23.4.18

习题十八

20. (1) $\forall a_1+b_1, a_2+b_2 \in A+B$, $r\in R$,

$(a_1+b_1)-(a_2+b_2)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\in A+B$,

$(a_1+b_1)r=a_1r+b_1r\in A+B$,

$r(a_1+b_1)=ra_1+rb_1\in A+B$.

故由定义知 $A+B$ 是理想.

(2) $R=\{\sum_{i,j}k_{ij}x^iy^j \mid k_{ij}\in Z\}$,

$A=\{\sum_i k_ix^i\}$,

$B=\{\sum_j k_jy^j\}$.

23. $\forall 4x_1, 4x_2\in D$, $a\in A$,

$4x_1-4x_2=4(x_1-x_2)\in D$,

$4x_1\cdot a=a\cdot 4x_1=4(ax_1)\in D$.

故由定义知 D 是 A 的理想.

$A/D=\{4Z, 4Z+2\}$.

26. 显然 R/H 是可交换的含幺环.

R/H 是域 $\Leftrightarrow$ $R/H-\{H\}$ 有逆元.

$\Rightarrow$ $\forall I\supset H$, $\exists i\in I-H$.

$H+i\neq H$, 故 $\exists H+j$, $(H+i)(H+j)=H+1$,

即 $\exists h\in H$, $ij=h+1$.

故 $1=ij-h\in I$.

$\forall r\in R$, $r=1\cdot r\in I$.

故 $I=R$, 即说明 H 是 R 的极大理想.

$\Leftarrow$ $\forall r\in R-H$, 考虑 $I=H+rR$.

易知 I 是 R 的理想, 且 $H\subset I$,

故 $I=R$.

$1\in I$, 即 $\exists r'$, $rr'\in H+1$.

这说明 R/H 是域.

30. 对于 $f(x)=\sum_i k_ix^i$, $f(0)=k_0$,

故显然 φ 是满射.

$\forall f(x)=\sum_i k_ix^i$, $g(x)=\sum_i l_ix^i$,

$\varphi(f(x)+g(x))=k_0+l_0=\varphi(f(x))+\varphi(g(x))$,

$\varphi(f(x)g(x))=k_0l_0=\varphi(f(x))\varphi(g(x))$.

由定义知 φ 是满同态.

$Ker\varphi=\{xf(x) \mid f(x)\in F(x)\}$.

$F[x]/Ker\varphi=\{Ker\varphi+k \mid k\in F\}$.

34. 下面逐一验证环的定义.

$\langle \mathrm{End}G, + \rangle$是Abel群:

交换: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$.

单位元: 零变换.

逆元: f的逆元是$-f$.

结合: $((f+g)+h)(x)=f(x)+g(x)+h(x)=(f+(g+h))(x)$.

$\langle \mathrm{End}G, \circ \rangle$是半群:

结合: $((f\circ g)\circ h)(x)=f(g(h(x)))=(f\circ(g\circ h))(x)$.

分配律: 易验证.

故$\langle \mathrm{End}G, +, \circ \rangle$是环.

记 $\varphi_k: G\to G$, $a^i \mapsto a^{ki}$.

$\mathrm{End}G=\{\varphi_k \mid k=0,1,\cdots,n-1\}$.