

22.11.25

作业

p.560(p.185)

20. (1), (3), (5)

21. (2), (4)

(3) ① $\neg \alpha \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$ (命题内定理)

② $\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \wedge \beta)$ (命题内定理)

③ $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ (命题内定理)

④ $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow (\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x \alpha)$ (证)

⑤ $\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x \alpha$ (m) ③④

⑥ $\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x \beta$ (同理)

⑦ $(\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x \alpha) \rightarrow ((\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x \beta)$

$\rightarrow \exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x \alpha \wedge \exists x \beta)$ (命题内定理)

⑧ $\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\exists x \alpha \wedge \exists x \beta)$ (m) ⑤⑦

20. (1) 先证 $\forall x \neg (\neg \alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg (\neg \forall x \neg \alpha \rightarrow \neg \forall x \beta)$

① $\forall x \neg (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg (\neg \alpha \rightarrow \beta)$ (K4)

② $\forall x \neg (\neg \alpha \rightarrow \beta)$

③ $\neg (\neg \alpha \rightarrow \beta)$

④ $\neg (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg \alpha, \neg (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ (命题内定理)

⑤ $\neg \alpha, \beta$ (m) ③④

⑥ $\forall x \neg \alpha, \forall x \beta$ (证) ⑤

⑦ $\forall x \neg \alpha \rightarrow \neg \forall x \alpha$ (命题内定理)

⑧ $\neg \forall x \alpha$ (m) ⑦

⑨ $\neg \forall x \alpha \rightarrow (\forall x \beta \rightarrow \neg (\neg \forall x \alpha \rightarrow \neg \forall x \beta))$ (命题内定理)

⑩ $\neg (\neg \forall x \alpha \rightarrow \neg \forall x \beta)$ (m) ⑧⑨

类似地, 可证 $\neg (\neg \forall x \alpha \rightarrow \neg \forall x \beta) \vdash \forall x \neg (\neg \alpha \rightarrow \beta)$

于是由演绎定理即知 $\exists x \alpha \wedge \forall x \beta \Leftrightarrow \exists x(\alpha \wedge \beta)$

(5) 由演绎定理, 只需证

$\forall x(\alpha \rightarrow \beta), \forall x(\beta \rightarrow \gamma) \vdash \forall x(\alpha \rightarrow \gamma)$

① $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (K4)

② $\forall x \alpha \rightarrow \beta$

③ $\alpha \rightarrow \beta$ (m) ②

④ $\beta \rightarrow \gamma$ (同理)

⑤ $\alpha \rightarrow \gamma$ (证) ③④

⑥ $\forall x(\alpha \rightarrow \gamma)$ (证) ⑤

21. (2) 由逻辑定理, 只需证 $\forall x \alpha \rightarrow \beta \vdash \neg \forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta)$

由命题内定理, 只需证 $\forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg (\forall x \alpha \rightarrow \beta)$

由命题内定理, 只需证 $\forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \forall x \alpha, \neg \beta$

而 $\forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg (\alpha \rightarrow \beta), \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha, \neg \beta,$

由T有 $\forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha, \neg \beta$, 从而 $\forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \forall x \alpha$

#

14) 由逻辑定理, 只需证 $\alpha \rightarrow \neg \forall x \neg \beta \vdash \neg \forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta)$

由命题内定理, 只需证 $\forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \neg (\alpha \rightarrow \neg \forall x \neg \beta)$

由命题内定理, 只需证 $\forall x \neg (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha, \forall x \neg \beta$

同(2)易证

#