

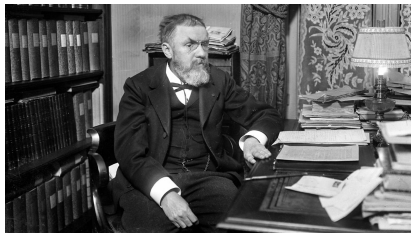
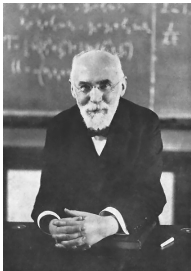
INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA RELATIVISTA II: GRUPO Y ÁLGEBRA DE LORENTZ

Mario I. Caicedo

4 de febrero de 2021



LORENTZ Y POINCARÉ



INFORMACIÓN

Este [repositorio](#) contiene un cuaderno jupyter (puede correrlo en colab) muy relevante para esta clase.



SIMETRÍAS DE LA MÉTRICA DE MINKOWSKI

PREGUNTA

PROBLEMA

¿Qué conjunto de transformaciones $(x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu(x^\alpha))$ del espacio tiempo de Minkowski mantienen invariante al tiempo propio?

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$



RESPUESTA

- La transformación más general posible (Weinberg) que satisface la condición de interés es una **transformación afín**

$$\hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho + b^\mu \quad (1)$$

donde Λ tiene que satisfacer la condición $\Lambda^T \eta \Lambda = \Lambda$

- El conjunto de todas estas transformaciones constituye el denominado **Grupo de Poincaré** ($IO(1, 3)$)



$IO(1, 3)$

- $\dim[ISO(1, 3)] = 10$.
- El subconjunto de transformaciones **homogéneas** constituye un subgrupo (el grupo de Lorentz, $O(1, 3)$) de $ISO(1, 3)$.



DEFINICIÓN

El grupo de Lorentz $O(1, 3)$ es el conjunto de las matrices 4×4 que satisfacen

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

TEOREMA

Todo elemento $\Lambda \in O(1, 3)$ satisface las identidades,

1.- $\det(\Lambda) = \pm 1$

2.- $|\Lambda_0^0| \geq +1$



COMPONENTES DEL GRUPO DE LORENTZ I

- La definición de las transformaciones de Lorentz implica que $\det(\Lambda) = \pm 1$.
- Adicionalmente (también debido a la definición),

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = \eta_{00}, \quad (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = \eta_{00}$$

de manera que $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$



COMPONENTES DEL GRUPO DE LORENTZ II

- Cuando $\det(\Lambda) = +1$, hablamos del **Grupo de Lorentz propio**, en caso contrario, hablamos del grupo de Lorentz impropio.
- Cuando una transformación de Lorentz satisface $\Lambda^0_0 \geq 1$, decimos que es ortocrona. En caso contrario, anti ortocrona.



COMPONENTES DEL GRUPO DE LORENTZ III

El grupo de Lorentz se divide en cuatro componentes

- $\det(\Lambda) = +1$
 - L_{\uparrow}^{+} . Grupo de Lorentz propio ortocrono, $SO(1, 3)$.
 - L_{\downarrow}^{+} . Transformaciones de Lorentz propias antiortocronas.
- $\det(\Lambda) = -1$
 - L_{\uparrow}^{-} Transformaciones de Lorentz impropias ortocronas.
 - L_{\downarrow}^{-} Transformaciones de Lorentz impropias antiortocronas.



$SO(1, 3)$

- Dada la definición de $SO(1, 3)$, la representación fundamental (4) está dada por matrices 4×4 que actúan como transformaciones lineales sobre el espacio de Minkowski \mathcal{M}_4 .
- Los generadores pueden encontrarse de la manera usual aplicando la definición del grupo a un elemento $\mathbf{g} \in O(1, 3)$ cercano a la identidad.
- Por razones que quedarán claras, los seis generadores se dividen en dos conjuntos de tres generadores cada uno, denominados generadores de boosts y de rotaciones.



GENERADORES DE BOOSTS

$$\mathbf{K}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{K}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



GENERADORES DE ROTACIONES

$$\mathbf{J}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{J}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



EL MAPA EXPONENCIAL (UN EJEMPLO)

La transformación de Lorentz consistente en una rotación pura seguida de un boost está dada por la matriz

$$\Lambda = e^{i\phi\hat{p}\cdot\vec{K}}e^{i\theta\hat{n}\cdot\vec{J}},$$

donde,

- \hat{n} es el vector director de la rotación y θ el ángulo,
- \hat{p} la dirección del boost y $\phi \equiv \tanh^{-1}\beta$ el parámetro de velocidad.



$so(1, 3)$ EN LA BASE $\mathbf{K}_i, \mathbf{J}_i$

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k$$

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k$$

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{K}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{K}_k$$



INTERPRETACIÓN DE ESTA FORMA DEL ÁLGEBRA

- Los \mathbf{J}_i generan rotaciones puras, y de hecho, constituyen una subálgebra
- Los generadores de boost (\mathbf{K}_i) se comportan de manera bastante diferente.
 - Son vectores bajo la subálgebra de rotaciones.
 - Se mezclan entre si generando rotaciones puras. Este es el origen de la **precesion de Thomas**. Que, semiclásicamente produce de manera -casi correcta- el momento magnético del electrón.



CAMBIO DE BASE

$$\mathbf{N}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_i + i\mathbf{K}_i)$$

$$\mathbf{N}_i^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_i - i\mathbf{K}_i)$$



$so(1, 3)$ EN LA BASE $\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_i^\dagger$

$$[\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{N}_k$$

$$[\mathbf{N}_i^\dagger, \mathbf{N}_j] = 0$$

$$[\mathbf{N}_i^\dagger, \mathbf{N}_j^\dagger] = -i\epsilon_{ijk}\mathbf{N}_k^\dagger$$



INTERPRETACIÓN DE LA BASE $\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_i^\dagger$

- El álgebra se descompone como dos subálgebras $su(2)$ independientes.

$$so(1, 3) = su(2) \oplus su(2)$$

- Consecuencia:
 - Las representaciones de $so(1, 3)$ pueden etiquetarse con los autovalores de los casimires: $A = \sum_i (\mathbf{N}_i)^2$, $B = \sum_i (\mathbf{N}_i^\dagger)^2$
 - Autovalores: $\ell_a(\ell_a + 1)$, $\ell_b(\ell_b + 1)$. $\ell_a = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ (igual para ℓ_b)
 - La notación para las representaciones es: (ℓ_a, ℓ_b)



- Use el mapa exponencial para encontrar el boost estándar a lo largo del eje x .
- Demuestre la forma del álgebra para los generadores $\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_i^\dagger$.
- Siga un procedimiento similar al que se ha presentado para construir la representación fundamental del álgebra $so(4)$, muestre que $so(4) = su(2) \oplus su(2)$, ¿conoce alguna aplicación física del resultado?.
- ¿Qué podría decir de la representación $(1/2, 0)$?

