23.5.23

习题二十二

17. (1) $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{x}{x+1}n+\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right](-x)^n+\frac{1}{(x+1)^2}\right)$

$=\frac{1}{(1+x)^2}$

(3) $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4x^n$

$=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}$

$=\frac{5-4x}{(1-x)^2}$

19. (1) $C(x)=(x+x^3+\cdots)^4$

$=\frac{x^4}{(1-x^2)^4}$

(2) $C(x)=(1+x^3+x^6+\cdots)^4$

$=\frac{1}{(1-x^3)^4}$

(3) $C(x)=(1+x)(1+x+x^2+\cdots)^2$

$=\frac{1+x}{(1-x)^2}$

(4) $C(x)=(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)(1+x+\cdots)^2$

$=(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)\frac{1}{(1-x)^2}$

(5) $C(x)=(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4$

$=\frac{x^{40}}{(1-x)^4}$

20. $G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)^2$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 e^{2x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}+2)e^{2x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{4x}+2e^{2x}+1)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n+2^{n+1})\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}$$

故$1\times n$的方格有$4^{n-1}+2^{n-1}+\frac{1}{4}\delta_{n0}$种方案，

其中$\delta_{n0}=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$

21. N被无序拆分成正整数的方法

$N=n_1\cdot x_1+\cdots+n_k\cdot x_k$

与$\{N\cdot a\}$的划分

$\{n_1\cdot\{x_1\cdot a\},\ldots,n_k\cdot\{x_k\cdot a\}\}$

一一对应，故方法数相同

26. (1) $G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n!\cdot\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{1-x}$

(2) $G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\frac{1}{1-2x}$

(3) $G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=e^{-x}$

28. $G_e(x)=(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)(1+x+\frac{1}{2}x^2)(1+x+\cdots)$

展开得到$\frac{1}{24}x^4$的系数为71

故可组成71个四位数

$G_e'(x)=(1+x+\cdots)^2(1+x)$

展开得到$\frac{1}{6}x^3$的系数为20

故可组成20个四位偶数

30. 设2n个点有a_n种配对方法

易发现$\begin{cases} a_n=\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_{n-k}, & n\geq 1 \\ a_0=1 \end{cases}$

设$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$G^2(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}a_{n+1-k}\right)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$$
$$=\frac{1}{x}[G(x)-1]$$

$\Rightarrow xG^2(x)-G(x)+1=0$

$\Rightarrow G(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$

由于$G(0^+)=1$，故$G(x)=\frac{1}{2x}[1-\sqrt{1-4x}]$

$$G(x)=\frac{1}{2x}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(-4x)^n\right]$$
$$=\frac{1}{2x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-3)!}{n!(n-2)!}x^n\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}x^n$$

故$a_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$

32. $x(x+1)\cdots(x+6)$

$=(x^2+x)(x+2)\cdots(x+6)$

$=(x^3+3x^2+2x)(x+3)\cdots(x+6)$

$=(x^4+6x^3+11x^2+6x)(x+4)\cdots(x+6)$

$=(x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x)(x+5)(x+6)$

$=(x^6+15x^5+85x^4+225x^3+274x^2+120x)(x+6)$

$=x^7+21x^6+175x^5+735x^4+1624x^3+1764x^2+720$

其中x^i的系数即为$\left[{7 \atop i}\right]$

34. 设方案数为$f(n,k)$

对n归纳证明$f(n,k)=k!\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$

$n=1$时显然

假设$n-1$时成立，下证n时成立

$f(n,k)=k\left[f(n-1,k-1)+\frac{k-1}{k}f(n-1,k)\right]$

$=k!\left\{{n-2 \atop k-2}\right\}+(k-1)k!\left\{{n-2 \atop k-1}\right\}$

$=k!\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$

故$f(n,k)=k!\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$