23.3.7

## 习题十五

29.(1) 只需证 $\forall x\in\mathbb{Z}$，有 $\varphi(x)=\varphi(\Delta x)$，

即 $((x)\bmod 2+1)\bmod 2=(x+1)\bmod 2$，

而这是显然的。

(2) $\{\{x\in\mathbb{Z}\mid x$ 为奇数$\},\{x\in\mathbb{Z}\mid x$ 为偶数$\}\}$

30. (1) $\forall x,y\in A_k$，

$\varphi(x)+\varphi(y)=nx+ny$

$=n(x+y)$

$=\varphi(x+y)$，

这仅说明 $\varphi$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的同态.

(2) ① $n=0$

$V_1/\sim=\langle\{A_k\},\oplus\rangle$，$A_k\oplus A_k=A_k$

② $n>0$

$V_1/\sim=\langle\{\{x\}\mid x\in A_k\},\oplus\rangle$

$\forall\{x\},\{y\}\in V_1/\sim$，$\{x\}\oplus\{y\}=\{x+y\}$

## 习题十六

7. 由于 $a*a=a$，$b*b=b$，

交换有 $(a*b)*(a*b)$

$=a*b*a*b$

$=a*a*b*b$

$=(a*a)*(b*b)$

$=a*b$.

10. 子半群为 $V'=\langle A,\otimes\rangle$，

其中 $A$ 为

① $\{0\}$ ⑤ $\{0,1,2\}$

② $\{1\}$ ⑥ $\{1,3\}$

③ $\{0,1\}$ ⑦ $\{0,1,3\}$

④ $\{0,2\}$ ⑧ $\{0,1,2,3\}$

其中②③⑤⑥⑦⑧可构成子独异点