

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA RELATIVISTA II: OTRAS REPRESENTACIONES DEL GRUPO DE LORENTZ

Mario I. Caicedo

5 de febrero de 2021



INFORMACIÓN

Este [repositorio](#) contiene un cuaderno jupyter (puede correrlo en colab) muy relevante para esta clase.



En la representación fundamental ó vectorial ($\mathbf{4}_v$) los vectores contravariantes y covariantes transforman como

$$\begin{aligned} A'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \\ B'_{\nu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} B_{\mu}, \end{aligned} \tag{1}$$



DEFINICIÓN

Esta representación proviene del producto $\mathbf{4}_v \otimes \mathbf{4}_v$, los objetos contravariantes y covariantes de esta representación se transforman en la forma

$$A'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\rho \Lambda^\beta_\sigma A^{\rho\sigma}$$

$$A'_{\alpha\beta} = \Lambda^\rho_\alpha \Lambda^\sigma_\beta A_{\rho\sigma}$$

Esta representación, es altamente reducible. En efecto, y solo para empezar, un tensor covariante puede descomponerse en un tensor simétrico y uno antisimétrico

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha})$$

y estos a su vez pueden reducirse aún más



DESCOMPOSICIÓN DEL TENSOR SIMÉTRICO DE DOS ÍNDICES

Si $S_{\alpha\beta}$ es simétrico, podemos poner

$$S_{\alpha\beta} = (\text{simétrico sin traza}) \oplus \text{traza}$$

donde

- Por traza entendemos (representación **1** o escalar)

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} S^\mu{}_\mu$$

- Componente sin traza:

$$S_{\alpha\beta}^{st} \equiv S_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} S^\mu{}_\mu,$$

representación **9**



DESCOMPOSICIÓN DEL TENSOR ANTISIMÉTRICO DE DOS ÍNDICES

En dimensión 4 el dual de un tensor de dos índices, es también un tensor de dos índices. Eso permite la siguiente descomposición, dado $A_{\alpha\beta}$ antisimétrico, ocurre que

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^{(autodual)} + A_{\alpha\beta}^{(antiautodual)}$$

donde, las componentes autodual y antiautodual satisfacen,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{(autodual)} &= \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} A_{\sigma\rho} \\ A_{\alpha\beta}^{(antiautodual)} &= -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} A_{\sigma\rho} \end{aligned}$$



- No es difícil contar las dimensionalidades de las componentes irreducibles de la representación tensorial de dos índices (**ejercicio**)
- En términos de las dimensionalidades, la representación que estamos discutiendo se descompone como

$$A_{\alpha\beta} = 9 + 1 + 3 + 3$$



- La descomposición en representaciones irreducibles es difícil de generalizar (recuerde la descomposición de Clebsch–Gordan para la suma de momenta angulares en mecánica cuántica)
- En el caso del grupo de Lorentz, la descomposición $so(1, 3) \approx su(2) \oplus su(2)$ y el uso de los operadores de Casimir adecuados facilita un poco las cosas.
- En el caso de la descomposición del producto $(4_v \otimes 4_v)$, se obtiene

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1 \oplus 0, 1 \oplus 0) = (0, 0) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1)$$



RESUMEN

(ℓ_a, ℓ_b)	Dimensión	Nombre
$(0, 0)$	1	Escalar
$(\frac{1}{2}, 0)$	2	Espinorial de Weyl Izquierda
$(0, \frac{1}{2})$	2	Espinorial de Weyl Derecha
$(1, 0)$	3	Tensorial Autodual.
$(0, 1)$	3	Tensorial Antiautodual.
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4	Vectorial
$(1, 1)$	9	Tensorial Símetrica sin Traza

CUADRO: Algunas representaciones Irreducibles de Irreducible de $so(1, 3)$



- ¿Por qué no aparecen los espinores de Dirac en el cuadro 1
- Considere $SO(3)$
 - 1 Construya los objetos de su representación tensorial de dos índices ($3 \otimes 3$).
 - 2 Descomponga los objetos anteriores en sus componentes irreducibles, ¿qué dimensionalidades tienen?
 - 3 Podría identificar estas representaciones irreducibles con sus correspondientes en la teoría de momentum angular en mecánica cuántica
 - 4 ¿Se le ocurre alguna aplicación?

