23.5.16

习题二十二

6. (1) $x^2-7x+12=0$

$\Rightarrow x=3,4$

设 $a_n=c_1 3^n+c_2 4^n$

$\begin{cases} c_1+c_2=4 \\ 3c_1+4c_2=6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1=10 \\ c_2=-6 \end{cases}$

$a_n=10\cdot 3^n-6\cdot 4^n$

(3) $x^2+6x+9=0$

$\Rightarrow x=-3$

设齐次通解为 $(c_1 n+c_2)(-3)^n$

易知 $a_n=\frac{3}{16}$ 是特解

$\begin{cases} c_2+\frac{3}{16}=0 \\ (c_1+c_2)(-3)+\frac{3}{16}=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1=-\frac{1}{12} \\ c_2=-\frac{3}{16} \end{cases}$

故 $a_n=-(\frac{1}{12}n+\frac{3}{16})(-3)^n+\frac{3}{16}$

(5) $x^2-7x+10=0$

$\Rightarrow x=2,5$

设齐次通解为 $c_1 2^n+c_2 5^n$

易知 $a_n=-\frac{1}{2}3^{n+2}$ 是特解

$\begin{cases} c_1+c_2-\frac{9}{2}=0 \\ 2c_1+5c_2-\frac{27}{2}=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{8}{3} \\ c_2=\frac{11}{6} \end{cases}$

故 $a_n=\frac{1}{3}2^{n+3}+\frac{11}{6}5^n-\frac{1}{2}3^{n+2}$

8. (1) 令 $b_n=na_n$

$b_n=-b_{n-1}+2^n$

齐次通解为 $c(-1)^n$

特解为 $\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}$

$a_1=2 \Rightarrow c=-\frac{2}{3}$

故 $a_n=\begin{cases} 273,\ n=0, \\ \frac{1}{n}[\frac{1}{3}2^{n+1}-\frac{2}{3}(-1)^n],\ n\geq 1 \end{cases}$

12. 设 n 条直线分平面为 a_n 个区域

易发现 $\begin{cases} a_0=1 \\ a_n=a_{n-1}+n,\ n\geq 1 \end{cases}$

故 $a_n=\frac{1}{2}n(n+1)+1$

13. 设 $1\times n$ 方格有 a_n 种方案

易发现 $\begin{cases} a_1=2,\ a_2=3 \\ a_n=a_{n-2}+a_{n-1} \end{cases}$

解得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]$

14. (1) $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-2,k-1)$

(2) 对 n 归纳

$n=1$ 时, $f(n,k)=1_{k\leq 1}=C_{2-k}^{k}$

假设不超过 $n-1$ 时成立, n 时,

$f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-2,k-1)$

$=C_{n-k}^{k}+C_{n-k}^{k-1}$

$=C_{n-k+1}^{k}$

综上, $f(n,k)=C_{n-k+1}^{k}$

(3) 设子集数为 a_n

易发现 $a_1=2,\ a_2=3,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ n\geq 3$

故 $a_n=f(n+1)$