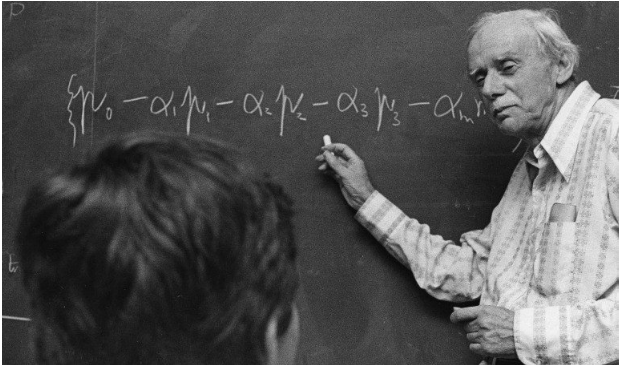
Introducción a la Física Relativista II: Espinores de Dirac

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021

P. A. M. Dirac



Paul Adrien Maurice Dirac OM FRS (8/8/1902–20/10/1984)

Algo de Historia

Durante la década de 1920 se hacían esfuerzos importantes por buscar ecuaciones que asociar con las ondas de De Broglie. Como parte de ese esfuerzo y antes de que Schrödinger encontrara su famosísimo resultado, se había encontrado la ecuación de Klein Gordon que, a pesar de ser relativista, presentaba dificultades para su intepretación. Dirac atacó el problema buscando una ecuación de primer orden y su resultado, en notación moderna,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$$

es una ecuación diferencial/matricial, que no solo describe partículas masivas de spin 1/2, sino que predice la existencia de sus antipartículas y lleva a la relación de dispersión $p^2 - m^2c^4 = 0$.

Los Espinores de Dirac en la representación de Weyl

Los espinores de Dirac (representación 4_s de $SO(1,3)$) constituyen una de las representacones más famosas y se define como la siguiente suma directa

$$Dirac \equiv (\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2})\,,$$

y por tanto, es trivialmente reducible. Un espinor de Dirac es una tupla de cuatro entradas complejas. Dos de ellas representando un espinor de Weyl izquierdo y las otras dos, un espinor derecho, es decir,

$$\psi_{Dirac} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

Generadores de Lorentz y Matrices de Dirac

Los generadores de Lorentz ($\sigma^{\mu\nu}$) en la representación de Weyl tienen la forma

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} ,$$

los generadores pueden expresarse en la forma

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] ,$$

donde las matrices "gamma" ó de Dirac, están dadas por

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de Dirac

- Las matrices de Dirac satisfacen el álgebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathsf{I}_{4\times 4}$$

- En general (dimensiones arbitrarias de espacio tiempo), el álgebra de Dirac se denomina álgera de "Clifford" y se toma como punto de partida para las representaciones espinoiales tanto de los grupos $SO(n)$ como de los lorentzianos $SO(m, n)$.
- Es posible encontrar distintas representaciones delas matrices de Dirac, pero todas ellas están relacionadas por transformaciones de similaridad.

La representación Bjorken/Drell

Este es otro ejemplo de una representación de las matrices de Dirac muy conocida, recibe su nombre por los nombres de los autores de un par de libros de texto sumamente conocidos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Construya las matrices de Dirac y los generadores en esta representación. Verifique que los generadores satisfacen el álgebra $so(1,3)$.

γ^5 y Proyecciones Quirales

Asociada con las matrices γ^μ (e independientemente de la representación) se define otra matriz (γ^5) de la siguiente manera,

$$\gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,, \tag{1}$$

γ^5 posee dos propiedades my importantes, (a) $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ y (b) $(\gamma^5)^2 = \mathrm{I}$. Estas dos propiedades garantizan que los dos objetos

$$P_\pm \equiv \frac{\mathrm{I} \pm \gamma^5}{2}$$

son operadores de proyección. Proyectan, de hecho, sobre las componentes izquierda y derecha de un espinor de Dirac,

$$\psi_{L/R} = P_\pm \psi_{Dirac}$$

En la representación de Weyl γ^5 adopta la forma

$$(\gamma^5)^{Weyl} = \begin{pmatrix} -I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & I_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$P_- = P_L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_+ = P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

1. Encuentre los operadores de proyección quirales en la representación de Weyl.
2. Investigue acerca de la representación de Majorana ¿qué propiedades tiene?