23.4.11

习题十七

53. 由裴蜀定理，$\exists p,q\in\mathbb{Z}$，

$p|H|+q|G_2|=1$.

$\forall h\in H$，$h=h^{p|H|+q|G_2|}=h^{q|G_2|}$.

$\varphi(h)=\varphi(h^{q|G_2|})=(\varphi(h^q))^{|G_2|}=e_2$.

故 $H\subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$.

61. 显然 φ 是双射，故

φ 是自同构 $\Leftrightarrow$ φ 是同态

$\Leftrightarrow \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$，$\forall x,y\in G$

$\Leftrightarrow (xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$

$\Leftrightarrow y^{-1}x^{-1}=x^{-1}y^{-1}$

(x,y的任意性) $\Leftrightarrow$ G为交换群

62. (1) $\forall 0\leq i,j\leq n-1$，

$\varphi(a^ia^j)=\varphi(a^{i+j})=a^{t(i+j)}$,

$\varphi(a^i)\varphi(a^j)=a^{ti}a^{tj}=a^{t(i+j)}$.

故 φ 是 G 的自同态.

(2) φ_t 是自同构 $\Leftrightarrow$ φ_t 是满射

$\Leftrightarrow \forall i,\exists j,\ \varphi(a^j)=a^i$

$\Leftrightarrow \forall i,\exists j,\ tj-i\equiv 0 \bmod n$

$\Leftrightarrow$ $i=1$时，$\exists j,\ tj\equiv 1 \bmod n$

(裴蜀定理) $\Leftrightarrow (n,t)=1$

68. 考虑 $\varphi: G\to G/H\times G/K$，

$x\mapsto \langle Hx, Kx\rangle$.

$\varphi(x)=\varphi(y) \Rightarrow Hx=Hy,\ Kx=Ky$

$\Rightarrow xy^{-1}\in H\cap K$

$\Rightarrow xy^{-1}=e$

$\Rightarrow x=y$

这说明 φ 是单射.

$\varphi(xy)=\langle Hxy, Kxy\rangle$

$=\langle Hx, Kx\rangle\langle Hy, Ky\rangle$

$=\varphi(x)\varphi(y)$

这说明 φ 是同态.

综上，$G\cong\varphi(G)$.

习题十八

5. 先证(2)

$(a+a)^2=a+a$

$\Rightarrow a+a+a+a=a+a$

$\Rightarrow a+a=0$

(1) $(a+b)^2=a+b$, $\forall a,b\in R$

$\Rightarrow a^2+b^2+ab+ba=a+b$

$\Rightarrow ab+ba=0$

又 $ab+ab=0$,

故 $ab=ba$, 即 R 可交换

(3) $\exists a\in R$, $a\neq 0,1$.

由于 $a(a-1)=0$,

故 a 是左零因子, R 不是整环.

7. (1) 设 $n=pq$, $p,q\in N^*$, $p,q<n$.

$pq\equiv 0 \mod n$, $qp\equiv 0 \mod n$.

故 p,q 是零因子.

(2) 即证

$\exists s<n, rs\equiv 0 \mod n \iff \exists d>1, d|r, d|n$.

$\Rightarrow$ 取 $d=\frac{n}{(n,s)}$ 即可.

$\Leftarrow$ 取 $s=\frac{n}{d}$ 即可.

(3) 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14,

15, 16.

12. $\forall x\in F$, $nx=(n1)x=0x=0$.

$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}$.

由于 $\forall i=1,2,\cdots,n-1$, $n|C_n^i$,

故 $(a+b)^n=a^n+b^n$.