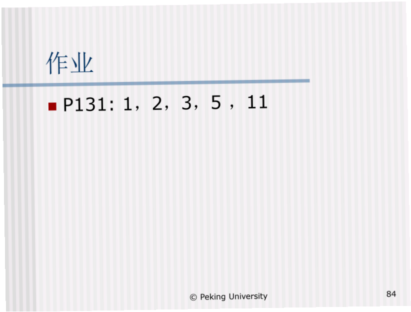
22.11.8



1\. 由握手定理，设G有x个顶点，有

$32 \le 12+12+2(x-7)$

$\Rightarrow x \ge 11$

由于满足握手定理的度数列一定可图化，因此G至少有11个顶点.

2\. 反之，若G至多有4个6度顶点，至多有6个5度顶点.

由题设，G恰好有4个6度顶点和5个5度顶点.

而这是不可图化的，矛盾.

3\. 容易发现多面体的棱数的两倍即为每个面的棱数之和，因此后者必定为偶数，自然得到题中结论.

5\. $\begin{cases} 2n-3=m \\ 2m=3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=6 \\ m=9 \end{cases}$

注意到 $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow \overline{G_1} \cong \overline{G_2}$.

6阶3-正则图的补图是6阶2-正则图，作图易知只有两种非同构图，因此G也只有两种非同构图.

7\. 下面用 $(\cdots) \Leftrightarrow (\cdots)$ 表示两个度数列的可简单图化是充要的.

(1) $(6,6,5,5,3,3,2)$

$\Leftrightarrow (5,4,4,2,2,1)$

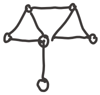
$\Leftrightarrow (3,3,1,1,0)$

$\Leftrightarrow (2,0,0,0)$ 不可简单图化

(2) $(5,3,3,2,2,1)$

$\Leftrightarrow (2,2,1,1,0)$

$\Leftrightarrow (1,0,1,0)$ 可简单图化

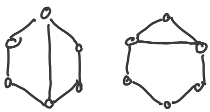


只有这一种非同构图.

(3) $(3,3,2,2,2,2)$

$\Leftrightarrow (2,1,1,2,2)$

$\Leftrightarrow (1,1,1,1)$ 可简单图化



11\. G有$\frac{n(n-1)}{4}$条边，由$4 \mid n(n-1)$立得结论.

22.11.10

14. 显然$\exists u,v,w\in V(G)$，使$(u,v),(v,w)\in E(G)$.

反之，设$\forall (u,v),(v,w)\in E(G)$都有$(u,w)\in E(G)$.

$\forall u,v\in V(G)$，$\exists$路径 $u v_1 v_2 \cdots v_s v$.

$(u,v_1),(v_1,v_2)\in E(G) \Rightarrow (u,v_2)\in E(G)$

$(u,v_2),(v_2,v_3)\in E(G) \Rightarrow (u,v_3)\in E(G)$

......

易得$(u,v)\in E(G)$.

因此G是完全图，矛盾.

16. 任取一条极大路径，不妨设为$v_1 v_2 \cdots v_l$.

由极大性及$\delta(G)\geq 3$，$\exists$路径中的$v_s, v_t, s<t$，

$(v_1,v_s),(v_1,v_t)\in E(G)$.

这自然形成3个圈 $v_1\cdots v_s v_1$，

$v_1\cdots v_t v_1$，

$v_1 v_s v_{s+1}\cdots v_t v_1$.

其长度分别为$s, t, t-s+2$.

设G中各圈长度的最大公约数为d.

由$s|d$，$t|d$，$t-s+2|d$知$2|d$，故$d=1$或2.

18. (1) 我们证明其逆否命题.

设G不连通，记其含顶点最少的连通分支为G'.

显然$|V(G')|\leq \frac{n}{2}$.

任取$v\in V(G')$，有

$\delta(G)\leq d(v)\leq |V(G')|-1\leq \frac{n}{2}-1$.

即$\delta(G)<\frac{n}{2}$.

因此，$\delta(G)\geq\frac{n}{2}$时G必连通.

(2) 我们证明其逆否命题.

设G非k-连通，则$\exists V'\subseteq V(G)$，

$|V'|=k-1$，$G-V'$不连通，

记其含顶点最少的连通分支为G'.

显然$|V(G')|\leq \frac{n-k+1}{2}$.

任取$v\in V(G')$，有

$\delta(G)\leq d(v)\leq |V(G')|-1$，

即$\delta(G)<\frac{n-k+1}{2}$.

因此，$\delta(G)\geq\frac{1}{2}(n-k+1)$时，G必k-连通.

25. 反之，设∃强连通的n阶竞赛图D

任取$u,v\in V(D)$，∃路径

$u v_1 v_2 \cdots v_s v$

和

$v u_1 u_2 \cdots u_t u$.

使用与14题相同的方法，可知

$\langle u,v\rangle, \langle v,u\rangle \in E(D)$，这与

竞赛图的定义相矛盾.

22. 对于G的块G'，当$|V(G')|=2$时，

显然G'为K_2.

当$|V(G')|\geq 3$时，任取G'的两顶点u,v.

由于G'是块，u,v共圈C.

若$C=G'$，则G'为奇圈.

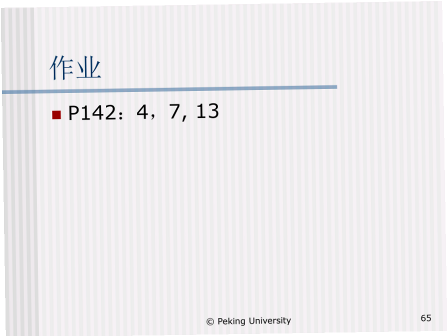
若$C\neq G'$，则$\exists w\notin C$.

由于G'是块，w与(u,v)共圈C_1.

注意到$C\oplus C_1$仍为圈，且为偶圈，矛盾.

综上，G'是K_2或奇圈.

22.11.15



4. 引理：$G-v_0$无圈 $\Leftrightarrow$ $\forall$圈 $C \subseteq G$, $v_0 \in C$.

($\Rightarrow$) 反之，若$\exists$圈$C \subseteq G$, $v_0 \notin C$, C也是$G-v_0$中的圈，矛盾.

($\Leftarrow$) 反之，若$\exists$圈$C \subseteq G-v_0$, C也是G中的圈，且$v_0 \notin C$，矛盾.

回到本题.

($\Rightarrow$) 我们证明逆否命题.

若$G-v_0$有圈，由引理$\exists$圈$C \subseteq G$, $v_0 \notin C$.

取$G-C$包含v_0的一个连通分支G'.

G'仍是欧拉图，$\exists$从v_0开始的欧拉回路Γ.

在G中从v_0开始按Γ行遍，最终回到v_0时，
与v_0关联的边都已访问过，而C尚未访问，
这便说明v_0不可任意行遍.

($\Leftarrow$) 从v_0开始任构造一个圈C.

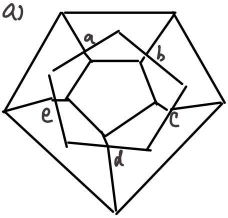
$G-C$的每个连通分支都可分解为一些边不重的圈的并，而由引理，v_0在每一个圈中，故$G-C$连通.

因此，$G-C$也是一个欧拉图，满足$G-C-v_0$无圈.

用数学归纳法容易证明v_0可任意行遍.

7.

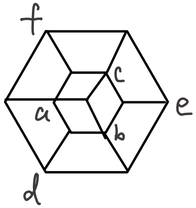
(a)



设 $V_1=\{a,b,c,d,e\}$

$p(G-V_1)>|V_1|$

(b)



设 $V_1=\{a,b,c,d,e,f\}$

$p(G-V_1)>|V_1|$

13. 将问题自然抽象为图论语言，即证

在n阶无向图G中，$\forall i,j,k$互不相同，$(v_iv_k)\in E$和$(v_jv_k)\in E$至少一者成立，

则$n\geq 3$时G中存在哈密顿通路，$n\geq 4$时G中存在哈密顿回路.

$\forall i,j,k$互不相同，若$(v_iv_j)\in E$，则 $d(v_i)+d(v_j)\geq 2+n-2=n$.

若$(v_iv_j)\notin E$，则必有$(v_iv_k)\in E$，$(v_jv_k)\in E$同时成立，否则，设

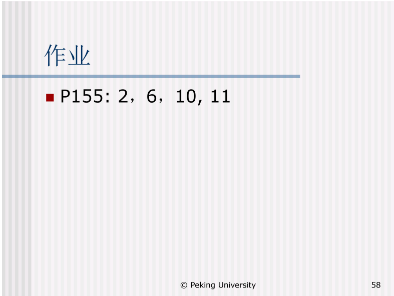
$(v_iv_k)\in E$，$(v_jv_k)\notin E$，取$i_1=i$，$j_1=k$，$k_1=j$即知矛盾，故$d(v_i)+d(v_j)\geq 2(n-2)$.

$n\geq 3$时，$2(n-2)\geq n-1$.

$n\geq 4$时，$2(n-2)\geq n$.

由书中定理即得结论.

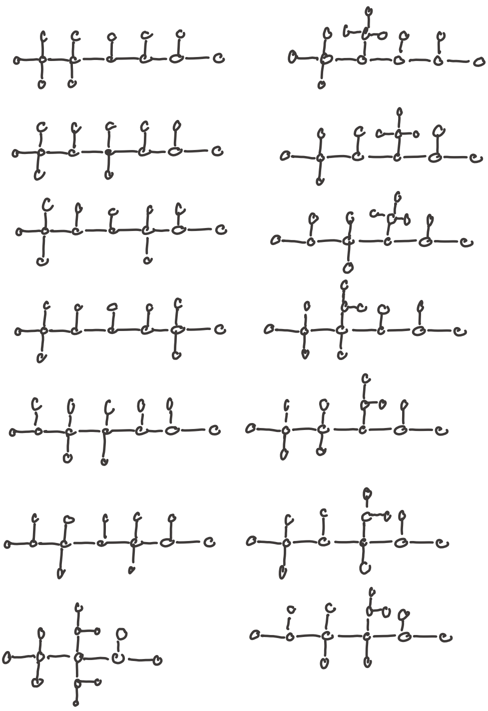
22.11.22



2. 设有x个4度顶点，由握手定理

$$2(11+x)=18+4x$$

$$\Rightarrow x=2$$



共14种

6. 引理：n阶简单图G若无圈，则至多有$n-1$条边.

证明：设G有k个连通分支，每个分支连通且无圈，因此是树.

于是有边数$m_i=n_i-1$，$\forall 1\le i\le k$.

相加即得$m=\sum_{i=1}^{k} m_i=\sum_{i=1}^{k} n_i-k=n-k\le n-1$.

回到该题，我们去证逆否命题，即

n阶简单图G与其补图都无圈$\Rightarrow n\le 4$.

设G有m条边，由引理$\begin{cases} m\le n-1 \\ \frac{n(n-1)}{2}-m\le n-1 \end{cases}$

相加即得$n\le 4$.

10. 基本回路系统：{aegdj, bgdji, cgd, fge, hij}.

基本割集系统：{dabc, eaf, gabcf, ibh, jabh}.

这里为了简化书写，用dabc代表割集{d, a, b, c}，以此类推.

11. 设 $d(v)=\Delta(T)$. $T-v$ 有 $d(v)$ 个连通分支，

它们无圈，从而都是树.

这些分支或者是平凡树，或者至少有2片树叶，

因此至少为T贡献1片树叶.

综上，T至少有 $d(v)\geq k$ 片树叶.