Introducción a la Física Relativista II: Algebras de Lie ¿Como Buscar sus Generadores?

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021

Construcción a partir de la definición del grupo I

Debido a la definición del grupo, todo elemento de $SO(3)$ es una matriz 3×3 que satisface,

$$g^T g = I_{3\times 3}$$

Para buscar los generadores examinamos un elemento del grupo cercano a la identidad:

$$g = I + \epsilon$$

Construcción a partir de la definición del grupo II

Al imponer la condición sobre los elementos del grupo, queda

$$[\mathrm{I}+\epsilon]^T[\mathrm{I}+\epsilon]\approx \mathrm{I}+\epsilon+\epsilon^T=\mathrm{I}$$

así que

$$\boxed{\epsilon+\epsilon^T=0\,,\qquad \epsilon=-\epsilon^T}$$

Construcción a partir de la definición del grupo III

Concluímos que

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^3 & -\epsilon^2 \\ -\epsilon^3 & 0 & \epsilon^1 \\ \epsilon^2 & -\epsilon^1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^a M_a$$

Construcción a partir de la definición del grupo IV

Así que los generadores y su álgebra de conmutación son

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[M_i, M_j] = -\epsilon_{ijk} M_k$$

Sobre los Generadores de $SO(3)$

- La escogencia en el orden de los parámetros fue "inteligente". De haber escogido otro orden de los parámetros el álgebra no hubiera tenido el aspecto estándar.
- De escoger otro orden (o incluso otras posiciones para los 1's y -1's) habría que haber trabajado un poco más para llegar a la forma estándar del álgebra

¿Qué queremos decir con representaciones del álgebra (o del grupo)?

Supongamos que usted comienza con el álgebra de conmutación

$$[\mathsf{M}_i, \mathsf{M}_j] = -\epsilon_{ijk}\mathsf{M}_k$$

y supongamos adicionalmente, que sin pensarlo mucho, usted se da a la tarea de encontrar 3 matrices 5×5 que satisfagan tales reglas. Si usted triunfa en su tarea, tendrá el derecho de decir que encontró una representación del álgebra. Más aún, sus matrices actúan como transformaciones lineales sobre un espacio vectorial de 5 dimensiones, tal espacio es el **espacio de representación** ó representación del álgebra (grupo)

- Usted está familiarizado con la teoría cuántica del momentum angular y las relaciones de conmutaión

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

- Tales relaciones constituyen el álgebra $su(2)$

Entre los conocimientos básicos de la teoría general del momemtum angular está el hecho de que para cada $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$ hay un espacio $j(j+1)$ dimensional en el cual J^2 y J_3 son diagonales mientras que los operadores de subida y bajada $\mathrm{J}_\pm$ tiene una forma estándar muy sencilla a partir de la cual se construyen lo operadores J_1 y J_2.

Los tripletes de operadores $j(j+1)$-dimensionales $(\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \mathrm{J}_3)$ constituyen representaciones (**irreducibles**) de $su(2)$.

Representaciones $j = 1/2$ y $j = 1$

j=1/2 también llamada, representación **2** por su dimensionalidad

$$\mathrm{J}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$$

j=1 ó representación **3**

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$