HW2 24.4.4

1. 设该Markov链有N个状态.

记平稳分布为 $\vec{\pi}=(\pi_1,\cdots,\pi_N)$.

$\vec{\pi}=\vec{\pi}P=\vec{\pi}P^2=\cdots=\vec{\pi}P^n$.

$\vec{x}=\vec{x}P=\vec{x}P^2=\cdots=\vec{x}P^n$.

$\sum_{j=1}^{N} x_j P_{ji}^n = x_i = x_i \cdot \sum_{j=1}^{N} P_{ji}^n$

$\Rightarrow 0=\sum_{j=1}^{N}(x_j-x_i)P_{ji}^n,\ \forall n,i.\ (*)$

取 $i=\arg\min_j \pi_j$，$x_j-x_i\geq 0,\ \forall j$.

若 $\exists x_j\neq x_i$，由于不可约，$\exists n$，$P_{ji}^n>0$，

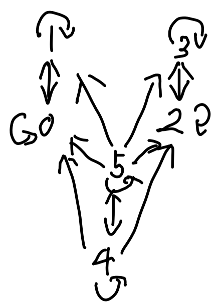
与(*)矛盾

因此，$\forall i,j$，$\pi_i=\pi_j$.

最后只需说明 $\vec{\pi}$ 存在，取 $\pi_i=\frac{1}{N}$，$\forall i$，

易检验 $\vec{\pi}$ 是平稳分布.

2. (a)



类：$C_0=\{0,1\}$，$C_2=\{2,3\}$，$C_5=\{4,5\}$.

显然 $\{0,1\}$，$\{2,3\}$ 是常返类，

4, 5 是瞬时态

$\lim_{n\to\infty} P_{54}^n=\lim_{n\to\infty} P_{55}^n=0$.

$$\begin{cases}\pi_4(C_0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\pi_4(C_0)+\frac{1}{4}\pi_5(C_0)\\ \pi_5(C_0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\pi_4(C_0)+\frac{1}{6}\pi_5(C_0)\end{cases}$$

$\Rightarrow \pi_5(C_0)=\frac{1}{2}$.

$\pi_5(C_2)=1-\pi_5(C_0)=\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases}\pi_0=\frac{1}{3}\pi_0+\frac{2}{3}\pi_1\\ \pi_1=\frac{2}{3}\pi_0+\frac{1}{3}\pi_1\end{cases}\Rightarrow \pi_0=\pi_1=\frac{1}{2}$$

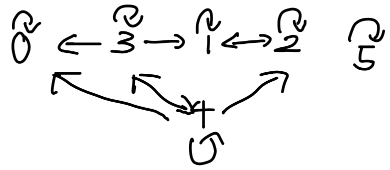
同理 $\pi_2=\frac{4}{19}$，$\pi_3=\frac{15}{19}$.

$\lim_{n\to\infty} P_{50}^n=\pi_5(C_0)\pi_0=\frac{1}{4}$.

同理 $\lim_{n\to\infty} P_{51}^n=\frac{1}{4}$，$\lim_{n\to\infty} P_{52}^n=\frac{2}{19}$，

$\lim_{n\to\infty} P_{53}^n=\frac{15}{38}$.

(b)



类：$C_0=\{0\}$，$C_1=\{1,2\}$，$C_3=\{3,4\}$，$C_5=\{5\}$.

由于$P_{55}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} P^n_{5i}=\begin{cases}1, & i=5,\\ 0, & i\neq 5.\end{cases}$

3. 显然问题等价于：1初始$a'=a-5$，2初始$b'=b-3$，求最终2输光的概率.

记$q=\frac{1-p}{p}$，由结论直接知该概率为

$$\begin{cases}\dfrac{1-q^{a'}}{1-q^{a'+b'}}, & p\neq\frac{1}{2},\\[2ex] \dfrac{a'}{a'+b'}, & p=\frac{1}{2}\end{cases}$$

4. 设状态表示当前总点数模13等于i，状态空间$\{0,\cdots,12\}$，$P_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{6}, & (j-i)\bmod 13=1,2,3,4,5,6,\\ 0, & 否则.\end{cases}$

该Markov链有限状态且不可约，因此常返（后面题目不再赘述），

又易知非周期，因此$\exists\,\pi_i=\lim\limits_{n\to\infty}P^n_{ii}$，$\forall i$.

注意到P双重随机，故$\pi_i=\frac{1}{13}$，$\forall i$

$\lim\limits_{n\to\infty}P(13|Y_n)=\pi_0=\frac{1}{13}$即为所求.

5. 由于有限Markov链必存在常返态，而该链具有对称性，可将状态i换为$(i+1)\bmod(m+1)$而不改变P，故所有状态都是常返态，该链可划分为若干等大的常返类.

记$d=\gcd(\{k|p_k>0\}\cup\{m+1\})$

由Bezout定理易知，状态$i\leftrightarrow j \iff d\,|\,|i-j|$

因此共有d个常返类，状态$0,1,\cdots,d-1$为其代表元.

注意到每个常返类都是不可约非周期的，故$\lim\limits_{n\to\infty}P^n_{ij}$存在.

又注意到常返类内转移矩阵双重随机，故

$$\lim_{n\to\infty}P^n_{ij}=\begin{cases}\dfrac{d}{m+1}, & d\,|\,|i-j|,\\ 0, & d\nmid|i-j|\end{cases}$$

6. 由题意知 $p_{ij}=\begin{cases} p, & j=0, \\ 1-p, & j=i+1, \\ 0, & 否则. \end{cases}$

$i,j\in N$.

记平稳分布为 $\pi=(\pi_0,\cdots,\pi_n,\cdots)$.

$\pi P=\pi$, $\pi^T\vec{1}=1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0=\sum_{i=0}^{\infty}p\pi_i=p. \\ \pi_k=(1-p)\pi_{k-1}=\cdots=(1-p)^k\pi_0=(1-p)^k p. \end{cases}$$

综上，平稳分布为 $\pi_k=p(1-p)^k$.

7.
$$\begin{cases} \pi_0=(1-p)\pi_0+(1-p)\pi_2 \\ \pi_1=p\pi_0+p\pi_2+\pi_3 \\ \pi_2=(1-p)\pi_1 \\ \pi_3=p\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0=\frac{(1-p)^2}{p^2+1} \\ \pi_1=\frac{p}{p^2+1} \\ \pi_2=\frac{p(1-p)}{p^2+1} \\ \pi_3=\frac{p^2}{p^2+1} \end{cases}$$

8. (a)
$$\begin{cases} \pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_{i+1}=1 \\ \pi_0=p(\pi_0+\cdots+\pi_{i+1}) \\ \pi_j=(1-p)\pi_{j-1}, \ 1\le j\le i \\ \pi_{i+1}=(1-p)\pi_i+(1-p)\pi_{i+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0=p \\ \pi_j=p(1-p)^j, \ 1\le j\le i \\ \pi_{i+1}=(1-p)^{i+1} \end{cases}$$

由于该链连不可约常返非周期，此平稳分布也是极限分布.

(b) $1/(1+(r-1)(\pi_i+\pi_{i+1}))=1/(1+(r-1)(1-p)^i)$.

(c) 废品概率为 p，因此就是 p.

9. 设1,2,3表示低,中,高.

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \\ \pi_1 = 0.4\pi_1 + 0.05\pi_2 + 0.05\pi_3 \\ \pi_2 = 0.5\pi_1 + 0.7\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ \pi_3 = 0.1\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.45\pi_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{13} \\ \pi_2 = \frac{5}{8} \\ \pi_3 = \frac{31}{104} \end{cases}$$

由于该链连不可约常返非周期,此平稳分布也是极限分布.

因此 $\pi_2 = \frac{5}{8}$ 即为所求.

10. 将这4个状态按顺序记为1.2.3.4.

(a) $$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \\ \pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.6\pi_3 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_3 \\ \pi_3 = 0.4\pi_2 + 0.1\pi_4 \\ \pi_4 = 0.6\pi_2 + 0.9\pi_4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \pi_1 = \frac{3}{11},\ \pi_2=\pi_3=\frac{1}{11},\ \pi_4=\frac{6}{11}$$

由于该链连不可约常返非周期,此平稳分布也是极限分布.

(b) $P(\text{晴}) = \pi_1+\pi_3 = \frac{4}{11}$.

11. 将初始质量分布视为概率分布 $w' = (w_1', \cdots, w_{2r+1}')$

$w^n = w^{n-1}P$, 其中 $P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |i-j|=1 \text{ 或 } 2r \pmod{2r+1}, \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

易知该链不可约常返非周期, 因此 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$

注意到P双重随机, 故 $\pi_i = \frac{1}{2r+1}$, $\forall i$.

$$\lim_{n\to\infty} w_k^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2r+1} w_i^1 P_{ik}^{n-1} = \sum_{i=1}^{2r+1} w_i^1 \lim_{n\to\infty} P_{ik}^{n-1} = \frac{1}{2r+1}.$$

12. (a) 可能违背的条件：$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k < \infty$，$\sum_{k=1}^{\infty} F_X(k) < \infty$，$\gcd\{k \mid p_k > 0\} = 1$.

(b) $v_n = u_n - u_{n-1}$

$$= p_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k (u_{n-k} - u_{n-1-k})$$

$$= p_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k v_{n-k}$$

$$= p_n + \sum_{k=1}^{n} p_k v_{n-k}.$$

$v_0 = 0$.

(c) 代入更新方程计算得

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	0.4	0.46	0.504	0.5196	0.4910	0.4991	0.5013	0.5004	0.4995	0.5001
u	0.4	0.86	1.364	1.8836	2.3746	2.8737	3.375	3.8754	4.3749	4.875

(d) 默认 (c) 成立，否则 u_N 未知.

记 $a_N = \frac{1}{N}(C_1 + C_2 u_{N-1}) = \frac{1}{N}(1 + 2u_{N-1})$.

$v_N = 0.4 v_{N-1} + 0.3 v_{N-2} + 0.2 v_{N-3} + 0.1 v_{N-4}$.

归纳易证 $v_N \geq 0.46$, $\forall N \geq 2$.

$u_N = \sum_{k=1}^{N} v_k \geq 0.4 + 0.46(N-1)$，$N \geq 2$.

$$a_N \geq \frac{1}{N}(1 + 2(0.4 + 0.46(N-2)))$$

$$= 0.92 - \frac{0.04}{N}$$

$$\geq 0.9 \text{，} N \geq 2.$$

又 $a_1 = 1$，$a_2 = 0.9$，故 $N^* = \arg\min_N a_N = 2$.

作业附注：在1,6,7题中，我没有指明常返性、极限分布的存在性等，因为题目仅要求求出平稳分布，平稳分布只需满足 $\pi = \pi P$，$\sum \pi_i = 1$ 即可