算分作业 9

24.05.20

9.5

(1) $f: \langle G, k\rangle \mapsto \langle \overline{G}, k\rangle$ 将独立集实例变换到团实例, 其中 $\overline{G}$ 是 G 的补图. 显然 f 是多项式时间的. 易知一个顶点集是 G 的独立集, 当且仅当它是 $\overline{G}$ 的团, 故 f 即为所需归约函数.

(2) $f: \langle G, k\rangle \mapsto \langle \overline{G}, |V(G)| - k\rangle$ 将点覆盖实例变换到团实例. 显然 f 是多项式时间的. 易知顶点集 V' 是 G 的点覆盖, 当且仅当 $V - V'$ 是 $\overline{G}$ 的团, 故 f 即为所需归约函数.

(3) 对于图 $G = \langle V, E\rangle, V = \{v_1, \cdots, v_n\}$, 考虑图 $H = \langle V, E'\rangle, E' = \{(v_1, v_2), \cdots, (v_n, v_1)\}$. $f: G \mapsto \langle G, H\rangle$ 将哈密顿环实例变换到子图同构实例. 显然 f 是多项式时间的. 易知 G 中有哈密顿环, 当且仅当 H 与 G 的某个子图同构, 故 f 即为所需归约函数.

(4) 对于团实例 $I = \langle G, k\rangle, |V(G)| = n$, $f(I)$ 为 0-1 整数规划实例

$$\begin{aligned}
&x_1 + \cdots + x_n \geq k \\
&x_i + x_j \leq 1, (v_i, v_j) \notin E(G) \\
&x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

显然 f 是多项式时间的. 易知顶点集 $|V'| \geq k$ 是 G 的团, 当且仅当

$$x_i = \begin{cases} 1, v_i \in V', \\ 0, v_i \notin V' \end{cases}$$

满足上述 0-1 整数规划, 故 f 即为所需归约函数.

9.10

对于任意 $\mathbf{NP}$ 问题 π, $\pi \leq_p \Pi' \leq_p \Pi$, 故 Π 是 $\mathbf{NP}$ 难的. 又 $\Pi \in \mathbf{NP}$, 故 $\Pi \in \mathbf{NPC}$.

9.14

显然划分是 $\mathbf{NP}$ 的, 只需非确定性选择所有 T 并验证等式即可.

对于 $A = \{a_1 \cdots, a_n\}, \sum_{i=1}^n a_i = s$. 不妨设 $k \leq s/2$. $f: \langle A, k\rangle \mapsto A \cup \{s - 2k\}$ 将子集和实例变换到划分实例. 显然 f 是多项式时间的. 易知 $\langle A, k\rangle$ 是子集和实例, 当且仅当 $A \cup \{s - 2k\}$ 是划分实例, 故 f 是子集和到划分的多项式时间归约.

我们知道子集和是 $\mathbf{NPC}$ 的, 故划分也是 $\mathbf{NPC}$ 的.

9.15

显然子图同构是 $\mathbf{NP}$ 的, 只需非确定性选择所有单射并验证同构即可.

9.5 (3) 已经证明哈密顿环可多项式时间归约到子图同构, 而哈密顿环是 $\mathbf{NPC}$ 的, 故子图同构也是 $\mathbf{NPC}$ 的.