23.2.28

习题十五

7. (2) 构成代数系统

适合交换律、结合律、幂等律

设有单位元，零元为1

(4) 取 $a=3, b=2$，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \notin Z^+$，

故不构成代数系统

9. 下将 $x*y$ 简写为 $x|y$

显然适合交换律

$(x|y)|z=(x+y-xy)|z$

$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$

$= x|(y|z)$

故适合结合律

$x|x=2x-x^2 \neq x$，当 $x\neq 0,1$ 时

故不适合幂等律

设有单位元 $e$

$e|x=x|e=x+e-xe=x$

$\Rightarrow e(x-1)=0$

$\Rightarrow e=0$

故单位元为0

设有零元 $\theta$

$\theta|x=x|\theta=x+\theta-x\theta=\theta$

$\Rightarrow x(1-\theta)=0$

$\Rightarrow \theta=1$

故零元为1

设 $x$ 有逆元

$x|x^{-1}=x+x^{-1}-xx^{-1}=0$

$\Rightarrow x^{-1}=\frac{x}{x-1}$

11. $\langle a,b\rangle \circ \langle c,d\rangle = \langle ac, ad+b\rangle$

$\langle c,d\rangle \circ \langle a,b\rangle = \langle ac, bc+d\rangle$

故不适合交换律

$(\langle a,b\rangle \circ \langle c,d\rangle)\circ\langle e,f\rangle$

$=\langle ac, ad+b\rangle \circ \langle e,f\rangle$

$=\langle ace, acf+ad+b\rangle$

$\langle a,b\rangle \circ (\langle c,d\rangle \circ \langle e,f\rangle)$

$=\langle a,b\rangle \circ \langle ce, cf+d\rangle$

$=\langle ace, acf+ad+b\rangle$

故适合结合律

设有单位元 $e=\langle x,y\rangle$

$\langle a,b\rangle \circ e = \langle ax, ay+b\rangle = \langle a,b\rangle$

$\Rightarrow x=1, y=0$

此时 $e\circ\langle c,d\rangle = \langle xc, xd+y\rangle = \langle c,d\rangle$

故单位元为 $\langle 1,0\rangle$

设有零元 $\theta=\langle x,y\rangle$

$\langle a,b\rangle \circ \theta = \langle ax, ay+b\rangle = \langle x,y\rangle$

无解，故无零元

设 $\langle a,b\rangle$ 有逆元 $\langle c,d\rangle$

$\langle a,b\rangle \circ \langle c,d\rangle = \langle ac, ad+b\rangle = \langle 1,0\rangle$

$\Rightarrow c=\frac{1}{a}, d=-\frac{b}{a}$

此时 $\langle c,d\rangle \circ \langle a,b\rangle = \langle ac, bc+d\rangle = \langle 1,0\rangle$

故逆元为 $\langle \frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\rangle$

16. (1)

| | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ |
| $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ |
| $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ |
| $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ |
| $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ |
| $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ |

(2) 显然单位元为$\langle 0,0\rangle$

显然可逆元$\langle x,y\rangle$的逆元为$\langle x_1,y_1\rangle$，其中

$$x_1=\begin{cases}3-x, & x=1,2,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad y_1=\begin{cases}1, & y=1,\\ 0, & y=0\end{cases}$$

18. 考虑 $\varphi:\mathbb{C}\to B,\ a+bi\mapsto\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$

显然$\varphi$是双射

又
$$\begin{aligned}\varphi((a+bi)+(c+di)) &= \varphi((a+c)+(b+d)i)\\ &=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ -(b+d) & a+c\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix}\\ &=\varphi(a+bi)+\varphi(a+di)\end{aligned}$$

及
$$\begin{aligned}\varphi((a+bi)(c+di)) &= \varphi((ac-bd)+(ad+bc)i)\\ &=\begin{pmatrix}ac-bd & ad+bc\\ -(ad+bc) & ac-bd\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix}\\ &=\varphi(a+bi)\varphi(c+di)\end{aligned}$$

故$\varphi$是$V_1$到$V_2$的同构，即$V_1,V_2$同构

24. (2) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

故$\varphi$是$V_1$到$V_2$的同态

同态像为$\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

(4) $2=\varphi(z_1z_2)\neq\varphi(z_1)\varphi(z_2)=4$

故$\varphi$不是$V_1$到$V_2$的同态

27. (2) $|x_1-y_1|<5$, $|x_2-y_2|<5 \not\Rightarrow |(x_1+x_2)-(y_1+y_2)|<5$ (易找到反例)

故R不是V上的同余关系

(4) R显然不具有对称性，故不是等价关系，

更不是同余关系