Introducción a la Física Relativista II: Electrodinámica II

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021

Potencial Vector

La Ley de Gauss magnética,

$$\partial_i B_i = 0$$

implica la existencia de un campo vectorial A_i tal que

$$\boxed{B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k}$$

$$\vec{B} = rot(\vec{A})$$

Potencial EScalar

Al sustituir el vector potencial en la ley de inducción de Faraday's

$$\epsilon_{ijk}\partial_j E_k = -\frac{1}{c}\partial_t \left[\epsilon_{ijk}\partial_j A_k\right] \, ,$$

queda

$$\epsilon_{ijk}\partial_j \left[E_k + \frac{1}{c}\partial_t A_k\right] = 0 \, ,$$

que a su vez implica la existencia de un potencial escalar ϕ tal que

$$E_k + \frac{1}{c}\partial_t A_k = -\partial_k \phi \, ,$$

Los Campos en Términos de Los Potenciales

$$\boxed{B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k}$$

$$\boxed{E_k = -\partial_k \phi - \frac{1}{c}\partial_t A_k}$$

Clásicamente, los potenciales no intervienen en la dinámica de las partículas, sin embargo, en mecánica cuántica los potenciales son fundamentales.

Transformaciones de Calibre

Fundamental:

El campo eléctrico y la inducción magnética resultan invariantes ante los cambios (transformacines de calibre)

$$\boxed{A_i \to A_i + \partial_i \psi \qquad \phi \to \phi - \frac{1}{c}\partial_t \psi}$$

Demostración de la Invariancia de

$$B_i \to \epsilon_{ijk}\partial_j\left[A_k + \partial_k\psi\right] = B_i + \epsilon_{ijk}\partial^2_{jk}\psi = B_i\;,$$

$$E_k \to E_k = -\partial_k\left[\phi - \frac{1}{c}\partial_t\psi\right] - \frac{1}{c}\partial_t\left[A_k + \partial_k\psi\right] =$$
$$= E_k - \frac{1}{c}\partial^2_{tk}\psi + \frac{1}{c}\partial^2_{kt}\psi = E_k$$

Ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales I

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas han sido resueltas en términos de los potenciales vectorial y escalar ($\vec{A}$ y ϕ)

$$B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$$

$$E_k = -\partial_k \phi - \frac{1}{c}\partial_t A_k$$

Ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales II

El siguiente paso lógico consiste en expresar las dos ecuaciones no homogéneas en términos de los potenciales. Este es un simple ejercicio de sustitución en la ley de Gauss y la ley de Amprere Maxwell

$$\partial_k(\partial_k\phi + \frac{1}{c}\partial_t A_k) = -4\pi\rho$$

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\left[\epsilon_{k\ell m}\partial_\ell A_m\right] + \frac{1}{c}\partial_t\left[\partial_i\phi + \frac{1}{c}\partial_t A_i\right] = \frac{4\pi}{c}J_i\ ,$$

Ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales II

La identidad

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

lleva a esta forma de las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas

$$\partial^2_{kk}\phi + \frac{1}{c}\partial_t\partial_k A_k = -4\pi\rho$$

$$\partial_i\left[\frac{1}{c}\partial_t\phi + \partial_j A_j\right] + \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}A_i - \partial^2_{\ell\ell}A_i = \frac{4\pi}{c}J_i\,,$$

En esta donde el operador de D' Alambert, $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, aparece naturalmente

El Calibre de Lorentz

La libertad de calibre permite escoger los potenciales de manera que satisfagan la condición

$$\frac{1}{c}\partial_t\phi + \partial_j A_j = 0$$

Y al hacerlo, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas tomas la forma

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\phi - \partial^2_{kk}\phi = 4\pi\rho \\ \dfrac{1}{c^2}\partial^2_{tt}A_i - \partial^2_{\ell\ell}A_i = \dfrac{4\pi}{c}J_i \end{array}}$$

Ya habíamos introducido la cuadricorriente

$$J^{\mu} \to (c\rho, \vec{J}) \,,$$

SI notamos que eloperador de D' Alambert es escalar e introducimos el siguiente objeto indexado

$$A^{\mu} \to (\phi, \vec{A}) \,,$$

las ecuaciones no homogéneas se unifican como[1],

$$\boxed{\partial_{\alpha}\partial^{\alpha} A^{\mu} = \frac{4\pi}{c} J^{\mu}}$$

[1]Incluso el calibre de Lorentz resulta covariante,

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$$

El Tensor de Campo

Puede parecer extraño en este momento, pero el objeto geométrico natural no es el potencial contravariante (A^μ), sino su contraparte covariante.

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A})\,.$$

A_μ permite definir de manera natural un tensor covariante antisimétrico (F) de dos índices según

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Invariancia de Calibre del Tensor de Campo

EJERCICIO

1. Demuestre que las transformaciones de calibre se pueden escribir $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$
2. Demuestre que F es invariante de calibre

Componentes del Tensor de Campo

- La antisimetría de F garantiza que $F_{00} = F_{ii} = 0$
- Las componentes F_{0i} coinciden con las del campo eléctrico,

$$F_{0i} = \partial_0(-A_i) - \partial_i A_0 = -\left[\frac{1}{c}\partial_t A_i + \partial_i \phi\right] = E_i$$

- Las componentes espaciales

$$F_{ij} = \partial_i(-A_j) - \partial_j(-A_i) = \partial_j A_i - \partial_i A_j \,,$$

se relacionan con las entradas de la inducción magnética,

$$F_{12} = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 = -B_z$$
$$F_{13} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = B_y$$
$$F_{23} = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = -B_x$$

Ecuaciones de Maxwell Homogéneas

Luego de introducir los potenciales y usarlos como variables dinámicas, las ecuaciones homogéneas (identidades de Bianchi)

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$$

Se demuestran trivialmente

$$\partial_\alpha \left[\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta\right] + \partial_\gamma \left[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right] + \partial_\beta \left[\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma\right] = 0$$

Ecuaciones de Maxwell Inhomogéneas

En términos del tensor de Faraday contravariante, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas son

$$\partial_\nu \, F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \, .$$

Al sustituir el potencial,

$$\partial_\nu \partial^\nu \, A^\mu - \partial_\mu \partial_\nu \, A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \, ,$$

que al escoger el calibre de Lorentz se reducen a

$$\partial_\nu \partial^\nu \, A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \, ,$$

Resumen

- Las ecuaciones de Maxwell son equivalentes al siguiente par de ecuaciones

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \tag{1}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{2}$$

- La ecuación 1 implica la existencia del potencial (A_μ), en términos del cual, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
- La ecuación 2 permite encontrar el potencial a partir de la cuadricorriente, pero no solo eso, por construcción, garantiza que la carga es conservada,

$$\partial_\mu J^\mu \propto \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Comentarios Generales

- Clásicamente, el objeto fundamental es el T. de Faraday
- Las identidades de Bianchi (ecs. de Maxwell homogéneas), implican, via el lema de Poincaré, la existencia del cuadrivector A_μ.
- Faraday es invariante de calibre, es decir, invariante bajo las transformaciones (**locales**) $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$
- ¿Cuál es el origen de las transformaciones de calibre?
- ¿Como formulamos una acción?