Introducción a la Física Relativista II: Álgebras de Lie

Mario I. Caicedo

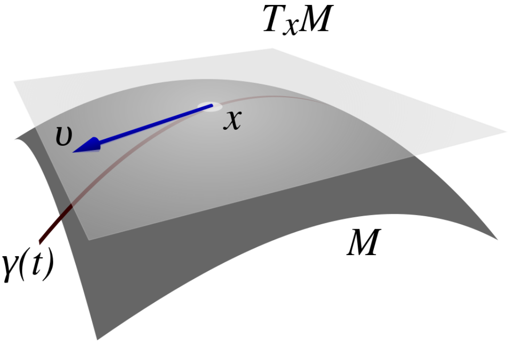
4 de febrero de 2021

Propiedades Locales de los Grupos de Lie

Ya sabemos que un grupo de Lie es una variedad dotada de una estructura de grupo que es direnciablemente compatible con la estructura diferenciable de la variedad (geométria).

Propiedades Locales de los Grupos de Lie

Como en toda variedad, en cada punto $x \in G$ de un grupo de Lie, hay un espacio **espacio tangente** $T_x G$. El espacio tangente al grupo en la identidad posee una estructura algebráica heredada de la de G denominada **Álgebra de Lie** ($\mathcal{G}$).



Generadores

- Al pensar en grupos de matrices, estamos pensando en una parametrización tal que $g(0) = I$ (I es la identidad del grupo).
- Como consecuencia de esa parametrización, todo elemento de un grupo de Lie cercano a la identidad puede expresarse en la forma
$$\mathrm{g} = 1 + \boldsymbol{\epsilon} = 1 + \varepsilon^a \mathrm{T}_a \tag{1}$$
donde, los números ϵ^a, $a = 1, 2, ..., dim(G)$, son cantidades infinitesimales.
- Se demuestra que las matrices T_a, que constituyen una base de $T_e G$, y se les denomina **generadores del grupo**.

Generadores

En el lenguaje propio de los matemáticos, los generadores se definen como

$$T_a = \frac{\partial g}{\partial x^a}|_{x=0} \tag{2}$$

en el caso de $O(2)$, por ejemplo,

$$T = \frac{\partial}{\partial \theta}\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

EJEMPLOS

En el lenguaje que nos agrada a los físicos, un elemento de $SO(2)$ para ángulo muy chico (es decir, una rotación infinitesimal de ángulo $\delta\theta$) se escribe como

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y de allí leemos el generador,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \sqrt{-1}$$

Álgebra de Conmutación

Al considerar el producto [**EJERCICIO**]

$$(g_1^{-1}g_2^{-1})(g_1g_2) = g_3$$

donde g_1 y g_2 son elementos de G cercanos a la identidad obtenemos (a segundo orden)

$$(g_1^{-1}g_2^{-1})(g_1g_2) = I + \epsilon_1^i\epsilon_2^j[\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j]\,,$$

donde, [,] denota el conmutador. g_3 también debe ser cercano a la identidad, condición que implica

$$\boxed{[\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j] = C_{ij}^p\mathrm{T}_p}$$

para un conjunto de constantes reales C_{ij}^p

¿Qué es un Álgebra de Lie?

Definición

Un Álgebra de Lie es un par $(\mathcal{G}, +)$, *donde* $\mathcal{G}$ *es un espacio vectorial y* $*$ *un producto antisimétrico que satisface la identidad de jacobi:* $(a * b) * c + (c * a) * b + (b * c) * a = 0$

Conclusiones en este punto

- $\mathcal{G} = T_e G$ es un espacio vectorial de dimensión $d = dim(G)$.
- Los generadores constituyen una base del $\mathcal{G}$ que satisface, $[T_i, T_j] = C^p{}_{ij}\, T_p$
- Las propiedades del conmutador garantizan que

$$[A, B], C] + [C, A], B] + [B, C], A] = 0$$

¡El par $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie!

Representaciones I

Definición

Una representación lineal de un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ es un mapa lineal

$$\rho : \mathcal{G} \to M$$

donde $M = \{$conjunto de matrices de dimensión $(n \times n)\}$ tal que el mapa preserva el producto del álgebra, es decir,

$$\rho([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) = [\rho(\mathrm{X}), \rho(\mathrm{Y})] \, ,$$

la dimensión, n de las matrices se denomina **dimensión de la representación**

Representaciones II

- Al igual que ocurre con los grupos, al espacio sobre el que una representación lineal de un álgebra actúa naturalmente, se le denomina *espacio de representación* o simplemente *representación* de $\mathcal{G}$.
- Si de alguna manera conseguimos un conjunto de operadores cuyas relaciones de conmutación reproduzcan las de un álgebra de Lie dada, decimos que dichos operadores consituyen una representación del álgebra.
- En la práctica, hemos estado construyendo las representaciones **fundamentales** (o definitorias).

Definición Rigurosa

Definición

Una representación lineal de un álgebra es un homomorfismo lineal

$$\rho : \mathcal{G} \to M$$

donde, M es un conjunto de operadores lineales que actúan sobe un espacio vectorial adecuado.

Ejemplo: $su(2)$

- Al definir $SU(2)$ como el grupo de las matrices unitarias 2×2 de determinante $+1$, estamos diciendo de entrada que la **representación fundamental** ó definitoria del grupo, es de dimensión 2 y de hecho, esa representación se denota como **2**
- La representación fundamental de $su(2)$ está dada en términos de las matrices de Pauli.

$$\boxed{[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k} \tag{4}$$

$su(2)$ (cont)

- La representación **3** o $\ell = 1$ es tridimensional.
- Los generadores (hermiticos) en esta representación son,

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$su(2)$ (cont)

- En mecánica cuántica se introduce una representación de dimensión infinita.
- Las rotaciones actúan sobre las funciones de onda en la forma: $g(\psi(x)) = \psi(g^{-1}x)$
- Estudiando rotaciones infinitesimales, se demuestra que los **observables**

$$L_i = i\epsilon_{ijk}x_j\partial_k$$

generan las rotaciones, y satisfacen, efectivamente, el álgebra de conmutación

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

Consideremos un grupo de Lie G de dimensión n y su álgebra de Lie $\mathcal{G}$, un parámetro $t \in \Re$, un conjunto de parámetros s^a, $a = 1, 2, ..., n$ y un número natural N . Con estas cantidades cnstruyamos el siguiente elemento de G

$$M(\epsilon) = I + \epsilon s^a T \qquad \epsilon = \frac{t}{N}$$

ahora consideremos la composición,

$$M = \underbrace{M(\epsilon)M(\epsilon)...M(\epsilon)}_{\text{N veces}} = (I + \frac{t}{N}s^a T)^N$$

Al tomar el límite, escribimos formalmente (de esto se trata el mapa exponencial)

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} (I + \frac{t}{N}s^a T)^N = e^{ts^a T_a}}$$

- El mapa exponencial debe entenderse en términos de la serie de potencias correspondiente

$$e^{ts^a T_a} = I + ts^a T_a + \frac{(ts^a T_a)^2}{2!} + \frac{(ts^a T_a)^3}{3!} + \dots$$

- Diversos gupos pueden compartir la misma álgebra de Lie ($O(3)$ y $SU(2)$, por ejemplo. De todos esos grupos existe uno y solo uno que es simplemente conexo (una propiedad topológica) y que recibe el nombre de grupo de cubrimiento universal
- El mapa exponencial lleva del álgebra al cubrimiento universal del álgebra.

Geometría