Introducción a la Física Relativista II: Otras Representaciones del Grupo de Lorentz

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021

Información

Este repositorio contiene un cuaderno jupyter (puede correrlo en colab) muy relevante para esta clase.

En la representación fundamental ó vectorial ($\mathbf{4}_v$) los vecotres contravariantes y covariantes transforman como

$$\boxed{\begin{aligned} A'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \\ B'_{\nu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} B_{\mu}\,, \end{aligned}} \tag{1}$$

Definición

Esta representación proviene del producto $\mathbf{4}_v \otimes \mathbf{4}_v$, los objetos contravariantes y covariantes de esta representación se transforman en la forma

$$A'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\rho}\Lambda^{\beta}{}_{\sigma}A^{\rho\sigma}$$
$$A'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\Lambda^{\sigma}{}_{\beta}A_{\rho\sigma}$$

Esta representación, es altamente reducibe. En efecto, y solo para emprezar, un tensor covariante puede descomponerse en un tensor simétrico y uno antisimétrico

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}\right)$$

y estos a su vez pueden reducirse aún más

Descomposición del tensor simétrico de dos índices

Si $S_{\alpha\beta}$es simétrico, podemos poner

$$S_{\alpha\beta} = (\text{simétrico sin traza}) \oplus \text{traza}$$

donde

- Por traza entendemos (representación **1** o escalar)

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}S^{\mu}{}_{\mu}$$

- Componente sin traza:

$$S^{st}_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}S^{\mu}{}_{\mu}\,,$$

  representación **9**

Descomposición del tensor antisimétrico de dos índices

En dimensión 4 el dual de un tensor de dos índices, es también un tensor de dos índices. Eso permite la siguiente descomposición, dado $A_{\alpha\beta}$ antisimétrico, ocurre que

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^{(autodual)} + A_{\alpha\beta}^{(antiautodual)}$$

donde, las componentes autodual y antiautodual satisfacen,

$$\boxed{\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{(autodual)} &= \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}A_{\alpha\beta} \\ A_{\alpha\beta}^{(autodual)} &= -\frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}A_{\alpha\beta} \end{aligned}}$$

- No es dificil contar las dimensionalidades de las componentes irreducibles de la representación tensorial de dos índices (**ejercicio**)
- En términos de las dimensionalidades, la representación que estamos discutiendo se descompone como

$$A_{\alpha\beta} = 9 + 1 + 3 + 3$$

- La descomposición en representaciones irreducibles es dificil de genralizar (recuerde la descomposición de Clebsch–Gordan para la suma de momenta angulares en mecánica cuántica)
- En el caso del grupo de Lorentz, la descomposición $so(1,3) \approx su(2) \oplus su(2)$ y el uso de los operadores de Casimir adecuados facilita un poco las cosas.
- En el caso de la descomposición del producto $(4_v \otimes 4_v)$, se obtiene

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (1\oplus 0, 1\oplus 0) = (0,0)\oplus(1,0)\oplus(0,1)\oplus(1,1)$$

Resumen

(ℓ_a, ℓ_b)	**Dimensión**	**Nombre**
$(0,0)$	1	Escalar
$(\frac{1}{2},0)$	2	Espinorial de Weyl Izquierda
$(0,\frac{1}{2})$	2	Espinorial de Weyl Derecha
$(1,0)$	3	Tensorial Autodual.
$(0,1)$	3	Tensorial Antiautodual.
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	4	Vectorial
$(1,1)$	9	Tensorial Símétrica sin Traza

Cuadro: Algunas representaciones Irreducibles de Irreducible de $so(1,3)$

- ¿Por qué no aparecen los espinores de Dirac en el cuadro 1
- Considere $SO(3)$
  1. Construya los objetos de su representación tensorial de dos índices ($\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$).
  2. Descomponga los objetos anteriores en sus componentes irreducibles, ¿qué dimensionalidades tienen?
  3. Podría identificar estas representacines irreducilbes con sus correspondientes en la teoría de momentum angular en mecánica cuántica
  4. ¿Se le ocure alguna aplicación?