

23.3.21

13. 即判断这些子集是否关于  
 $M_n(R)$  上的加法和取逆封闭,  
 由矩阵论知识, 易知  
 (1)(2)(4) 构成子群,  
 (3) 不构成.

15. (1)  $\{e\}$   
 (2)  $\{e, a\}, aa=e.$   
 (3)  $\{e, a, a^2, a^3\}, a^4=e.$

16.  $\Leftarrow$  需证  $\forall x, y \in H_1 H_2, xy^{-1} \in H_1 H_2.$

设  $x = h_1 h_2, y = h_1' h_2',$   
 其中  $h_1, h_1' \in H_1, h_2, h_2' \in H_2.$

$$xy^{-1} = h_1 h_2 h_2'^{-1} h_1'^{-1}.$$

由于  $H_1 H_2 = H_2 H_1, h_2 h_2'^{-1} h_1'^{-1} \in H_2 H_1,$   
 $\exists h_1^* \in H_1, h_2^* \in H_2, h_1^* h_2^* = h_2 h_2'^{-1} h_1'^{-1}.$

$$\text{故 } xy^{-1} = h_1 h_1^* h_2^* \in H_1 H_2.$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in H_1 H_2, xy \in H_1 H_2.$$

设  $x = h_1 h_2, y = h_1' h_2',$   
 $\forall h_1, h_1' \in H_1, h_2, h_2' \in H_2.$

$$xy = h_1 h_2 h_1' h_2' \in H_1 H_2.$$

由任意性, 可知  $H_1 H_2 H_1 H_2 \subseteq H_1 H_2.$

又显然  $H_1 H_2 \subseteq H_1 H_2 H_1 H_2,$  故  $H_1 H_2 H_1 H_2 = H_1 H_2.$

设  $xy = h_1^* h_2^*, h_1^* \in H_1, h_2^* \in H_2.$

$$(xy)^{-1} = h_2^{*-1} h_1^{*-1} \in H_2 H_1.$$

同理, 由  $x, y$  的任意性,  $H_1 H_2 H_1 H_2 = H_2 H_1.$

$$\text{故 } H_1 H_2 = H_2 H_1.$$

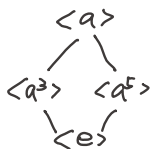
$$19. (1) a, a^2, a^4, a^7, a^8, \\ a^{11}, a^{13}, a^{14}$$

$$(2) \{a^k | k=0, 1, 2, \dots, 14\} = \langle a \rangle$$

$$\{e\} = \langle e \rangle$$

$$\{a^k | k=0, 3, 6, 9, 12\} = \langle a^3 \rangle$$

$$\{a^k | k=0, 5, 10\} = \langle a^5 \rangle$$



$$20. \text{反证, 若 } \exists c = a^m = b^n, 0 < m < p$$

由于  $(m, p) = 1, \exists x, y, xm + yp = 1.$

$$a = a^{xm + yp} = (a^m)^x = b^{xn} e \in \langle b \rangle,$$

矛盾.

$$\text{故 } \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}.$$