23.3.24

1. (1) $S \to 1 \mid 0 \mid 1T1 \mid 0T0$

$T \to 0T \mid 1T \mid \varepsilon$

注：若认为$\varepsilon \in \{w \mid \cdots\}$，增加$S \to \varepsilon$即可

(2) $S \to \varepsilon \mid 1 \mid 0 \mid 1S1 \mid 0S0$

2. 由于A是CFL，∃PDA M 识别A.

对M中的每个$q_1 \xrightarrow{c,a\to b} q_2$，将其改为

$q_1 \xrightarrow{\varepsilon,a\to b} q_2$，得到$M'$，其中$c \in \Sigma_\varepsilon$，$a,b \in \Gamma_\varepsilon$.

对M、M'的每个对应状态，增加

$q_M \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon\to\varepsilon} q_{M'}$，

并以$q_0(M)$为初始状态，$F(M)\cup F(M')$为终止状态，

合起来得到M''.

易发现M''识别PREFIX(A)，故CFL在

PREFIX下封闭.

3. (a) 取$s=0^{2^p}$，由泵引理立得矛盾.

(b) 取$s=0^p1^p1^p0^p$，由泵引理立得矛盾.

4. 将二维TM的纸带格子用对角线法则编码，

对应到一维TM的格子上，然后就可以用这台

一维TM的纸带模拟二维TM的纸带.

由于二维TM上的格子(i,j)的编码不超过$(i+j)^2$，

显然可用至多$O(T(n))$步在一维TM上模拟二维TM

的一步，故f可在$O(T^2(n))$内被一维TM计算.

5. $\Rightarrow$ 设TM M 判定语言A.

令E="按字典序对Σ*依次运行M，若接受，则输出该串".

E即为所需枚举器.

$\Leftarrow$ 设枚举器E按字典序输出语言A中的串.

令M="对于输入w，运行E.

若w被E输出，则接受.

若E已输出按字典序大于w的串，则拒绝."

M即为所需TM.

6. 反之，假设∃TM M 判定T.

构造TM M_1="对于输入w:

① $w \neq 01, 10$，拒绝.

② $w=01$，接受.

③ $w=10$，以M_1为输入运行M，

若M接受则拒绝，若M拒绝则接受."

这便产生了一个悖论，故不存在TM判定T.

7. 反之，假设∃TM M 判定C_{TM}.

不妨设$\Sigma=\{0,1\}$.

构造M_1="只接受0，拒绝其它输入";

M_2="忽略输入，运行$M(M_1, M_2)$，

若接受则拒绝，若拒绝则接受".

这便产生了一个悖论，故不存在TM判定C_{TM}.