23.4.4

习题十七

38. (1) $\{\{e\},\{a\},\{a^2\},\{a^3\}\}$

(2) $\{\{e\},\{a\},\{b\},\{c\}\}$

41. $|\bar{a}| = [G:N(a)]$

$= \frac{|G|}{|N(a)|}$

$= \frac{n}{|N(a)|}$

欲证$k|\frac{n}{c}$，即证$c\,|\,|N(a)|$

注意到C是$N(a)$的子群，故由

lagrange定理立得$c\,|\,|N(a)|$.

42. 设$G=\langle a\rangle$，G也是Abel群.

$\forall H\leq G$，$\forall h\in H$，$x\in G$，

$x^{-1}hx=h\in H$.

由定义，$H\trianglelefteq G$.

46. (1) $\forall A,B\in H$，

$|AB^{-1}|=\frac{|A|}{|B|}>0$，故$AB^{-1}\in H$.

这说明$H\leq G$.

$\forall A\in H$，$P\in G$，

$|P^{-1}AP|=|A|>0$，故$P^{-1}AP\in H$.

这说明$H\trianglelefteq G$.

(2) 由对称性，$|H|=\frac{1}{2}|G|$.

故$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=2$.

47. (1) $\forall A,B\in G_1$，

$\varphi(AB)=|AB|=|A||B|=\varphi(A)\varphi(B)$.

这说明φ是G_1到G_2的同态.

(2) 显然$\varphi(G_1)=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$，

$\mathrm{Ker}\,\varphi=\{A\in G_1\,|\,|A|=1\}$.

48. 反之，若∃非零同态$\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$.

$\varphi(0)+\varphi(0)=\varphi(0+0)=\varphi(0)$

$\Rightarrow\varphi(0)=0$.

由于φ非零，$\exists a\neq 0$，$\varphi(a)=b\neq 0$.

$$\underbrace{\varphi\left(\frac{a}{2b}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{a}{2b}\right)}_{2b\text{个}}=\varphi(a)=b$$

$\Rightarrow\varphi\left(\frac{a}{2b}\right)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

矛盾，故不存在这样的φ.

51. (1) $\forall x_1,x_2\in\varphi^{-1}(H)$，

$\exists y_1,y_2\in H$，$\varphi(x_1)=y_1$，$\varphi(x_2)=y_2$.

$\varphi(x_1x_2^{-1})=y_1y_2^{-1}\in H$，

故$x_1x_2^{-1}\in\varphi^{-1}(H)$.

这说明$\varphi^{-1}(H)\leq G_1$.

(2) $\forall h_1\in\varphi^{-1}(H)$，$\exists h_2\in H$，$\varphi(h_1)=h_2$.

$\forall x\in G_1$，$\varphi(x^{-1}h_1x)=\varphi^{-1}(x)h_2\varphi(x)\in H$，

故$x^{-1}h_1x\in\varphi^{-1}(H)$.

这说明$\varphi^{-1}(H)\trianglelefteq G_1$.