

算分作业 4

24.03.18

4.1

- (1) 优先选择服务时间最短的顾客.
- (2) 将顾客按服务时间从小到大排序, 并依次服务. 这是 $O(n \log n)$ 的.
- (3) 依次对服务时间为 1, 2, 3, 6, 10, 12, 15 的顾客进行服务, 总等待时间为 78.

4.3

设计思想: 第一个基站建在 $d_1 + 4$ 处, 删除该基站覆盖的房子, 继续下去, 直至覆盖所有房子.

伪码描述:

```
1 Solve
2 Input: d[1..n]
3 Output: stations
4 t = d[1] + 4
5 stations = {t}
6 for i in [2, n]:
7     if d[i] > t + 4
8         t = d[i] + 4
9         stations.append(t)
10 return stations
```

正确性证明: 设该算法得到的基站集合为 S , $|S| = n$. 根据算法过程, 每个 $s_i \in S$ 是因为某 d_j 而被加入 S 的. 将这 n 个 d_j 取出来, 它们两两相距都超过 8, 一个基站不可能同时覆盖两个, 因此至少需要 n 个基站, 而算法给出了 n 基站的一种可行构造, 因此最优解就是 n .

最坏时间复杂度: $O(n)$.

4.6

算法描述: 将任务按加工时间从小到大排序, 依次加工, 即为最优调度. 这个算法是 $O(n \log n)$ 的.

正确性证明: 对于任意给定的调度, 若存在相邻逆序对 $t_i > t_{i+1}$, 将它们交换, 不影响其它任务的完成时间, 而这两个任务的总完成时间减少. 因此最优调度一定无相邻逆序对, 即按加工时间从小到大加工.

4.13

算法描述: 求出罚款第 D 大的作业 h , 先按任意顺序完成罚款不少于 $m(h)$ 的作业, 再按任意顺序完成罚款少于 $m(h)$ 的作业即可.

正确性证明: 总罚款只与后 $n - D$ 时间做的作业集合有关, 总罚款为这些作业的罚款之和, 取为罚款最少的 $n - D$ 项作业显然是最优的.

最坏时间复杂度: $O(n)$.

4.18

(1) 首先选择广告 1, 再按序遍历广告, 找到第一个与 1 相容的广告 a , 选择它, 继续遍历寻找第一个与 a 相容的广告, 像这样继续下去, 直至遍历所有广告. 这与课堂例题完全相同, 不再赘述正确性证明. 复杂度为 $O(n)$.

(2) 使用动态规划. 容易 $O(n \log n)$ 地二分计算出每个广告 i 前最近的相容广告 p_i , 即 $p_i = \max\{j < i \mid d(j) \leq s(i)\}$. 若不存在这样的 j , 记 $p_i = 0$. 设 $f(i)$ 为仅考虑前 i 个广告的最大收益, 枚举第 i 个广告是否选取, 有转移方程 $f(i) = \max\{f(i-1), f(p_i) + v(i)\}$, $1 \leq i \leq n$, 边界条件 $f(0) = 0$, 最终最大收益为 $\max_{1 \leq i \leq n} f(i)$. 在转移时记录最后一个选取的广告, 容易回溯出最优广告选择. 这个算法是最坏 $O(n \log n)$ 的.

4.20

设计思想: 按 r_i 从大到小将许可证排序, 依次购买即可.

正确性证明: 对于任意购买顺序, 若存在相邻顺序对 $r_i < r_{i+1}$, 交换它们的购买顺序, 不影响其它许可证的售价, 但这两个许可证的总售价减少. 因此最优购买顺序一定无相邻顺序对, 即按 r_i 从大到小购买.

最坏时间复杂度: $O(n \log n)$.