22.10.14

作业

p.508(p.101). 17(1), (2), (3)

17.(1)

只需证 $(\alpha\to\beta)\to\beta \vdash \neg\alpha\to\neg(\beta\to\alpha)$

只需证 $(\alpha\to\beta)\to\beta, \neg\alpha \vdash \neg(\beta\to\alpha)$

① $\neg\alpha$

② $\neg\alpha\to(\alpha\to\beta)$ (已证)

③ $\alpha\to\beta$ (M) ①②

④ $(\alpha\to\beta)\to\beta$

④ β (M) ③ ④

⑤ $\neg(\beta\to\alpha)$ (已证) ①④

(2) 只需证 $(\alpha\to\beta)\to\gamma \vdash \neg\gamma\to\neg(\alpha\to\gamma)$

只需证 $(\alpha\to\beta)\to\gamma, \neg\gamma \vdash \neg(\alpha\to\gamma)$

① $(\alpha\to\beta)\to\gamma$

② $((\alpha\to\beta)\to\gamma)\to(\neg\gamma\to\neg(\alpha\to\beta))$ (已证)

③ $\neg\gamma\to\neg(\alpha\to\beta)$ (M)①②

④ $\neg\gamma$

⑤ $\neg(\alpha\to\beta)$ (M)③④

⑥ α (已证)⑤

⑦ $\neg(\alpha\to\gamma)$ (已证)④⑥

(3) 只需证 $(\alpha\to\beta)\to\gamma, \gamma\to\alpha, \alpha' \vdash \alpha$.

上次作业中我们证明了

引理：若$\alpha,\beta\vdash\gamma$，且$\alpha,\neg\beta\vdash\gamma$，则$\alpha\vdash\gamma$.

因此只需证 $(\alpha\to\beta)\to\gamma, \gamma\to\alpha, \alpha', \alpha\vdash\alpha$

$(\alpha\to\beta)\to\gamma, \gamma\to\alpha, \alpha', \neg\alpha\vdash\alpha$

前者是显然的，对后者我们有

① $(\alpha\to\beta)\to\gamma$

② $((\alpha\to\beta)\to\gamma)\to(\neg\gamma\to\neg(\alpha\to\beta))$ (已证)

③ $\neg\gamma\to\neg(\alpha\to\beta)$ (M)①②

④ $\neg\alpha\to\neg\gamma$ (同理)

⑤ $\neg\alpha$

⑥ $\neg\gamma$ (M)④⑤

⑦ $\neg(\alpha\to\beta)$ (M)③⑥

⑧ α (已证)⑦

#

作业

p.509(p.102). 21

21. 由定义，v为PK的一个赋值的充要条件为

$\forall \alpha, \beta$，$v(\neg\alpha)=1-v(\alpha)$，$v(\alpha\to\beta)=\max\{1-v(\alpha), \beta\}$.

由于值域为$\{0,1\}$，$v(\neg\alpha)\neq v(\alpha) \iff v(\neg\alpha)=1-v(\alpha)$，

$v(\alpha)=1$且$v(\beta)=0 \iff \max\{1-v(\alpha), \beta\}=0$.

这很容易通过真值表验证.

#