22.10.4

作业

- P68: 3, 19, 20

3. 单：(1)(2)(6)(10)

满：(1)(4)(5)(6)(9)(10)

双：(1)(6)(10)

19. (1) $f(A_1)=\{1,2,3\}$

$f^{-1}(B_1)=\{0,4,5,6\}$

(2) $g(A_2)=N$

$g^{-1}(B_2)=\{6\}\cup\{n \mid n\in N \wedge n$ 为奇数$\}$

(3) f有，因为f是全函数且为双射.

g无. 因为g不是单射.

20. (1) 反之，$\exists y_1, y_2 \in B$, $y_1\neq y_2$, $f(y_1)=f(y_2)$.

由于g是满的，$\exists x_1, x_2 \in A$, $x_1\neq x_2$,

$g(x_1)=y_1$, $g(x_2)=y_2$.

于是 $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$, $x_1\neq x_2$.

矛盾.

(2) 反之，$\exists y\in B$, $\forall x\in A$, $g(x)\neq y$.

由于f是单的，$\forall y'\in B$, $y'\neq y$, $f(y')\neq f(y)$.

于是 $\forall x\in A$, $(f\circ g)(x)\neq f(y)\in C$.

矛盾.

22.10.11

作业

- P80: 2,3,5,7

2\. (1) 3

(2) 2

(3) 4

(4) 0

(5) 5

3\. 设 $S=\{n \mid n\in N \wedge (\exists m(m\in N \wedge m^+=n)) \vee n=0)\}$.

下面归纳证明 $S=N$.

显然 $0\in S$.

假设 $k\in S$，下证 $k^+\in S$.

取 $m=k$，$m^+=k^+$，因此 $k^+\in S$.

由数学归纳法，$S=N$.

5\. 由 A 是传递集知 $\bigcup A\subseteq A$.

$$\begin{aligned}\bigcup A^+ &= \bigcup(A\cup\{A\})\\ &=(\bigcup A)\cup A\\ &\subseteq A\\ &\subseteq A^+.\end{aligned}$$

因此 A^+ 为传递集.

7\. 引理：若 $h(m+1)=h(n+1)$，则 $h(m)=h(n)$.

事实上，由于 $h(m+1)=f(h(m))$，$h(n+1)=f(h(n))$，而 f 是单射，结论是显然的.

下面用反证法证明 h 是单射.

反之，若 $\exists m<n$，$h(m)=h(n)$.

首先，必有 $m\neq 0$. 否则 $h(n)=f(h(n-1))=a$，与 $a\notin \operatorname{ran} f$ 矛盾.

于是由引理，$h(m-1)=h(n-1)$，

$h(m-2)=h(n-2)$，

$\cdots$

$h(0)=h(n-m)$.

这同样与 $a\notin \operatorname{ran} f$ 矛盾.

综上，h 是单射.

22.10.13

作业

- P93: 2,5,11,12

2.(1) $\mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$ 是集合的相等，它显然具有自反性、对称性、传递性，从而 R 也是等价关系.

(2) $(A\to A)/R$ 的元素形如

$[a]=\{f \mid f\in A\to A \land \mathrm{ran}f=a\}$.

考虑 $h:(A\to A)/R\to P(A)-\{\varnothing\}$,

$h([a])=a$.

由于 $A\neq\varnothing$, $\forall f\in A\to A$, $\mathrm{ran}f\neq\varnothing$,

因此 h 是良定义的.

下证 h 是双射.

$\forall a,b\in A$, $a\neq b$, 显然 $[a]\neq[b]$,

$h([a])\neq h([b])$, 这说明 h 是单射.

$\forall a\in A$, $h([a])=a$, 这说明 h 是满射.

综上, $(A\to A)/R\approx P(A)-\{\varnothing\}$.

5. 归纳证之.

设 $S=\{n \mid n\in N\land\forall m(m\in N\to \exists k(k\in n\land m\approx k))\}$.

显然 $\varnothing\in S$, 因为 $\varnothing$ 无真子集.

设 $n\in S$, 下证 $n^+\in S$.

$\forall m\subset n^+=n\cup\{n\}$

① $n\notin m$, 由归纳假设,

$\exists k\in n$, $k\approx m$, 又 $n\subseteq n^+$,

故 $k\in n^+\land m\approx k$.

② $n\in m$, 由归纳假设,

$\exists k\in n$, $k\approx m-\{n\}$, 取 $k_1=k\cup\{n\}$,

显然 $k_1\in n^+\land m\approx k_1$.

由数学归纳法, $S=N$.

11. 我不会写阿列夫零, 下面都记为 $\mathrm{card}N$.

显然 A,B 为无穷可数集, 故 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B=\mathrm{card}N$.

由于 $A\subseteq A\cup B\subseteq N$, 有

$\mathrm{card}N=\mathrm{card}A\leq\mathrm{card}(A\cup B)\leq\mathrm{card}N$,

故 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}N$.

设 $C=\{n^{2\times10^9} \mid n\in N\land n\neq0\}$,

显然 $C\subseteq A\cap B$, 从而

$\mathrm{card}N=\mathrm{card}C\leq\mathrm{card}(A\cap B)\leq\mathrm{card}A=\mathrm{card}N$,

故 $\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}N$.

12. 由于 $A\approx B$, $\exists$ 双射 $\sigma:A\to B$.

考虑 $\varphi:P(A)\to P(B)$, $\varphi(a)=\{\sigma(x)\mid x\in a\}$.

$\forall a,b\subseteq A$, $a\neq b$, 由 σ 是双射可知 $\varphi(a)\neq\varphi(b)$,

故 φ 是单射.

$\exists b\in P(B)$, $\varphi(\{\sigma^{-1}(x)\mid x\in b\})=b$, 故 φ 是满射.

综上, $P(A)\approx P(B)$.