算分作业 10

24.05.27

10.1

记该算法为 A, 下将 $A(I)$ 简记为 $A, OPT(I)$ 同理.

设 $|V(G)| = n$, 我们证明 $r = n - 1$. 对于孤立图, r 未定义, 不考虑.

先证明 $r \leq n - 1$, 注意到任取图中 $n - 1$ 个顶点一定构成点覆盖, 即 $A \leq n - 1$, 而最优解至少选取一个顶点, 即 $OPT \geq 1$, 故 $r = \frac{A}{OPT} \leq n - 1$.

再证明 $r \geq n - 1$, 取 $V(G) = \{v_i\}_{i=1}^n, E(G) = \{(v_i, v_n)\}_{i=1}^{n-1}$. 易知 $OPT = 1$ 而 A 最差可达 $n - 1$, 故 r 可达 $n - 1$.

综上, $r = n - 1$.

10.3

下将 $FF(I)$ 简记为 $FF, OPT(I)$ 同理. 记 $W = \sum_{i=1}^n w_i$.

$FF = 1$ 时, 显然是最优解, $FF = OPT$. 下考虑 $FF > 1$ 时.

若 $FF = 2k$, 注意到 FF 给出的方案必满足任两箱子重量之和大于 B, 故有 $W > kB$. 又显然有 $B \cdot OPT \geq W$, 于是 $FF < \frac{2W}{B} \leq 2OPT$.

若 $FF = 2k + 1$, 设 FF 给出的方案中最重的箱子重 $w \geq \frac{W}{2k+1}$. 同理有 $W > kB + w$, 化简得 $FF < \frac{2W}{B} \leq 2OPT$.

综上, 总有 $FF < 2OPT$.

10.4

即证若装箱问题存在 $r < \frac{3}{2}$ 的多项式时间近似算法 A, 则 $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

任给双机调度问题 S 的判定实例 I, 其中任务加工时间为 $t_1, \cdots, t_n$, 截止时间为 D. 构造装箱问题 S' 的实例 I', 其中物品重量为 $t_1, \cdots, t_n$, 箱子限重为 D.

注意到 $I \in S \Rightarrow OPT(I') \leq 2 \Rightarrow A(I') < 3 \Rightarrow A(I') \leq 2 \Rightarrow OPT(I') \leq 2 \Rightarrow I \in S$. 这导出了一个判定 S 的多项式时间算法: 若 $A(I') < 3$ 则 $I \in S$, 否则 $I \notin S$.

我们知道 S 是 $\mathbf{NPC}$ 的, 故命题得证.