Mac Laurin)} \tag{22}$$

trou

Donc (formule de Taylor)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{1}_{a_k} x^k + R_n(x) \tag{23}$$

avec

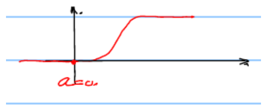
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(n) x^{n+1} = \frac{1}{(1-u)^{n+2}} x^{n+1} = \frac{1}{1-u}\left(\frac{x}{1-u}\right)^{n+1} \tag{24}$$

avec $u \in]0, x[$ si $x > 0$ et $u \in]x, 0[$ si $x < 0$

Puisque $x \in I =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ trou

En fait on a cette égalité pour $x \in]-1, 1[$ mais pas dans $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **Contre exemple** remarque la condition $f \in C^{\infty}(I)$ n'est pas suffisant pour que f puisse être développé en une série entière

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$



On a

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (f(x)) = 0 = f(0) \to f$ continue sur $\mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$

  $f'(x) = 0$ pour $x \leq 0$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (f'(x)) = 0 = f'(0)$ (voir le théorème chapitre 5.7 pour cette égalité)
- Par récurrence, on montre que $D(f^k) = \mathbb{R}$ et que $f^{(k)}(0) = 0$

Donc $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$

Formule de Taylor avec reste en x = a = 0

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0}$$

- $x < 0 : f(x) = 0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + R_n(x)$

  $\to \mathbb{R}_n(x) = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$
- $x > 0 : f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + R_n(x)$

  $\to R_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Donc pour $x > 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} (= f(x)$

Conclusion : $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ mais f$\notin C^{\omega}(\mathbb{R})$ car f ne peut pas être représenté proche de x=0 par une série entière.

6.12.6 Les fonctions $\exp, \sinh, \cosh, \sin, \cos, \ln, (1-x)^\alpha$

Développement limité de e^x

Soit $I = \mathbb{R}, a = 0$, et $f(x) = e^x, f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} e^u x^{n+1}}_{=R_n(x), |u|<|x|} \tag{25}$$

Développement de e^x en une série entière

On a $|R_n(0,x)| \leq \underbrace{|x| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{n\to\infty=0}, \forall x \in \mathbb{R}$

et donc

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \forall x \in \mathbb{R}}$$

$r = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(x+1)!}} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$ **Les fonctions $\sinh$ et $\cosh$**

Avec la même procédure :

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{26}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \tag{27}$$

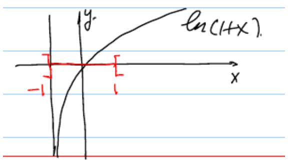
Les fonction $\sin, \cos$

Avec la même procédure

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{28}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \tag{29}$$

La fonction $\ln(1+x)$



$\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k,\ x\in],1,1[$

Démonstration

$\underbrace{\frac{d}{dx}\ln(1+x)}_{=\frac{1}{1+x}}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot k\cdot x=\sum\limits_{k-1=l,l=0}^{\infty}(-1)^l x^l=\sum\limits_{l=0}^{\infty}(-x)^l=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$ **La fonction** $(1+x)^\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$

On a $\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha=\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)=\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n,\forall x\in]-,1[\tag{30}$$

Fonction exponentielle complexe et formule d'Euler

Démonstration de la formule d'Euler :

On définit l'exponentielle $\exp(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$

$\exp(ix)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}i^kx^k=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}}_{\cos(x)}+i\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}_{\sin(x)}=\cos(x)+i\sin(x)$

6.12.7 La notation o et O

Définition Soit $n\in\mathbb{N}$. On écrit que $f(x)=o((x-a)^n),x\to a$

si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\left(\frac{f(x)}{(x-a)^n}\right)=0 \tag{31}$$

et on écrit que $f(x)=O((x-a)^n),x\to a$

Si

$$\left|\frac{f(x)}{(x-a)^n}\right|<C\in\mathbb{R}\text{ Proche de x=a, x}\neq\text{a} \tag{32}$$

Remarque Cas n=0 : $f(x)=o(1),x\to a$ veut dire

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1}=0 \tag{33}$$

Remarque Si $f(x)=o(x^n),x\to 0$, alors $cf(x)=o(x^n),x\to 0$ **Remarque** Si

$f(x) = o(/x-a)^n), x \to a$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m} = o((x-a)^{n-m})x \to a \tag{34}$$

$0 < m < n, m, n \in \mathbb{N}$

Pour le développement limité d'une fonction en $x = a$, on a avec cette notation:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + R_n(a,x) \\ &= p_n(x) + o((x-a)^n), x \to a \end{aligned}}$$

Car $\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{f^{(n+1)}(u)}_{=f^{(n+1)}(a)}(x-a) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\overrightarrow{}} 0$ **Exemples :**

- $\frac{1}{1-x} = 1 + \underbrace{x + x^2 + x^3 + o(x^3)}_{o(x)} = 1 + o(1)$
- —
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$
- $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!x^4 + o(x_4)}$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$
- $\ln(x) = \ln(1 + \underbrace{(x-1)}_{X \to 0 (x \to 1))}) = ...$

Exemples de limites $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x + o(x)}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} ((1 + o(1)) = 1$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}$ **Composition de développement limités**

1. $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{(1 + \underbrace{(\cos(x) - 1)}_{X}}$

   $X = \frac{-1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}_{o(x^2}$, donc $x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\frac{1}{(1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$

$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - (\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) + (-\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}x^4 + o(x^4))}_{0(x^2)}^{2} + o(x^4)$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$

2. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)}, x \to 0$

   $= (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) \cdot (1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

   $= x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

   $= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

3. $f(x) = \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$

   $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$

   $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!x^4 + o(x_4)}$

   $= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}(x + o(x))^3$

   $- (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{3}(x + o(x))^3$

   $= x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

   $= o(x^3)$

   En fait (vérifier !)

   $f(x) = -\frac{1}{30}x^7 + o(x^7)$

7 Intégrales indéfinies et définies

7.1 Définition de l'intégrale indéfinie

$\eth$ = dérivée

$\eth : C^1(]a, b[) \to C^0(]a, b[)$ (C^1 : les fonctions dérivées une fois, et qui sont encore continues sur la fonction dérivée) (pas injectif)

$f :\to D(f) = f'$ (surjectif). Il s'agit de la fonction dérivée.

attention, $f + c$ arrive aussi sur f'. c est une constante.

$\eth^{-1} : C^1(]a, b[\leftarrow C^0(]a, b[)$

$\eth^{-1}(f) \leftarrow f$

$\eth^{-1}(f =: \{F \in C^1(]a,b[) : F' = f\}$

Définition Soit $f \in C^0(]a,b[)$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(]a,b[)$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour $x \in]a,b[$

RemarqueF est dérivable sur $[a,b]$ car F' $=$ f et continue sur $[a,b]$ (voir le théorème de la section 5.7)

RemarqueDeux primitives d'une fonction ne diffèrent que d'une constante.

Définition On appelle intégrale indéfinie de f l'ensemble des primitives de f.

Notation $F(x) = \int f(x)dx$ ou $\int^x f(t)dt$.

Exemples :

f	F	Domaine de Définition
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \neq 1, C \in \mathbb{R}(n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
e^x	$e^x + c$	
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$	$x > 0$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + C$	$x \in D(\tan(x)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	
$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\arctan(f(x)) + C$	
$e^{x^2}2x$	e^{x^2}	
$nx^{n-1} + 2xn + 1e^{x^2}$	$x^n e^{x^2} + C$	

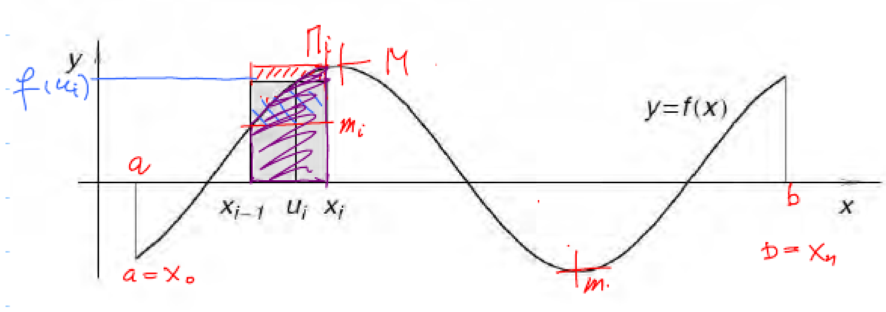
Remarque

L'application $\eth : C^1(]a,b[) \to C^0(]a,b[)$ est Linéaire : $\eth(\alpha f + \beta g) = \alpha\eth(f) + \beta\eth(g), \alpha\beta \in \mathbb{R}, f, g \in C^1(]a,b[).\eth^{-1}$ est aussi linéaire.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int f(x)dx \quad (1)$$

7.2 Définition de l'intégrale définie

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $[a, b] \subset D(f), a \leq b$



Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. alors une suite $(x_n), a \equiv x_0 \leq x_1 \leq x_2 ... \leq x_n \equiv b$ est appelée une partition de [a,b]

Notation On écrira $\wp(x_0, x_1, ...x_n)$ pour une partition d'une intervalle $[a, b]$

Soit $n \in \mathbb{N}^3, \wp(x_o, ...x_n)$ une partition de $[a, b], u_i \in [x_{i_1}, x_i], i = 1, \ldots, n$. Alors on appelle

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

La somme de Riemann de f pour la partition $\wp(x_0, \ldots, x_n)$ et le choix de $(u_i)_{i=1,\ldots,n}$

RemarqueSi $f \leq 0$ sur $[a, b]$, alors la somme de Riemann est une approximation de la "surface sous le graph de f ".

RemarquePuisque la fonction f est continue sur $[a, b]$ on a

$$m \cdot (b - a) \leq S_n \leq M(b - a) \tag{3}$$

où m et M dont le minimum et le maximum global de f sur $[a, b]$.

RemarquePuisque f est continue sur $[a, b]$, f est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et f admet un minimum m_i et un maximum M_i sur $[x_{i-1}, x_i]$ et

$(b - a)m \leq \underline{S_n} \leq S_n \leq \overline{S_n} \leq (b - a)M$, ou :

- $\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_1 - x_{i-1})$

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donnée une partition $\wp(x_0, \ldots x_n)$, on définit $\Delta x \equiv \Delta x(\wp) := \max\{x_1 - x_0.x_2 - x_1, ...\}$ la taille de la partition.

Exemple (découpage régulier).

On définit

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, i = 0, 1, \ldots n$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Définition / Théorème (intégrale définie de f sur [a,b])

Soit f une fonction contiunue sur [a,b] $\wp_n \equiv \wp(x_0, \ldots, x_m), n \in \mathbb{N}^*$ une suite de partitions telles que $\lim_{n\to\infty} \Delta x(\wp_n) = 0$. Alors es $\lim_{n\to\infty} \underline{S} = \lim_{n\to\infty} \underline{S}$ et $\overline{S} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}$ existent, sont indépendants du choix des la suite des partitions et $\underline{S} = \overline{S} =: S$. Le nombre S est apelé "intégrale définie de f sur [a,b]

Explication de $\underline{S} = \overline{S}$

La continuité de f sur [a,b] implique(*) que $\forall \epsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0.|M_i - m_i| < \frac{\epsilon}{b-a}, i01, ..., n$, c'est à dire $|\overline{S} - \underline{S}| \leq \epsilon$

Limite épointée trou

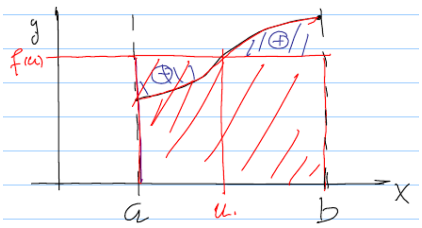
continuité en $x \in D(f)$ trou **Notation** on écrit $\int_a^b f(x)dx$ pour l'intégrale définie sur $[a, b]$

trou

7.3 Propriétés de l'intégrale définie

1. linéarité trou

7.4 Théorème de la moyenne



Théorème Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} [a, b] \subset D(f), b > a, f$ continue sur $[a, b]$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(u)(b-a) \tag{4}$$

Remarque $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ = valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Démonstration : Théorème des accroissements finis (donné le théorème fondamental du calcul intégral).

Théorème généralisé

Soit $f, g \mathbb{R} \to \mathbb{R}, [a, b] \subset D(f) \cap D(g), f, g$ continues sur $[a, b], g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(u) \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Pour $g(x) = 1$ c'est le théorème précédent Démonstration Théorème ds accroissements finis généralisé + théorème fondamental du calcul intégral.

7.5 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, [a, b] \subset D(f), f$ continue sur [a,b], alors

1. La fonction G définie par $G(x) = \int_a^b f(t)dt$ est une primitive de f sur]a,b[, c'est à dire G est dérivable sur]a,b[et G'(x) = f(x).
2. Si F est une primitive de f sur]a,b[,alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{6}$$

i) Soit $x \in]a, b[$ alors $\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{par le théorème de la avec g(x) = 1}} \frac{1}{x} f(u)h = f(u)$ pour $u \in]x, x+h[, h > 0$ et $u \in]x+h, x[, h < 0$

Donc $u \to x$ lorsque $h \to 0$ et $f(u) \to f(x)$ car f est une fonction continue sur $[x, x+h]([x+h, x])$

ii) Soit F une primitive de f. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = G(x) + C \text{ POur tout x} \in [a, b] \tag{7}$$

Pour x = a on a $F(a) = 0 + C = C$

Donc $F(x) = G(x) + F(a)$ et on trouve

$F(b) = \underbrace{G(b)}_{=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} + F(a)$

D'où $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Remarque Pour f continue sur]a,b[la fonction $G(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f pour tout choix de $c \in]a, b[$. L'application $\eth : C^1(]a, b[) \to C^0(]a, b[)$ est donc surjective.

Notation On écrira

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)$

Exemples

1) $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$

2) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$

Résumé du Théorème fondamental du calcul Intégral

<u>Définition</u> Soit $f \in C^0([a,b])$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(]a,b[)$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$

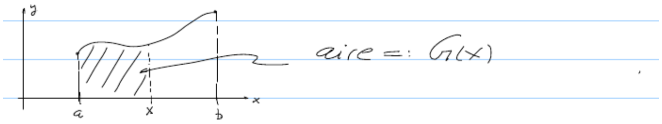
<u>Remarque</u> F est dérivable sur [a,b] (voir le théorème section 5,7) et F est donc continue sur [a,b]

<u>Définition</u> Soit $f \in C^0)[a,b])$. La limite $S := \underline{S} = \overline{S}$ où $\overline{S} = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n}, \underline{S} = \lim_{n\to\infty} \underline{S_n}$ est appelé intégrale définie de f sur [a,b]

<u>Notation</u>

$\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R} \rightarrow$ intégrale définie

$\int f(x)dx \equiv \int^x f(t)dt \rightarrow$ intégrale indéfinie $= \{F \in C^1(]a,b[) : F' = f\}$



$$G :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

on montre que $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (G(x)) = 0 =: G(a)$

<u>Théorème</u>Soit $f \in C^0([a,b])$. Alors

i) G est une primitive de f

ii) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

pour toute primitive F de f

<u>Théorème de la moyenne</u>

soit $f \in C^0([a,b]), g \in C^0([a,b]), g(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$, Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(u)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

<u>Démonstration</u> Soient m et M le minimum et le maximum global de f sur [a,b]. Alors $m \cdot g(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ et donc

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

et il existe donc $v \in [m, M]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = v \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $u \in]a, b[$ tel que $v = f(u)$

7.6 Application du théorème de la moyenne

Proposition : $\frac{2}{7} \leq \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{5+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x}_{I} \leq \frac{2}{5}$

Démonstration On a $\sin(x) > 0$ pour $x \in]0,\pi[$. On pose

$f(x) = \frac{1}{5+\sqrt[3]{x}}, g(x) = \sin(x)$

$\exists u \in]0,\pi[$ tel que

$I = f(u) \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x}_{=[-\cos(x)]_0^\pi=1+1=2}$

f est une fonction décroissante sur $[0,\pi]$ et $f(0) = \frac{1}{5}, f(\pi) = \frac{1}{5+\sqrt[3]{\pi}} > \frac{1}{7}$

Donc $\frac{2}{7} \leq I \leq \frac{2}{5}$

7.7 Méthode d'intégration

7.7.1 Intégration "immédiate"

Voir le tableau

1. $a > 0, \int a^x\,\mathrm{d}x = \int e^{x\ln(a)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(a)}e^{x\ln(a)} + C = a^x\frac{1}{\ln(a)} + C$

2. $\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x)^2 + C$

   Exemple : $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x)^2 + C = -\frac{1}{2}\cos(x)^2 + C$ (à cause de la constante)

3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + C$

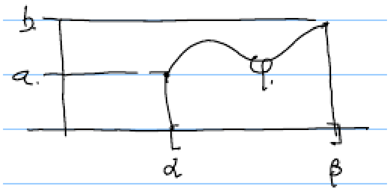
   Exemple : $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln(|\cos(x)|) + C$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - cos(2x)\,\mathrm{d}x = [\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

5. $\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\,\mathrm{d}x = n\cdot\frac{\pi}{4}$ (on fait n fois la même aire)

7.7.2 Intégration par changement de variable

<u>Théorème</u>soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, [a,b] \subset D(f), f$ continue sur $[a,b]$. Soit $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b], \varphi$ dérivable sur $[\alpha,\beta]$, et et φ' continue sur $[\alpha,\beta]$. De plus : $\boxed{\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b}$



Alors $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,\mathrm{d}u}$

<u>Démonstration</u>

Soit F une primitive de f sur [a,b], alors la fonction$F : G(u) = F(\varphi(u))$ est une primitive de $f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$ sur $[\alpha,\beta]$, car

$$G'(u) = F'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \tag{11}$$

En plus $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,\mathrm{d}u = [G(u)]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$
$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

<u>Remarque :</u> Si φ est bijective, alors $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$

<u>Exemples :</u>

1. $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. On pose $x = \varphi(u) = \sin(u); \varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$
   $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(u)}}_{|\cos(u)|} \cdot \underbrace{\cos(u)}_{\varphi'(u)}\,\mathrm{d}u$
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(u))\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$

2. Cas d'une intégrale indéfinie (voir la remarque)
   $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
   $x = \varphi(u) = \sin(x), \varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$
   $G(u) = \int (1-\sin^2(u)\,\mathrm{d}u = u - (\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin(2u)) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \underbrace{\sin(2u)}_{=2\sin(u)\cos(u)}$
   $= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin(u)\sqrt{1-\sin^2(u)}$
   Donc F(x) $= G(\varphi^{-1}(x)) == G(\arcsin(x)) = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

7.7.3 Intégration par partie

Théorème Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}, g : [a, b] \to R$ continûment dérivable sur $[a, b]$ (= dérivable avec une fonction dérivée qui est continue). Alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Remarque

En pratique, on écrit l'identité plutôt comme

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Avec f continue sur [a,b] et g continûment dérivable sur [a,b].

Remarque (cas d'une intégrale indéfinie)

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

f continue, g continûment dérivable, F une primitive de F.

Démonstration

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{15}$$

et donc

$$\int_a^b (f \cdot g)'\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

Exemples

1. $\int_0^1 e^x x\,\mathrm{d}x = [e^x x]_0^1 - \int_0^1 e^x 1\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x = [e^x x^2]_0^1 - \underbrace{\displaystyle\int_0^1 e^x(2x)\,\mathrm{d}x}_{2\int_0^1 e^x x\,\mathrm{d}x}$
3. $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \underbrace{x\frac{1}{x}}_{=1} = x\ln(x) - x + C$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \, \mathrm{d}x = I_n, I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1, n \in \mathbb{N}^*$

   $n \geq 2 : I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin(x)^{n-1} \, \mathrm{d}x$

   $= [-\cos(x)\sin(x)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)(n-1)(\sin(x)^{n-2}\cos(x) \, \mathrm{d}x$

   $= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{n-2}(1-\sin(x)^2) \, \mathrm{d}x$

   $= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

   Donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ou $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

   Donc $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$

5. $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} \, \mathrm{d}x = I_n, I_0 = x + C, I_1 = \arctan(x) + C.$

   $n \geq 1 : I_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2 11)^n} \, \mathrm{d}x$

   $= x\frac{1}{(x^2+1)^n} + 2n \int \underbrace{x\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} x}_{=\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}} \, \mathrm{d}x$

   $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$

   Donc $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, n = 1, 2, 3....$

   $\rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$

7.8 Intégration d'un développement limité

Proposition : Soit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)})a = (x-a)^n + \o((x-a)^n) \quad (17)$$

lorsque $x \to a$ Alors :

$F(x) := \int_a^x f(x) \, \mathrm{d}t$

$= f(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n+1} + o((x-a)^n)$

lorsque $x \to a$

Démonstration Soit $x > a, g$ continue sur $[x, a], \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \left(\frac{g(x)}{(x-a)^n}\right) = 0$

$\int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{theoreme de la moyenne}} g(u)(x-a)$ avec $u \in]a, x[$

Donc $\left|\frac{\int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t}{(x-a)^{n+1}}\right| = [trou...]$

Idem pour $x < a$

Exemples

Soit $F(x) := \int_0^x \sin(\cos(x))\,dt$. calculer le DL_5 (développement limité d'ordre 5) de F en x = 0. ON a besoin du DL_4 de $f(t) = \sin(\cos(t))$ en t = 0.

i) $\cos(t) = 1 - \underbrace{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)}_{=T \text{ et } T\to 0 \text{ pour } t\to 0}$

ii) il nous faut le développement limité de sin en x=1 (car cos(0) = 1). Il suffit de calculer le DL_2 de sin(x) en x=1 (car $T \equiv t^2$)
$\sin(x) = \sin(1) + \cos(1)(x-1) - \frac{1}{2}\sin(1)(x-1)^2 + o((x-1)^2)$
$\sin(\cos(t)) = \sin(1+T) = \sin(1) + \cos(1)T - \frac{1}{2}\sin(1)T^2 + o(T^2)$

iii) $f(t) = \sin(1) + \cos(1)(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)) - \frac{1}{2}\sin(1)(-\frac{1}{2}t^2 + o(t^2))^2 + o(t^4)$
$f(t) = \sin(1) - \frac{1}{2}\cos(1)t^2 + (\frac{1}{24}\cos(1) - \frac{1}{8}\sin(1))t^4 + o(t^4)$

iv) $F(x) = \sin(1)x - \frac{1}{6}\cos(1)x^3$

7.9 Intégration d'une série entière

Théorème Une Série entière peut être intégrée terme par terme. Soit

$$f(x) = \sum_{\infty}^{k=0} a_k(x-a)^k \tag{18}$$

avec rayon de convergence $r > 0$. Alors

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{\infty}^{k=0} a_k \frac{1}{k+1}(x-a)^{k+1} \tag{19}$$

avec rayon de convergence r.

Démonstration : $F(a) = 0, F'(x) = f(x)$

Exemple:

Soit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. $\boxed{e^x = \sum_{\infty}^{k=0} \frac{1}{k!}x^k}$

Donc $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\infty}^{k=0} \frac{1}{k!(-1)^k x^{2k}}$

Alors $erf(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\infty}^{k=0} \frac{1}{k!} \frac{1}{2k+1} (-1)^k x^{2k+1}$

7.10 Intégrales généralisées (ou impropres)

$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, trois types :

1. **Type 1 :**

   f continue sur $[a, b[$, ou $]a, b]$, ou $]a, b[$ [image]

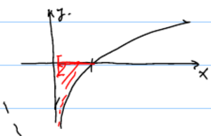
2. **Type 2 :**

   f continue sur $]-\infty, b], [a, \infty[,]-\infty, \infty[$ $(a = -\infty, b = \infty$, ou les deux) [image]

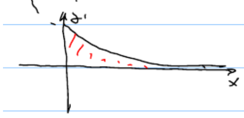
3. **Type 3 :**

   Combinaison des types 1 et 2.

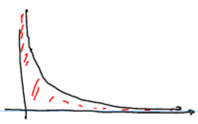
Exemples explicites :



$\int_0^1 \ln(x)\,dx = ?$ type 1



$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = ?$ type 2



$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx = ?$ type 3.

Définition (type 1)

- Si f est continue sur $]a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{20}$$

- Si f est continue sur $[a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\neq 0}} \left(\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{21}$$

- Si f est continue sur $]a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{\epsilon_1\to 0\\ \epsilon_1>0\\ \epsilon_2\to 0\\ \epsilon_2>0}} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{22}$$

(une limite après l'autre, l'ordre ne joue pas d'ordre).

Exemples

1. $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{def} \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \left(\int_\epsilon^1 1\ln(x)\,\mathrm{d}x\right)$
   $= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \left(([x\ln(x)]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 1\,\mathrm{d}x)\right)$ trou
2. trou
3.

Définition (type 2)

- Si f est continue sur$[a,\infty[$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

- Si f est conitnue sur $]-\infty,b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty}\int_R^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

- Si f est continue sur $]-\infty,\infty[$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R_2\to\infty\\ R_1\to-\infty}}\left(\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{25}$$

De nouveau, n'importe quel ordre.

Exemples:

1. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,\mathrm{d}x$
   $= \lim\limits_{R\to\infty}[-e^{-x}]_0^R = \lim\limits_{R\to\infty}(-e^{-R}+1) = 1$

2. trou

3. $r\neq 1, r>0\int_1^{\infty}\frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty}[\frac{1}{1-r}\frac{1}{x^{r-1}}]_1^R$
   $= \lim\limits_{R\to\infty}\left(\frac{1}{1-r}\frac{1}{R^{r-1}} - \frac{1}{1-r}\right) = \begin{cases} +\infty & r<1 \\ \frac{1}{r-1} & r>1 \end{cases}$
   cas r $=1$: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty}\int_1^R\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
   $= \lim\limits_{R\to\infty}[\ln(x)]_1^R = \lim\limits_{R\to\infty}(\ln(R)-0) = +\infty$

Définition : (type 3)

Si f est continue sur $]a, \infty[$ ou $]-\infty, b[$:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ avec } c \in]a, \infty[\tag{26}$$

$$\int_{\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ avec } c \in]-\infty, b[\tag{27}$$

Remarque :

$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0 \\ \epsilon>0}} \int_{a+\epsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{R\to-\infty \\ \epsilon\to 0 \\ \epsilon>0}} \int_{R}^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple :

$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0 \\ \epsilon>0}} \int_{\epsilon}^{R} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,\mathrm{d}x =: I$. Pour se débarrasser de la racine, on pose $x = \varphi(u) = u^2, u > 0, \varphi(\sqrt{\epsilon}) = \epsilon, \varphi(\sqrt{R}) = R$

$I = \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0 \\ \epsilon>0}} \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{R}} \frac{1}{u} e^{-u^2} \cdot 2u\,\mathrm{d}u$ (on se rappelle que $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$)

$= \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0 \\ \epsilon>0}} [\sqrt{\pi} erf(x)]_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{R}]}$

$= \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0 \\ \epsilon>0}} (\sqrt{\pi} erf(\sqrt{R} - \sqrt{\pi} erf(\sqrt{\epsilon}) = \sqrt{\pi}$

7.11 Intégration des foncitons rationnelles

Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec p,q des polynpmee, de gré de p trou

Exemple : $\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{-x+1}{x^2+1}$

Soit donc degré p < degré de q.

7.11.1 Exemple

1. Décomposition de q(x) (sur $\mathbb{R}$) en facteur irréductibles.

   Exemple :

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^2 + 1 = x^2 + 1 \text{ pas de factorisation sur les reels}$$
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$$
$$x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1)$$
$$x^4 + 1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \text{voir le chapitre des nombres complexes)}$$

2. Décomposition de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ en éléments simples

   Exemple : $f(x) = \frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}$

   $2x^3 = \alpha(x+1)(x^2+1) + \beta(x-1)(x^2+1) + (\gamma x+\delta)(x^2-1)$

   On regarde les coefficients de chaque puissance :

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 2 = \alpha+\beta+\gamma \\ x^2: & 0 = \alpha-\beta+\delta \\ x: & 0 = \alpha+\beta-\gamma \\ 1: & 0 = \alpha-\beta-\gamma \end{array}\right\} \text{algèbre linéaire : } \alpha = \beta = \tfrac{1}{2}, \gamma = 1, \delta = 0$$

3. Intégration des éléments simples

   $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

   $= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) = \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + C$

   $= \frac{1}{2}(\ln(|(x-1)(x+1)(x^2+1)|)) + C$

   $= \frac{1}{2}\ln(|x^4-1|) + C = \ln(\sqrt{x^4-1}) + C$ En fait (ouvrir les yeux):

   $f8x) = \frac{1}{2}\frac{g'(x)}{g(x)}$ avec $g(x) = x^4 - 1$

   Donc $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$trou

7.11.2 Le cas général

Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\deg p < \deg q$

1. Décomposition de q(x) en facteurs irreductibles

   $q(x) = (\ldots)(\ldots)(\ldots)\ldots$

2. Décomposition en éléments simples

   $$f(x) = \frac{p(x)}{(\quad)(\quad)(\quad)} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} + \ldots$$

facteurs dans $q(x)$	termes dans $f(x)$
$x-a$	$\frac{\alpha}{x-a}$
$(x-a)^2$	$\frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2}$
$(x-a)^m$	$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(x-a)^k}$
x^2+bx+c	$\frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}$
$(x^2+bx+c)^m$	$\sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k x+\gamma_k}{(x^2+bx+c)^k}$

   Remettre sur le même dénominateur, comparer les puissances, utiliser algèbre linéaire pour déterminerles coefficients α, β, γ

3. Intégration des éléments simples.

   - $\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln(|x-a|) + C$
   - $intx \frac{1}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^k} + C$, k$\geq 2$
   - $\int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\beta}{2}(2x+b)+\gamma-\frac{1}{2}\beta b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

     $= \frac{\beta}{2}\ln(|x^2+bx+c|) + (\gamma + \frac{1}{2}\beta b)\int \frac{1}{\underbrace{x^2+bx+c}_{=(x+\frac{b}{2})^2+c+\frac{b^2}{4}}}\,\mathrm{d}x$

     On a $c - \frac{b^2}{4} > 0$ sinon on aurait des facteurs linéaires !

     On pose $x = \varphi(u) = \sqrt{x - \frac{b^2}{4}}u - \frac{b}{2}$

$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$

$= \frac{\beta}{2}\ln(|x^2+bx+c|) + \frac{\gamma\frac{1}{2}\beta b}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} + C$

Finalement, pour $k \geq 2$

$\int \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+x)^k}$ = même procédure que pour k = 1

trou

7.12 Divers

$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t.$

On pose $t = \varphi(s) = s^2$, avec $s > 0$

$1 = \varphi(1), 3 = \varphi(\sqrt{3})$

Donc notre :$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(1+s^2}2s\,\mathrm{d}s = 2[\arctan(s)]_1^{\sqrt{3}} = 2(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)) = 2(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$ (voir dessins) $= \frac{\pi}{12}2 = \frac{\pi}{6}$

Cas indéfini : $\int \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t = 2\arctan(s) + C = 2\arctan(\sqrt{t}) + C$

7.13 Glossaire

$\sim$ Relation d'équivalence

$:=$ est défini par

$\equiv$ Équivalent à

$\forall$ Pour tout (x par exemple)

$\in$ est élément de

C_x Classe d'équivalence de x

: tel que

7.14 Règles

7.14.1 Complexes

7.14.2 Limites

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin(\frac{1}{n}) = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

7.15 Fonctions

- $g(x) = |x| \to g'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ et pas dérivable en x = 0
- dérivée de la fonction réciproque donnée par $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$