22.9.6

作业

1. 用真值表证明以下等价式和蕴涵式
   a） $A \to (B \to A) \Leftrightarrow \neg A \to (A \to \neg B)$
   b） $\neg(\mathbf{A} \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$
   c） $(P \to Q) \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$
2. 不构造真值表证明1中各式
3. 把下列命题符号化，并求前束范式
   “所有运动员都钦佩某些教练”
   “有些乌龟比有些兔子跑得快”

4.给出一个解释，是下式左端为假，右端为真：
$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$

1.

(a)

A	B	$B\to A$	$A\to(B\to A)$	$\neg B$	$A\to\neg B$	$\neg A$	$\neg A\to(A\to\neg B)$
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1

(b)

A	B	$A\leftrightarrow B$	$\neg(A\leftrightarrow B)$	$A\vee B$	$A\wedge B$	$\neg(A\wedge B)$	$(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$
1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0

(c)

P	Q	$P\to Q$	$P\wedge Q$	$P\to(P\wedge Q)$	$(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

2. (a)

$\neg A\to(A\to\neg B)$

$\Leftrightarrow A\vee(\neg A\vee\neg B)$ (蕴含等值)

$\Leftrightarrow (A\vee\neg A)\vee\neg B$ (结合律)

$\Leftrightarrow 1\vee\neg B$ (排中律)

$\Leftrightarrow 1$ (零律)

同理有 $A\to(B\to A)$

$\Leftrightarrow \neg A\vee(\neg B\vee A)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee A)\vee\neg B$

$\Leftrightarrow 1\vee\neg B$

$\Leftrightarrow 1$

因此 LHS $\Leftrightarrow 1\Leftrightarrow$ RHS

(b) $(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(\neg A\vee\neg B)$ (德摩根律)

$\neg(A\leftrightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg((A\to B)\wedge(B\to A))$ (等价等值式)

$\Leftrightarrow \neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$ (蕴含等值式)

$\Leftrightarrow (A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (A\vee(\neg A\wedge B))\wedge(\neg B\vee(\neg A\wedge B))$ (分配律)

$\Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(\neg A\vee\neg B)$ (分配律、排中律)

因此 LHS $\Leftrightarrow$ RHS.

(c) $(P\to Q)$

$\Leftrightarrow \neg P\vee Q$ (蕴含等值式)

$P\to(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg P\vee(P\wedge Q)$ (蕴含等值式)

$\Leftrightarrow (\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow \neg P\vee Q$ (排中律、同一律)

从而有 LHS $\Leftrightarrow$ RHS,

自然有 LHS $\Rightarrow$ RHS.

3.

(1) $F(x)$: x是运动员

$G(x)$: x是教练.

$H(x,y)$: x钦佩y.

$\forall x(F(x) \to \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y(F(x) \to (G(y) \wedge H(x,y)))$

(2) $F(x)$: x是乌龟.

$G(x)$: x是兔子.

$H(x,y)$: x比y跑得快.

$\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge H(x,y))$.

4. $x \in \{0,1\}$.

$A(x)=x$, $B(x)=\neg x$.

验证即可.

22.9.13

作业

- P20: 3，6，8，10

  P21: 13， 16

3. (1) T (2) F (3) F (4) T (5) T
   (6) T (7) F (8) T (9) T (10) F
   (11) F

6. (1) 零元: $\varnothing$

   一元: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

   二元: $\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}$

   三元: $\{a,b,c\}$

   幂集: $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.

   (2) 零元: $\varnothing$

   一元: $\{1\}, \{\{2,3\}\}$

   二元: $\{1,\{2,3\}\}$

   幂集: $\{\varnothing, \{1\}, \{\{2,3\}\}, \{1,\{2,3\}\}\}$.

   (3) 零元: $\varnothing$

   一元: $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$

   二元: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

   幂集: $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

   (4) 零元: $\varnothing$

   一元: $\{\{1,2\}\}$

   幂集: $\{\varnothing, \{\{1,2\}\}\}$.

   (5) 零元: $\varnothing$

   一元: $\{\{\varnothing,1\}\}, \{1\}$

   二元: $\{\{\varnothing,1\}, 1\}$

   幂集: $\{\varnothing, \{\{\varnothing,1\}\}, \{1\}, \{\{\varnothing,1\},1\}\}$.

8. (1) $\{4\}$

(2) $\{1,3,5\}$

(3) $\{2,3,4,5\}$

(4) $\{2,3,4,5\}$

(5) $\{\phi, \{4\}\}$

(6) $\{\{1\},\{1,4\}\}$

10. $P(A)=\{\phi,\{a\}\}$

$PP(A)=\{\phi,\{\phi\},\{\{a\}\},\{\phi,\{a\}\}\}$

(1) T (2) T (3) F

(4) T (5) T (6) F

13. (1) $(A-B)-C$

$=(A-B)\cap\sim C$

$=A\cap\sim B\cap\sim C$.

$A-(B-C)$

$=A-(B\cap\sim C)$

$=A\cap\sim(B\cap\sim C)$

$=A\cap(\sim B\cup C)$.

显然 $\sim B\cap\sim C\subseteq\sim B\cup C$,

故 $(A-B)-C\subseteq A-(B-C)$.

(2) 等式成立 $\Leftrightarrow \sim B\cap\sim C=\sim B\cup C$

$\Leftrightarrow (\sim B\subseteq\sim C)\wedge(C\subseteq\sim B)$

$\Leftrightarrow (C\subseteq B)\wedge(C\subseteq\sim B)$

$\Rightarrow C\subseteq B\cap\sim B=\phi$

$\Leftrightarrow C=\phi$

当 $C=\phi$ 时, 等式显然成立.

综上, 等式成立 $\Leftrightarrow C=\phi$.

16. (1) $\{3,4,\{3\},\{4\}\}$.

(2) ϕ.

(3) $\{\phi,\{\phi\}\}$.

22.9.15

作业

P21: 14，20，25(3)，30(1)

14. $(A\cap B=A\cap C)\wedge(\sim A\cap B=\sim A\cap C)$

$\Rightarrow (A\cap B)\cup(\sim A\cap B)=(A\cap C)\cup(\sim A\cap C)$

$\Leftrightarrow B=C$.

20. $(A\cap C)\subseteq(B\cap C)\subseteq B$.

$(A\cap\sim C)\subseteq(B\cap\sim C)\subseteq B$.

于是 $(A\cap C)\cup(A\cap\sim C)\subseteq B$,

即 $A\subseteq B$.

25.(3) $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)=A\cup B$.

$(A\cup(B-C))\cap A=A$.

于是，原式 $=(A\cup B)-A=B-A$.

30.(1) $x\in P(A)\cap P(B)$

$\Leftrightarrow x\in P(A)\wedge x\in P(B)$

$\Leftrightarrow x\subseteq A\wedge x\subseteq B$

$\Leftrightarrow x\subseteq A\cap B$

$\Leftrightarrow x\in P(A\cap B)$.

于是 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$.