23.3.28

习题十七

21. 由定理知循环群的特定阶子群唯一，故设$G=\langle a\rangle$，有

$H_1=\langle a^s\rangle$，$H_2=\langle a^r\rangle$.

由裴蜀定理，$\exists p,q\in\mathbb{Z}$，$pr+qs=1$.

$\forall a^i\in G$，$a=(a^s)^{qi}(a^r)^{pi}\in H_1H_2$，

故 $G\subseteq H_1H_2$.

又显然 $H_1H_2\subseteq G$，故 $G=H_1H_2$.

23. 设$G$为无限群.

若$\exists a\in G$，$|a|=\infty$，则$\langle a^0\rangle,\langle a^1\rangle,\langle a^2\rangle,\cdots$

是互不相同的子群，教材已证.

若$\forall a\in G$，$|a|$有限.

取$a_1\in G$，$\langle a_1\rangle\le G$.

取$a_2\in G-\langle a_1\rangle$，$\langle a_2\rangle\le G$.

取$a_3\in G-\langle a_1\rangle-\langle a_2\rangle$，$\langle a_3\rangle\le G$.

$\cdots$

如此便找到了无穷多个子群，由取法知$\forall i<j$，$a_j\notin\langle a_i\rangle$，故$\langle a_i\rangle$互不相同.

24. (1) $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}$

$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$

$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}$

$\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&1&4\end{pmatrix}$

(2) $\sigma=(1\ 5\ 2)(3\ 4)$

$=(1\ 2)(1\ 5)(3\ 4)$

$\tau=(1\ 4\ 5\ 2\ 3)$

$=(1\ 3)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 4)$

25. 注意到$\forall i<j$，

$(i\ j)=(1\ i)(1\ j)(1\ i)$，

$(i\ j)=(i\ \ i+1)(i+1\ \ i+2)\cdots(j-1\ \ j)$

$(j-2\ \ j-1)(j-3\ \ j-2)\cdots(i\ \ i+1)$.

而$\forall\sigma\in S_n$可表成对换之积，故结论显然.

27. $\langle(1\,2\,3\,4)\rangle=\{(1),(1\,2\,3\,4),(1\,3)(2\,4),$
$(1\,4\,3\,2)\}.$

$H(1)=H.$

$H(1\,2)=\{(1\,2),(1\,3\,4),(1\,4\,2\,3),(2\,4\,3)\}.$

$H(1,3)=\{(1,3),(1\,4)(2\,3),(2\,4),(1\,2)(3\,4)\}.$

$H(1\,4)=\{(1\,4),(2\,3\,4),(1\,2\,4\,3),(1\,3\,2)\}.$

$H(2\,3)=\{(2\,3),(1\,2\,4),(1\,3\,4\,2),(1\,4\,3)\}.$

$H(3\,4)=\{(3\,4),(1\,2\,3),(1\,3\,2\,4),(1\,4\,2)\}.$

28. 由于$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & rt+s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

故H在G中的全部左陪集为

$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}H=\left\{\begin{pmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{Q}\right\}, r\in\mathbb{Q}, r\neq 0.$

31. 设G为$p^m$阶群.

任取$a\in G$, $a\neq e$,

由Lagrange定理, $|a|=p^k$, $1\leq k\leq m$.

易验证$\langle a^{p^{k-1}}\rangle$即为G的p阶子群.

34. 即证 $\forall \varphi, \sigma \in S_n$，$\varphi^{-1}\sigma\varphi$ 与 $\sigma$ 有相同的轮换指数.

$\exists$ 对换 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$，$\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_n$.

$\varphi^{-1}\sigma\varphi = \varphi_n^{-1} \cdots \varphi_1^{-1}\sigma\varphi_1 \cdots \varphi_n$.

故只需证 $\forall$ 对换 $\varphi$，$\varphi^{-1}\sigma\varphi$ 与 $\sigma$ 有相同的轮换指数.

$\exists$ 不相交轮换 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$，$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$.

$$\varphi^{-1}\sigma\varphi = \varphi^{-1}\sigma_1 \cdots \sigma_k\varphi$$
$$= (\varphi^{-1}\sigma_1\varphi)(\varphi^{-1}\sigma_2\varphi)\cdots(\varphi^{-1}\sigma_k\varphi).$$

故只需证 $\forall$ 对换 $\varphi$，轮换 $\sigma$，$\varphi^{-1}\sigma\varphi$ 与 $\sigma$ 有相同的轮换指数.

不妨设 $\sigma = (1\ 2 \cdots n)$，$\varphi = (i\ j)$，$i < j$.

① $i, j \notin \{1, 2, \cdots, n\}$

$\varphi^{-1}\sigma\varphi = \sigma$.

② $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$

$$(i\ j)(1\ 2 \cdots n)(i\ j) = (1\ 2 \cdots i-1\ j\ i+1 \cdots j-1\ i\ j+1 \cdots n)$$

③ $i \in \{1, 2, \cdots n\}$，$j \notin \{1, 2, \cdots, n\}$.

$$(i\ j)(1\ 2 \cdots n)(i\ j) = (1\ 2 \cdots i-1\ j\ i+1 \cdots n)$$

无论如何，$\sigma$ 的轮换指数均不变.