Technical University of Crete

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Άσκηση 2

Author:
Σπυριδάκης Χρήστος

AM: 2014030022

November 28, 2019

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΡΗΤΗΣ

Εισαγωγή

Για την διευκόλυνση της υλοποίησης είναι καλό να σημειωθεί ότι το κάθε μέρος (A και B4) υλοποιήθηκε σε διαφορετικό script, αυτό είχε τα θετικά του, στο να είναι περισσότερο διακριτός ο κώδικας για ανάπτυξη και αποσφαλμάτωση, αλλά χρειάστηκε να ξανά δημιουργηθούν σήματα που είχαν δημιουργηθεί σε προηγούμενα ερωτήματα. Δεν επηρεάζονται κάπως τα αποτελέσματα απλά είναι μία διευκρίνηση σχετικά με την δομή που δόθηκε στον κώδικα.
Επίσης παρατηρήθηκε ότι κατά την διάρκεια της άσκησης είναι πολλά πράγματα τα οποία μοιάζουν μεταξύ των ζητουμένων. Ακολουθήθηκε λοιπόν μία τακτική δομημένου προγραμματισμού με χρήση συναρτήσεων, προκειμένου ενέργειες που ζητούνται από περισσότερο του ενός σημεία, να μην επαναλαμβάνονται από το μηδέν. Για αυτό το λόγο υπάρχουν πολλαπλά βοηθητικά αρχεία τα οποία δημιουργήθηκαν. Σε κάθε ενότητα όπως χρειάζεται θα εισαγάγεται η λειτουργικότητα της κάθε συνάρτησης που περιέχεται σε ένα αρχείο και στην συνέχεια θα δείχνεται μόνο ο τρόπος κλήσης της. Τα αρχεία τα οποία υπάρχουν συνολικά για την ολοκληρωμένη εκτέλεση της άσκησης είναι τα εξής: *srrc_pulses.m*, *part_a.m*, *part_b.m*, *bits_to_2PAM.m*, *bits_to_4PAM.m*, *create_xt.m*, *fourier_transform.m*, *periodogram.m*, *display_periodogram_PSD_theoretical_experimental.m*.
Να αναφερθεί ότι στους ενδιάμεσους κώδικες (για το κάθε ερώτημα) εμφανίζεται MONO το κομμάτι υπολογισμού του ερωτήματος, δεν εμφανίζονται δηλαδή κατά κύριο λόγω κομμάτια κώδικα σχετικά με την δημιουργία των figure ή τις έξτρα πληροφορίες για αυτά - αν δεν είναι σημαντικό - όπως επίσης και κάποια από τα σχόλια για εξοικονόμηση χώρου. Γενικά έχει ελαφρώς αλλαχθεί ο κώδικας που παρουσιάζεται σε κάθε ερώτηση ώστε να κρατηθούν μόνο τα σημαντικά σημεία. Στο τέλος της αναφοράς υπάρχει ολόκληρος ο κώδικας για έλεγχο και αυτών των σημείων.
Τέλος, αν λόγω της εκτύπωσης σε χαρτί δεν είναι εμφανές σε ικανοποιητικό βαθμό κάποιο από τα figures μπορούν να βρεθούν όλα τα μέρη του project στο παρακάτω repository όπου υπάρχουν και screenshot αυτών, που φαίνονται με καλύτερη ανάλυση: `https://github.com/CSpyridakis/CommSys`

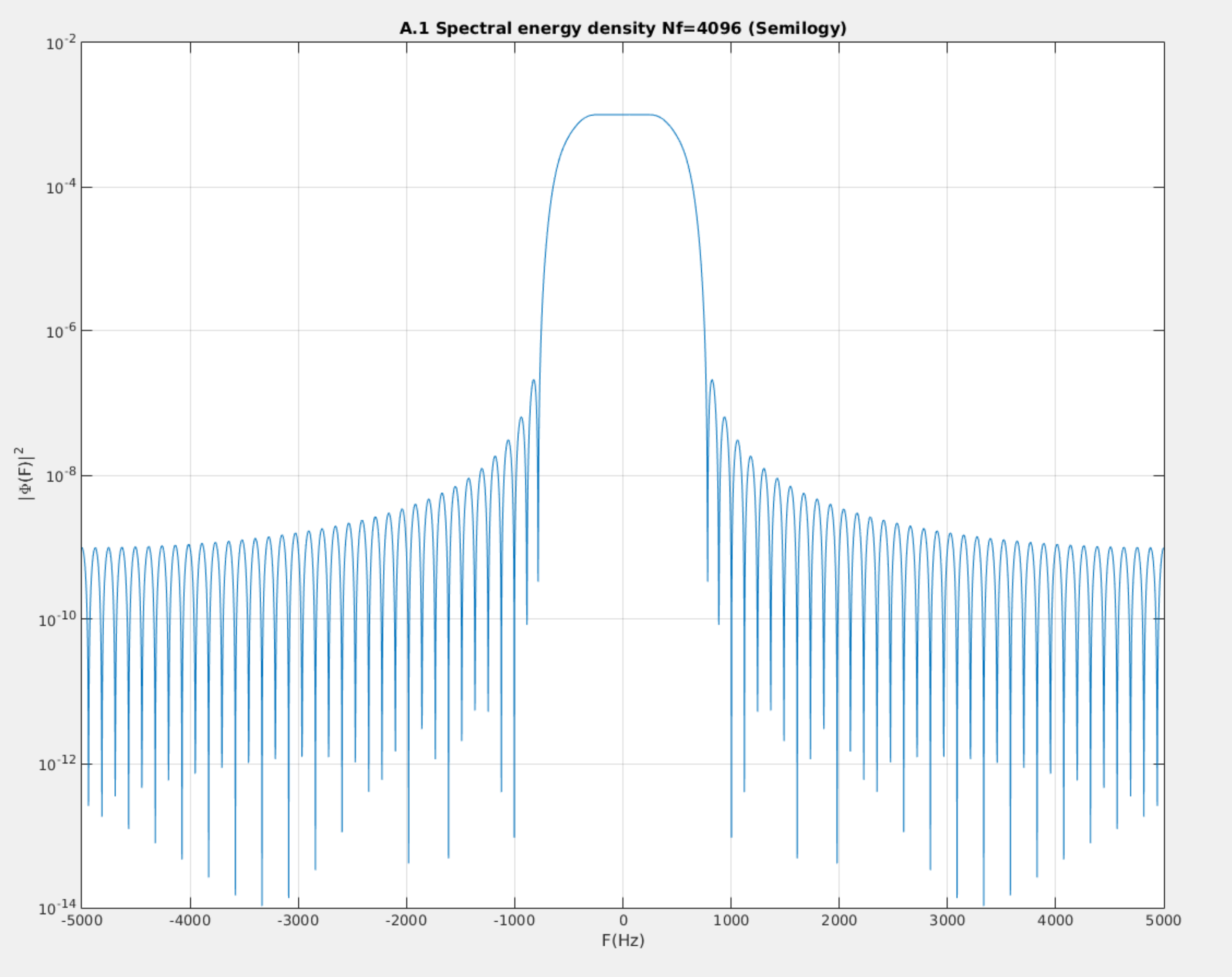
Ερώτημα A

A.1 Create SRRC pulse

Πρώτο ζητούμενο της συγκεκριμένης άσκησης είναι να δημιουργηθεί ξανά με την χρήση του script που μας δόθηκε - *srrc_pulses.m* - ένας αποκομμένος παλμούς Square Root Raised Cosine φ(t). Έπειτα να υπολογίσουμε τον Fourier Transform αυτού και να εμφανίσουμε σε κατάλληλο άξονα την φασματική πυκνότητα ενέργειας του σε ημι-λογαριθμική (semilogy) κλίμακα. Είσοδος της συνάρτησης είναι η περίοδος συμβόλων T, η περίοδος δειγματοληψίας Ts, ο θετικός αριθμός A και το roll-off factor a. Όπου η περίοδος δειγματοληψίας υπολογίζεται ως το πηλίκο $\frac{T}{over}$, με over ως το συντελεστή υπερδειγματοληψίας. Στην περίπτωση μας για τα δεδομένα της εκφώνησης είχαμε $T = 10^{-3}$ sec, $over = 10$, $A = 4$ και $a = 0.5$. Παρόλο που δεν είναι μία περίπλοκη διαδικασία, αλλά επειδή χρησιμοποιείται και σε άλλα σημεία, δημιουργήθηκε η συνάρτηση *fourier_transform.m*. Το μόνο που κάνει είναι ουσιαστικά να της δίνεται ένα σήμα στο πεδίο του χρόνου μαζί με τις όποιες ακόμα απαραίτητες παραμέτρους, και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που αναφέρθηκε και στη πρώτη άσκηση να επιστρέφει το μετασχηματισμένο σήμα καθώς και το πεδίο συχνοτήτων. Τέλος να αναφερθεί ότι καθόλη την διάρκεια της άσκησης το N_f εχει την τιμή 4096 ώστε να μην υπάρξει πιθανότητα παραμόρφωσης και για τα μεγαλύτερα N και over της συνέχειας.

Listing 1: *fourier_transform.m*

```
function [X_F, F_X] = fourier_transform(Xt, Ts, Nf)
    Fs = 1/Ts;
    X_F = fftshift(fft(Xt,Nf)*Ts);
    F_X = [-Fs/2 : Fs/Nf : Fs/2-Fs/Nf];
end
```



Listing 2: A.1 Create SRRC pulse and display SED

```
T=10^-3 ; over=10 ; Ts=T/over ; A=4 ; a=0.5 ; Nf = 4096 ; Fs = 1/Ts ;

[phi_t, t_phi] = srrc_pulse(T, Ts, A, a);          % Create SRRC pulse
[Phi_F, F_Phi] = fourier_transform(phi_t, Ts, Nf);

% Display Spectral energy density of phi(t)
f=figure(); semilogy(F_Phi, abs(Phi_F).^2); grid on;
```

A.2 Create X(t) and calculate SDP

Όπως και για τον Fourier Transform παραπάνω, έτσι και για την δημιουργία του $X(t)$ υλοποιήθηκε μία συνάρτηση η οποία θα το δημιουργεί ακριβώς με τον τρόπο που αναφέρθηκε αναλυτικά στην πρώτη άσκηση. Από την στιγμή που στην συνέχεια της υλοποίησης χρησιμοποιείται και κωδικοποίηση 4-PAM συνυπολογίζεται και αυτό στις παραμέτρους εισόδου της, ώστε να δημιουργεί κατάλληλα την $X(t)$ και για αυτή την περίπτωση. Συγκεκριμένα αυτό που κάνει, είναι αρχικά να δημιουργεί την τυχαία ακολουθία από bit. Έπειτα ανάλογα με την κωδικοποίηση που επιλέχθηκε να δημιουργεί τα σύμβολα X_n. Για τον υπολογισμό του $X(t)$ ουσιαστικά όπως είδαμε και στην πρώτη άσκηση πρέπει να υπολογίσουμε την συνέλιξη με το υπερδειγματοληπτημένο σήμα X_δ. Άρα ισχύει ότι $X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \phi(t - nT) = X_\delta(t) \circledast \varphi(t)$. Ενώ για να μπορέσουμε να καλύψουμε στην συνέχεια και της απαιτήσεις του ερωτήματος A.5 στο οποίο αλλάζουμε τις τιμές της περιόδου συμβόλου T και της τιμής του over, συμπεριλαμβάνονται και αυτά ως ορίσματα εισόδου της συνάρτησης. Σημαντικό σημείο είναι επίσης να προσέξουμε στο διάστημα χρόνου για το X_δ μέχρι που θα εκτείνεται ο χρόνος, πράγμα το οποίο εξαρτάται από τον αριθμό των συμβόλων. Τελευταίο πράγμα που υπολογίζει αυτή η συνάρτηση είναι η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος που μόλις δημιουργήσαμε και θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια ως μέτρο σύγκρισης με τα πειράματα. Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται είναι με τον τύπο που εμφανίζεται και στην εκφώνηση $S_x(F) = \frac{\sigma_X^2}{T}|\Phi F|^2$, προσέχοντας ότι το σ_X^2 μπορούμε να το υπολογίσουμε είτε αμέσως ανάλογα με την κωδικοποίηση - πράγμα που επιλέχθηκε αφού είναι θεωρητική προσέγγιση - είτε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση var έχοντας τα ίδια αποτελέσματα. Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτήν την συνάρτηση μπορούμε να δημιουργήσουμε πολλαπλά $X(t)$ σήματα πολύ εύκολα και γρήγορα. Για την ***bits_to_2PAM.m*** αναφέρθηκε στην πρώτη άσκηση η υλοποίηση της, ενώ για την ***bits_to_4PAM.m*** θα δοθεί στο ερώτημα A.4.

Listing 3: `create_xt.m`

```
function [Xt, t_Xt, T_PSD] = create_xt(part, N, PAM, phi_t, t_phi, Phi_F, Ts, T, over, DEBUG)

    % Create bits
    b=(sign(randn(N, 1)) + 1)/2;

    if (PAM == 2)
        Xn = bits_to_2PAM(b);                    % Create symbols
        X_delta = 1/Ts * upsample(Xn, over);     % Create upsampled X_delta signal
        t_delta = [ 0 : Ts : (N*over-1)*Ts ];
    elseif (PAM == 4)
        Xn = bits_to_4PAM(b);                     % Create symbols
        X_delta = 1/Ts * upsample(Xn, over);      % Create upsampled X_delta signal
        t_delta = [ 0 : Ts : ((N/2)*over-1)*Ts ];
    else
        disp('Not supported value of N-PAM encoding')
        return
    end

    % Calculate X_t, which is the convolution of phi(t) and X_delta
    Xt = conv(X_delta, phi_t).*Ts;
    t_Xt = [t_delta(1) + t_phi(1) : Ts : t_delta(end) + t_phi(end)];

    % Calculate theoretical PSD
    if (PAM == 2)
        var_Xn = ((-1)^2+(1)^2)./2;
        T_PSD = (var_Xn/T).*(abs(Phi_F).^2);
    elseif(PAM == 4)
        var_Xn = ((-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2)./4;
        T_PSD = (var_Xn/T).*(abs(Phi_F).^2);
    end
end
```

Έχοντας αναφέρει τα παραπάνω μπορούμε πλέον πολύ εύκολα για τις ανάγκες του ερωτήματος να δημιουργήσουμε την συνάρτηση $X(t)$ για $N = 100$ και με χρήση $2 - PAM$ κωδικοποίησης, με τον παρακάτω τρόπο:

Listing 4: `A.2 Create X(t)`

```
N=100 ; PAM = 2 ;
[Xt, t_Xt, Sx_F] = create_xt('A.2', N, PAM, phi_t, t_phi, Phi_F, Ts, T, over, 'T');
```

Ενώ υπάρχει ένα ακόμα χωρίο κώδικα μέσα στην συνάρτηση το οποίο εάν είναι ενεργοποιημένο το DEBUG mode (με το πέρασμα της τιμής 'T' για την παράμετρο DEBUG) να μας εμφανίσει κατάλληλα τα δημιουργημένα σήματα.

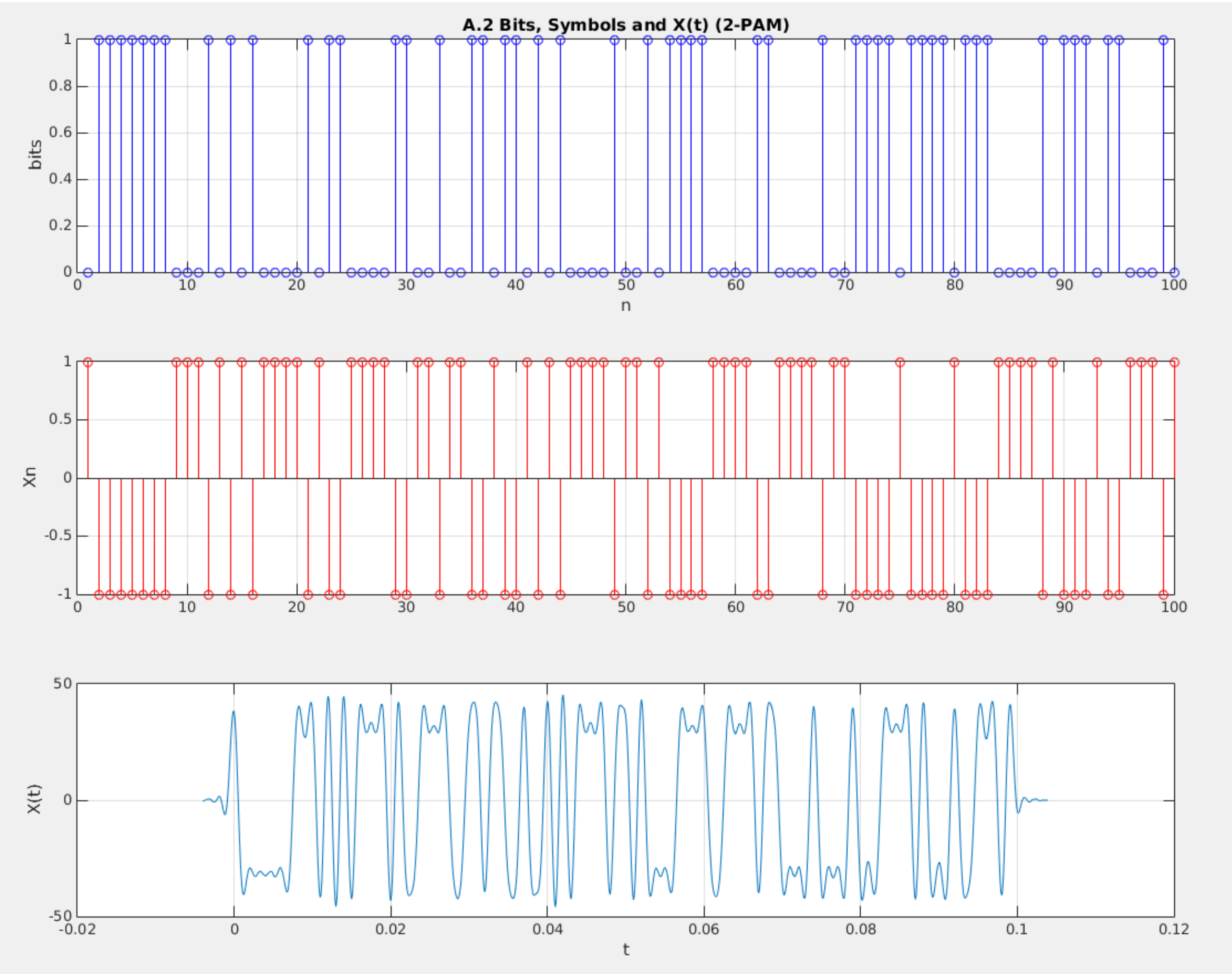


Figure 1: A.2 Display bit, Xn and X(t) - 2-PAM

A.3 Periodogram - Theoretical and Experimental PSD

Αρχικά πρώτο ζητούμενο είναι να υπολογιστεί το περιοδόγραμμα της X(t). Εδώ είναι και ένα ενδιαφέρον σημείο διότι είναι το πρώτο σημείο στο οποίο δημιουργήθηκε μία συνάρτηση και επαναχρησιμοποιήθηκε κώδικας καλώντας απλά άλλη συνάρτηση μέσα σε αυτή. Συγκεκριμένα δημιουργήθηκε η συνάρτηση ***periodogram.m*** η οποία εμφανίζεται παρακάτω και υπολογίζει τον Fourier Transform και έπειτα με την χρήση αυτού και της εφαρμογής του τύπου της εκφώνησης $P_X(F) = \frac{|F[X(t)]^2}{T_{total}}$ υπολογίζει την ζητούμενη πληροφορία. Το σημείο το οποίο πρέπει να προσέξουμε είναι ότι το T_{total} είναι ο συνολικός χρόνος διάρκειας της $X(t)$. Άρα το γινόμενο του πλήθους των δειγμάτων επί την διάρκεια κάθε δείγματος.

Listing 5: periodogram.m

```
function [Px_F, F_Px] = periodogram(Xt, t_Xt, Ts, Nf)
    Ttotal = length(t_Xt)*Ts;
    [X_F, F_Px] = fourier_transform(Xt, Ts, Nf);
    Px_F = (abs(X_F).^2)./Ttotal;
end
```

Επειδή όμως η βασική δομή του ερωτήματος A.3 εμφανίζεται με παρόμοιο τρόπο και στα επόμενα ερωτήματα δημιουργήθηκε η παρακάτω συνάρτηση η οποία υλοποιεί όλες τις απαραίτητες ενέργειες. Ξεκινώντας δημιουργεί έναν SRRC pulse (ο λόγος που δεν περάστηκε ως όρισμα είναι για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα και για το ερώτημα A.5 όπου χρειάζεται διαφορετικές τιμές T και over). Έπειτα υπολογίζεται το σήμα $X(t)$ όπως περιγράφηκε στο ερώτημα A.2. και στην συνέχεια υπολογίζει το ζητούμενο περιοδόγραμμα. Ενώ τέλος εκτελεί πειραματικά μία επαναλαμβανόμενη δημιουργία $X(t)$ σημάτων προκειμένου να υπολογίσει τις αριθμητικές μέσες τιμές (με την χρήση του mean) των περιδογραμμάτων αυτών. Σαν αποτέλεσμα μετά από αυτήν την διαδικασία θα έχουμε τόσο την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος όσο και την πειραματική. Να ξανά γίνει αναφορά ότι παρόλο που μέσα σε αυτήν την συνάρτηση εμφανίζονται τα ζητούμενα σήματα MONO όταν ζητείται το καθένα (γίνονται κάποιοι έλεγχοι σχετικά με ορίσματα ***partA*** για το περιοδόγραμμα και ***partB*** για το PSD, αν είναι κενό το εκάστοτε πεδίο τότε δεν εμφανίζεται το ανάλογο σήμα) αυτό δεν εμφανίζεται εδώ - υπάρχει στο τέλος όμως - ώστε να δοθεί προσοχή μόνο στους υπολογισμούς.

Σημείωση: Από την στιγμή που αναφέρεται να δοθεί το περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης της $X(t)$ και όχι να είναι η ίδια κατά μήκος των ερωτημάτων δεν μας πειράζει που δημιουργούνται από την αρχή σε κάθε ερώτημα.

Listing 6: `display_periodogram_PSD_theoretical_experimental.m`

```
function [periodogram_figure, theoritical_practical_PSD_figure] = display_periodogram_PSD_theoretical_experimental(partA, partB, PAM, T, Ts, A, a, Nf, N, K, over)

 [phi_t, t_phi] = srrc_pulse(T, Ts, A, a);           % Create SRRC pulse
 [Phi_F, F_Phi] = fourier_transform(phi_t, Ts, Nf);
 [Xt, t_Xt, Sx_F] = create_xt(partA, N, PAM, phi_t, t_phi, Phi_F, Ts, T, over, DEBUG);
 [Px_F, F_Px] = periodogram(Xt, t_Xt, Ts, Nf);

 % Experimental PSD
 for i = 1:K
    [Xt, t_Xt] = create_xt('', N, PAM, phi_t, t_phi, Phi_F, Ts, T, over, 'F');
    Px_experiments(i,:) = periodogram(Xt, t_Xt, Ts, Nf);
 end

 Px_F_experimental = mean(Px_experiments);
 Px_F_theoritical = Sx_F;
end
```

Έχοντας κάνει όλα τα παραπάνω, τελικά για τον υπολογισμό όλου του ερωτήματος A.3 το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να εκτελέσουμε τις παρακάτω γραμμές κώδικα. Καλώντας την `display_periodogram_PSD_theoretical_experimental.m` υπολογίζονται λοιπόν τα δύο πρώτα υπό-ερωτήματα ενώ στην συνέχεια δοκιμάζουμε διαφορετικές τιμές N κι K για να απαντήσουμε στο τρίτο υποερώτημα.

Listing 7: A.3 Periodogram - theoretical and practical PSD

```
K=100; PAM = 2;
display_periodogram_PSD_theoretical_experimental('A.3.a', 'A.3.b', PAM, T, Ts, A, a, Nf, N, K, over)
for Ni = [100 500 1000]
    for Ki = [100 500 1000]
        display_periodogram_PSD_theoretical_experimental('', 'A.3.c', PAM, T, Ts, A, a, Nf, Ni, Ki, over)
    end
end
```

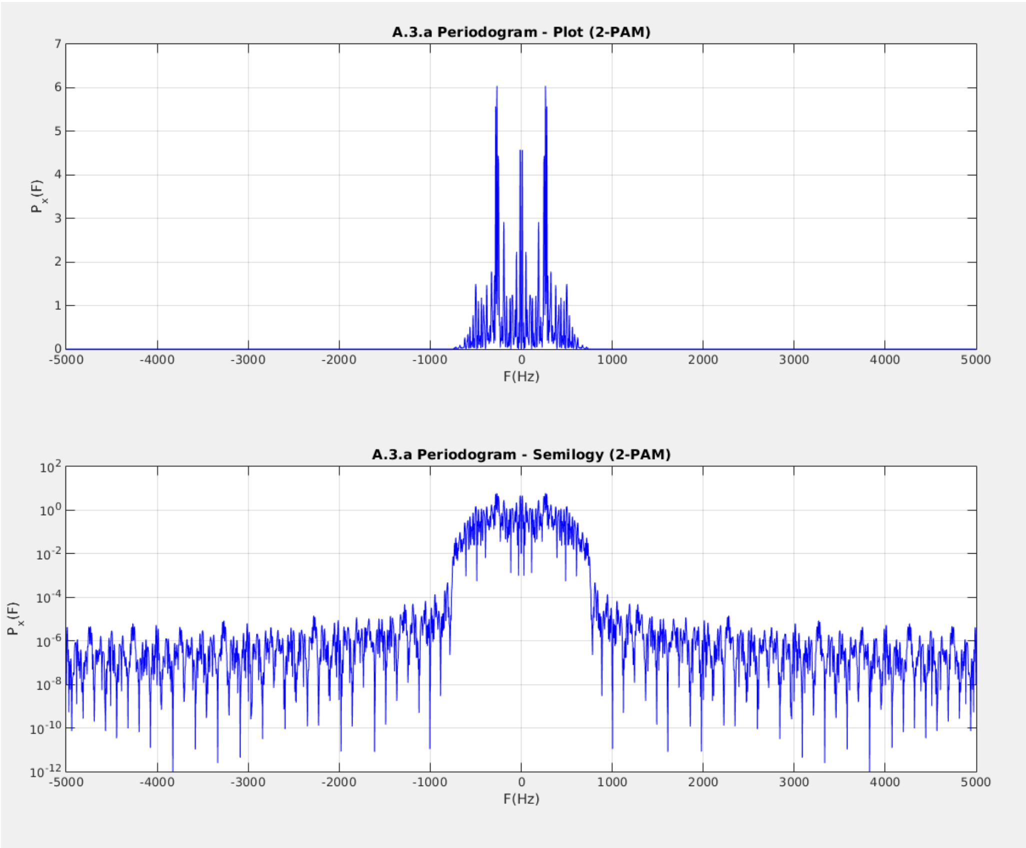


Figure 2: A.3.a Περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης X(t) (2-PAM) σε plot και semilogy

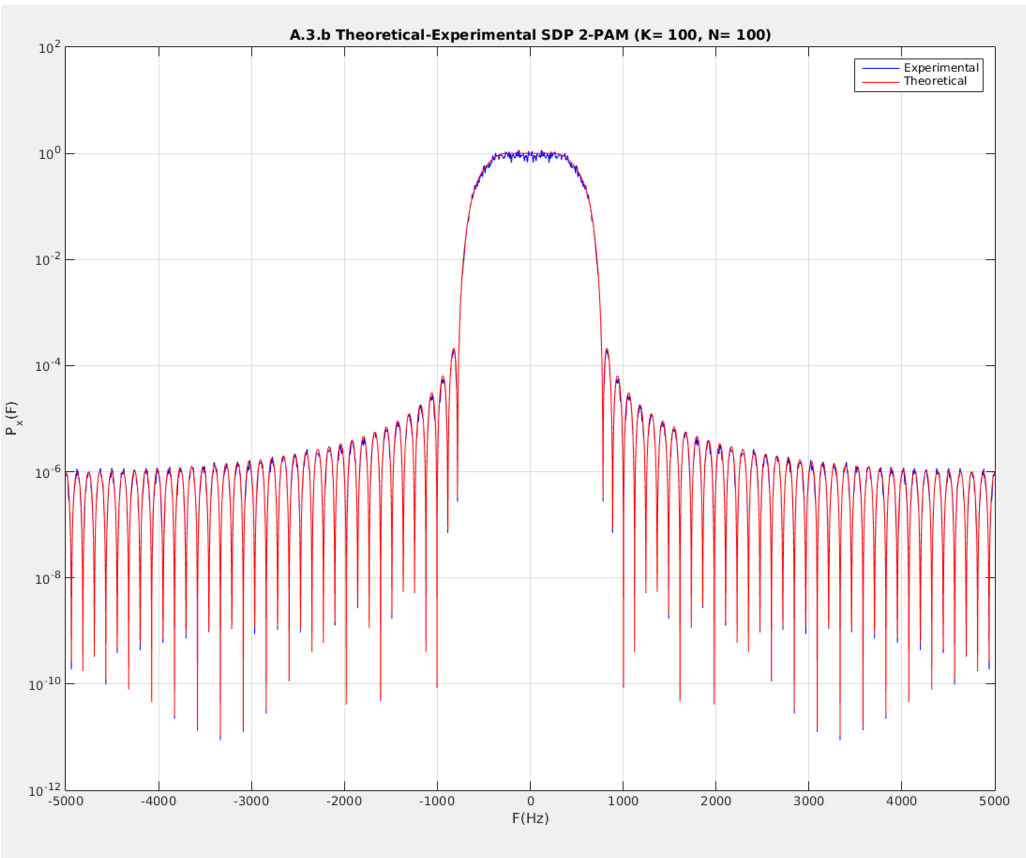


Figure 3: A.3.b Πειραματική και Θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος σε κοινό semilogy

Δεν δίνονται figures για το τρίτο υπο-ερώτημα αλλά αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε όσο αυξάνεται το

A.4 X(t) - 4-PAM

Πρώτο κομμάτι του συγκεκριμένου ερωτήματος ήταν η δημιουργία μίας συνάρτησης η οποία θα κάνει την ζητούμενη απεικόνιση συμβόλων 4-PAM. Παρακάτω παρουσιάζεται η συνάρτηση που δημιουργήθηκε ακολουθώντας απλές συνθήκες ελέγχου.

Listing 8: *bits_to_4PAM.m*

```
function [ Xout ] = bits_to_4PAM( X )
    if(mod(length(X),2)==1)
        Xout=[0];
    else
        i=1;
        while i<=length(X)
            b1=X(i);b2=X(i+1);

            if(b1==0 && b2==0)
               temp(i)=3;
            elseif(b1==0 && b2==1)
               temp(i)=1;
            elseif(b1==1 && b2==1)
               temp(i)=-1;
            elseif(b1==1 && b2==0)
               temp(i)=-3;
            end
            i=i+2;
            Xout=temp(temp~=0);
        end
    end
end
```

Για την απάντηση του πρώτου υπό-ερωτήματος αρκεί να ανατρέξουμε στην βασική συνάρτηση που αναλύσαμε στο A.3 ερώτημα σκεπτόμενοι την ανάλυση για την δημιουργία του X(t) που έγινε στο A.2 ερώτημα. Ενώ εκτός από τα ζητούμενα δύο διαγράμματα εμφανίζονται όπως και στο A.2 ερώτημα τα ενδιάμεσα σήματα που έγιναν προκειμένου να επαληθεύσουμε το X(t).

Listing 9: A.4.a Periodogram - Theoretical and Experimental PSD

```
PAM = 4;
display_periodogram_PSD_theoretical_experimental('A.4.a', 'A.4.a', PAM, T, Ts, A, a,
    Nf, N, K, over)
```

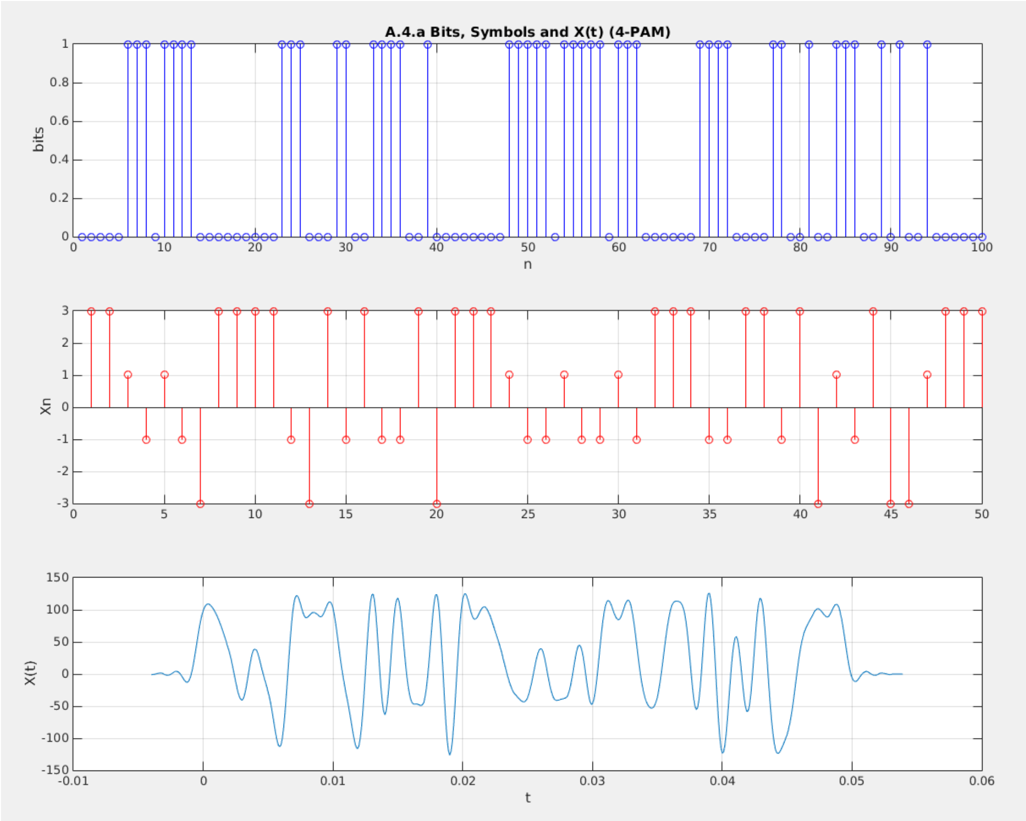


Figure 4: A.4 Display bit, Xn and X(t) - 4-PAM

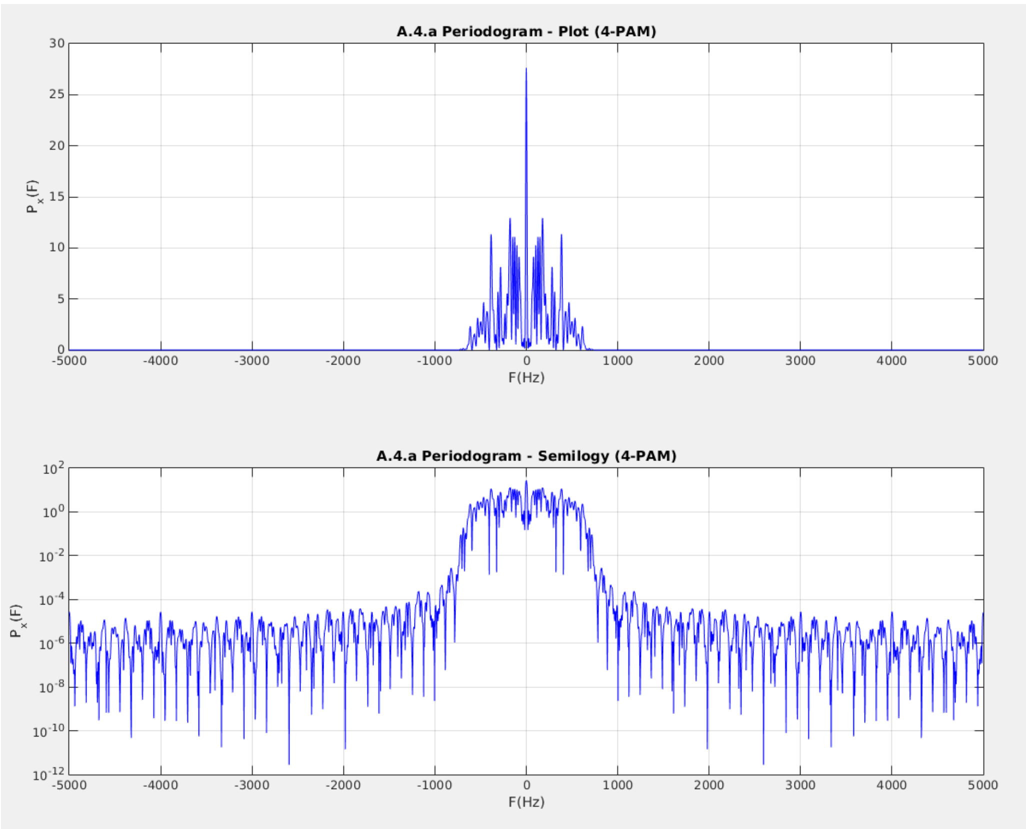


Figure 5: A.4.a Περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης X(t) (4-PAM) σε plot και semilogy

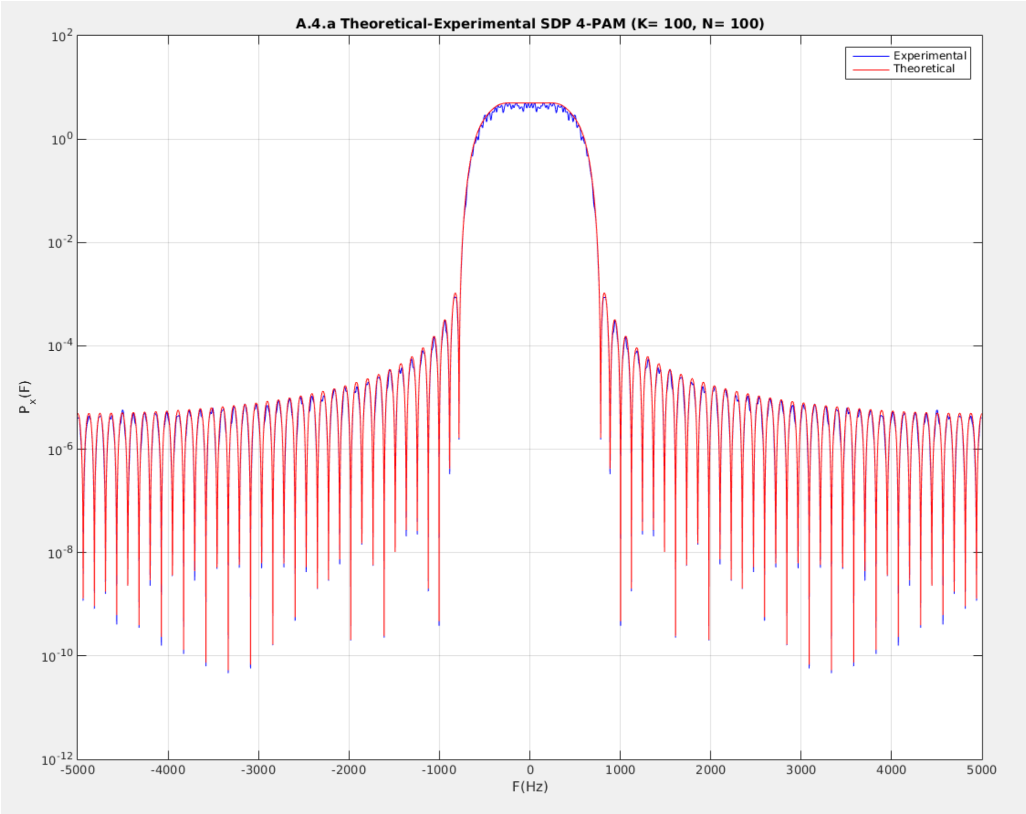


Figure 6: A.4.a Πειραματική και Θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος σε κοινό semilogy

Σχετικά με το δεύτερο υπό-ερώτημα αυτό που πα

A.5 Επανάληψη του A.3 για διαφορετικό T

Και σε αυτό το ερώτημα εξαιτίας της συνάρτησης που δημιουργήθηκε στο A.3, είναι εύκολη η δημιουργία των κυμματομορφών. Σημαντικό σημείο είναι ότι αφού ζητείται να κρατηθεί ίδια περίοδος δειγματοληψίας έπρεπε να διπλασιαστεί επίσης η παράμετρος over. Άρα για την υλοποίηση του πρώτου υπό-ερωτήματος, έπρεπε να εκτελέσουμε το παρακάτω κομμάτι κώδικα. Όπου αρχικά δημιουργούμε το περιοδόγραμμα της X(t), μετά συγκρίνουμε το θεωρητικό με το πειραματικό PSD και τέλος επαναλαμβάνουμε για διαφορετικές τιμές K και N:

Listing 10: A.5 Επανάληψη του A.3 για διαφορετικό T

```
PAM=2;
display_periodogram_PSD_theoretical_experimental('A.5.a', 'A.5.a', PAM, 2*T, Ts, A, a,
     Nf, N, K, 2*over)

for Ni = [100 500 1000]
    for Ki = [100 500 1000]
        display_periodogram_PSD_theoretical_experimental('', 'A.5.c', PAM, 2*T, Ts, A,
             a, Nf, Ni, Ki, 2*over)
    end
end
```

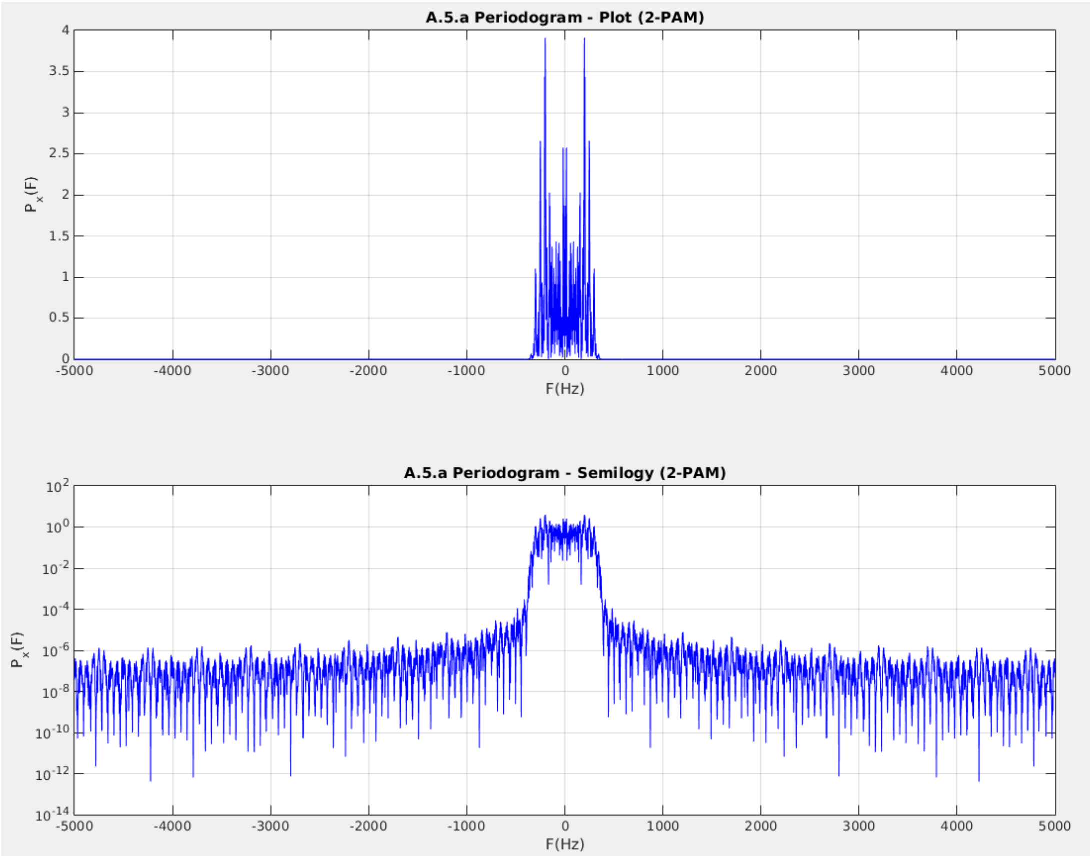


Figure 7: A.5.a T'=2T - Περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης X(t) (2-PAM) σε plot και semilogy

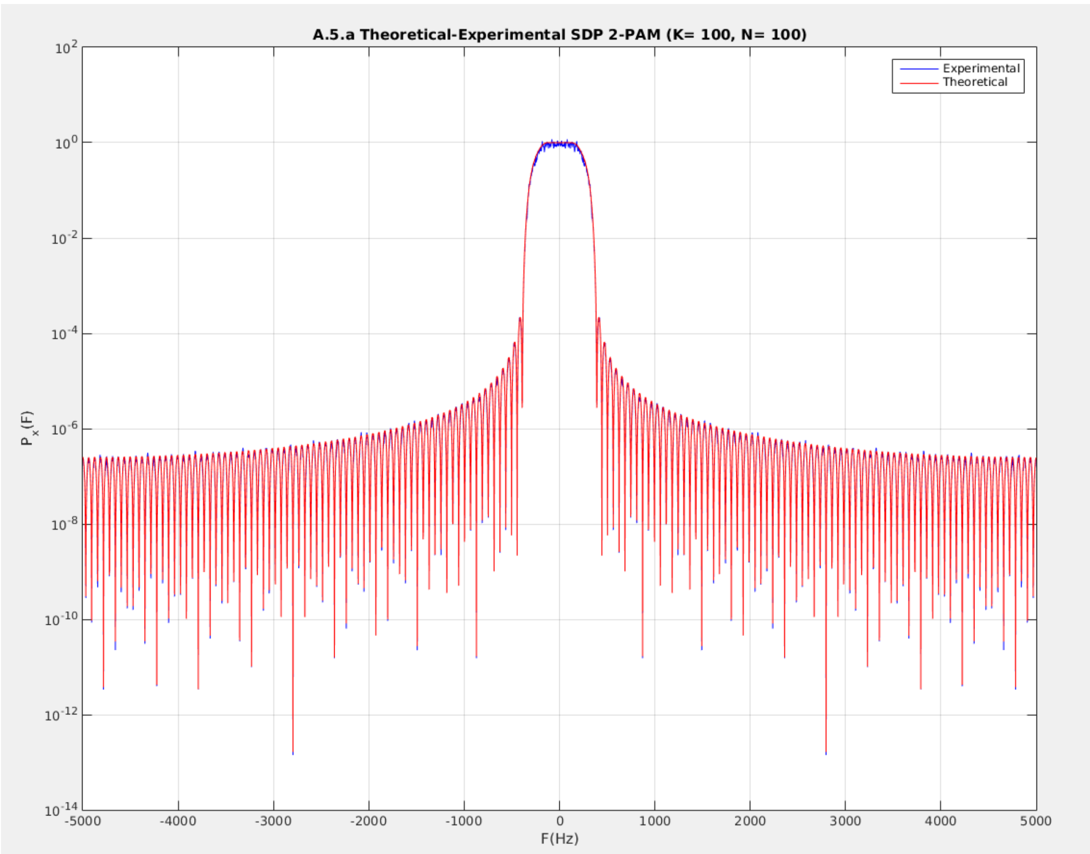


Figure 8: A.5.a T'=2T - Πειραματική και Θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος σε κοινό semilogy

Συμπεράσματα:

A.6 2-PAM vs 4-PAM

a) Συγκρίνοντας την ταχύτητα επικοινωνίας με χρήση κωδικοποιήσεων 2-PAM versus 4-PAM για ίδιο εύρος φάσματος έχουμε το εξής. Κατά την επικοινωνία με 2-PAM στέλνονται $log_2 2 = 1$bit πληροφορίας καθώς κάθε σύμβολο κωδικοποιεί ακριβώς 1 bit. Αντίθετα για επικοινωνία με 4-PAM έχουμε αποστολή $log_2 4 = 2$bits καθώς κάθε σύμβολο κωδικοποιεί 2 bits πληροφορίας. Συνεπώς με την 4-PAM μεταφέρονται περισσότερα bits per symbol άρα και ταχύτερη μετάδοση δεδομένων στο ίδιο bandwidth. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μειονεκτήματα. Όσο περισσότερα bits πληροφορίας περιέχει κάθε σύμβολο τόσο πιο πολύπλοκη γίνεται η κωδικοποίηση/αποκωδικοποίηση της. Άρα παρά το πλεονέκτημα στην ταχύτητα, απαιτείται περισσότερη επεξεργαστική ισχύς ενώ παράλληλα αυξάνεται και το SNR προκειμένου να διατηρηθεί το ίδιο bit-error-rate.
b) Αν είχαμε να επιλέξουμε περίοδο συμβόλου μεταξύ μίας υλοποίησης με T και μίας άλλης με T'=2T σε ένα πολύ ακριβό εύρος φάσματος, αυτό που θα επιλέγαμε είναι το T'. Ο λόγος είναι - και τα σχεδιαγράμματα από τα ερωτήματα A.3 και A.5 το επαληθεύουν - ότι για διπλάσιο T το bandwidth περιορίζεται στο μισό, αυξάνοντας παράλληλα και την απαιτούμενη ενέργεια επιτυχούς μετάδοσης.

Ερώτημα B

Έχουμε την ακολουθία ανεξάρτητων Συμβόλων X_n

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Xn\phi(t - nT)$$

Όπου $\mathcal{E}[X_n] = 0, \mathcal{E}[X_n^2] = \sigma_x^2$ και $T > 0$. Επιπλέον έχουμε το διαμορφωμένο σήμα $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_o + \Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$ ανεξάρτητη των X_n για κάθε n.

$$F_\Theta(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \Theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

B.1

α)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[Y(t)] &= \mathcal{E}[X(t)\cos(2\pi f_o + \Theta)] = \mathcal{E}[X(t)]\mathcal{E}[\cos(2\pi f_o + \Theta)] \\ &= \mathcal{E}[X(t)] \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_o t + \Theta) F_\Theta(\Theta) d\theta \\ &= \mathcal{E}[X(t)] \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_o t + \Theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{E}[X(t)] \int_{0}^{2\pi} \cancelto{0}{\cos(2\pi f_o t + \Theta) d\theta} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \boxed{\text{E[Y(t)]} = 0 \text{ σταθερή}}$$

β) Γνωρίζοντας την παρακάτω σχέση:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) \ + \cos(a-b)] \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)] = R_{yy}(t+\tau,t) =& \mathcal{E}[X(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta)X(t)\cos(2\pi f_0 t+\Theta)] \\
\overset{indep.}{=}& \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)]\mathcal{E}[\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta)\cos(2\pi f_0 t+\Theta)] \\
\overset{(1)}{=}& \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)]\frac{1}{2}\mathcal{E}[\cancelto{0}{\cos(4\pi f_0 t+2\pi f_0\tau+2\Theta)} \quad +\cos(2\pi f_0\tau)] \\
=& \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)]\cos(2\pi f_0\tau) \\
=& \boxed{\frac{1}{2}R_{xx}(t+\tau,t)\cos(2\pi f_0\tau)}
\end{aligned}
$$

B.2

Ελέγχουμε την $R_{xx}(t+\tau,t)$ ως προς τη περιοδικότητα.

$$
\begin{aligned}
R_{xx}(t+\tau,t) =& \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] \\
=& \mathcal{E}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\phi(t-nT)\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\phi(t+\tau-nT)\right] \\
=& \mathcal{E}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^2\phi(t-nT)\phi(t+\tau-nT)\right] \\
=& \mathcal{E}\left[\ X_n^2\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi(t-nT)\phi(t+\tau-nT) \Rightarrow \text{ κυκλοστάσιμη } \forall \text{ T} \\
=& R_{xx}(t+\tau+T,t+T)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(t+\tau,t) =& R_{xx}(t+\tau+T,t+T)\cos(2\pi f_0\tau) \\
=& R_{yy}(t+\tau+T,t+T)
\end{aligned}
$$

Άρα είναι περιοδική κυκλοστάστιμη υπό την ευρεία έννοια

B.3

Μέση αυτοσυσχέτιση της Y εντός μίας περιόδου ορίζουμε ως:

$$
\begin{aligned}
R_{\bar{y}}(t) &= \frac{1}{T}\int_T R_{yy}\cos(2\pi f_0\tau)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_T \frac{1}{2}\sigma_\chi^2\sum_{-\infty}^{\infty}[\phi(t-nT)\phi(t+\tau-nT)]\cos(2\pi f_0\tau)dt \\
&= \frac{\sigma_\chi^2}{2T}\int_T\sum_{-\infty}^{\infty}[\phi(t-nT)\phi(t+\tau-nT)]\cos(2\pi f_0\tau)dt \\
&= \frac{\sigma_\chi^2}{2T}\cos(2\pi f_0\tau)\phi(\tau)+\phi(-\tau)
\end{aligned}
$$

Επίσης έχουμε $S_y(F) = F\{R_{\bar{y}}(t)\}$

Άρα:

$$\begin{aligned} S_y(f_0) &= F\{\frac{\sigma_\chi^2}{2T}\cos(2\pi f_0\tau)\phi(\tau)+\phi(-\tau)\} \\ &= \frac{\sigma_\chi^2}{2T}\frac{1}{2}\left[\Phi(F+f_0)\Phi^*(F+f_0)+\Phi(F-f_0)\Phi^*(F-f_0)\right] \\ &= \frac{\sigma_\chi^2}{4T}\left(|\Phi(F+f_0)|^2+|\Phi(F-f_0)|^2\right) \end{aligned}$$

Λογικό αποτέλεσμα καθώς το σήμα πολλαπλασιάζεται με περιοδικό σήμα το οποίο προκαλεί μετατόπιση βάση της συχνότητας F_o και με trade-off το πλάτος του.