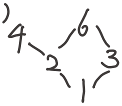
23.4.25

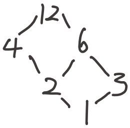
习题十九

2. (1)



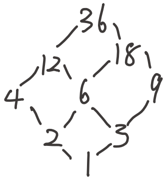
{4,6}无上界 不是格

(2)



是格

(3)



是格

(4)

是格

8. L1: {a,b,c} {a,b,c,e} {a,b,c,d,e}

{a,b,d} {a,b,d,e}

{a,b,e} {b,c,d,e}

{a,c,e}

{a,d,e}

{b,c,e}

{b,d,e}

L_2: $\{a,b,e\}$ $\{a,b,g\}$ $\{a,c,f\}$ $\{a,c,g\}$ $\{a,d,e\}$ $\{a,d,f\}$ $\{a,d,g\}$ $\{a,e,g\}$ $\{a,f,g\}$ $\{b,e,g\}$ $\{c,f,g\}$ $\{d,e,g\}$ $\{d,f,g\}$

$\{a,b,c,g\}$ $\{a,b,d,e\}$ $\{a,b,e,g\}$ $\{a,b,f,g\}$ $\{a,c,d,f\}$ $\{a,c,f,g\}$ $\{a,c,e,g\}$ $\{a,d,e,g\}$ $\{a,d,f,g\}$ $\{d,e,f,g\}$

$\{a,b,c,e,g\}$ $\{a,b,c,f,g\}$ $\{a,b,d,e,g\}$ $\{a,c,d,f,g\}$ $\{a,d,e,f,g\}$

19. 设 $L=\{0,1,\cdots,t\}$ 是链，$0<1<\cdots<t$.

记 $H_i=\langle a^{p^{t-i}}\rangle$，$i=0,1,\cdots,t$.

易知 $\{H_i\}$ 是 G 的全部子群，$H_0\subseteq H_1\subseteq\cdots\subseteq H_t$.

考虑 $\varphi: L\to L(G)$，$i\mapsto H_i$.

显然 φ 是双射，只需证 φ 是同态.

$\forall i\leq j$，$\varphi(i\wedge j)=\varphi(i)=H_i=\varphi(i)\cap\varphi(j)$，

$\varphi(i\vee j)=\varphi(j)=H_j=\varphi(i)\cup\varphi(j)$.

综上，φ 是 L 到 $L(G)$ 的同构.

28. 先证 $\langle B, \oplus, \otimes \rangle$ 是环

$\langle B, \oplus \rangle$ 是 Abel 群:

结合: $(a \oplus b) \oplus c = (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)$

$= a \oplus (b \oplus c)$

单位元: 0

逆元: 自身

交换: 显然

$\langle B, \otimes \rangle$ 是半群: 显然可结合

分配: $a \otimes (b \oplus c) = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)$

$= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

同理 $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

再证 $\langle B, \oplus, \otimes \rangle$ 是布尔环.

$a \otimes a = a$.

综上, $\langle B, \oplus, \otimes \rangle$ 是布尔环.

习题二十

3. 考虑 $a_1=7$,

$a_2=77$,

$\cdots$,

$a_{N+1}=\underbrace{77\cdots7}_{N+1\text{个}}$.

若 $\exists N\mid a_i$, 则 a_i 即为所求.

否则, 考察所有 $a_i \bmod N$,

由鸽巢原理, $\exists i<j$, $a_i \equiv a_j \bmod N$.

那么 $a_j-a_i=7\cdots70\cdots0$ 即为所求.

5. 设这37天分别学了 $a_1,\cdots,a_{37}$ 小时.

设 $S_i=\sum_{k=1}^{i}a_k$, $i=1,2,\cdots,37$.

$1\le S_1<S_2<\cdots<S_{37}\le 60$.

考察 $S_1,\cdots,S_{37},S_1+13,\cdots,S_{37}+13$.

该序列有74个数, 但只有 $60+13=73$ 种取值.

由鸽巢原理, $\exists i<j$, $S_j=S_i+13$.

故在 $i+1,i+2,\cdots,j$ 这些天共复习了13小时.

9. 反之, 若盒中球数各不相同,

则至少有 $0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}>m$ 个球,

矛盾.

10. 反之, 若任三连续扇形之和小于56,

则全部扇形之和不超过 $\frac{1}{3}(36\cdot55)=660$.

但 $1+2+\cdots+36=666$.

矛盾.