Introducción a la Física Relativista II: Grupos de Lie

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021

Marius Sophus Lie

17-12-1842; 18-02-1899. Matemático noruego. Creador de la teoría de las simetrías contínuas y sus aplicacions a la geometría y las ecuaciones diferenciales.

Motivación

Los Grupos de Lie son particularmente interesantes en física debido a su conexión con las *Leyes de Conservación*.

Ejemplo: La conservación del momentum es consecuencia directa de la invariancia del espacio bajo traslaciones.

¿Qué Es un Grupo?

Definición

Un grupo es un par $(G, *)$ donde G es un conjunto y $*$ una operación binaria sobre G, es decir, un mapa

$$* : G \times G \to G$$

que satisface los siguienes axiomas:

1. ** es una operación asociativa.*
2. *Existe un único elemento e en G tal que $\forall g \in G$, $e * g = g * e = g$*
3. $\forall\ a \in G\ \exists\ a^{-1}$ *(el inverso de a) tal que* $a * a^{-1} = e$.

EJEMPLOS

*	1	0
1	0	1
0	1	0

Cuadro: Z_2

Ejemplos

- El par $(Z, +)$ constituido por los números enteros con su operación usual de suma es un grupo **conmutativo** (abeliano)
- $Z_n = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}$ ($\omega = e^{2\pi i/n}$) equipado con el producto estándar entre complejos constituye un grupo *finito* , *cíclico* y *abeliano*
- Conjunto de las permutaciones de n objetos usando como producto la composición de permutaciones, constituye un grupo **no abeliano** para $n > 2$, dicho grupo se denomina P_n.

P_4. Representación Matricial

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\\2\end{pmatrix}$$

P_4. Grupo no Conmutativo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición Informal

Definición

- *Son contínuos en el sentido de que sus elementos se parametrizan con n-tuplas de números (reales o complejos), de manera que* $g \in G$ *puede pensarse como* $g = g(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, n, *el número de parámetros necesarios para definir un elemento, es denominado dimensión de* G.
- *La operación de grupo es diferenciable con respecto a los parámetros*

$$g(x^1, \ldots, x^n) = g_1(x_1^1, \ldots, x_1^n) g_2(x_2^1, \ldots, x_2^n)$$

$$x^i = f^i(x_1^1, .., x_1^n; x_2^1, ..., x_2^n)$$

Ejemplo

- $SO(2)$. El conjunto de la matrices de la forma:

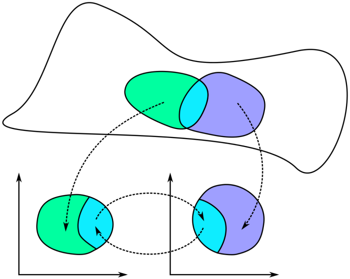
$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

dotado del producto matricial ordinario es un grupo de Lie. de dimensión $d = 1$.

- $SO(2)$ es abeliano.
- Cada elemento del grupo se parametriza por un ángulo (θ), $dim(SO(2)) = 1$
- El mapa g es la suma:

$$g(\theta_1)g(\theta_2) = g(\theta_1 + \theta_2) = g(\theta_2)g(\theta_1)$$

Variedades



Definición Rigurosa

Definición

Un grupo de Lie es un par $(G, *)$ donde G es una variedad y $*$ una operación binaria sobre G que le dota de una estructura de grupo diferenciablemente compatible con la estructura de variedad. La dimensión de la variedad es la dimensión del grupo

Ejemplos

- $G\ell(n,\Re)$. **Grupo Lineal General** sobre $\Re^n$. Es el conjunto de la matrices inversibles $n \times n$ reales dotado del producto matricial estándar. Evidentemente: $dim(Gl(n,\Re)) = n^2$
- $S\ell(N,\Re)$. **Grupo Lineal Especial** sobre $\Re^n$. $S\ell(N,\Re) \subset G\ell(N,\Re)$, es el conjunto de las matrices $n \times n$ cuyo determinate tiene el valor $+1$ (esta condición provee de un vínculo que reduce la dimensión en una unidad) así que $dim(S\ell(N,\Re) = n^2 - 1$

Ejemplos

- $O(N, \Re)$. **Grupo Ortogonal**. Es el conjunto de todas las matrices $n \times n$ de entradas reales que satifacen $\mathrm{M}^T\mathrm{M} = \mathrm{I}$, un conteo elemental nos convence de que $dim(O(N, \Re)) = \frac{n(n-1)}{2}$. La condición de ortogonalidad implica que $det(\mathrm{M}) = \pm 1 \ \forall \ M \in O(N, \Re)$.
- $SO(N, \Re)$ **Grupo Ortogonal Especial**. $SO(N, \Re) \subset SO(N, \Re)$. S significa que $det(\mathrm{M}) = +1 \ \forall \mathrm{M} \in SO(N, \Re)$. La condición sobre el determinate no es suficiente paa eliminar una dimensión y por lo tanto, $dim(SO(N, \Re)) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ejemplos

- $U(N)$. **Grupo Unitario**. Es el conjunto de matrices de $n \times n$ entradas complejas que satisfacen $\mathrm{M}^{\dagger}\mathrm{M} = \mathrm{I}$. Esta condición implica que $det(\mathrm{M}) = e^{i\theta}$ y el conteo demuestra que $dim(U(n)) = n^2$.
- $SU(N)$. **Grupo Unitario Especial**. $SU(N) \subset U(N)$, es el subconjunto de matrices de $U(N)$ con determinante $+1$, esta condición implica que el ángulo de fase que aparece en $U(N)$ ha de ser nulo y en consecuencia, $dim(U(n)) = n^2 - 1$ (real).

Definición

Una representación lineal de un grupo G es un mapa

$$\rho : \mathcal{G} \to M$$

donde $M = \{$*conjunto de matrices de dimensión* $(n \times n)\}$ *tal que el mapa preserva el producto de grupo, es decir,*

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)\,,$$

la dimensión, n de las matrices se denomina **dimensión de la representación**

Representación Fundamental

Definición

La representación fundamental o definitoria de un grupo de Lie es la asociada a la definición del grupo.

- La definición fundamental de $SO(3)$, por ejemplo, está constituida por matrices ortogonales 3×3 de determinante $+1$.
- R^3 el espacio sobre el que tales matrices actúan naturalmente, se denomina, **espacio de representación**.

$SU(2)$

La representación fundamental (**2**) de $SU(2)$ está constituida por matrices de la forma (ejercicio)

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \alpha\,,\beta \in \mathcal{C}\,, \quad \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$$

$$\alpha = a + ib\,, \quad \beta = c + id$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \approx S^3$$

$SU(2)$

- Escogiendo un ángulo, un versor director y utlizando las matrices de Pauli,

$$\theta\,, \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Podemos expresar un elemento típico de $SU(2)$ en la forma

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= cos\theta/2I + i\hat{n}.\vec{\sigma}sen\theta/2 = \\ &= \begin{pmatrix} cos\theta/2 + in_z sen\theta/2 & [n_y + in_x]sen\theta/2 \\ [-n_y + in_x]sen\theta/2 & cos\theta/2 - in_z sen\theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

SU(2) y SO(3)

La representación fundamental (también denominada **3**) de $O(3)$ está constituida por matrices de rotación que en el caso de rotaciones alrededor del eje z tiene la forma,

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

tomando $n_z = 1$ en la fórmula 1, podemos construir una representación de dicha matriz en $U(2)$.

$$\begin{pmatrix} cos\theta/2 + isen\theta/2 & 0 \\ 0 & cos\theta/2 - isen\theta/2 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

$SU(2) \approx SO(3)$, $SU(2)$ es el **cubrimiento doble** de $SO(3)$.

Ejercicios

- ¿Cuál es la forma general de un elemento de $U(1)$?, ¿es $U(1)$ un grupo abeliano?.
- Demuestre que $G\ell(2,\Re)$ es efectivamente un grupo de Lie, ¿que dimensión tiene?, ¿por qué?.
- Demuestre la fórmula 1.
- Describa al grupo $SO(3)$ como un grupo de simetría.