Introducción a la Física Relativista II: Espinores de Weyl

Mario I. Caicedo

3 de febrero de 2021

Herman Weyl

9/11/1885-8/12/1955. Matemático, fisico y filósofo alemán. Desde 1933 fue miembro del IAS.

Motivación

Los espinores de Weyl constituyen objetos de enorme importancia en la teoría de representaciones del Grupo de Lorentz y existen en dos clases denominadas **espinores izquierdos y diestros**, ambas clases tomadas en forma conjunta construyen los espinores de Dirac.

Desde el punto de vista de la física de partículas, los espinores de Weyl se utilizan para representar partículas sin masa de spin (en verdad, **helicidad**) $1/2$, mientras que los espinores de Dirac representan partículas masivas de spin $1/2$ como los electrones y los quarks.

Información

Este repositorio contiene un cuaderno jupyter (puede correrlo en colab) muy relevante para esta clase.

Representación (1/2,0)

- En esta representación, los generadores del primer $su(2)$ son los de la representación bidimensional (spin 1/2 de) $su(2)$ y los del segundo son nulos son los de la representación trivial.
- En consecuencia, los generadores N_i son proporcionales a las matrices de Pauli ($\mathrm{N}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$), mientras que los $\mathrm{N}_i^\dagger = 0$.
- De acuerdo a esto

$$\mathrm{J}_i = \frac{\sigma_i}{2}\,, \quad \mathrm{K}_i = -i\mathrm{J}_i = -i\frac{\sigma_i}{2}$$

Mapa Exponencial

Usando la notación que hemos introducido anteriormente $(\vec{\theta}, \vec{\phi})$ para los parámetros de boosts y rotaciones , una transformación de Lorentz finita (boost seguido de rotación) es

$$\mathrm{M}_L = e^{-i\vec{\phi}.\vec{\mathrm{K}}} e^{-i\vec{\theta}.\vec{\mathrm{J}}} = e^{\frac{1}{2}\vec{\phi}.\vec{\sigma}}\, e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma}}$$

Espinores izquierdos

Definición

Un **espinor de Weyl izquierdo** *es un arreglo bidimensional de entradas complejas que bajo una tranbsformación de lorentz se transfora como*

$$\xi \to \xi' = \mathsf{M}_L \xi$$

representación (0,1/2)

- En esta representación, $\mathrm{N}_i = 0$ and $\mathrm{N}_i^\dagger = \frac{\vec{\sigma}}{2}$.
- Consecuentemente,

$$\mathrm{J}_i = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \qquad \mathrm{K}_i = i\mathrm{J}_i = i\frac{\sigma_I}{2}$$

- El signo delante de $\vec{\mathrm{K}}$, aparentemente inocente, es fundamental.

Mapa Exponencial y Espinores R

$$\mathsf{M}_R = e^{-i\vec{\phi}.\vec{\mathsf{K}}} e^{-i\vec{\theta}.\vec{\mathsf{J}}} = e^{-\frac{1}{2}\vec{\phi}.\vec{\sigma}}\, e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma}}$$

Definición

Un espinor de Weyl diestro (derecho) es un arreglo bidimensional de entradas complejas que bajo una transformación de Lorentz, se transforma como

$$\xi \to \xi' = \mathsf{M}_R \xi$$

$S\ell(2,C)$

- Tanto M_L como M_R son matrices 2×2 de entradas complejas y determinante $+1$, en otros términos, $M_L, M_R \in S\ell(2,C)$.
- $S\ell(2,C)$ es simplemente conexo, su álgebra de Lie es idéntica a la de $so(1,3)$ y por tanto, es el *cubrimiento universal* de $SO(1,3)$.
- En pocas palabras, estamos estudiando la teoría de representaciones de $S\ell(2,C)$.

Frame Title

Consideremos las coordenadas $x^\mu(\mathcal{P})$ de un evento $\mathcal{P}$, a partir de ellas y con la ayuda de las matrices de Pauli construyamos el objeto hermítico

$$\mathrm{X} = x^0 \mathrm{I} + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 = x^\mu\,\sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}$$

con, σ_μ dado por $(\mathrm{I}, -\sigma_i)$.
Ocurre que:

$$det(\mathrm{X}) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \qquad (1)$$

$S\ell(2, C) \rightarrow SO(1,3)$

- Con $\mathrm{M} \in S\ell(2, C)$ arbitrario, podemos definir

$$\mathrm{X}' = \mathrm{M}\,\mathrm{X}\,\mathrm{M}^{\dagger}$$

- X' es hemítico y $det(\mathrm{X}') = det(\mathrm{X})$
- Deducimos que, $S\mathrm{M} \in S\ell(2, C)$ induce una transformación de Lorentz $(\Lambda(\mathrm{M}))$ en las coordenadas x^{μ}'s, es decir,

$$\mathrm{X}' = x^{\mu\prime}\sigma_{\mu}\,, \quad x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

La Transformación Inducida

Para encontrar Λ notemos que

$$\boxed{\begin{aligned}(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu})\ \sigma_{\mu} &= x^{\mu}\,\mathrm{M}\sigma_{\mu}\mathrm{M}^{\dagger}\\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{\mu} &= \mathrm{M}\sigma_{\mu}\mathrm{M}^{\dagger}\,.\end{aligned}} \tag{2}$$

Numericamente,

$$[\Lambda(\mathrm{M})]^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}tr(\sigma_{\mu}\mathrm{M}\sigma_{\nu}\mathrm{M}^{\dagger}) \tag{3}$$

Se introduce,

$$\bar{\sigma}^{\mu} \equiv (\mathrm{I}, -\sigma_i)\,, \tag{4}$$

para poner,

$$\boxed{[\Lambda(\mathrm{M})]^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}tr(\bar{\sigma}^{\mu}\mathrm{M}\sigma_{\nu}\mathrm{M}^{\dagger})} \tag{5}$$

Generadores Covariantes I

Para obtener una versión manifiestamente covariante de la construcción que se ha presentado, basta con desandar el camino para combinar los generadores J_i y J_i de manera que un elemento de $S\ell(2,C)$ se exprese en la forma,

$$\mathsf{L} = \mathsf{I} - i\frac{1}{2}\Delta_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} \, .$$

En el caso de la representación L, los generadores $\Sigma^{\mu\nu}$ quedan dados por

$$\Sigma^{oi} = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad \text{y} \quad \Sigma^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma_k$$

Matrices de Pauli Covariantes

Habiamos definido

$$\sigma_\mu \equiv (\mathrm{I}, -\sigma_i) \qquad \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathrm{I}, -\sigma_i)$$

lo que implica que

$$\sigma^\mu = \eta^{\mu\nu}\sigma_\nu = (\mathrm{I}, \sigma_i) \qquad \eta_{\mu\nu}\bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}^\nu = (\mathrm{I}, \sigma_i)$$

Generadores Covariantes II

En términos de las matrices de Pauli covariantes, los generadores para las representaciones izquierda y derecha de $s\ell(2,C) \approx so(1,3)$ son (**Ejercicio**),

- $(\frac{1}{2},0)$ ó representación izquierda

$$\boxed{\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}\right)}$$

- $(0,\frac{1}{2})$ ó representación derecha

$$\boxed{\bar{\Sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\right)}$$

A Manera de Resumén

Los espinores de Weyl izquierdos y derechos (ψ_L y ψ_R respectivamente), que bajo la acción de $S\ell(2,C)$ transforman como

$$\boxed{\psi_L \to e^{-\frac{i}{2}\Delta_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\psi_L\,, \qquad \psi_R \to e^{-\frac{i}{2}\Delta_{\mu\nu}\bar{\Sigma}^{\mu\nu}}\psi_R}$$

constituyen las representaciones más básicas del grupo de Lorentz. A partir de ellos es posible construir cualquier otra representación.

Representaciones inequivalentes de $S\ell(2, C)$

- Es importante reconocer que no existe una matriz $\mathsf{S} \in S\ell(2, C)$ tal que $\mathsf{M}_R = \mathsf{S}\mathsf{M}_L\mathsf{S}^{-1}$, en consecuencia las representaciones izquierda y derecha de $S\ell(2, C)$ son inequivalentes.
- Las representaciones L y R pueden ser relacionadas a través de la identidad

$$\mathsf{M}_L = (-i\sigma_2)\mathsf{M}_R^*(-i\sigma_2)$$

- Esta última identidad puede identificarse con un cambio de patidad.