Algèbre linéaire

Brunner Loïc

February 10, 2018

1 introduction

mail:dimitar.jetchev@epfl.ch
moodle.epfl.ch-¿ clé: INSC-etudiant
exercices: lundi 15:15-¿17h voir le moodle dès le mercredi + corrigé de la semaine précédente
examen final: 100%, 20 questions à choix multiple+ 20 vrai ou faux
livre: algèbre linéaire et Applications (4ème edition) Pearson

2 systèmes d'équations linéaires

2.1 exemples

forme générale:$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ exemple:

$$4x_1 - 5x_2 = 2 \quad (1)$$
$$3x_1 + x_2 = \sqrt[2]{2} \quad (2)$$
$$(3)$$

Savoir dissiner et comprendre un graphe provenant de systèmes d'équations(si on remplace une des variables par un nombre

3 cas

1. il n'y a qu'une seule solution (une seule intersection entre les droites)
2. les deux droites sont paralleles(pas de solution car pas d'intersection entre les droites)(pas compatibles/pas consistant)
3. les deux droite sont confondues (infinité de solutions)

Nous voyons donc qu'il y a trois sortes de solutions a un système d'equations a 2 inconnues. Ce qui se voit très bien si on écrit les équation sous forme géométrique , en prenant x_1etx_2 comme axes

2.2 notation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

les trois premières colones sont appellées la matrice du système alors que toutes les colones forment la matrice complète

2.3 résolution des systèmes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \quad (4)\\ 2x_2 - x_3 &= 1 \quad (5)\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \quad (6)\\ & \quad (7) \end{aligned}$$

Une élimation des 3 variables peut être envisagée en soustayant 3 fois la troisième equation à la première. Puis en comparant les équations restantes avec les $x_2 et x_3$. en répétant le procesus, nous pouvons trouver une variable et en déduire les autres

D'autres solutions éxistent, qui sont plus facilement programmables sur un ordinateur!

2.4 équations élémentaires

1. remplacement (je peut remplacer la somme d'une équation avec une autre)
2. échange (je changer les éqautions entre elles)
3. multiplication par un scalaire

Se référer a résolution des systèmes pour voir un exemple de ces différentes opérations

2.5 taille de l'ensemble des solutions

Comme nous l'avons vu, il y a trois solutions pour les systèmes d'équations. Comment détermier la taille de l'ensemble solution avecl les opérations élementaires

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \quad (8)\\ 2x_1 - 6x_2 &= 3 \quad (9)\\ & \quad (10) \end{aligned}$$

On peut multiplier la première ligne par -2 et ajouter le résultat à la seconde équation. On continue la résotion de manière classique et on obtient 0=1. ON en déduit qu'il n'y a pas de solutions. Si on obtenait une solution du style 0=0, on verrait alors qu'il y a une infinité de solution.

2.6 Algorithme de Gauss

Nous allons prendre cette matrice comme matrice étalon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.6.1 quelques notions

matrice sous forme échelonée:
: si elle satisfait ces conditions ci dessous:

coeficient principal:
: premier élément non nul de gauche a droite sur la première ligne de la matrice

matrice sous échelonée réduite:
: il faut qu'elle soit échelonée et que les coefs principaux des lignes non-nulles soit = 1 et que les coeficients principaux soient les seuls éléments non-nuls dans leur colone

pivot:
: position d'un emplacement dans la matrice qui correspond à un coef. principal(=1) de la forme échelonnée réduite

conditions pour matrice échelonée:

1. si les lignes non-nulles sont au dessus des lignes nulles
2. si le coeficient principale de chaque ligne se trouve a droite du coefiencient principal de la ligne au desssus(ce qui donne à la matrice une forme triangualire)
3. Tous les coeficients dans une colone en dessus d'un coeficient principal sont nuls(cf. condition 2)

Exemple de matrice échelonée:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple de matrice échelonée réduite:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous notons que dans cet exemple, la position des 3 premiers 1 est apellés pivot.

2.6.2 première étape de l'algoritme

Transformer la matrice sous forme échelonnée.Prenons comme exemple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

On commence par choisir la colone non-nulle à gauche (ici, la deuxième ligne). On fait l'échange avec la première ligne tel que l'élément non-nul dans la colone 1 soit dans la première ligne.

2.6.3 seconde étape de l'algoritme

Transformer la matrice sous forme échelonée réduite. Après les transformations ci-dessus, nous arrivons dans la situation suivante:

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

il faut mnt annuler les éléments qui sont à gauche par soustraciton des lignes entres elles.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

2.6.4 suite algoritme

Puis on continue a répéter l'étape 1 et 2 jusqu'à ce que la matrice devienne échelonnées. pour obtenir finalement:

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Notre matrice est mnt échelonnée. Ainsi, nous connaissons tous les pivots.

2.6.5 réduction de la matrice

Nous commençons par diviser toutes les lignes pour obtenir des pivots égaux a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ensuite, nous choisissons la colonne de pivot la plus à droite pour commencer les soustractions et obtenir des 0 au de dessus de tous les pivots ce qui nous donne:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les opérations, on obtient la même matrice échelonnée réduite a la fin. Nous comprenons qu'il est plus facile de programmer cette méthode de résulution. NOus notons que l'échelonnage de la matrice est plus cher en terme de compexité de programation que sa réduction.

2.7 Système d'équations linéaires

La matrice prise comme exemple dans l'algo de Gauss représente un systeme d'équations a 5 inconnues.

$$
\begin{aligned}
3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 5 \\
3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\
3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15
\end{aligned} \tag{11}
$$

Sous forme échelonnée réduite, nou savons comme système d'équation linéaires:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_3 + 3x_1 &= -24 \\
x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -7 \\
x_5 &= 4
\end{aligned} \tag{12}
$$

variables principales:
: variables qui correspondent au pivot de la matrice échelonnées réduite(x_1, x_2, x_5)

variables secondaires:
: on peut exprimer les variable principales uniquement avec les variables secondaires(x_3, x_4)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - 24 \\
x_2 &= 2x_3 - 2x_4 - 7 \\
x_5 &= 4
\end{aligned} \tag{13}
$$

2.7.1 exemple

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 &= 1 \\
-2x_1 + 4x_2 &= 1
\end{aligned} \tag{14}
$$

Que l'on transforme en matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

on effectue l'algo de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On soustrait la première à la deuxième.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on soustrait la deuxième à la première.

Nous voyons que le système n'a pas de solution.

important:
: le système possède une solution et seulement une solution si la fomre échelonnée réduite ne contient pas un pivot deans la dernière colonne

3 équation vectorielles

Chaque vecteur représente un point dansR^n.

/home/logeek04/Documents/etude/algebre/schema3.jpg

opérations sur les vecteur:

- multiplication par un scalaire
- addition entre les vecteurs $u, v \in R^2 \rightarrow u + v \in R^2$
- produit scalaire

interprétation géométrique de l'addition: la diagonale du parallelogramme formé par les deux vecteurs.($u - v$ donne l'autre diagonale).

/home/logeek04/Documents/etude/algebre/schema4.jpg

3.1 vercteurs dans R^n

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.2 combinaisons linéaires

Soit $v_1, v_2, v_3, ..., v_r \in R^n$
une combinaison linéaire est un vecteur de la forme $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_rv_r$

3.2.1 interprétation géométrique

Si, au contraire, nous prenons $c_1, c_2 \in R$ nous n'obtenons plus une série de droites, mais un plan. Ainsi, nous pouvons retrouver n'importe quel vesteur par une combinaison linéaire de vecteurs indépendants.

3.2.2 équations vectorielles

Soit $v_1, v_2, ...v_r \in R^n$

Vect$\{a_1, ..., a_r\} = \{c_1a_1 + ... + c_ra_r | c_r \in R\}$:
la partie de R^n engendrée par $a_1, ..., a_r$(somme des combinaisons linéaires)

Etant donné $b \in R^n$, $b \in Vect\{a_1, ...a_r\}$? Oui car on peut écrire:

$$b = c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_3a_3$$

4 les équations matricielles

Si on exrime une équation linéaire de veceurs sous forme de matrice, on obtient une équation matricielle.
Soit a la matrice de l'équation vectorille, on a
$A\begin{vmatrix} x_1 \\ ... \\ x_r \end{vmatrix}$ = b, $\forall Ax \in b$
c'est ce qu'on apelle une équation matricielle. Mais qu'elle que soit l'équation que l'on utilise, on obtient le même ensemble solution. Cette équation en particulier nous permet de déterminer si le vecteur b appartient à la partie de R^n engendrée par les colonnes de la matrice. Ce qui revient a dire:

$$b \in Vect\{v_1, ..., v_n\}$$

A=$(v_1, ..., v_r)$ Ax=b

Pour être capable d'écrire $Ax \in R^n$ il faut que r=m.

exemple $v_1, v_2, v_3 \in R^3$

$$3v_1 - 5v_2 + 7v_3 = b \tag{15}$$

Il faut trouver l'équation matricielle en écrivant différemment l'équation vectorielle.
$A(3x3) : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} x : \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ Nous vérifions ainsi l'équation Ax=b. Pour calculer Ax ou A est nxr et x est rx1, l arpgle est:
Le résultat est un veceur nx1 ou la ième composantes est la somme des produits des éléments de la ligne n^o i et des différents éléments du vercteur x.

4.1 propriétés du produit matrice/vecteur

théorème Soit A une matrice nxr, $u, v \in R^r$, $c \in R$.

1. A(u+v)=Au($\in R^n$)+Av8$\in R^n$)
2. A(cu)=cAu

existance des solutions Comment savoir s'il existe des équations matricielles.
$Ax = b$
les conditions suivantes doivent être respectées:

1. il existe $x \in R^r$ de l'équation matricielle.
2. $b \in Vect\{a_1, ..., a_r\}$ ou A=$\{a_1, ...a_r\}$
3. il existe une soltuion de l'équation vectorielle $x_1a1 + x_2a_2 + ... + x_ra_r = b$

exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
Question: l'équation Ax=b est-elle compatible pour tous les b_1, b_2, b_3 possibles?
On écrit la matricce complète pour faire l'élimination de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ -2 & 2 & 0 & b_2 \\ 4 & -1 & 3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne à la fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & -b_2/2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 + 7/2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

On a une solution si est seulement si $3b_1 + \frac{7}{2}b_2 + b_3 = 0$, donc l'équation n'est pas compatible pour tous les b_1, b_2, b_3 possibles.

théorème Soit A une matrice nxr.
Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- Pour tout $b \in R^n$, l'équation Ax=b possède une solution.
- Tout vecteur b de R^n est un ecombinaison linéaire des colonnes de A
- Les colonnes de A engendrent R^n,$Vect\{a_1, ..., a_r\}$

$n \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ a_r \end{pmatrix}$

Il faut prouver l'équivalence des
trois propositions:
Il existe un b tel que Ax=b n'est pas compatible.
$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \sim (Gauss) \begin{pmatrix} v & d \end{pmatrix}$
La dernière matrice étant la forme échelonée réduite. Il n'existe pas solution si et seulement si la dernière colonne est une colonne de pivot.

5 les systèmes linéaires Homogène/non-homogènes

5.1 équations homogènes

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Ax=b
$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. pout b= 0 il y a toujours une solution
2. l'origine appartient à Vect$\{a_1, ..., a_r\}$
3. (0,0,0) est une combinaison linéaire des colonnes

en résolvant on trouve:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ On voit donc ainsi l'origine de la solution triviale.

5.2 équations non-homogènes

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 8x_3 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned} \tag{17}$$

la matrice échelonnée réduite nous donne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -4 - 2x_3 \\ x_1 &= -7 + 2x_3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Ainsi peut trouver une solution particulière(5,6,1). Nous allons utiliser cette solution particulère pour trouver la solution générale du système homogène.
Il faut commencer par exprimer la solution générale (en remplaçant le vecteur b par le vecteur nul):
$x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors la sulution générale:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -5 + 2x_3 \\ -6 - 2x_3 \\ 1 + x_3 \end{pmatrix}$$

5.3 indépendence linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

On a $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ comme une solution:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

la solution triviale n'est pas la seule solution!!

système lié /linéairement dépendant:
s'il existe $x_1, x_2, ..., x_r \in R, t.q.(x_1, ..., x_r) \neq (0, ..., 0) et x_1 v_1 + ... + x_r v_r = 0$

systeme libre/linéairement indépendant:
si l'équation vectrorielle $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r = 0$ n'admet que $x_1 = ... = x_r = 0$ comme solution

5.3.1 indépendance linéaire pour les colonnes d'une matrice

Si on peut écrire une colonne comme étant x* une autre, les colonnes sont linéairement dépandantes.
Les colonnes sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation Ax=0 admet la solution triviale comme solution unique.

5.3.2 Famille d'au moins deux vecteurs

théorème Soit $F = \{v_1, ..., v_r\}$ est linéairement dépendante sssi au moins l'un des vecteurs de F est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
Preuve:
Si F est liée, il existe $(c_1, ..., c_r) \neq (0, ..., 0)/c_1v_1 + ... + c_rv_r = 0$ $v_1 = \frac{c_2}{c_1}v_2 + ... + \frac{c_r}{c_1}v_r$ ...

exemple Soit u=

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

,v=

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\in R^3$

1. déterminer la partie de R^3 Vect{u,v}(plan)
2. Si $w \in R^3$ alors w$\in Vect\{u, v\}$ sssi u,v,w sont linéairement dépendants

w=cu +dv,$c, d \in R$
{u,v,w} sont linéairement dépendants
$\exists(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)/c_u + c_2v + c_3w = 0$
$c_3 = 0 \Rightarrow c_u + c_2v = 0$ contradiction car u et v ne sont pas colinéaires et la partie de R^3 qu'ils engendrent est un plan. Ce qui implique qu ec_3 n'est pas égal à 0.
Donc: $w = -\frac{c_1}{c_3}u - \frac{c_2}{c_3}v$ et les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

théorème UNe famille de vecteurs ayant strictement plus de vecteurs que la dimension de l'espace est liée
$v_1 \in R^n$ $v_r \in R^n/r > n$
Preuve:

$$\begin{pmatrix}v_1|v_2|...|v_r|0\end{pmatrix}$$

Il existe au moins une inconnue non-principale. Ce qui signifique qu'il existe une infinité de solutions. Ce qui implique qu'il existe une solution non nulle ce qui nous montre que la famille est liée/dépendante.

5.4 les transformations lilnéaires

Ax=b

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la matrice A agit sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T : R^3 \rightarrow R^2$

on effectue ici une transformation associée à A. C'est A qui agit sur x pour obtenir b. on a donc une transformatin de $R^m \rightarrow R^n$

- Déterminer T(u) pour $u \in R^n$
- Déterminer x/ T(x)=b
- Existe-t-il plusieurs vecteurs x dont l'image de T soit égale à b
- $v \in R^m$, est-il dans l'image de T

exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Après, pour trouver x en fontion de b et de A, il suffit de remplacer les chiffres par x_1, x_2. et on fait la matrice échelonnée avec A et b pour les déterminer. Pour répondre à la troisème question, il suffit de regarder le résultat de la matrice échelonnée.

Il faut voir si le pivot de la matrice échelonneé réduite faite avec la matrice A et v (on remplace le b par v, ce qui signifie que l'on cherche à savoir si v est une solution) est dans la dernière colonne. Si c'est le cas, le system n'est pas compatible et le vecteur v n'est pas dans l'image de T.

exemples On va essayer d'écrire la matrice qui correspond à la projection de manière géométrique:

/home/logeek04/Documents/etude/algebre/schema6.jpg

Porjection T:$R^3 \rightarrow R^2$

On va essayer d'écrire la matrice qui correspond à cette application:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi regarder la projection sur une applcation dans R^3. A ce moment là, la matrice nous donne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

/home/logeek04/Documents/etude/algebre/schem7.jpg

tranvection On garde la distance du dessus, mais on lui fait faire une translation.
Dans cet exemple, notre matrice A sera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec cette transvection super cool, tout l'espace se décale et on peut le voir avec d'autres ploint de l'espace. Nous le réutiliserons par la suite. Elle transforme les vecteurs de cette manière:

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rotation on peut aussi exprimer la rotation d'un vecteur avec les matrices:

/home/logeek04/Documents/etude/algebre/schema8.jpg

La matrice A sera:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permettra de faire une rotation de 90^0. c'est pire chouette hein? Tu veux savoir comment on exprime les vecteurs?non? je te le dis quand même:

$$A = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Pour un angle qui n'est pas 90^0 on va écrire les coordonnées différemment: $(cos\theta, sin\theta)$. On une matrice qui nous transforme tout les veteurs et nous permet de les écrire des vecteurs sous cette forme.

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice il suffit de remplacer θ par notre angle en radian.

Homothéthie C'est une trsansformation de R^2 dans R^2. Cette opération consiste juste à faire une dilatation ou une contraction du vecteur...: `/home/logeek04/Documents/etude/algebr`

Si $r < 1$ on a ce que l'on apelle une contraction et si $r > 1$ on a une dilatation. On peut voir que la transformation du plusieurs vecteur par l'application homotétie, on obtient des formes qui restent similaires.
Nous donnons en passant comme ça sans raison les condition pour qu'une applicatino soit linéaire:

1. T(u+v) ?T(u)+T(v) $\forall u, v \in R^n$
2. T(cu)=cT(u) $\forall c \in R, u \in R^n$

Reprenons notre exemple...ou pas...

reflexion Une reflexion c'est simplement une symétrie d'axe. `/home/logeek04/Documents/etude/algebre`
ici, c'est facile la matrice A sera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mais nous pouvons faire également unee réflexion par rapport à l'autre axee ce qui nous donne pour matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mais on peut aussi avoir des double reflexion :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dilatation Une dilatation nous fait faire: `/home/logeek04/Documents/etude/algebre/schema11.jpg` Par contre à toi de trouver la matrice A, elle ne nous a pas été donnée...

5.5 injectivité et surjectivité

application injective:
si tou vecteur $v \in R^m$ est l'image d'au plus un vecteur de R^n

application surjective:
si tous les vecteurs $v \in R^m$ sont l'image d'au moins un vecteur de R^n

application bijective:
si tout vecteur $v \in R^m$ est l'image d'exactement un vecteur de R^n

théorème Soit:$T : R^n \to R^m$ une application linéaire associée à A. Alors T est surjective sssi les colonnes de A engendrent R^n. Et T est injectif sssi les colonnes de A sont linéairement indépendantes
preuve:
1
$\forall b \in R^m, \exists x/T(x) = b$
$\Rightarrow Ax = b$
A=

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Alors b= $x_1 a_1 + ... + x_n a_n$
2
$\Rightarrow$T est injectif ce qui implique de Ax=0 et x=0.alors $\exists(x_1, ..., x_n) \neq (0, ..., 0)/x_1 a_1 + ... + x_n a_n = 0$.
$\Longleftarrow$Si les colonnes sont indépendantes c aveut dire: $x_1 a_1 + ... + x_n a_n = 0$ tel que cette équation a la solution triviale comme la seule solution Ax=0.

6 matrices

Attention à la notation, il faut s'y habituer.

6.1 opérations matricielles

A(mxn)(m lignes et n colonnes)=

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

les éléments de la diagonales sont toujours noté a_{ii}

6.1.1 addition

A+B en prends la sommes des les éléments de A et de B: $A + B = (a_{ij} + bij)_{i=1,j=1}$

6.1.2 multiplication

On parle de multiplication avec un scalaire. On multiplie tous les éléments de la matrice, c'est comme faire la mutiplicaton d'un vecteur par un scalaire si tu vois ce que je veux dire...;)

6.1.3 propriétés

- A+B=B+A(commutativité)
- (A+B)+C=A+(B+C)(associativité)
- A+0=A(élément neutre)
- r(A+B)=(rA+rB)(distributivité)
- (r+s)A=rA+sA
- r(sA)=(rs)A

6.1.4 multiplication matricielle

$A_{(m,n)}, B_{(n,r)}$ A prendre comme une application linéaire.
Si on prends A(Bx), $x \in R^r = A(x_1b_1 + x_2b_2 + ... + x_rb_r)$, ou $B = [b_1, ..., b_r]$
$= x_1Ab_1|x_2Ab_2|x_3Ab_3|...|x_rAb_r$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

On multiplie les élémentde de la ième ligne avec ceux de la ième colonne. $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b2j + ... + a_{in}b_{nj}$
Attention: AB≠BA

théorème SOit A(mxn) et B(nxr)
soit I_m la matrice identité (avec que des 1 dans la diagonale)

- A(BC)=(AB)C/C est rxk (pour le voir il faut penser en terme de composition d'application linéaires T.T, ou alors tu use de la formule du haut)
- A(B+C)=AB+AC/C est nxr(distributivité)
- (B+C)A=BA+CA/B,C mxn,A est nxr
- $r \in Rr(AB) = (rA)B = A(rB)$
- A mxn,$I_m, I_n/I_nA = A = I_mA$

6.2 puissance d'une matrice

Soit A nxm $A^0 = I_n$ et $a^n = A^{n-1} \cdot A$

6.3 transposée d'une matrice

$A = (a_{ij})_{m,i=1/n,j=1}$ A^T est la matrice mxn dont la ième ligne est la ième colonne de A.
A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(rA)^T = rA^T$
- A mxn B nx: $(AB)^T = B^T A^T$(attention au changement de sens)

6.4 inverse d'une matrice

On dit qu'une matrice A de type nxn est inversible s'il existe une matrice C du type nxn tel que CA=I_n=AC

théorème Soit A une matrice 2x2 A=

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ou ad-bc≠0
Alors A ests inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Pour vérifier il suffit de multiplier A et C
si le déterminant de A n'est pas égal a 0 A est inversible
Si det(A)=0 alors on dit que A est singulière.

algo pour l'inverse d'une matrice Soit A une matrice nxn
Soit $b \in R^n$
Ax=b on supppose que A est inversible $A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$ alors:$x = A^{-1}b$

6.4.1 méthode pour une matrice nxn

propriétés:

- si A est inversible: $A^{-1} alors : (A^{-1})^{-1}$
- AB(avec A et B inversible):$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

algorithme d'inversion

1. Echange des lignes
2. Multiplication par un scalaire
3. Remplacement

Peut-on écrire ces opération sous forme matricielle/A'=EA(avec A' la matrice optenue après l'opération choisie(échange, Multiplication, remplacement)
Matrice de trasformation pour l'échange des deux premières ligne d'une matrice 3x3(si tu voit pas ce qu'elle fait prends une matric 3x3 quelconque et fait la multiplicaiton avec cette matrice):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la multiplication par un scalaire r pour une matrice 3x3(première ligne):

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour le remplacement de la dernière ligne avec r fois la première:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nous notons que le matrices élémentaires(celles du dessus dans cette section) sont toutes inversibles:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -r & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inversion A est inversible sssi la forme réduite échelonnée de A est la matrice identité. La méthode de Gausse nous permet donc de trouver la matrice identité. Si A est inversible $I_n = E_r ... E_2 E_1 A$. On peut exprimer l'identité comme un produit des matrices élémentaires. C'est une facon super cool d'écire la méthode de Gauss.
On peut donc dire que:
$\Rightarrow A^{-1} = E_r E_{r-1} ... E_1 I_n$ A noter que si l'on obtient pas l'identité à gauche, la matrice n'est pas inversible.

ce qui implique La méthode de Gauss sur $[A|I_n]$ nous permettra de calculer a^{-1}

exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sous forme échelonnée nous donne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne la matrice A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6.4.2 caractérisation des Matrices Inversibles

Les propriétés suivantes sont équivalentes(elles sont soit toutes vraies, soit toutees fausses):

1. A inversible
2. A est équivalente selon les ligne de I_n.
3. A admet n positions de pivots
4. Ax=0 n'admet que la solution triviale
5. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes
6. L'application linéaire $x \rightarrow Ax$ est injective
7. $\forall b \in R^n, Ax = b$ admet au moins une solution
8. les colonnes de A engendrentR^n
9. L'applicaiton $x \rightarrow Ax$ est surjective
10. Il existe C(nxn)/CA=I_n
11. Il existe D(nxn)/AD=I_n
12. A^T est inversible

6.4.3 les application linéaires inversibles

application de R^n dans R^n est inversible:

il existe une applicaiton linéaire de R^n dans $R^n / S(T(x)) = x \forall x \in R$ et $T(S(x)) = x \forall x \in R^n$

théorème T est inversible sssi la matrice A de T est inversible. Si T est inversible, alors S:$R^n \mapsto R^n$ est $S(x) = A^{-1}x$
La preuve ne sera pas complète mais on peut le vérifier e nsupposant que la matrice A est inversible:
$\exists A^{-1} \Rightarrow S(s) := A^{-1}x$
T(s(x))=$A(A^{-1}x) = (AA^{-1})x = x$
S(T(x))=$Ax(A^{-1}) = (AA^{-1})x = x$
ON vient de prouver l'existance de S.

Soit A = T et B la matrice associée à la matrice S
$ABx = x = BAx \forall x \in R^n$ tu as manque un bout du cours mais tu as le livre pour rechercher les infos

7 factorisation LU

début à voir dans le livre.
U=L'A
A=LU
sachant que U est la matrice écholonnée de A et L une matrice contenant toutes les opérations de remplacement. L étant l'inverse da la matrice des produit que l'on a fait pour obtenir les opérations de la matrice échelonnée.
Comment calculer L sachant que U=$(E_rE_{r-1}...E_1)A \Rightarrow A = (E_rE_{r-1}...E_1)^{-1}U = e_r^{-1}E_{r-1}^{-1}...E_1U$

exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est l'opération qui permet de multiplier par 2 la première colonne et de l'ajouter à la deuxieme ligne. Après, quand on a toutes les E_k il nous suffit de les inverser unes par unes(en gros inverser le signe du 2 dans la matrice de l'exemple)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après l'inversion on multiplie tous les E_k^{-1} entre eux(multiplication matricielle termes à termes) On trouve L.
il nous suffit d'inverser L pour trouver L'.

astuce Pour trouver la matrice L sans perdre trop de temps. En effet, pour trouver L, il suffit de prendre la colone de pivot dans la forme échelonnées et de la diviser pour trouver 1 dans le pivot puis tu rajoute ce qu'il y a sous le pivot dans la matrice L.

j'imagine ton mindfuck quand tu lis cette phrase A(nxn)dense($\neq 0$) trouve moi A^{-1}
$2n^3$ pour $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$ et ca c'est cher.

A=LU avec la technique du dessus on fait:$\frac{2}{3}n^3$ ce qui nous permet d'éviter un tiers des opérations.

remarque Si A est creuse, nous pouvons beaucoup gagner en terme d'efficacité des algorithmes. Si nous calculons A^{-1} nous nous rendons compte que cette dernière n'est pas creuse. Dans le cas de LU(avec U creuse), décomposition casr plus rapide de caculer LU.

7.0.1 exemple

Soit A une matrice nxn, triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont non nuls.

à démontrer A est une matrice inversible et l'inverse de A est triangulaire inférieure.

exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

preuve

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ * & d_2 & 0 \\ * & * & d_3 \end{pmatrix}$$

$d_, ..d_n \neq 0$
A est inversible $\Leftrightarrow$ A possède n pivots. On utilise que des opérations de remplacement et de multiplicaiton scalaire.
$[A|I] \equiv ... \equiv [I|A^{-1}]$
ces opéraitons appliquées à la matrice I_n alors $A{-}1$ est triangulare inférieure.

$$[A|I] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv ... \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.0.2 factorisation QR(autre exemple)

Supposons que A=QR avec:

- R est inversible et triangulaire supérieure
- Q satisfait $Q^TQ = I$

exemple de Q:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'on a Ax=b

1. la matrice A est-elle inversible?

2. comment peut-on trouver les solutions?

Q(Rx)=b$\Leftrightarrow Rx = q^{-1}b = Q^Tb$
dans ce cas, l'inversion de R n'est pas obligatoire. En effet, il nous suffit de poser et de calculer $y = Q^Tb$.
Alors on a Rx=y

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix} = y = \begin{pmatrix} y_1 & .. & y_n \end{pmatrix}$$

car R est inversible et Q est inversible.

A=QR est inversible $A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}$
Ce qui implique qu'il existe seulement une seule solution pour Ax=b.

exemple numérique

$$\begin{pmatrix} cos\theta & cos\theta - sin\theta \\ sin\theta & cos\theta + sin\theta \end{pmatrix} Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche x en fonction deθ

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (QR)$$

7.0.3 décomposition des valeurs singulières

$A = UDV^T$, A matrice(nxn)

- U,V sont orthogonales,$U^TU = I = V^TV$
- D est diagonale dont les éléments diagonaux sont > 0

problème Montrer que A est inversible et trouver A^{-1} en utilisant la factorisastion inverse. A^{-1} les trois matrices D,U,V sont inversibles (D étant diagonale, elle est aussi inversible).
Ainsi; $A^{-1} = (UDV^T) = VD^{-1}U^T$

7.1 sous-espace vecrotiels de R^n

sous-espace vectoriel de R^n:
sous-ensemble $V \subset R^n$ satisfaisant les propriétées suivantes

1. $O \in V$
2. $\forall u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$
3. $\forall u \in Vetc \subset R \Rightarrow cu \in V$

7.1.1 image/noyau d'une matrice

soit A une matrice(nxn) et associée à l'application:
$T : R^n \to R^m$

noyau d'une matrice:
: sous-ensemble Ker(A)=$\{x \in R : Ax = 0\}$

image d'une matrice:
: sous-ensemble Im(T)=$\{x \in R^m : \exists \in R^n / T(x) = b\}$

$Si Ker(A) \subset R^n$

- $Ker(a) \in 0$
- $Au = 0 = Av$ car $u + v \in Ker(A)$
- $Au = 0$ car $A(cu) = c(Au) = 0$

$T : R^n \mapsto R^m$
Ker(T) = Ker(A) avec A est la matrice associée à T.
Im(A)=$Vect\{a_1, ..., a_m\}$ ou $A = [a_1...a_m]$

7.1.2 base

Soit $V \subset R^n$ un sous-espace vectoriel

base de V:
: une famille $\{v_1, ..v_r\} \subset V/V = Vect\{v_1, .., v_r\}$ et la famille est linéairement indépendante

exemple $V = R^n$ une base de R^n

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base qui s'appelle la base standard.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est une base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$B\{v_1, v_2\}$ n'est pas une base car linéairement indépendants

7.2 rang et dimentions

Soit $V \subset R^n$un sous-espace vectoriel
Soit B=$\{v_1, ...v_r\}$ une base fixée

- Vect$\{v_1, .., v_r\} = V$ Si $v \in V$
- B est libre $v = c_1 v_i + ... + c_r v_r$ (la combinaison linéaire est unique car c'est une base)
- $c_1, .., c_r$ sont les composantes de v dans la base B

exemple

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} B : v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors les composantes de x qui appartient a B sont:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & | & 3 \\ 6 & 0 & | & 12 \\ 2 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il existe une solution: $c_2 = 3, c_1 = 2$
Ce qui implique

$$x = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.2.1 dimention

$V \subset R^n$ un sous-espace
Si B est une base de V, B=$\{v_1, ..., v_r\}$, on peut démontrer qu'une base quelconque B' de V possède exactement r vecteurs.

dimV=$|B|$
le nombre de vecteur de n'importe quelle base de B est nommé dimention du B.

n, nombre de colones:
dim(Ker(A))+dim(Im(A))(théorème du rang)

rang de A:
la dimention de l'image de A

7.3 déterminants

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a12 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

on a vu que A est inversible $\Leftrightarrow$ det(A):=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
pour que A soit inversible det(a)$\neq 0$

$\triangle \neq 0 \Leftrightarrow$ il y a deux positions de pivots dans une matrice 2x2
Mais nous povons élargire à une matrice 3x3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a12a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & * \\ 0 & 0 & a_{11} \ \triangle \end{pmatrix}$$

$a_{11} \ \triangle \neq 0 \Leftrightarrow \triangle \neq 0$

$$a_{11}() - a_{12}() + a_{13}() = a_{11}det_1 - a_{12}det_2 + a_{13}det_3$$

7.3.1 définiton réccursive du déterminant

soit A une matrice nxn

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_n \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} est la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i-ème ligne et la i-ieme colonne.
$C_{ij} = (-1)^{i+j}det(A_{ij})$
$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + .. = a_{11}det(A_{11} + -... + ... - .. + .(-1)^{n+1}a_{1n}det(A_{1n}$

7.3.2 théorème

A est nxn, $A_{ij} cofacteur, C_{ij} = (-1)^{i+j}det(A_{ij})$
$\forall i$ det(A)=$a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$

7.3.3 déterminant d'une matrice triangulaire

matrice triangulaire suppérieure/inférieure? det(A)=$(-1)^{n+n}a_{nn}det(A_{nn}) = a_{nn}det(A_{nn}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ij}$

7.3.4 propriété du déterminant

comment calculer des déterminants à l'aide de la matrice de Gauss?

1. remplacement: Si on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne, on ne change pas le déterminant
2. échange: on peut mais il faut changer le signe du déterminant à la fin.
3. multiplication: par un scalaire alors il faut multiplier le déterminant par la scalaire

opéraiton sur les colonnes (théorème) Soit A nxn, $A^T, alors\ det(A^T) = det(A)$

produit Si A,B sont nxn, det(AB)=det(A)det(B)

7.3.5 Formule de Cramer

Ax=b ou a est (nxn)

théorème Supposons que det(A)$\neq$ 0,alors la solution unique Ax=b est données par la formule suivante:
$x_i \frac{A_i(b)}{det(A)} \forall i =<, ..., n$ ou $a_i(b)$ est obtenue à partir de A en remplaçant le i-ème colonne par le vecteur b.
$A_i(b) = [a_1, ..., a_{i-1}, [b], a_{i+1}, ..., a_n]$

preuve:
Soit I l amatrice identité nxn $I_i(x)$ une matrice nxn, alors $A_i(x) = [Ae_1 * Ae_2 * Ax * ... * Ae_n]$=

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 ... a_{i-1} b a_{i+1} ... a_n \end{pmatrix}$$

det (A)det($I_i(x)$)=det($A_i(b)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & x_1 & ... \\ ... & 1 & x_2 & ... \\ ... & ... & x_i & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} = x_i$$

x_i det(A)=det($a_i(b)$) ce qui veut dire que $x_i = \frac{det(A_i(b))}{det(A)}$

attention cette méthode est très lente a faire tourner sur un ordi, il faut plutôt la voir comme une solution théorique!;)

exemple

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \tag{19}$$

trouver la solution avec Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A_i(b) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A_2(b) = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

det(A)=-4
det($A_1(b)$)=-12
det($A_2(b)$)=-4
alors $x_1 = \frac{-12}{-4} = 3, x_2 = \frac{-4}{-4} = 1$

inverse de A $A^{-1} = [u_1, u_2, ..., u_n] * A = [Au_1, .., Au_n] = [e_1, ..., e_n]$
$Au_j = e_j, u_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ ... \\ x_{ij} \end{pmatrix}$
alors: $x_{ij} = \frac{des(A_i(e_j))}{det(A)}$

det$(A_i(e_j))$

$A_i(e_j) = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_{i-1} & b & a_{i+1} & ... & a_n \end{pmatrix} avecb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ ... \end{pmatrix}$

det$(A_i(e_j))$=(-1)$^{j+1}det(A_{ij})$: $x_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{desA_{ji}}{detA}$

comm(A)=commatrice de A:
si A est inversible, comm(A)=[$(-1)^{i+j}det(A_{ij})$]

Nous avons ainsi, $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}Comm(A)^T$ méthode pour inverser les matrices

---

7.3.6 déterminants et géométrie

R^2:
cas 1: $a_2 = ca_1(colinearies)$ det(A)=0
cas 2: $a_1 = [a, 0], a_2 0[o, b]$ det(A)=ab

théorème L'aire du parallélogramme formé par a_1, a_2 est $|det(A)|, A = [a_1 a_2]$
On transforme le parallélogramme en rectangle de manière fort astucieuse $A[a_1 a_2]$
$A' = [a_1 a_2']$
det(A)=det(A') parce qu'on a seulement fait une opération de remplacement.

On peut ainsi conclure que la surface du rectangle =$|det(A')| = |det(A)|$

interprétation dans R^3 c'est le volume du parallélépipède rectangle formé par les vecteurs

théorème transformations linéaires aire/volume comment lier aire de D avec l'aire de T(D)
Aire (T(D))=$|det(A)|$ = aire(D)
Nous pouvons faire des exemple très simple mais dont l'aire est difficile à calculer autrement:
elipse:=$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si a=b=1 on a un cercle

7.4 espaces vectoriels, sous-espaces

Nous ne pouvons pas travailler avec des sous espaces de R^n il nous faut voir une fonction comme une combinaison linéaire de fonction splus simple pour lesquelles on peut faire les transformations de Fourrier

- traitement des signaux(sous-espace qi ne sont pas de R^n)
- théorie du contrôle
- procesus stochasitque (détermine le prix d'une option sur un titre)

7.4.1 définitions générales

espace vectoriel:
: un ensemble V qui est non-vide et qui a deux opéraitons qui sont:(adidtion et multiplication par un scalaire)

addition:
: v,w$\in V$ il existe v+w$\in V$

multiplicaiton par un scalaire:
: $v \in R, r \in R$ alors, il existe $rv \in V$

un espace vectoriel satisfait les propriétes suivantes:

1. Si v et w $\in V$ alors $v + w \in V$ (addition vectorielle)
2. u+v = v+u $\forall u, v \in V$ (commutativité)
3. (u+v)+w=u+(v+w) $\forall v, w, u \in v$ (assoociativité)
4. $\exists 0 \in V$ tel que u+0=u $\forall u \in V$ (élément neutre)
5. $\forall u \in V, \exists - u \in V / u + (-u) = 0$ (il existe un inverse)
6. $\forall c \in R, u \in v, cu \in V$ (multiplication par un scalaire)
7. $\forall c \in R, u, v \in V$ $c(u + v) = cu + cv$ (distributivité)
8. $\forall c, d \in R, u \in V$ $(c + d)u = cu + du$ (distributivité)
9. 1u = u $\forall u \in V$ (élément neutre pour la multiplication)

Nous allons voir un exemple de sous-espace vectoriel qui n'est pas sous-espace de R^n:

exemple l'ensemble des suites réelles dounlement unfinies:
$V = \{(..., y_{-1}, y_0, y_1, ...) : y_i \in R \forall i \in Z\}$
C'est un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier (lentment hahaha)
on prend:
$(.., y_{-1}, y_0, y_1, ...)$+$(..., z_{-1}, z_0, z_1, ...)$
tu voyais comment prouver sans problèmes quand tu as écrit ces lignes, tu prends les deux vecteurs en haut et tu les additione/mutiplie sans trop de soucis XD
Attention de ne pas oublier de tout vérifier

exemple les suites réelles infinies
$V = \{(y_1, y_2, ...) : y_i \in R\}$
C'est aussi un espace vectoriel.

exemple Soit P_n avec $n \in N, n \geq 1$
on défini P_n comme un ensemble de polynomes:$\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n : a_0, a_1, ..., a_n \in R\}$
l'addition fonctionne, il y a un élément 0 (le polynome constant nul), multiplication du polynome par un scalaire
par contre si nous avions construit un polynome Q_n avec $a_n \neq 0$ alors on aurait pas eu le polynome nul.

exemple $D \subset R^n$ un domaine
$V = \{f : D \mapsto R :$ f une fonction$\}$
On défnin une addition f,g$\subset V$ h=f+g, h:$D \to R$
$x \in D$, h(x)=f(x)+g(x), l'addition en R est commutatif et associatif
il y a un élément nul: la fonction nulle avec $0 \in R$
l'inverse de la fonction: -f(x)
multiplication par un scalaire: $\forall c \in R, f \in V$ (cf)(x)=cf(x)
distributivité sur R

exemple de fonction $V_{pairs}\{f : R^n \to R, f(x) = f(-x) \forall x \in R\}$ est un espace vectoriel
mais aussi: $V_{impair}\{f : R \to R : f(x) = -f(x), x \in R\}$
(f+g)(-x)=+(f+g)(x)
f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)
Ainsi, v pair/impair sont des sour espaces vectoriels

7.4.2 théorème

Soit V un espace vectoriel et soit $v_1, v_2, ...v_r \in V, alors\ Vect\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ est un sous-espace vectoriel
$Vect\{v_1, ..., v_r\} = \{c_1 v_1 + ... + c_r v_r : c_1, ...; c_r \in R\}$
ce théorème nous permet de construire des sous-espaces vectoriels plus généraux

7.5 notion de noyau et d'espace image: applicaitons linéaires

Prennons un exemple dans le contexte des sous-espaces de R^n

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sous forme écholonnée réduite augmentéé

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ker(A)=$\{x \in R^4 : Ax = 0\}$ sous espace de:R qui est égal à $x_4(-2, 1, 1)$ que l'on calcule avec la matrice échelonnée réduite augmentéé avec le vecteur 0 à la fin.
Im(A)=$Vect\{a_1, ..., a_4\}$ sous espace de: R^3 qui est égaleaux colonne de pivot de la matrice échelonné réduite:(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)

exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

nous cherchons ker(A): $\in R^2 : (-2,1,0,1,1),(1,0,1,0,0)$ qui est sous-espce de R^5
espace image:(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) qui est sous-espace de R^4
nous pouvons voir que l'application n'est pas surjective car nous ne pouvons pas engendrer R^4 avec l'espace image: comment engendrer le vecteur:(0,0,0,1)?

7.6 applications linéaires

Nous allons oublier les matrice et utiliser que des applications linéaires.
Soit V,W deux applications linéaires

application linéaire $T : V \mapsto W$ si les propriétés sont respectées

- $\forall v, w \in V, T(v+w) = T(v) + T(w)$
- $\forall c \subset R, v \in V, T(cv) = cT(v)$

noyau, Ker(T):
$v \in V, T(v) = 0$

image, Im(T):
$w \in w/\exists v \in v/T(v)0w$

théorème très facile mais néanmoins important Ker(T) et Im(T) sont sous-espaces vectoriels respectivement de V et W.
Si v,w∈Ker(T)⇒ T(v+w)=T(v)+T(w)=0
$\Rightarrow v+w \in Ker(T9, T(cV) = cT(v)$
Si w',w" $\in Im(T)$ alors $\exists v', v''/T(v') = w'$ et $T(v'') = w''$
w'+w"=T(v')+T(v")=T(v'+v")
nous venous de prouver qu'ils sont sous-espaces vectoriels

exemple V espace des fonctions f:$[a,b] \to R$ qui sont des fonctions dérivables et continuement dérivables
W l'espace des fonctions g:$[a,b] \to R$ continues
Soit $V \to W$ D(f)=f'

théorème D est une application linéaire et Ker(D)= les fonctions constantes

preuve $\forall f, g \in VD(f+g) = D(f) + D(g)$ vrai car (f+g)'= f'+g'
$\forall c \in R, f \in V$ D(cf)=cD(f),(cf)'=cf'

Kef(D)= les fonctions constantes

7.7 les familles Libres, Bases

7.7.1 Familles libres

f=$\{v_1, ..., v_r\}$ est libre si:
$c_1v_1 + ... + c_rv_r = 0 \Rightarrow c_1 = ... = c_r = 0$

exemple F={sint(t), cos(t)} sin,cos:$R \to R$
Supposons que la famille F soit liée:
$\exists (c_1, c_2) \neq (0,0)/c_1sin(t) + c_2cos(t) = 0$

- si $c_1 \neq 0$ t=$\frac{pi}{2} \Rightarrow c_1sin(\frac{pi}{2}) + c_2cos(\frac{pi}{2}) = c_1 \neq 0$
- si $c_2 \neq 0$ t=0$\Rightarrow c_1sin(0) + c_2sin(0) = c_2 \neq 0$

Nous voyons la contradiction

exemple F={cos(2t),$\frac{1}{2}(cos^2(t) - sin^2(t))$}
après développement nous pouvons voir que f(t)-2g(t)=0

7.7.2 base

une base:
Si V est un espace vectoriel, une famille F$\{v_1, ..., v_r\}$ est une base de V si F est libre et si V = à la parite engendrée par F(V=Vest{F})

exemple $P_n = \{a_0 + a_1t + ... + a_nt^n; a_0, ..., a_N \in R\}$
B=$\{1 + t + t^2 + .. + t^n\}$

théorème de la base extraite Soit $V \subset R^n$ un sous-espace vectoriel et soit F=$\{v_1, ..., v_r\}$ une famille génératrice, alors V=Vect$\{v_1, .., v_r\}$
Alors il existe un sous-ensemble F'$\subset$ F qui est une base

bases de Ker(A),Im(A), exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Il nous faut trouver une base our Im(A)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im(A)=(1,0,0),(0,1,0) qui est aussi la base.

7.7.3 système de coordonnée

Supposons que v est une espace et B$\{b_1, ..., b_n\}$ une base
$x \in V, \exists c_1, c_2, .., c_r \in R/x = c_1v_1 + ... + c_rv_r$

théorème $c_1, c_2, ..., c_r \in R$ sont uniques

preuve Supposons que l'on puisse écrire x de deux manières:$c_1b_+ ... + c_rb_r = x = d_1b_1 + ... + d_rb_r$
$\Rightarrow (c_1 - d_1)b_+ ... + (c_r - d_r)b_= 0$
Par définition, la base est libre donc $c_1 = d_1, ..., c_r = d_r$
Par rapport à une base, nous avons les coordonnées d'un vecteur que l'on note $[x]_b = [c_1, ..., c_r]$

7.7.4 matrice de passage(changement de base)

Cette matrice sert à transformer les vercteurs d'une base pour qu'ils soient exprimés selon une autre base

remarque sur l'image d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Im(A)=Vect(1,0,0),(2,1,-2) attention, ce sont les colones de pivot qui nous donnent les colones qui engendrent l'espace image, mais ce ne sont pas les colones réduites qui engendrent

erreur que tu aurais faite il faut prendre les colones correspondantes à la matrice de pivot mais dans la matrice originale

exemple P_3=$\{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3\} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$
$B = \{1, t, t^2, t^3\}$
$P_3 \mapsto R^4$
$p(t) \in P_3$
$p \mapsto [p]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in R^4$

si on prend comme exemple $\{1 + t^2, 2 + t + 3t^2, 3 + 2t\}$
la famille est:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la famille est libre car toutes les colonnes sont des colones de pivot

7.8 dimention d'un espace vectoriel

théorème Supposons qu'un espace vectoriel vect,V admet une base B=$\{b_1, .., b_n\}$. Alors toute famille de vecteurs de V contenant plus que n vecteurs est liée
preuve:
supposons que f= $\{u_1, ..., u_r\}$ où $r > n$
$c_1u_1 + ... + c_ru_r = 0$
$u_1 \mapsto [u_1]_B \in R^n$
$[c_1u_1 + ... + c_ru_r]_B = c_1[u_1]_B + ... + c_r[u_r]_B$
comme nous pouvons le voir quand nous faisons la matrice qui est nXr or, r est plus grand donc nous ne pourron pas obtenir des pivots dans toutes les colones,

théorème 2 Si V admet une base B de n éléments, alors toutes les base de V contiennent exactement n éléments
démonstration:
Soit B' une base quelconque
Si $|B'| > |B|$, le théorème précédent implique que B' est liée
ce qui implique que $|B'| \leq |B|$ mais dans ce cas, selon le thm précédent, la famille B est liée
donc: $|B| = |B'|$

7.9 définiton

Soit V un espace vectoriel. S'il exste une famille gélératrice finie de V, on dit que V est de dimention finie. Alors la dimension de V est donnée par le nombre d'élément d'une base quelconque de V.
S'il n'y a pas de telle famille, nous disons que V est de dimension infinie.

exemple l'espace P_n
$dim(P_n)$= n+1

7.9.1 théorème de la base incomplète

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et soit $H \subset V$
Toute famille libre de vecteurs de H peut-être complétée en une base de H.
Alors H est aussi de dimension finie et la dim(H) $\leq$ dim(V)

preuve $F = \{u_1, ..., u_r\}$ une famille libre de H
Si F n'est pas génératrice, (Vect$\{u_1, ..., u_r\} \subsetneq H)$
Alors il existe $u_{r+1} < inH$, mais $u_{r+1} \ni Vect\{u_1, ..., u_r\}$
Si nous considérons la famille $F'\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}\}$. Cette famille est libre
Et après on continue. En gros, après on ajoute jusqu'à arriver au moment que l'espace = H
le processus arrive à son terme quand V est de dimension finie

7.9.2 deux caractéristique des bases

fait 1 Toute famille libre de V qui contient n vecteurs est une base
F est libre de n vect alors il existe une base B de V qui contient $F \subset B \Rightarrow F = B$

fait 2 Toute famille F génératrice de V avec $|F| = n$ forment une base. Grace au théorème de la base extraite($\exists B \subset F \Rightarrow F = B$)

7.9.3 qq petits, tout petits thms

théorème(dimension du noyau) On exprime le noyau en fonction des inconnues non-principales, il est agal au nombre de colones non principale

théorème(image) L'image est de dimension = au nombre de colones principales

définition le rang d'une matrice est égal à la dimension de l'espace image

définitions l'espace LgnA est l'espace engendré par les lignes de A qui sont non nulle dans la matrice échelonnées(pas réduite)

thm dim Im(A)= dim Lgn(A)
mais Lgn(A) est le nombre de lignes non nulle qui est toutjours exactement le nombre de pivots

7.10 thm du rang

nous rapellons la défintion du rang d'une matrice A que nous pouvons mnt définir avec la notion de dimension:

rang d'une matrice:
c'est la dimension de Im(A)

théorème Soit A une matrice mxn

1. rang(A)=dim(Lgn(A))
2. dim(Ker(A))+rang(A)= n (le nombre de colonnes)

Preuve:

1 prenons une matrice échelonnée...
nous savons que dim(A)=# de lignes de pivot=#pivots de la matrice
On a calculé une base de Lgn(A) dim(Lgn(A))=#nombre des lignes de pivot=#nombre de pivots
On en déduit que rang A = dim(A)=Lgn(A)

2 Ker(A)=#colonnes non-principales et rang(A)=#colonnes de pivot/colonnes principale.

exemple

$$A=\begin{pmatrix}1&4&0&2&-1\\3&12&1&5&5\\2&8&1&3&2\\5&20&2&8&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&0&2&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Im(A)=une base est B={[1,3,2,5],[0,1,1,2],[-1,5,2,8]}
dim(Im(A))=3

Lgn(A)=une base est donnée par B={[1,4,0,2,0],[0,0,1,-1,0],[0,0,0,0,1]}
dim(Lgn(A))=3

ker(A), Ax=0,

$$\begin{aligned}x_1&=-4x_2-2x_4\\x_3&=x_4\\x_5&=0\end{aligned}\tag{20}$$

Ker(A)=$x_2[-4,1,0,0,0]+x_4[-2,0,1,1,0]$
Ainsi nous avons une base pour le noyau B={[-4,1,0,0,0],[-2,0,1,1,0]}
dim(Ker(A))=2
3+2=5(nous venons de vérifier le thm par un exemple)

Question Supposons que A soit une matrice 3x6, La dimension Ker(A), peut-être 2?
Si nous supposons que la dimention de Ker(A)=2
dim(Ker(A))+rang(a)=6: alors rang(A)=4
$dim(Lgn(A))\leq 3$ car la matrice est engendrée par 3 vecteurs.
alors l'affirmation est fausse car $rang(A)\leq 3$

autre question Pouvez-vous avoir dim(Ker(A))=3 pour une matrice 3x6

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

dim(Ker(A))=3
dim(Im(A))=3
=dim(Lgn(A))=rang(A)

7.11 théorème

A est une matrice nxn avec les propriétés suivantes équavalentes:

1. Les colonnes de A forment une base de R^n
2. Les lignes de A forment un base de R^n
3. L'image de A=n
4. rang(A)=n

5. dim(Ker(A)=0
6. Ker(A)={0}

ssi A est inversible bien sûr

exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Ker(A)=R^n $\Leftrightarrow$ dim(Ker(A))=n
dim(Im(A))=0 $\Rightarrow$ Im(a)={0}$\Rightarrow$rang(A)=0

7.12 changement de base

V un espace vectoriel de dimension m qui est fini
$V \to R^n$ $x \in V \to [x]_B$
Supposons que C est une autre base.(définition du vecteur: élément d0un espace vectoriel)
on cherche une transformation de $[x]_b$ dans $[x]_C$

exemple Soit B={b_1, b_2} et C={c_1, c_2} de R^2
Soit V un espace de dimension V=2
soit B,C des bases de V

- $b_1 = 3c_1 + c_2$
- $b_2 = -c_1 + c_2$

$x \in V, x = 2b_1 + b_2$
$[x]_B = [2, 1]$
$[x]_C = [2b_1 + b_2] = 2[b_1]_C + [b_2]_C = [[b_1]_C[b_2]_c][2, 1]$ avec $[[b_1]_C[b_2]_c]$ la matrice de passage qui nous permet de passer de B à C (on écrit $B \leftarrow C$)
Dans notre cas la marice de passage est

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7.12.1 théorème

soit B={$b_1, .., b_n$} et C={$c_1, .., c_n$} deux bases d'un espace vectoriel V, dim(V)=n
Il existe une matrice unique $(C \leftarrow B)$P tel que $[x]_C = P[x]_B$
La matrice $P_{C \leftarrow B} = [[b_1]_C[b_2]_C...[b_n]_C]$

l a matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B par rapport à la base C

à noter $P_{C \longleftarrow B}$ est inversible nous pouvons écrire: $[b_i]_B = P_{C \longleftarrow B}[b_i]_C$ $\forall i = 1, 2, ..., n$
Nous pouvons voitr que $P_{B \longleftarrow C} = P^{-1}_{C \longleftarrow B}$

demonstration du thm $x \in B \to [x]_B$ $x = u_1 b_1 + ... + u_n b_n$
$\downarrow$
$[x]_C$ sachant que $[x]_C$=$v_1[b_1]_C + ... + u_n[b_n]_C$
$P_{C \leftarrow B} = [b_1]C...[b_n]_C * [u_1..u_n](= [x]_B)$

7.12.2 changments de base dans R^n

$P_{\varepsilon \leftarrow B} = [b_1...b_n]$
Soit ε= la base canonique ={[1,0,....],[0,1,....],...,[...,0,1]}
Si tu as des pbs dans les exercices regrarde dans le livre il y a pleins d'exemples

8 valeur ropres et vecteurs propres

le but est de comprendre une application en la décomposant en partie plus simples

valeur propre:
si l'applicaiton matricielle $Ax = \lambda x$ possède un solution non triviale, avec λ une valeur propre

exemple

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v$$

on peut alors dire que Ax=2x

exemple $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

probleme: trouver $x \in R^2 / Ax = 3x$
nosu faisons comme cela: Ax-3x=0
(A-1I)x=0
ce qui nous donne:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous dit que $x_1 + x_2 = 0$

$$x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

exemple $\lambda = 5$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$ est-elle une valeur propre?
Ax=5x

8A-5I)x=0

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -5 & 5 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

avec la forme échelonnée, que la valeur 5 n'est pas une valeur propre car x=0(solution triviale)

8.0.1 vecteurs propres

vecteur propre:
un vecteur x tel que $Ax = \lambda x$ est un vecteur propre pour λ

remarque les vecteurs propres correspondants à une valeur propre donnée, forment un sous-espace vectoriel

8.0.2 théorème

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coéficients de sa diagonale principale
Nous venons de prouver au tableau pour la matrice diagonale (tu peux le voir en prenant une matrice avec des a_{nn} dans la diago)

cas général A est inversible $\Leftrightarrow \lambda = 0$ n'est pas une valeur propre

preuve $\lambda = 0$ une valeur propre $\Leftrightarrow \exists x \neq 0 / Ax = 0, Ker(A) \neq 0 \Leftrightarrow An'estpasinversible$

8.0.3 théorème

Soit A nxn
$v_1, .., v_r$ vecteur propre de valeur propre $\lambda_1, ..., \lambda_r$ distincttes $\Rightarrow$ F=$\{v_1, .., v_r\}$ est libre

preuve supposons le contraire:
Il existe $v_i = c_1v_1 + ... + cv_{i-1}$ et que 2 est minimale
alors: $\{v_1, ..., v_{i-1}\}$ est libre
$Av_i = c_1Av_1 + ... + c_{i-1}Av_{i-1} = \lambda_1c_1v_1 + ... + \lambda_1c_{i-1}v_{i-1}$
$c_1(\lambda_i - \lambda_1)v_1 + ... + c_i(\lambda_i - \lambda_{i-1})v_{i-1} = 0$
au moins un $c_1(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0)$ ce qui est, un énnorme contradiction.

8.0.4 calcul des valeurs propres

exemple A=

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

on cherche les valeurs propres
on cherche $\lambda / (A - \lambda I)x = 0$ a une solution non-triviale
λ est une valeur propre ssi B$(A - \lambda I)$ est non-inversible ssi det(B)=0

o n va extraire une équation pour exprimer les différents λ

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

det(B)=0$\Leftrightarrow$ $\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$ on trouve $\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = 3$

en général, théorème λ est une valeur propre de A si et seulement si ($Ax = \lambda x$ a une solution non-triviale) det($A - \lambda I$)=0

8.1 exemple pour équation caractéristque

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calculer l'équation caractéristique
$A - \lambda I$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

det($A - \lambda I$)=$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$
les valeurs propres sont:3,2,-1(multiplicité 2)

8.2 notion de matrices semblables

A et B semblables(nxn):
s'il existe une matrice P(nxn) inversible telle que $B = P^{-1}AP$

théorème Si A et B sont semblables, alors elles ont le même polynome caractéristique.

8.2.1 Vecteurs propres et applications linéaires

t:$V(R^n) \to W(R^m)$ une application linéaire A=$P \cdot D \cdot P^{-1}$
B une base de V
C une base de l'espace d'arrivée

- $[x]_B$
- $[T(x)]_C$

x=$r_1 b_1 + r_2 b_2 + ... + r_n b_n$ o uB$\{b_1, ..., b_n\}$
T(x)=$r_1 T(B_1) + ... + r_n T(b_n) \in W$

On calcule $[T(x)]_C = r_1[T(b_1)]_C + ... + r_n[T(b_n)]_C = M[x]_B$
ou

$$M = [[T(b_1)]_C ... [T(b_n)]_C]$$

8.2.2 exemple

Supposons T: $V \to W$
dim V=2, B=$\{b_1, b_2\}$
dim W=3, C=$\{c_1, c_2, c_3\}$
$T(b_1) = 2c_1 - c_3 + 3c_3$
$T(b_2) = c_1 + c_2 - 2c_3$
alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

8.3 endomorphismes d'un espace vectoriel

W=V: T:$V \to V, \forall x \in V$
e=B
$[T(x)]_B = [T]_B[x]_B$
avec [T] une matrice nxn

exemple $P_3 \to P_3$ f(x)=$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \to 2a_2 + 6a_3x$=f"(x)
On a les bases standart de P_2 et P_3 $\{1, t, t^2\}$ et $\{1, t, t^2, t^3\}$
$[D(f)]_{B2} = [D]_{B2}[f]_{B2}$

- D(1)=0
- D(t)=1
- D(t)=2t

$$[D]_{B2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour trouver la matrice on fait:

$$D(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on le fait avec tous les éléments de la base B

8.3.1 endomorphismes de R^n

théorème Supposons que A soit nxn siagonalisable tel que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$
Alors si B est la base donnée par les colonnes de P alors (la matrice de A au cas ou tu serais trop con pour savoir la notation)$[A]_B = D$
$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, P = [b_1, ..., b_n]$
$[A]_B = D, [T]_B = [[T(b_1)]_B ... [T(b_n)]_B] = [[Ab_1]_B ... [Ab_n]_B]$
$PD = AP = [Ab_1 ... ab_n]$

question les colones de PD dans la base B?

réponse les colonnes de PD:$[PD]_B = [diagonale(x_1, ..., x_n)]$ car P^{-1} est la matrice de passage
$x \rightarrow Ax$
$\downarrow (P^{-1}) \uparrow (P)$
$[x]_B \rightarrow (D)[Ax]_B$

exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

polynome caractéristique: $P_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -9 \\ 4 & -8-\lambda \end{pmatrix}$
$= (\lambda - 4)(\lambda - 8) + 36 = ...$
$\lambda = -2$ est une valeur propre de multi. =2

$$A + 2I \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

si nous calculons le noyau de l'application $Ker(A + 2I) = Vect\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}$
nous voyons que la matrice n'est pas diagonalisable, mais nous voulons donner à la matrice une forme suffisement simple/proche d'une diagonale...
la question est: comment l'obtenir?

il faut calculer le $Ker((A + 2I)^2)$:

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le $Ker(A + 2I)^2 = R^2$
$Ker(A + 2I) = Vect\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\} \subset Ker(A + 2I)^2$
Il faut compléter la base 3,2 à un base de R^2
$b_1 = [3, 2], b_2 = [2, 1]$ une base de $Ker(A + 2I)^2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{-1}AP = [T]_B$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

nous avons choisi b_1 pour que la forme soit plus jolie et plus facile à utilise dans les calculs
nous appelons cette matrice: la forme canonique de Jordan

8.3.2 nouvel exemple

p(x)=x^2+4 pas factorisablle sur R

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4$$

sur C: $\lambda^2 + 4 = 0 : \lambda = + - 2i$
Ker(A+-2iI)=

$$Ker(\begin{pmatrix} + - 2i & -2 \\ 2 & + - 2i \end{pmatrix})$$

Nous allons faire les calculs

$$Ker \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix}$$

après élimination de Gauss;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Vect_C\{i, 1\}$ sur C

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ 2 \end{pmatrix} = -2i(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

exemple

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sim\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

polynome caractéristique:
$P_A(\lambda) = det[A] - \lambda I = \lambda^2 - 2cos\theta\lambda + 1$
$\theta \neq pi \cdot n$ alors les racines sont complexes mais pas réelles
$\lambda_{1,2} = cos\theta + -isin\theta$

O n est interessé par la compréhention de l'action d'une matrice A 2x2 sont les racines sont complexes.

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} a, b \in R$$

det A=$a^2 + b^2$
det A=0$\Leftrightarrow a = b = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} a = 0, b = 2$$

le polynome caractéristique est: $P_A(\lambda) = (\lambda - a)^2 + b^2$ (nous pouvons voir qu'il y a un lien avec la matrice de rotation mais on ne voit pas bien quoi)
$\lambda_{1,2} = a + -ib = r(cos\theta + -isin\theta)$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$ $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

8.3.3 Action d'une matrice 2x2 dont les racines du polynome caractéristique sont complèxes

exemple

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.15 & 1.1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = o.8 + -0.6i : (0.5-\lambda)(\lambda - 1.1) + 0.75 \cdot 0.6$
$= \lambda^2 - 1.6\lambda + 1$
nous allons assayer de calculer le vecteur propre correspondant, dans ce cas nous devons faire une observation: l'une des valeur propre est le conjugué de l'autre (c'est logique car le +- i ;))
$Av = \lambda v, \lambda \in C, A$ une matrice dont les éléments sont réels
$(Av)bar = A \cdot (v)bar$
$(\lambda v)bar = (\lambda)bar(v)bar$
nous avons comme vecteur propre: $(\lambda)bar(v)bar$ comme vecteur propres

c alcul du'un vecteur propre pour $\lambda = 0.8 + -0.6i$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.5-(0.8+i\cdot 0.6) & -0.6 \\ 0.75 & 1.1(0.8+i\cdot 0.6) \end{pmatrix}$$

$Ker(a - \lambda I)$

$$\begin{pmatrix} 0.45 & 0.18-0.36i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-2-4i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$0.45x_1 + (0.18 - 0.36i)x_2 = 0$
$x_1 = \frac{-2-4i}{5}x_2$

o n sait que $v_2 = [\frac{-2-4i}{5}, 1]$ est un vecteur propre pour $\lambda_2 = 0.8 - i \cdot 0.6$
P=$[Re(v_1)Im(v_1)] = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
On va calculer $P^{-1}AP$

Q =$[v_1(v_1)bar]$ $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

8.3.4 théorème

Soit A une matrice nxn. Supposons que $\{v_1, ..., v_n\}$ soit une matrice libre de vecteurs propres de A dont les vecteurs propres sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors la matrice $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & ... \\ ... & ... & \\ ... & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$

preuve AP=$A[v_1...v_n] = [Av_1...Av_n] = \lambda_1 v_1...\lambda_n v_n]$
$\Rightarrow AP = PD \Rightarrow D = P^{-1}AP$
avec d la matrice diagonale des vecteurs propres.

8.3.5 remarque annexe

on peut effectuer une réduciton de Gauss avec des nombre complexes, il suffit de faire les même opérations, avec des nombres complexes

8.3.6 thm de pythagore (généralisé)

Si u, v tel que uv=0
$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

généralisation On supprime la condition uv=o
alors $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||||v||$
on démontre avec la trigonoométrie (thm du cosinus: $c^2 = a^2 + b^2 cos(\gamma)$

démonstration Si $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$
$cos(\gamma) = cos(\pi - \gamma)$
$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||||v||cos(\pi - \gamma)$
$= ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||||v||cos(\gamma)$

8.3.7 orthogonalité d'un sous-vecteur

Soit $W \subset R^n$ un sous-espace
$W^\perp = \{z \in R^n : \forall w \in W, zw = 0\}$
1)Soit $W^\perp$ = la droite qui passe par l'origine orthogonale à W
2)W= une droite qui passe par l'origine
Soit $W^\perp$ = le plan orthogonal à W
3)$(W^\perp)^\perp = W$
$W \cap W^\perp = \{0\}$
Soit $v \in W \cap W^\perp \Rightarrow u(\in W) \cdot v(\in W^\perp) = 0 \Rightarrow v = 0$

8.3.8 théorème

Soit A une matrice mxn

1. Ker(A)=Lgn(A)
2. $(Im(A))^\perp = Ker(A^T)$

8.3.9 familles orthogonales

$$e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$e_i \cdot e_j$: 1 si $i = j$, 0 sinon

une famille orthogonale:
Une famille $F = \{u_1, ..., u_k\}$ est othogonale si $\forall u_i u_j = 0$

une base orthogonale:
une bas d'un espace V qui est aussi une famille orthogonale

exemple $F = \{u_1, u_2\}$ est une base orthogonale de R^2

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

orthogonale car: 1+(-1)=0

coordonnées Soit $F = \{u_1, ..., u_n\}$ une base orthogonale de R^n et soit $y \in R^n$
$y = c_1u_1 + ... + c_nu_n, c_1, ..., c_n \in R$
$y \cdot u_i = (c_1u_1 + ... + c_nu_n, c_1, ..., c_n)u_i = c_i(u_1u_i)$
$c_i = \frac{yu_i}{u_iu_i}, \forall i$

exemple

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nous voulons calculer les coordonnées de y par rapport à $\{u_1, u_2\}$
$c_1 = \frac{yu_1}{u_1u_1} = \frac{1}{2}$
$c_2 = \frac{yu_2}{u_2u_2} = \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

projection orthogonale y' la projection orthogonale de y sur Vect{u}
On note que (y-y')⊥u
⇒(y-y')u=0
Mais nous pouvons voir que y'=cu
y-cu)u=0
$c = \frac{yu}{uu}$ ⇒y'=$\frac{yu}{uu}u$

exemple

8.3.10 Familles orthonormées

$F = \{u_1...u_n\}$ est une famille orthonormée si

1. F est orthogonale
2. $\forall i, ||u_i|| = 1(u_i$ est unitaire)

8.3.11 théorème

Toute famille orthogonale est libre

preuve supposons que $F=\{u_1,...,u_n\}$ est orthogonale ($c_1u_1+...c_nu_n=0$), $c_i \neq 0$
et supposons qu'elle soit libre
0=$u_i(c_1u_1+...+c_nu_n)=c_i(u_iu_i)$
or $u_iu_i \neq 0$
$\Rightarrow c_i=0$: contradiction

8.3.12 théorème

Soit U une matrice mxn dont les colonnes forment une famille orthonormée.($m \geq n$)

1. $||Ux||=||x||$ (les distance sont préservées)
2. (Ux)(Uy)=xy,$\forall x, y \in R^n$
3. $(Ux)(Uy)=0 \Leftrightarrow xy=0$

preuve 1 $||Ux||^2=(Ux)(Ux)=(Ux)^T(Ux)=x^TU^TUx=x^Tx=||x||^2$

preuve 2 $(Ux)(Uy)=(Ux)^T(Uy)=x^TU^TUy=xy$

preuve 3 $(Ux)(Uy)=xy$

8.3.13 projection orthogonales

Supposons que $W \subset R^n$soit un sous-espace
$y \in R^n$
nous cherchons à la définition de la projeciton W(y)
y'=proj W(y)
y-y' est orthogonal à W.
Supposons que $F=\{u_1,...,u_k\}$ soit une base orthogonale de W: dim(W)=k et $W \subset R^n$
$y'=u_1y_1+...+u_ky_k$ tel que $(y-y')\perp W$
$\Leftrightarrow (y-y')\cdot u_i=0, \forall i=1,2,...,k$
$yu_i=y'u_i=c_iu_iu_i, \forall i, c_i=\frac{y'u_i}{u_iu_i}$

définition On définit (étant donné une base orthogonale de W $\{u_1,...,u_k\}$
proj W(y)=$\frac{yu_1}{u_1u_1}u_i+...+\frac{yu_k}{u_ku_k}u_k$

Soit A nxr

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soit $b \in R^r$
Il nous intéresse de trouver une approximation de b comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
on cherche une droite qui représente une approximation de tous les points, on

cherche un model linéaire: $y = \beta_0 + \beta_1 x$
on peut mesurer la qualité de l'approximation par la distance
$||y - A\beta||$ ou $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$
Problème: trouver une approximation de y comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
nous avons comme condition pour l'orthogonalité: $A^T(b - b^{chapeau})$ sachant que $b^{chapeau}$ est le vecteur orthogonal a Ax
nous pouvons donc dire: $A^T(b - A\beta) = 0 \Rightarrow A^T b = A^T A\beta$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (vrai_v aleurs) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

la droite $\beta_0 + \beta_1 x$ se nomme la droite de régression

exemple

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

sachant que

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$y \sim \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ deux variables indépendantes (facteurs)
ou

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, x\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 + 3\beta_1 + 5\beta_2 \\ ... \end{pmatrix}$$

$x^T(y - x\beta) = 0 \Leftrightarrow (x^T x)\beta = x^T y$
Si $x^T x$ est inversible $\Rightarrow \beta = (x^T x)^{-1} x^T y$

8.4 théorème

Soit A nxr, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\forall b \in R^n$ l'équation $Ax \sim b$(on approxime Ax par b) admet une solution unique au sens des moindres carrés

2. les colonnes de A sont linéairement indépendantes
3. $A^T A$ est inversible

8.5 Diagolalisation des matrices symétriques

Soit A nxn, A est symétrique si $A^T = A$

exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont deux matrices symétriques

théorème Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique appartenant à des sous-espaces propres distincts sont orthogonaux

preuve $A^T = A$ avec deux valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_{2,1}, v_2$
$(Av_1)v_2 = (\lambda_1 v_1)v_2$
$(Av_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T A v_2 = v_1^T(\lambda_2 v_2) = \lambda_2 v_1 v_2$
comme $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v_1 v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

8.6 diagonalisation en une base orthonormée

définition On dit qu'une matrice A nxn est diagonalisable en base orthonormée s'il existe une matrice P orthogonale tel que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

8.6.1 propriétés

Si A est diagonalisable en une base orthonormée, alors A est symétrique

preuve $A = PDP^{-1}$ ou P est est orthogonale: $PP^T = I \Leftrightarrow P^T = P^{-1}$
$A = PDP^T$
$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T d^T p^T = PDP^T$

8.6.2 théorème

A est diagonalisable en base orthonormée si et seulement si A est symétrique.
(que nous acceptons sans démonstration)

exemple

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$P = [u_1 u_2 u_3]$ est orthogonale. A est diagonalisable en une base orthonormée$(P^{-1}AP)$

remarque

1. Les racines de $P_A(\lambda)$ sont réelles
2. La mutiplicité d'une valeur propre est la dimension du sous espace-propre

théorème spectral toute matrice symétrique vérifie les conditions suivantes:

1. A admet n valeurs propres réelles compte tenu des ordres de multiplicité
2. Pour chaque valeur propre λ la mulitiplicité de la valeur propre est la dimension du sous-espace propre
3. A est diagonalisable en base orthonormée

le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres
Alors: A=$\lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + ... + \lambda_n u_n u_n^T$

théorème Soit A une matrice mxn, alors les colonnes de A sont linéairement indépendantes sssi $A^T A$ est inversible.
preuve
Supposons que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Il nous faut démonstrer que Ker($A^T A$)=0.
Supposons que $x \in Ker(A^T A) \Rightarrow A^T Ax = 0$
$||Ax||^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T (A^T Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0$
$\Rightarrow x = 0$ car les colonnes de A sont linéairement indépendantes donc $A^T Ax = 0$

8.7 les formes quadratiques

Nosu avons besoin de faire un lien entre les fonctions quadratiques et les matrices

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = || \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ||^2 = [x_1, x_2] \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^T x$$

8.7.1 définition de la forme quadratique

Soit A une matrice carrée nxn, alors la forme quadratique Q associée à A est $Q(x_1, ..., x_n) := x^T Ax$ ou $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

exemple
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(x_1, x_2) = [x_1 x_2] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= [x_1 x_2] \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

Polynome homogène de degré 2 en deux variables
Si mnt nous prenions
$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$x^T B x = Q(x_1, x_2)$
Le but est de mettre la matrice sous forme symétrique.

$A^T A$ nxn (n=3)
$\lambda_1 = 360, \lambda_2 = 90, \lambda_3 = 0$
$||Av_1|| = 6\sqrt{10} = \sqrt{360}$
$\sigma = \lambda^{\frac{1}{2}}$

σ, sigma:
: soit A une matrice mxn et soit $\{v_1, ..., v_n\}$une base orthonormée de $A^t A$ des vecteurs propres dont les valeurs propres $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$. Alors, on définit la valeur singulière comme $\sigma_1, ..., \sigma_n$ ou $\sigma_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}$

théorème $\{v_1, .., v_n\}$ et $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$ comme dans la définition
Nous supposons qu'il existe $r \leq n$ valeurs σ_i non-nulles
Alors, $\{Av_1, ..., Av_r\}$ est une base orthogonale de Im(A) et rang(A)=r

preuve $(Av_i)(Av_j) = 0$ (pour que les vecteurs soient orthogonaux)
$= (Av_i)T(Av_j) = 0 \Leftrightarrow v_i(A^T Av_j) = v_i(\lambda_j v_j) = \lambda_j v_i v_j = 0$
On sait qu'une famille de vecteurs orthogonaux non-nuls est une famille libre
Disons qu'on prend $\{Av_1, ..., Av_n\}$ $||Av_i||^2 = v_i^T A^T v_i = \lambda_i v_i^T v_i = \lambda_i ||v_i||^2 = \lambda_i \Rightarrow Av_i \neq 0 si et seulement si \lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow v_i \neq 0$
$\Rightarrow F\{Av_1, ..., Av_r\}$ est une famille de vecteurs non-nuls orth $\Rightarrow$ libre$\Rightarrow$ $\{Av_1, Av_r\}$ est une base de l'image

8.8 décomposition en valeur singulière (SVD)

Soit A mxn des valeurs singulières $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0$, $\sigma_{r+1} = ... = \sigma_n = 0$
soit D la matrice diagonale avec les différents σ dans sa diago
et soit $\sum$ une matrice mxn telle que
Soit V=$[v_1 ... v_n]$ la matrice orthogonale nxn ($VV^T = I$)
Soit $\{u_1, ..., u_r\}$ la base orthonormée obtenue par $\frac{Av_i}{||Av_i||}, 1 \leq i \leq r$
On peut compléter $\{u_1 ... u_r\}$ pour obtenir une base orthonormée $\{u_1 ... u_r, u_{r+1} ... u_n\}$
alors $U = [u_1 ... u_m]$
Alors $A = U \sum V^T$ (décomposition en valeurs singulières)

preuve voir le cours/livre

9 examen

va jusqu'aux formes quadatiques (7.2)
nous n'avons pas de SVD ou de statistique