HW4 24.5.29

1. 易知 $P(N(t)>t)=0$，$P(N(t)<\lfloor\frac{t}{2}\rfloor)=0$，$P(N(t)=t)=\frac{1}{3^t}$.

枚举所有 X_i 可能取值，可得

$$P(N(1)=k)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & k=0,\\ \frac{1}{3}, & k=1,\\ 0, & k>1.\end{cases}$$

$$P(N(2)=k)=\begin{cases}0, & k=0,\\ \frac{8}{9}, & k=1,\\ \frac{1}{9}, & k=2,\\ 0, & k>2.\end{cases}$$

$$P(N(3)=k)=\begin{cases}0, & k=0,\\ \frac{4}{9}, & k=1,\\ \frac{14}{27}, & k=2,\\ \frac{1}{27}, & k=3,\\ 0, & k>3.\end{cases}$$

2. (a) 设首次等候时间为 X.

$P(X=k)=(\frac{4}{5})^k\cdot\frac{1}{5}$，$k\in N$.

X 服从几何分布.

(b) 设总病人数为 $N(t)$，至少需候诊 8h 的病人数为 $M(t)$

任一病人至少候诊 8h 的概率为 $p=(\frac{4}{5})^8$.

$N(t)$ 是参数为 1 的泊松过程.

由上一章第3题知，$M(t)$ 是参数为 p 的泊松过程.

$P(M(t)=k)=\frac{(pt)^k}{k!}e^{-pt}$

3 显然这是一个交替更新过程

$\mu_1=E(\text{雨天持续时间})=2$.

$\mu_2=E(\text{晴天持续时间})=7$.

长久之后雨天概率为 $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}=\frac{2}{9}$.

4. 设寿命为X

$$P(X>x+t|X>x)=\frac{P(X>x+t)}{P(X>x)}=\frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}.$$

所求为$E(X-x|X>x)$

$$=\int_0^\infty P(X>x+t|X>x)dt$$

$$=\frac{1}{1-F(x)}\int_0^\infty (1-F(x+t))dt$$

$$=\frac{1}{1-F(x)}\int_x^\infty (1-F(t))dt$$

5 令$\Theta'(T)=0$，有

$$(C_2-C_1)f(T)\int_0^T(1-F(x))dx=(C_1+(C_2-C_1)F(T))(1-F(T))$$

$$\Rightarrow r(T)\int_0^T(1-F(x))dx=\frac{C_1}{C_2-C_1}+F(T)$$

$$\Rightarrow r(T)\int_0^T(1-F(x))dx-F(T)=\frac{C_1}{C_2-C_1}.$$

T^*必满足$\Theta'(T^*)=0$，故满足上式.

6. 这是一个更新过程，更新间隔为车长与距离之和.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{E(N_x)}{x}=\frac{1}{E(\xi)+\frac{1}{2}}.$$

(i) 所求$=\frac{1}{c+\frac{1}{2}}=\frac{2}{2c+1}.$

(ii) $\xi\sim Exp(1)$，$E(\xi)=1$. 所求$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$

7. 这是一个累积过程. 设$N(t)$为$[0,t]$到达人数，

Y_i为第i人所付的钱

$N(t)$是$F(x)$导出的更新过程，Y_i的分布函数为$G(x)$.

(i) 所求$=Y_1+Y_2+\cdots+Y_{N(t)}$.

(ii) 所求$=\frac{E(Y_i)}{E(\text{到达间隔})}=\int_0^\infty(1-G(x))dx\Big/\int_0^\infty(1-F(x))dx.$

8. 闭锁时间的分布函数为

$$G(x)=\begin{cases}0, & x<\tau,\\ 1, & x\geq\tau\end{cases}$$

$$\int_0^t(1-G(x))dx=\begin{cases}t, & 0\leq t<\tau,\\ \tau, & t\geq\tau.\end{cases}$$

所求 $p(t)=e^{-\lambda\int_0^t(1-G(x))dx}=\begin{cases}e^{-\lambda t}, & 0\leq t<\tau,\\ e^{-\lambda\tau}, & t\geq\tau.\end{cases}$