# 算分作业 1

24.02.26

## 1.2

(1) $1+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ 次.

(2) $1+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ 次. 在输入数组按递减次序排列时发生.

## 1.6

求多项式 $P[n]x^n+\cdots+P[1]x+P[0]$ 的值.

$2n$ 次乘法, $n$ 次加法.

## 1.7

(1) $1+2(n-2)=2n-3$ 次.

(2) 注意到当循环遍历到第 $i$ 个元素时, 有 $\frac{2}{i}$ 的概率做 $2$ 次比较, $\frac{i-2}{i}$ 的概率做 $1$ 次, 因此平均比较 $1+\sum_{i=3}^{n}(1+\frac{2}{i})=n-1+2\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i}$ 次.

## 1.15

(1) $g=O(f)$.

(2) $f=O(g)$.

(3) $f=O(g)$.

(4) $g=O(f)$.

(5) $f=O(g)$.

## 1.18

$n!, 2^{2n}, n2^n, (\log n)^{\log n}=n^{\log\log n}, n^3, \log(n!)=\Theta(n\log n), n=\Theta(\log 10^n), 2^{\log\sqrt{n}}, 2^{\sqrt{2\log n}}, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\Theta(\log n), \log\log n$ .

## 1.19

(2) 由主定理第一种情况得到 $T(n)=\Theta(n^2)$.

(4) 直接迭代得到 $T(n)=T(1)+\sum_{i=2}^{n}\log 3^n=\Theta(n^2)$.

(6) 由主定理第三种情况得到 $T(n)=\Theta(n^2\log n)$.

(8) 直接迭代得到 $T(n)=T(0)+\sum_{i=1}^{n}\log n=\Theta(n\log n)$.

## 1.21

对于算法 A, 最坏时间复杂度满足 $T(n)=5T(n/2)+\Theta(n)$, 由主定理第一种情况知 $T(n)=\Theta(n^{\log_2 5})$.

对于算法 B, 最坏时间复杂度满足 $T(n)=2T(n-1)+O(1)$, 直接迭代得到 $T(n)=\Theta(2^n)$.

对于算法 C, 最坏时间复杂度满足 $T(n)=9T(n/3)+\Theta(n^3)$ (我认为题目想说的是 $\Theta(n^3)$ 而不是 $O(n^3)$), 由主定理第三种情况知 $T(n)=\Theta(n^3)$.

因此, 应选择算法 A.

## 证明题 1

由于 $n$ 是自然数, 我们根本算不出 $2$ 的幂以外的 $T(n)$, 因此只考虑 $n=2^k$. 设 $f(k)=T(2^k)$, 有 $f(k)=2f(k-1)+\frac{2^k}{k}$.

直接迭代, 有

$$
\begin{aligned}
f(k) &= 2f(k-1) + \frac{2^k}{k} \\
&= 4f(k-2) + \frac{2^k}{k-1} + \frac{2^k}{k} \\
&= \cdots \\
&= 2^k f(0) + 2^k \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \\
&= \Theta(2^k \log k).
\end{aligned}
$$

下面归纳证明 $\frac{\ln 2}{2} 2^k \log k \leq f(k) \leq \ln^2(2) 2^k \log k$. 适当选取 $f(2)$ 使其满足该条件, 以完成归纳奠基. 假定不超过 $k$ 时都成立, $k+1$ 时需证

$$
f(k+1) \leq \ln^2(2) 2^{k+1} \log k + \frac{2^{k+1}}{k+1} \leq \ln^2(2) 2^{k+1} \log(k+1)
$$

和

$$
f(k+1) \geq \frac{\ln 2}{2} 2^{k+1} \log k + \frac{2^{k+1}}{k+1} \geq \frac{\ln 2}{2} 2^{k+1} \log(k+1).
$$

化简得

$$
\frac{1}{\ln^2 2} \leq \frac{k+1}{\ln^2 2} \ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{2}{\ln 2}.
$$

易知这在 $k \geq 1$ 时成立. 由数学归纳法, 命题得证.

综上, $f(k) = \Theta(2^k \log k)$, 即 $T(n) = \Theta(n \log \log n)$.

# 证明题 2

不妨设 $T(1) = 0$, 我们直接证明 $T(n) = \log n$. $n = 1$ 时显然成立, 假定 $n < k$ 时都成立, $n = k$ 时, $T(k) = T(k/2) + 1 = \log(k/2) + 1 = \log k$. 由数学归纳法即知 $T(n) = \log n = O(\log n)$.