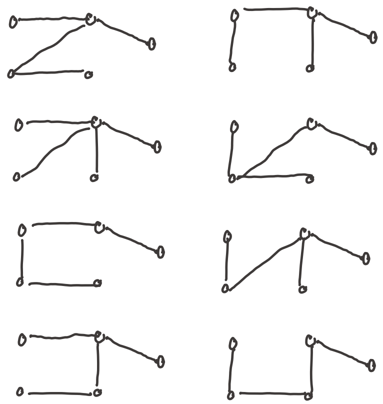
22.11.24

作业

- P163: 2, 4

© Peking University 35

2. 计算可得，生成树共8种，列举如下



4. $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix}$

(1) 0, 0, 2, 2

(2) 2

(3) 1, 1, 3, 5

(4) 1

(5) 33

(6) 11

(7) 88, 22

(8) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

22.11.29

作业

- P179: 6，7，12，16，18

© Peking University　　101

6. 反之，若不极大，则可加入某条边使 G 仍可平面化，但此时已不满足 $m \le 3n-6$，矛盾.

7. 反之，若 G, $\bar{G}$ 都为平面图，则

$$\begin{cases} m \le 3n-6 \\ \bar{m} \le 3n-6 \end{cases},$$

其中 $n=|V(G)|=|V(\bar{G})|$, $m=|E(G)|$, $\bar{m}=|E(\bar{G})|$.

$$\frac{n(n-1)}{2} = m+\bar{m} \le 6n-12$$

易计算得该不等式与 $n \ge 11$ 矛盾.

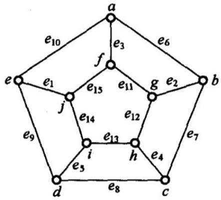
12. G 无环，故 G^* 无桥，即2-边连通.
G 每个面都是3次，故 G^* 是3-正则的.

16. 设 $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$.

$$\begin{cases} n-m+\sum r_i = 2 \\ 2m = \sum i r_i \\ 2m = 3n \end{cases}$$

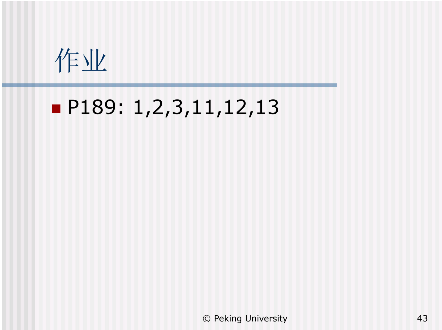
$\Rightarrow 12 = \sum (6-i) r_i$

18.



abcdejfghi 即为一条哈密顿回路，故 G 为哈密顿图.
假设 $\exists$ 哈密顿回路 C，$e_1, e_2 \in C$.
若 $e_3 \notin C$，可知 $e_{10}, e_6, e_{15}, e_{11} \in C$.
若 $e_3 \in C$，可知 e_{10}, e_6 其中一个在 C 中，不妨设 $e_{10} \in C$，可知 $e_1, e_{15} \in C$.
两种情况都与 C 是哈密顿回路矛盾.

22.12.6


作业

- P189: 1,2,3,11,12,13

© Peking University 43

1.(1) 为了简化书写，记 $f(G,k)$ 为 $f($

$f(\ ) = f(\ ) + f(\ )$

$= f(\ ) + f(\ ) + f(\ )$

$= f(\ ) + 2f(\ ) + f(\ )$

$= f(\ ) + f(K_4) + 2f(K_4) +$
$2f(K_3) + f(\ )$

$= f(K_5) + 4f(K_4) + 2f(K_3) + f(\ )$

而 $f(\ ) = f(\ ) + f(K_3)$

$= f(K_4) + 2f(K_3)$

故 $f(\ ) = f(K_5) + 5f(K_4) + 4f(K_3)$

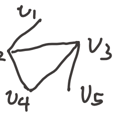
$= k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$
$+5k(k-1)(k-2)(k-3)$
$+4k(k-1)(k-2)$
$= k(k-1)^3(k-2)$

(2) $\chi(G) = 3$

(3) $f(G, \chi(G)) = f(G,3)$
$= 24$

$f(G,4) = 216$

2.



取点割集 $\{v_2\}$.

$f(G,k) = \frac{1}{k} \cdot f(\ ) \cdot f(\ )$

$= \frac{1}{k} \cdot f(K_2)(f(K_4) + 2f(K_3))$

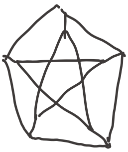
$= k(k-1)^3(k-2)$

3. $f(G,k)=f(T_n,k)\cdot f(C_m,k)$

$$= k(k-1)^{n-1}\cdot\left[(k-1)^m+(-1)^m(k-1)\right]$$

11. 由Vizing定理，$3\le\chi'(G)\le 4$，
因此只需给出一种3着色的方案.
由握手定理，易知G是偶阶的.
任取G的一个哈密顿回路C，C是偶圈，可被2着色.
G-C是一些互不相邻的边，将其着上另一种颜色，即得3着色方案.

12. (1)

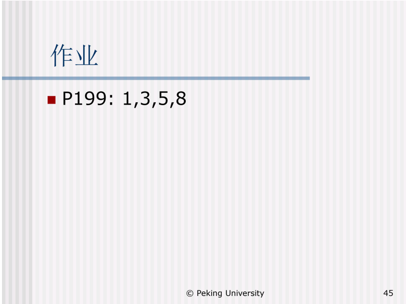


由Vizing定理，$3\le\chi'(G)\le 4$.
容易枚举知G不可3着色，故$\chi'(G)=4$.

(2) 若G是哈密顿图，由第11题结论知$\chi'(G)=3$，矛盾.

13. 2-可着色⇔二部图⇔无奇圈.
由第9题知，2-面可着色⇔欧拉图.
因此结论显然.

22.12.8



1. (1) $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$,
$\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4, v_5\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$.
$\gamma_0 = 2$

(2) $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4, v_5\}$.
$\alpha_0 = 2$

(3) $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4, v_5\}$
$\beta_0 = 3$

(4) $\{a, c\}$, $\{a, f\}$, $\{b, d\}$, $\{b, f\}$,
$\{c, e\}$, $\{d, e\}$.
$\beta_1 = 2$

(5) $\{a, b, f\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, c, f\}$,
$\{b, d, e\}$, $\{b, d, f\}$, $\{c, d, e\}$.
$\alpha_1 = 3$

3. 设G的最小点覆盖为V_1.
若$V_1 = V(G)$，则$|V_1| = |V(G)| \geq \delta(G)$.
否则，$\exists v \in V(G)$，$v \notin V_1$，v所关联的
$d(v)$条边的另一端都必须在V_1中，
因此$|V_1| \geq d(v) \geq \delta(G)$.
综上，$\alpha_0(G) = |V_1| \geq \delta(G)$.

5. $\Rightarrow$ 若G中有完美匹配，设其为M.

无论第一人选择哪个点，第二人都选择其在M中的对应点，易知这样第二人必胜.

$\Leftarrow$ 取G的一个最大匹配M.

第一人只需取任一非饱和点，无论第二人选择哪个点，该点必是饱和点，第一人可选择其在M中的对应点，继续下去，易知这样第一人必胜.

8. 显然，问题可抽象为二部图的完备匹配问题.

不过，由于数据量很小，容易枚举得到以下答案：

(1) 能，11种.

(2) 能，9种.

(3) 不能.