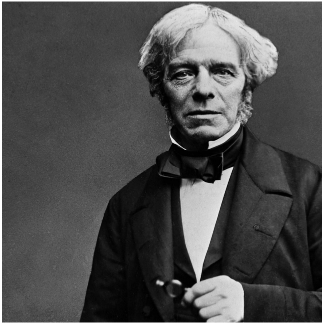
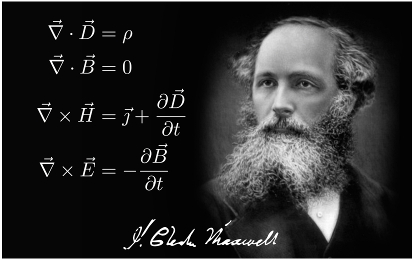
Introducción a la Física Relativista II: Electrodinámica I

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021

Faraday y Maxwell
El campo electromagnético





¿Como conocemos los campos?

- Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se manifiestan por su acción sobre las cargas eléctricas.
- Los campos quedan definidos por la ecuación de fuerza de Lorentz,
$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$
- El campo eléctrico es el único en entregar energía a las cargas.
- Cargas distribuídas por una densidad ρ poseen una corriente asociada $\vec{J} = \rho\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es el campo de velocidades de las cargas.
- La conservación de la carga eléctrica se expresa en la ecuación de continuidad:
$$\partial_t \rho + div \vec{J} = 0$$

La ventaja de pensar en campos

- Cuando pensamos en campos podemos olvidar la idea (terriblemente fea) de acción a distancia.
- Los campos son objetos locales.
- Los campos obedecen a una dinámica que permite calcularlos a partir de mediciones en ciertas regiones (ecuaciones diferenciales en derivadas parciales + condiciones de contorno e iniciales)
- En el caso de la electrodinámica, la descripción "moderna" es el resultado de los trabajos de Faraday y Maxwell (Tarea: investigue algo de historia al respecto y establezca una linea de tiempo que le diga que ocurría en el mundo cuando estos caballeros trabajaban arduamente)

Ecuaciones de Maxwell

En sus cursos de teoría electromagnética usted se ha convertido en un experto en la descripción

Ley de Gauss	$div\vec{E} = 4\pi\rho$
Ley de Gauss para $\vec{B}$	$div\vec{B} = 0$
Ley de Faraday	$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$
Ley de Ampere-Maxwell	$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}rot\vec{J} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}$

¿Cuál es la contribución fundamental de Maxwell?

Ecuaciones de Maxwell

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_i E_i &= 4\pi\rho \\ \partial_i B_i &= 0 \\ \epsilon_{ijk}\partial_j E_k &= -\frac{1}{c}\partial_t B_i \\ \epsilon_{ijk}\partial_j B_k &= \frac{4\pi}{c}J_i + \frac{1}{c}\partial_t E_i \end{aligned}}$$

Conservación de la Carga

Una manipulación sencilla permite derivar la ecuación de continuidad.

$$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j B_k = \frac{4\pi}{c}\,\partial_i J_i + \frac{1}{c}\,\partial_i\partial_t E_i$$

$$\frac{1}{c}\partial_t\partial_i E_i = \frac{4\pi}{c}\,\partial_t\rho \longleftrightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial\, div\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\frac{\partial\rho}{\partial t}\,.$$

$$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j = 0 \longleftrightarrow div(rot) = 0$$

$$\partial_t\partial_i E_i = 4\pi\,\partial_t\rho\,,\qquad \frac{1}{c}\,\partial_t\partial_i E_i + \frac{4\pi}{c}\,\partial_i J_i = 0\,.$$

$$\boxed{\partial_t\rho + \partial_i J_i = 0}$$

Predicción de las Ondas Electromagnéticas.

- Ejercicio **matemático** estándar.
- Técnica **no** estándar una solución (ondulatoria[1]) de la forma $\mathcal{E}\, e^{ik_i x^i - \omega t}$, a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.
- **Resultado** Ondas transversales con velocidad de fase c
- **Ejercicio** investigar la **evidencia/demostración** experimental de la predicción.

[1] $\mathcal{E}$ es el vector de polarización

Densidad de Energía y vector de Poynting

- Densidades de energía eléctrica y magnética,

$$u_E = \frac{1}{8\pi} E^2 \qquad u_B = \frac{1}{8\pi} B^2$$

- u_E y u_B permiten dar definiciones a la capacitancia e inductancias.
- Densidad de energía electromagnética es

$$u = u_E + u_B$$

- Vector de Poynting

$$S = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$$

Conservación de la Energía

- Al considerar la potencia que el campo electromagnético entrega a un conjunto de corrientes,

$$\frac{dE}{dt} = \vec{J}.\vec{E}$$

- Se encuentra la ley de conservación de la energía expresada como

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + div(\vec{S}) = -\vec{J}.\vec{E}}$$

1905: Annus mirabilis

3. ***Zur Elektrodynamik bewegter Körper;***
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Recordatorio

- Coordenadas del espacio tiempo: x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$. $x^0 = ct$.
- Métrica, $\eta = diag(1, -1, -1, -1)$
- Los operadores de diferenciación,

$$\boxed{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}}$$

constituyen las componentes de un vector covariante.

El Tensor de Faraday

Por razones que serán claras más adelante, se define el siguiente objeto de dos índices

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- En el futuro demostraremos que F es un tensor antisimétrico covariante.
- F codifica la electrodinámica.

Versión Contravariante

Usando la métrica subimos los índices para construir

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\,\eta^{\nu\beta}\,F_{\alpha\beta} \tag{1}$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \eta^{0\alpha}\,\eta^{i\beta}\,F_{\alpha\beta} = \eta^{00}\,\eta^{ip}\,F_{0p} = (+)(-\delta^{ip})\,F_{0p} = -F_{0i} \\ F^{ij} &= \eta^{i\alpha}\,\eta^{j\beta}\,F_{\alpha\beta} = (-\delta^{i\ell})\,(-\delta^{jp})\,F_{\ell p} = F_{ij} \end{aligned}$$

Faraday Contravariante

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dualidad de Hodge

- La métrica de una variedades (pseudo) Riemanianas de dimensión D permite asociar a todo tensor covariante antisimétrico de p-índices un tensor covariante antisimétrico de $D-p$-índices denominado el dual de Hodge

$$g : T_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p} \rightarrow {}^*T_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{D-p}} \tag{2}$$

- **Ejemplo** D=3. $T_{\mu\nu} \rightarrow {}^*T_{\rho}$.
- Obsérvese que, en particular, para $D = 4$ un tensor y su dual tienen la misma dimensionalidad.

Dual del Tensor de Farady I

En el caso de la teoría de Maxwell, el dual de Hodge del tensor de Faraday tiene exactamente dos índices y se calcula por la fórmula

$$^*F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\, F^{\alpha\rho} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\, \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\rho\tau}\, F_{\lambda\tau}$$

Dual del Tensor de Farady II

Cálculo explícito

$$ {}^*F_{0i} = \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}\, F^{jk} \qquad {}^*F_{ij} = \epsilon_{ij0\ell}\, F^{0\ell} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} {}^*F_{01} &= \epsilon_{0123}\, F^{23} = +F^{23} = -B_x \\ {}^*F_{02} &= \epsilon_{0213}\, F^{13} = (-)F^{13} = -B_y \\ {}^*F_{03} &= \epsilon_{0312}\, F^{12} = (+)F^{12} = -B_z \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} {}^*F_{ij} &= \epsilon_{ij0\ell}\, F^{o\ell} \\ {}^*F_{12} &= \epsilon_{1203}\, F^{03} = (+)(-E_z) = -E_z \\ {}^*F_{13} &= \epsilon_{1302}\, F^{02} = (-)(F^{02}) = -(-E_y) = E_y \\ {}^*F_{23} &= \epsilon_{2301}\, F^{01} = (+)(F^{01}) = -E_x \end{aligned} \tag{5}$$

Forma Matricial de $^*F$

$$[^*F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & E_y \\ B_y & -E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Identidades de Bianchi

Teorema

El tensor de Faraday satisface las identidades

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$$

Significado de las Identidades de Bianchi

- Para demostrar el teorema 1 basta con un ejercicio de "gimnasia de índices".
- **Ejemplo**, preguntamos por el valor de la siguiente expresión

$$A = \partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} \,,$$

- "Traducir" F a campo eléctrico e inducción magnética ,

$$A = \frac{1}{c}\partial_t(-B_z) + \partial_2 E_x - \partial_1 E_y$$

- Se reconocen los elementos que entran en la ley de Faraday y por tanto,

$$\partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} = 0 \,,$$

- Todas las ecuaciones de Maxwell homogéneas están codificadas en las identidades de Bianchi

Dos cálculos sencillos I

Queremos examinar las siguientes dos cantidades,

$$A_1 = \partial_\nu F^{\nu 0} = \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30}$$

$$A_2 = \partial_\nu F^{\nu 1} = \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31}$$

Dos cálculos sencillos II

Sustituyendo las componentes adecuadas de los campos y usando las ecuaciones de Maxwell, obtenemos,

$$\partial_\nu F^{\nu 0} = = \partial_1 E_x + \partial_2 E_y + \partial_z E_z = 4\pi\rho \,.$$

$$\begin{aligned}\partial_\nu F^{\nu 1} &= -\partial_0 E_x + \partial_2 B_z + \partial_3 (-B_y) = \\ &= -\frac{1}{c}\partial_t E_x + \left[\nabla \times \vec{B}\right]_x = \frac{4\pi}{c} J_x\end{aligned}$$

Nada más y nada menos que dos de las ecuaciones de Maxwell con fuentes.

Ecuaciones de Maxwell

Con tal de que pongamos

$$J^\mu \equiv (c\rho, \vec{J})$$

Las cuaciones de Maxwell pueden expresarse como

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$$

y

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Esta manera de escribir las ecuaciones de Maxwell tiene apariencia covariante.

¿Será solo apariencia?

Conservación de la Carga y Transformaciones de Lorentz

La conservación de la carga es un **principio fundamental** con consecuencias sumamente interesantes. En efecto, si consideramos un volumen que contiene cierta carga,

$$Q = \int_V \rho \, d^3x \,, \tag{6}$$

ocurre que Q tiene que se igual para todos los observadores inerciales, ¿qué ocurriría con un protón, por ejemplo, si este requerimiento no se diera?

Conservación de la Carga y Transformaciones de Lorentz

Bajo transformaciones de Lorentz, los volumenes cambian como

$$d^3x \rightarrow \gamma^{-1}\, d^3x\,, \tag{7}$$

de acuerdo a esto, la densidad de carga debe transformar como

$$\rho \rightarrow \gamma\, \rho\,. \tag{8}$$

es decir, ρ cambia como la componente 0 de un cuadrivector (buen indicio).

Densidad de Carga y Transformaciones de Lorentz

- Debido al **postulado** de conservación de la carga, la ecuación de continuidad **tiene** que ser invariante (escalar bajo transformaciones de Lorentz).
- El operador de cuadrigradiente es un buen vector covariante
- El objeto indexado propuesto,

$$J^\mu \equiv (c\rho, \vec{J})$$

  aparece en la ecuación de contnuidad que se expresa como

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

- El teorema del cociente, demuestra que efctivamente J^μ **es un cuadrivector**

Conservación de la Carga un Observación

La antisimetría del tensor de Faraday garantiza la conservación de la carga,

$$\partial_\mu \left[\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{4\pi}{c} J^\mu \right] = 0$$

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{4\pi}{c} \partial_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu = 0$$

Fuerza de Lorentz en forma covariante

Una formulación relativista tiene que incluir, y de hecho lo hace, la forma covariante de la fuerza de Lorentz

$$\boxed{\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^{\nu\mu} U_\mu}$$

Tensor de Stress Simétrico

Entre los objetos de interés de la electrodinámica debemos contar al tensor

$$\boxed{\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda}\right]}$$

Como ejercicio, demuestre que

$$\Theta^{00} = \frac{1}{8\pi}\left[\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right]$$

$$\Theta^{0i} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\Theta^{ij} - \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_k + B_iB_k - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\right]$$

Interprete cada uno de los objetos obtenidos.

¿Covariancia?

- Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

  en combinación con el hecho de que la corriente es un buen cuadrivector, consituyen, vide el teorema del cociente, la prueba de que los objetos indexados $F^{\nu\mu}$ constituyen las componentes de un tensor.
- Estamos en presencia e una formulación manifiestamente covariante de la electrodinámica.
- El siguiente objetivo, la formulación de una teoría cuántica en términos de integrales de camino requiere encontrar una acción.