Методы оптимизации

Лекция 9. Пример решения транспортной задачи

Селина Елена Георгиевна

Пример решения классической транспортной задачи. Дана транспортная сеть, состоящая из семи вершин. Пункты 1,2,3 – производители, пункты 4,5,6,7 – потребители.

Источники: $\begin{cases} d_1 = 11 \\ d_2 = 11 \\ d_3 = 8 \end{cases}$

Получатели: $\begin{cases} d_4 = -5 \\ d_5 = -9 \\ d_6 = -9 \\ d_7 = -7 \end{cases}$

Дана матрица транспортных расходов:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

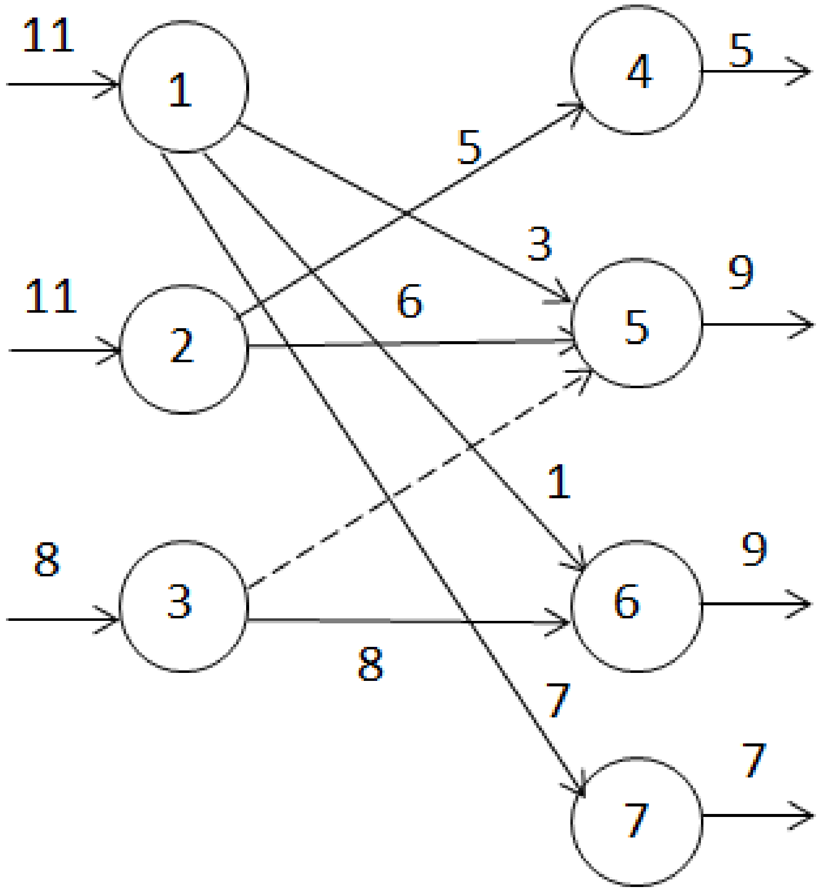
Оформим в виде таблицы:

C/X^0	4	5	6	7	a			
1	7	8 3	5 1	3 7	11	4	3	0
2	2 5	4 6	5 -	9 -	11	6	0	
3	6 -	3 -	1 8	2 -	8	0		
b	5	9	9	7	30			
	0	3	1	0				
		0	0					

Получаем начальный базис:

	3	1	7
5	6		
		8	

$$f_0 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}X_{ij} = 24 + 5 + 21 + 10 + 24 + 8 = 92$$



Для $(i,j) \in J_б\ \Delta_{ij} = 0 \Rightarrow u_i + v_j = C_{ij}$

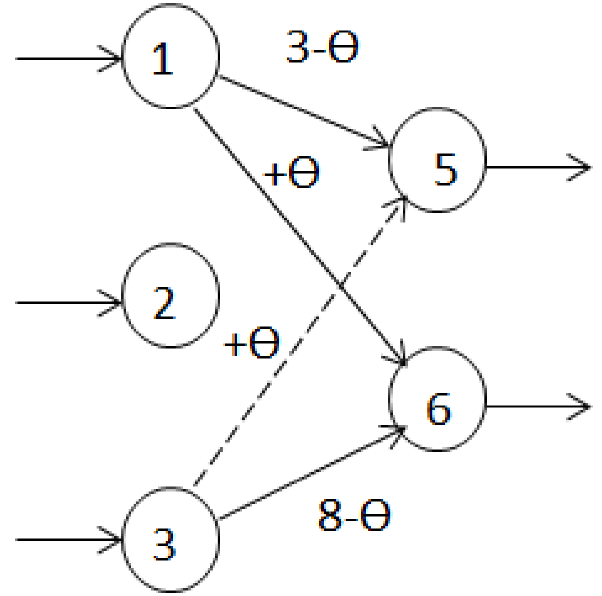
Это система для определения потенциалов, в которой уравнений, переменных. Уравнений на одно больше, чем неизвестных, поэтому одному неизвестному, u_1, присвоим значение 0. После этого определяем остальные потенциалы.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 8 \\ u_1 + v_3 = 5 \\ u_1 + v_4 = 3 \\ u_2 + v_1 = 2 \\ u_2 + v_2 = 4 \\ u_3 + v_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -4 \\ u_3 = -4 \\ v_1 = 6 \\ v_2 = 8 \\ v_3 = 5 \\ v_4 = 3 \end{cases}$$

Теперь находим все остальные Δ по формуле $\Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$

C/Δ	4	5	6	7	u
1	7 -1	8 -	5 -	3 -	0
2	2 -	4 -	5 -4	9 -10	-4
3	6 -4	3 1	1 -	2 -3	-4
v	6	8	5	3	

$$\Delta_{32} = 1 > 0$$



$$\theta^* = \min_{-\theta} X_{ij} = 3$$

Новый базис:

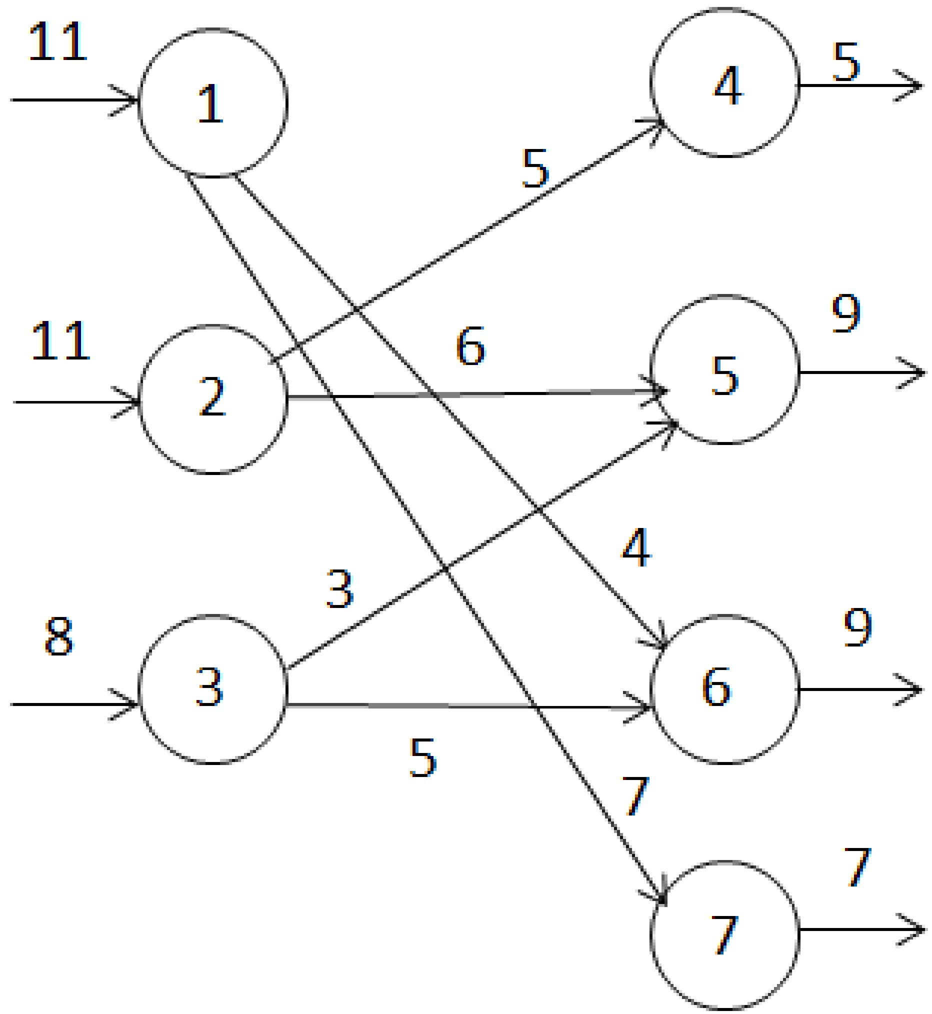
		4	7
5	6		
	3	5	

$$f_1 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}X_{ij} = 20 + 21 + 10 + 24 + 9 + 5 = 89 < f_0$$

C/Δ

	4	5	6	7	u
1	7 / -2	8 / -1	5 / -	3 / -	0
2	2 / -	4 / -	5 / -3	9 / -9	-4
3	6 / -5	3 / -	1 / -	2 / -3	-4
v	5	7	5	3	

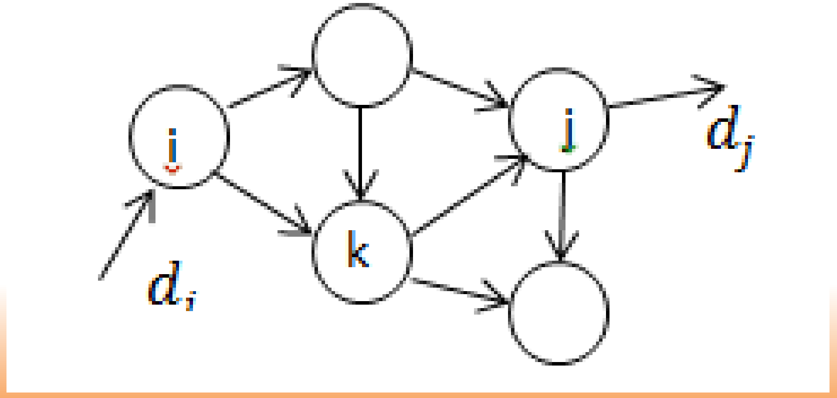
Получили оптимальный грузопоток:



Решение общей транспортной задачи путём сведения к задаче поиска кратчайшего пути и классической транспортной задаче

Общая транспортная задача решается через задачу поиска кратчайшего пути и классическую транспортную задачу.

Дан транспортный граф, состоящий из пунктов и дрог, соединяющих эти пункты. Даны интенсивности источников $d_i > 0$ и интенсивность потребителей $d_j < 0$. Могут быть пункты, не потребляющие и не производящие продуктов $d_k = 0$.



Дана матрица $C = \{c_{ij}\}$ – матрица промежуточных расходов, $C_{ij} \geq 0$ – стоимость провоза продукта из i-го пункта в j-ый (не обязательно полностью заполненная, не обязательно симметричная).

Требуется найти оптимальный грузопоток $X_{ij} \geq 0$

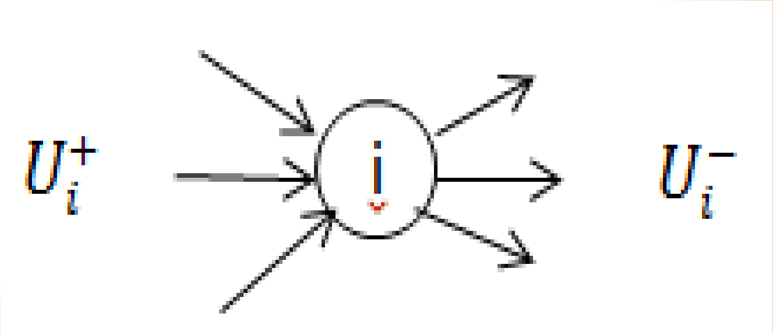
$$f = \sum_{(i,j)} c_{ij} X_{ij} \to min$$

Ограничения, учитывающие сбалансированность:

$$\sum_{k \in U_i^+} X_{ki} + d_i = \sum_{j \in U_i^-} X_{ij} \quad ,i = 1,2, \ldots$$

U_i^- - множество индексов, соответствующее выходящим дугам, U_i^+ - множество индексов, соответствующее входящим дугам.

$\sum_i d_i = 0$ – естественные условия баланса (весь произведенный продукт будет потреблен)



Алгоритм решения общей транспортной задачи

I. 1) Из множества всех вершин выбираем производителей и нумеруем их I=1,…,M. Выбираем всех потребителей и нумеруем J=1,…,N.

2) Делаем преобразования: $a_I = d_I > 0, b_J = -d_J > 0$

3) Решаем задачу поиска кратчайшего пути и находим наиболее дешевые пути от каждого производителя к каждому потребителю. Если между каким-то производителем и каким-то потребителем не найдется дороги, то $C_{I'J'} = \infty$. Найдём Π_{IJ}- самые дешевые пути от каждого производителя к каждому потребителю.

II.Решаем получившуюся классическую транспортную задачу, в которой фигурируют $a_I, b_J\ C_{IJ}$.

$\sum_{(i,j)} c_{ij} X_{ij} \to min$. Находим $X_{IJ}^* \geq 0$

III. Находим оптимальный грузопоток исходной общей транспортной задачи.

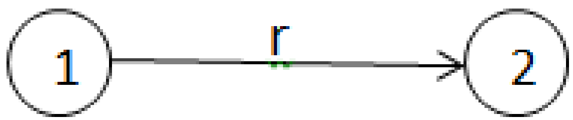
Ограничения на пропускную способность

Пусть в нашей транспортной задаче имеются ограничения на пропускную способность на одну или несколько дорог.

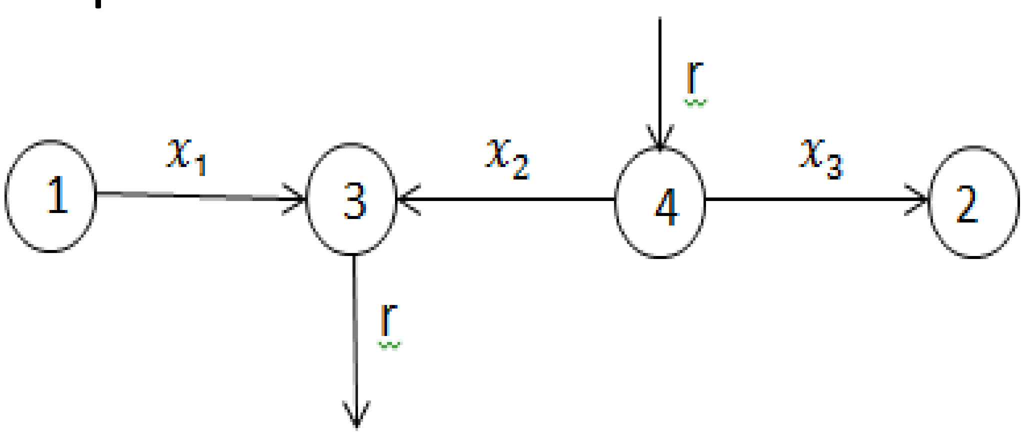
$$0 \le x_{ij} \le r_{ij}$$

Пусть есть ограничение на дорогу из пункта 1 в пункт 2.

$$0 \le x_{12} \le r$$



Введём два промежуточных пункта (пункт 3 и пункт 4) следующим образом:



Соединим пункты 3 и 4 встречным потоком и объявим пункт 4 потребителем с интенсивностью r, а пункт 3 – производителем интенсивности r.

Условие баланса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = r \\ x_2 + x_3 = r \end{cases}$$

$$x_1 = x_3 = x_{12}$$

$x_1 \leq r \Rightarrow x_{12} \leq r$

Таким образом, если имеются ограничения на пропускную способность, то изменяем сеть путём увеличения количества пунктов с дорогами без ограничения пропускной способности.

Условие задачи для расчетной работы №2

Дана транспортная сеть, состоящая из 7 вершин, связи между которыми заданы с помощью матрицы инцидентности. Найти оптимальный грузопоток.

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & G_{13} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & G_{24} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & G_{35} & G_{36} & G_{37} \\ 0 & G_{42} & 0 & 0 & 1 & 0 & G_{47} \\ 0 & 0 & G_{53} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_{13} = \begin{cases} 1, i = 3k, k = 0,1,2,\dots \\ 0, i \neq 3k \end{cases}$$

$$G_{24} = \begin{cases} 1, i = 2k \\ 0. i \neq 2k \end{cases}$$

$$G_{35} = \begin{cases} 1, i = 5k \\ 0, i \neq 5k \end{cases}$$

$$G_{36} = 1 - G_{13}$$

$$G_{37} = G_{13}$$

$$G_{42} = 1 - G_{24}$$

$$G_{47} = 1 - G_{35} - G_{53}$$

$$G_{53} = \begin{cases} 1, i = 5k + 4 \\ 0, i \neq 5k + 4 \end{cases}$$

Интенсивности источников, потребителей:

$d_1 = 2i + 1$

$d_2 = i + 11$

$d_3 = d_4 = 0$

$d_5 = -i$

$d_6 = -(i + 4)$

$d_7 = -(i + 8)$

$r_{15} = \left[\dfrac{i + 1}{2}\right]$

$r_{27} = \left[\dfrac{i + 4}{3}\right]$

[...] – целая часть числа

Матрица промежуточных расходов:

$C_{kl} = [6 + 5\cos\left(\frac{\pi}{15}(i + 4k + l)\right)]$, [...] – целая часть числа

Найти оптимальный грузопоток.

Пример оформления расчетной работы №2

Условие задачи для варианта 20

Дана транспортная сеть, состоящая из семи вершин, связи между которыми задаются матрицей инцидентности размера 7х7.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимости:

$$c_{12} = 9$$
$$c_{15} = 10$$
$$c_{23} = 10$$
$$c_{24} = 10$$
$$c_{27} = 8$$
$$c_{34} = 7$$
$$c_{35} = 6$$
$$c_{36} = 5$$
$$c_{45} = 2$$
$$c_{56} = 1$$
$$c_{67} = 4$$

Источники: $\begin{cases} d_1 = 41 \\ d_2 = 31 \end{cases}$

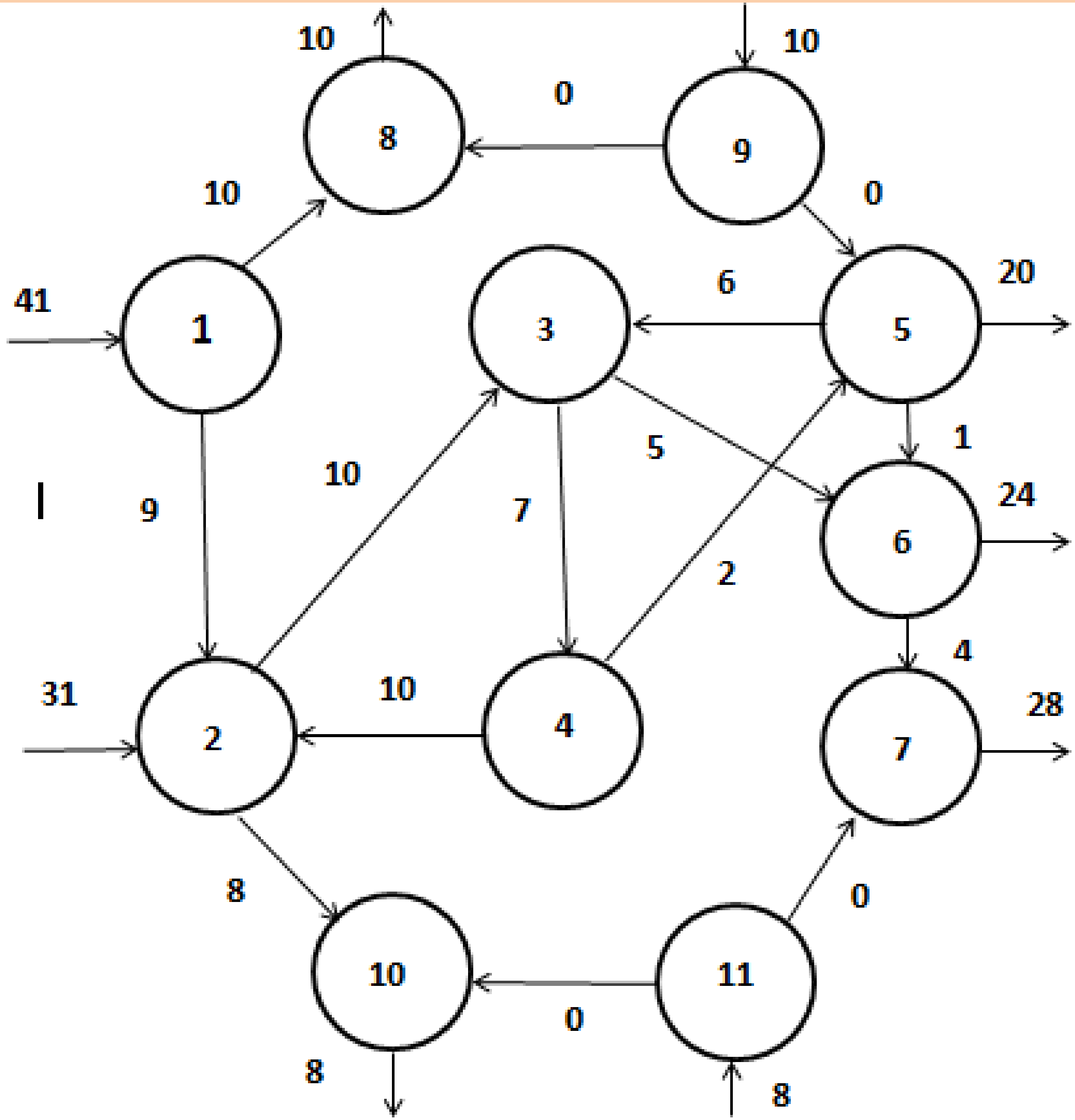
Получатели:

$$\begin{cases} d_5 = -20 \\ d_6 = -24 \\ d_7 = -28 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} r_{15} = 10 \\ r_{27} = 8 \end{cases}$$

i	d_i	(i,j)	C_{ij}	r_{ij}
1	41	(1,2)	9	-
		(1,5)	10	10
2	31	(2,3)	10	-
		(2,4)	10	-
		(2,7)	8	8
3	0	(3,4)	7	-
		(3,5)	6	
		(3,6)	5	
4	0	(4,5)	2	-
5	-20	(5,6)	1	-
6	-24	(6,7)	4	-
7	-28	-	-	-



10
0
10
8
9
10
0
41
1
3
6
5
20
1
10
5
9
7
24
6
2
4
31
10
2
4
28
7
8
0
10
11
0
8
8

I.

$\boxed{\frac{(1,2)}{9}}$	$\boxed{\frac{(1,8)}{10}}$	
$\frac{(2,3)}{19}$	$\boxed{\frac{(2,4)}{19}}$	$\boxed{\frac{(2,10)}{17}}$
$\frac{(3,4)}{26}$	$\frac{(3,5)}{25}$	$\frac{(3,6)}{24}$
$\boxed{\frac{(4,5)}{21}}$		
$\boxed{\frac{(5,6)}{22}}$	$\boxed{\frac{(6,7)}{26}}$	

$$1 \xrightarrow{21} 5: 1,2,4,5$$

$$1 \xrightarrow{22} 6: 1,2,4,5,6$$

$$1 \xrightarrow{26} 7: 1,2,4,5,6,7$$

$$1 \xrightarrow{10} 8: 1,8$$

$$1 \xrightarrow{17} 10: 1,2,10$$

II.

$$\boxed{\frac{(2,3)}{10}} \quad \boxed{\frac{(2,4)}{10}} \quad \boxed{\frac{(2,10)}{8}}$$

$$\frac{(3,5)}{16} \quad \frac{(3,6)}{15} \quad \frac{(3,4)}{17}$$

$$\boxed{\frac{(4,5)}{12}}$$

$$\boxed{\frac{(5,6)}{13}}$$

$$\boxed{\frac{(6,7)}{17}}$$

$$2 \xrightarrow{22} 5: 2,3,4,5$$

$$2 \xrightarrow{17} 6: 2,3,6$$

$$2 \xrightarrow{20} 7: 2,3,6,7$$

$$2 \xrightarrow{} 8: \; -$$

$$2 \xrightarrow{9} 10: 2,10$$

III.

$\frac{(9,8)}{0}$	$\frac{(9,5)}{0}$
$\frac{(5,6)}{1}$	
$\frac{(6,7)}{5}$	

$$9 \xrightarrow{0} 5: 9,5$$

$$9 \xrightarrow{1} 6: 9,5,6$$

$$9 \xrightarrow{4} 7: 9,5,6,7$$

$$9 \xrightarrow{0} 8: 9,8$$

$$9 \xrightarrow{24} 10: 9,5,3,4,2,10$$

IV.

$\frac{(11,7)}{0}$	$\frac{(11,10)}{0}$

$11 \rightarrow 5: \ -$

$11 \rightarrow 6: \ -$

$11 \xrightarrow{0} 7: 11,7$

$11 \rightarrow 8: \ -$

$11 \xrightarrow{0} 10: 11,10$

c/x_0	5	6	7	8	10				
1	21 9	22 20	26	10 10	17	41	31	20	0
2	12 10	13 13	17	-	8 8	31	23	13	0
9	0 10	1	5	0	-	10	0		
11	-	-	0 8	-	0	8	0		
b	20	24	28	10	8				
	10	11	20	0	0				
		0	0						

	11	20	10	
10	13			8
10				
		8		

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 22 \\ u_1 + v_3 = 26 \\ u_1 + v_4 = 10 \\ u_2 + v_1 = 12 \\ u_2 + v_2 = 13 \\ u_3 + v_1 = 0 \\ u_2 + v_5 = 8 \\ u_4 + v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_2 = 22 \\ v_3 = 26 \\ v_4 = 10 \\ v_1 = 21 \\ u_2 = -9 \\ u_3 = -21 \\ v_5 = 17 \\ u_4 = -26 \end{cases}$$

	5	6	7	8	10	u
1	21 0	22	26	10	17 0	0
2	12	13	17 0	- -4	8	-9
9	0	1 0	5 0	0 -11	- -4	-21
11	- -5	- -35	0	- -16	0 -9	-26
v	21	22	26	10	17	

$$f = 11 * 22 + 20 * 26 + 10 * 10 + 10 * 12 + 13 * 13 + 8 * 8 = 1215$$

$$1 \xrightarrow{(11)} 6: 1,2,4,5,6$$

$$1 \xrightarrow{(20)} 7: 1,2,4,5,6,7$$

$$1 \xrightarrow{(10)} 8: 1,8$$

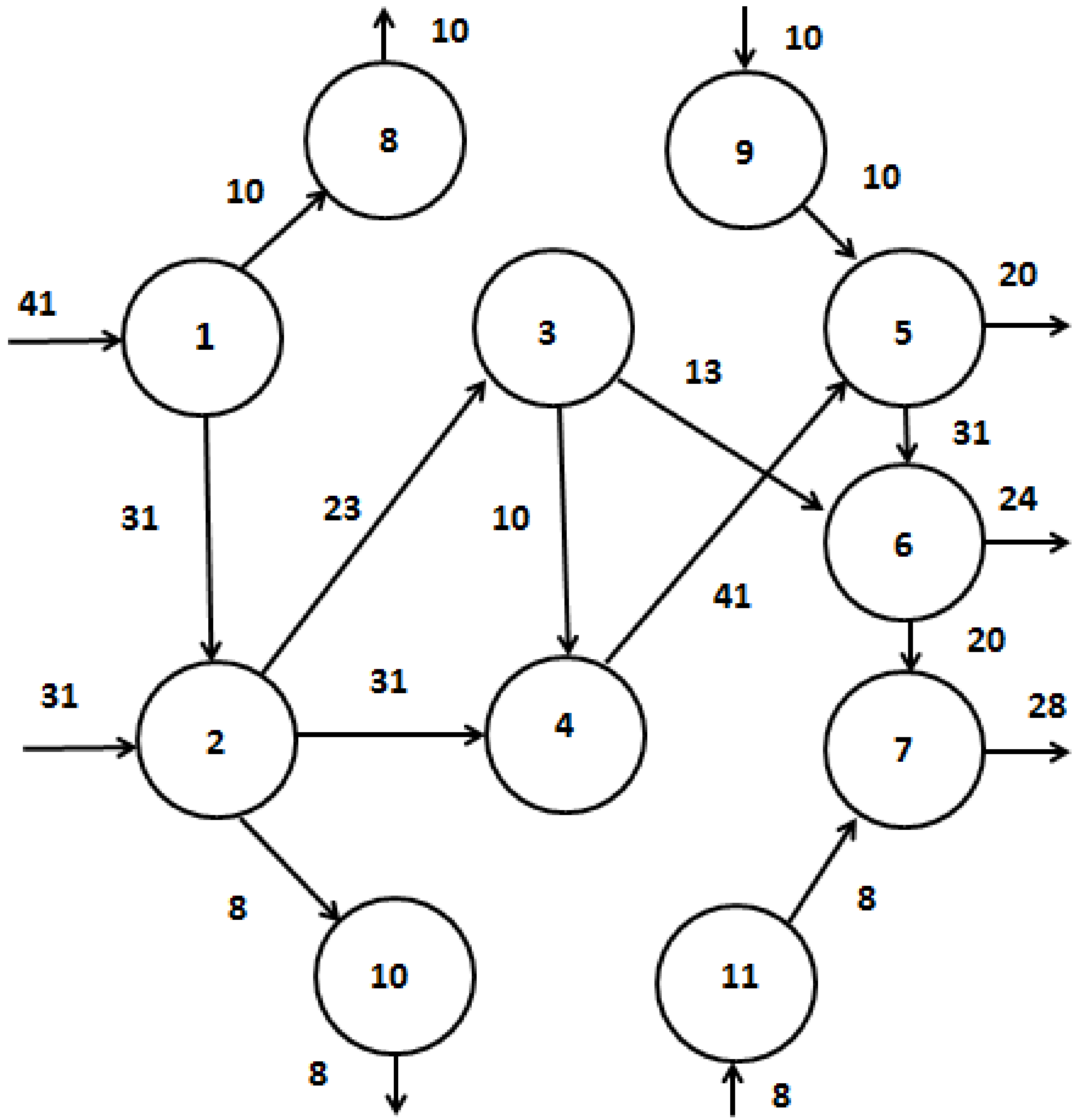
$$2 \xrightarrow{(10)} 5: 2,3,4,5$$

$$2 \xrightarrow{(13)} 6: 2,3,6$$

$$2 \xrightarrow{(8)} 10: 2,10$$

$$9 \xrightarrow{(10)} 5: 9,5$$

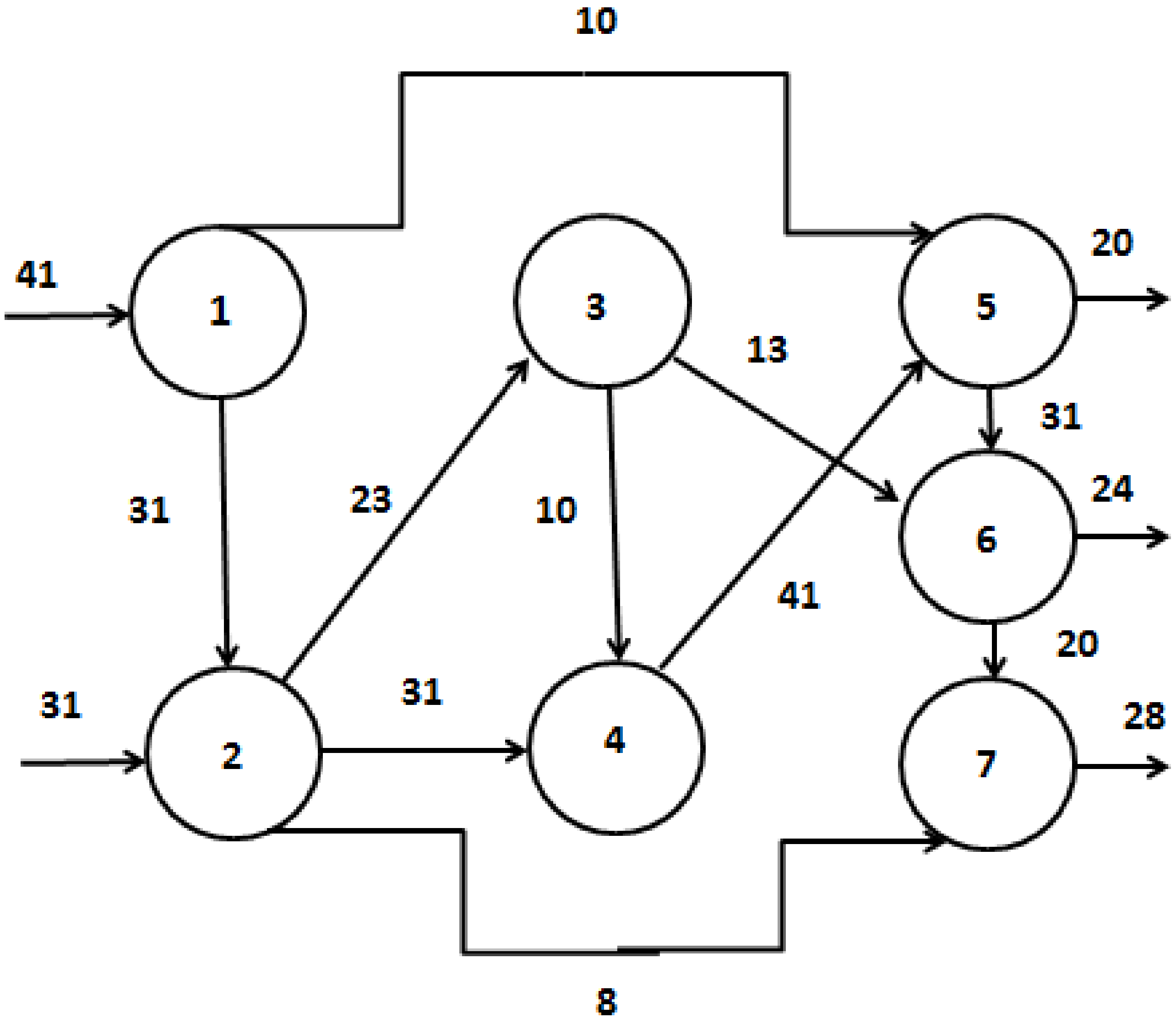
$$11 \xrightarrow{(8)} 7: 11,7$$



10
10
8
9
10
10
41
1
3
5
20
13
31
31
23
10
6
24
41
20
31
31
2
4
7
28
8
8
10
11
8
8

Ответ: $f = 1215$

Оптимальный грузопоток:



Спасибо за внимание!