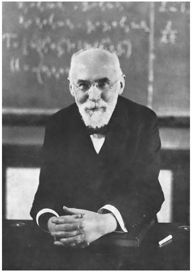
Introducción a la Física Relativista II: Otras Representaciones de $SO(1,3)$

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021

Lorentz y Poincaré



Información

Este repositorio contiene un cuaderno jupyter (puede correrlo en colab) muy relevante para esta clase.

Simetrías de la Métrica de Minkowski
Pregunta

Problema

¿Qué conjunto de trasformaciones ($x^\mu \to \hat{x}^\mu(x^\alpha)$) del espacio tiempo de Minkowski mantienen invariante al tiempo propio?

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Respuesta

- La transformación más general posible (Weinberg) que satisface la condición de interés es una **transformación afín**

$$\hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho + b^\mu \tag{1}$$

donde Λ tiene que satisfacer la condición $\Lambda^T \boldsymbol{\eta} \Lambda = \Lambda$

- El conjunto de todas estas transformaciones consituye el denominado **Grupo de Poincaré ($IO(1,3)$)**

$IO(1,3)$

- $dim[ISO(1,3)] = 10$.
- El subconjunto de transformaciones **homogéneas** constituye un subgrupo (el grupo de Lorentz, $O(1,3)$) de $ISO(1,3)$.

Definición

El grupo de Lorentz $O(1,3)$ es el conjunto de las matrices 4×4 que satisfacen

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

Teorema

Todo elemento $\Lambda \in O(1,3)$ satisface las identidades,

1.- $det(\Lambda) = \pm 1$

2.- $|\Lambda^0_0| \geq +1$

Componentes del Grupo de Lorentz I

- La definición de las transformaciones de Lorentz implica que $det(\Lambda) = \pm 1$.
- Adicionalmente (también debido a la definición),

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = \eta_{00}\,, \quad (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \sum_i (\Lambda^{i}{}_{0})^2 = \eta_{00}$$

de manera que $|\Lambda^{0}{}_{0}| \geq 1$

Componentes del Grupo de Lorentz II

- Cuando $det(\Lambda) = +1$, hablamos del **Grupo de Lorentz propio**, en caso contrario, hablamos del grupo de Lorentz impropio.
- Cuando un transformación de Lorentz satisface ${\Lambda^0}_0 \geq 1$, decimos que es ortocrona. En caso contrario, anti ortocrona.

Componentes del Grupo de Lorentz III

El grupo de Lorentz se divide en cuatro componentes

- $det(\Lambda) = +1$
  - $L^+_\uparrow$. Grupo de Lorentz propio ortocrono, $SO(1,3)$.
  - $L^+_\downarrow$. Transformaciones de Lorentz propias antiortocronas.
- $det(\Lambda) = -1$
  - $L^-_\uparrow$ Transformaciones de Lorentz impropias ortocronas.
  - $L^-_\downarrow$ Transformaciones de Lorentz impropias antiortocronas.

$SO(1,3)$

- Dada la definición de $SO(1,3)$, la representación fundamental $(\mathbf{4})$ está dada por matrices 4×4 que actúan como transformaciones lineales sobre el espacio de Minkowski $\mathcal{M}_4$.
- Los generadores pueden encontrarse de la manera usual aplicando la definición del grupo a un elemento $\mathbf{g} \in O(1,3)$ cercano a la identidad.
- Por razones que quedarán claras, los seis generadores se dividen en dos conjuntos de tres generadorescada uno, denominados generadores de boosts y de rotaciones.

Generadores de Boosts

$$\mathbf{K}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Generadores de Rotaciones

$$
\mathbf{J}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{J}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

El Mapa Exponencial (un ejemplo)

La transfomración de Lorentz consistente en una rotación pura seguida de un boost está dada por la matriz

$$\Lambda = e^{i\phi\hat{p}.\vec{K}} e^{i\theta\hat{n}.\vec{J}},$$

donde,

- $\hat{n}$ es el vector director de la rotación y θ el ángulo,
- $\hat{p}$ la dirección del boost y $\phi \equiv tanh^{-1}\beta$ el parámetro de velocidad.

$so(1,3)$ en la base $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{J}_i$

$$\boxed{\begin{array}{c} [\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k \\ \\ [\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k \\ \\ [\mathbf{J}_i, \mathbf{K}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{K}_k \end{array}}$$

Interpretación de esta forma del Álgebra

- Los $\mathbf{J}_i$ generan rotaciones puras, y de hecho, constituyen una subálgebra
- Los generadores de boost $(\mathbf{K}_i)$ se comportan de manera bastante diferente.
  - Son vectores bajo la subálgebra de rotaciones.
  - Se mezclan entre si generando rotaciones puras. Este es el origen de la **precesion de Thomas**. Que, semiclásicamente produce de manera -casi correcta- el momento magnético del electrón.

Cambio de Base

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{N}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_i + i\mathbf{K}_i) \\ \\ \mathbf{N}_i^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_i - i\mathbf{K}_i) \end{array}}$$

$so(1,3)$ en la base $\mathbf{N}_i$, $\mathbf{N}_i^\dagger$

$$\boxed{\begin{array}{l} [\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{N}_k \\ [\mathbf{N}_i^\dagger, \mathbf{N}_j] = 0 \\ [\mathbf{N}_i^\dagger, \mathbf{N}_j^\dagger] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{N}_k^\dagger \end{array}}$$

Interpretación de la base $\mathbf{N}_i$, $\mathbf{N}_i^\dagger$

- El álgebra se descompone como dos subálegebras $su(2)$ independientes.

$$so(1,3) = su(2) \oplus su(2)$$

- Consecuencia:
    - Las representaciones de $so(1,3)$ pueden etiquetarse con los autovalores de los casimires: $A = \sum_i (\mathbf{N}_i)^2$, $B = \sum_i (\mathbf{N}_i^\dagger)^2$
    - Autovalores: $\ell_a(\ell_a+1)\,, \quad \ell_b(\ell_a+1)$. $\ell_a = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ (igual para ℓ_b)
    - La notación para las representaciones es: (ℓ_a, ℓ_b)

- Use el mapa exponencial para encontrar el boost estándar a lo largo del eje x.
- Demuestre la forma del álgebra para los generadores $\mathbf{N}_i$, $\mathbf{N}_i^\dagger$.
- Siga un procedimiento similar al que se ha presentado para construir la representación fundamental del álgebra $so(4)$, muestre que $so(4) = su(2) \oplus su(2)$, ¿conoce alguna aplicación física del resultado?.
- ¿Qué podría decir de la representación $(1/2, 0)$?