23.4.14

1. 只需给出多项式时间内判定 2COL 的算法.
显然, 只需考虑连通图, 否则分别对子图判定即可.
任取 G 的一个顶点, 涂上颜色 0, 将其所有相邻顶点涂上颜色 1, 再将这些顶点的所有相邻未着色顶点涂上颜色 0. 继续下去, 直到所有顶点都已着色. 检查 G 有无同色的相邻顶点, 若有, 则 $G \notin 2COL$. 若无, 则 $G \in 2COL$.

显然该算法在多项式时间内能结束, 故 $2COL \in P$.

2. $\exists$ NTM M_1, M_2 分别在多项式时间内判定 L_1, L_2.
令 NTM M' = "交替运行 M_1, M_2, 有一台接受则接受",
NTM M'' = "交替运行 M_1, M_2, 都接受则接受".
显然 M', M'' 分别在多项式时间判定 $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$,
故 $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2 \in NP$.

3. 同构映射 $\varphi: E(G) \to E(G)$ 即为证书, 其中 $E(G)$ 为 G 的顶点集. 具体来说, 令

TM M = "对于输入 $\langle G, H, w \rangle$:

检查 G, H 是否顶点数相同, 若不同则拒绝.

检查 w 是否编码了双射 $\varphi: E(G) \to E(G)$, 若不是则拒绝.

根据 w 将 G 的顶点重排, 得到 G'.

对每个 $i, j \in E(G')$, 检查 G', H 是否都有或无边 $\langle i, j \rangle$, 若不是则拒绝.

接受."

综上, $ISO \in NP$.

4. 欲证HALT NP难，即证$\forall L \in NP$，$L \leq_p HALT$.

$\exists$ NTM M在多项式时间判定L.

构造TM M_1 = "对于输入w:

模拟$M(w)$，若某分支接受则接受，

若所有分支都拒绝，无限循环."

M_1的编码显然可在多项式时间内输出.

显然 $w \in L \Leftrightarrow \langle M_1, w \rangle \in HALT$.

故HALT是NP难的.

HALT不可判定，自然$HALT \notin NP$，故

HALT不是NP完全的.

5. $A \in P = NP$，故只需证$\forall L \in NP = P$，$L \leq_p A$.

$\exists$ TM M在多项式时间判定L.

$\exists a \in A$，$b \notin A$.

构造M_1 = "对于输入w:

运行$M(w)$，若接受则输出a，

若拒绝则输出b."

显然M_1也在多项式时间内运行.

由于 $w \in L \Leftrightarrow M_1(w) \in A$，故$L \leq_p A$，

即说明A是NP完全的.

6. (1) 不计顺序地，≠赋值的每个子句形如

$1\vee1\vee0$ 或 $1\vee0\vee0$，

其否定确实满足≠赋值的要求.

(2) $\forall w\in 3CNF$，记 $w=\bigwedge_{i=1}^{n}(y_{i1}\vee y_{i2}\vee y_{i3})$.

替换后得到 $w_1=\bigwedge_{i=1}^{n}(y_{i1}\vee y_{i2}\vee z_i)\vee(\bar{z}_i\vee y_{i3}\vee b)$.

显然替换可在多项式时间完成，只需证

$w\in 3SAT \iff w_1\in \neq SAT$.

$\Rightarrow$ $\exists$赋值使$\forall i$，y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}至少一者为真.

取$b=0$.

若$(y_{i1},y_{i2},y_{i3})=(0,0,1)$，取$z_i=1$，否则取$z_i=0$.

易验证这给出了w_1的一个≠赋值.

$\Leftarrow$ $\exists w_1$的≠赋值f.

由(1)，不妨假设$f(b)=0$.

对每个i，$f(y_{i1}), f(y_{i2}), f(y_{i3})$至少一者为真，

否则无论z_i取0或1，都不构成≠赋值.

于是f可导出w的一个成真赋值.

(3) 由于3SAT是NP完全的，根据$\leq_p$的传递性

就有$\forall L\in NP$，$L\leq_p 3SAT\leq_p \neq SAT$，即

≠SAT是NP完全的.