УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Методы оптимизации

Лекция 7. Двойственная задача линейного программирования

Селина Елена
Георгиевна

Постановка и правила построения двойственной задачи

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, составленную определенным образом. Связь между первой задачей и второй задачей, которую будем называть двойственной, заключается в том, что из решения одной задачи можно получить решение другой.

Пусть есть задача линейного программирования, записанная в матричной форме:

Найти

$$max\{C^T X | AX \leq B, X \geq 0\} \qquad (25)$$

Будем ее называть прямой задачей. Двойственной задаче (25) называется следующая задача:

Найти

$$\min\{B^T\lambda \mid A^T\lambda \geq C, \lambda \geq 0\} \qquad (26)$$

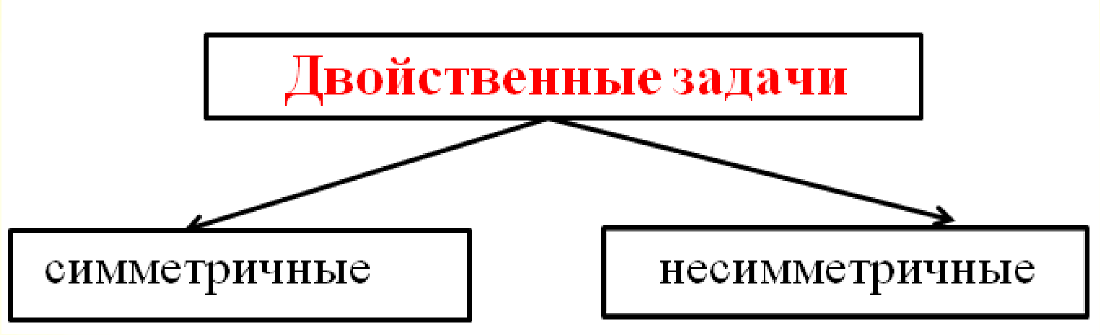
Переменные λ называют двойственными переменными.

Постановка и правила построения двойственной задачи

При переходе от исходной задачи к соответствующей двойственной задаче производят следующие преобразования:

1. заменяют максимизацию целевой функции минимизацией;
2. знак неравенств – ограничений меняется на противоположный. Если в исходной задаче неравенство меньше или равно нулю, то в двойственной задаче – больше или равно нулю;
3. число переменных x_i в исходной задаче равно числу ограничений в двойственной, и наоборот;
4. матрица А системы ограничений исходной задачи транспонируется;
5. векторы В и С меняются местами, т.е. коэффициенты целевой функции исходной задачи (С) становятся столбцом свободных членов системы ограничений двойственной задачи, а столбец свободных членов системы ограничений исходной задачи (В) становится коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

Если А имеет размер m×n , то $X \in R^n, \lambda \in R^m$.
m<n $\Rightarrow$ размерность двойственной задачи меньше размерности прямой.



В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.
В несимметричных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а система ограничений двойственной в виде неравенств, причем если в целевой функции двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенств ≥, если максимум, то ≤. Кроме того, в двойственной задаче переменные могут принимать любое значение, в том числе и отрицательные.
Взаимозависимость исходной и двойственной задач определяется рядом теорем.

Первая теорема двойственности

Теорема. Рассмотрим несимметричную пару двойственных задач:

$max\{C^T X | AX = B, X \geq 0\}$ (27)

и

$min\{B^T A^T \lambda \geq C\}$ (28)

Пусть X^* и λ^* являются соответственно решениями прямой и двойственной задач. $f_{\text{п}}(X^*), f_{\text{Д}}(\lambda^*)$ соответственно точки максимума и минимума. Тогда:

$$f_{\text{п}}(X^*) = f_{\text{Д}}(\lambda^*)$$

Выполняются соотношения дополняющей нежесткости:

$X_j^*(A^T \lambda^* - C)_j$=0

Если одна из задач имеет неограниченное решение, то другая не имеет допустимого решения, но не наоборот:

$f_{\text{п}} = \infty \Rightarrow \lambda = \varnothing$

$f_{\text{Д}} = \infty \Rightarrow X = \varnothing$

Доказательство.

1а)Докажем сначала, что для любых допустимых X, λ выполняется: $f_Д(\lambda^*) \geq f_п(X^*)$

Рассмотрим ограничения двойственной задачи:

$$A^T\lambda \geq C$$

Транспонируем обе части:

$$\lambda^T A \geq C^T$$

Умножим обе части на $X \geq 0$:

$$\lambda^T AX \geq C^T X$$

$$\lambda^T B \geq C^T X$$

$\lambda^T B$ – произведение строки на столбец, следовательно это скаляр и при транспонировании не изменится.

$$B^T\lambda \geq C^T X$$

Следовательно,

$$f_Д(\lambda^*) \geq f_п(X^*)$$

1б) Докажем теперь, что $f_{\text{Д}}(\lambda^*) = f_{\text{п}}(X^*)$

Предположим, что мы решили прямую задачу симплекс-методом и получено оптимальное решение X^*. Рассмотрим последний шаг симплекс-метода. Для удобства базисная матрица стоит в начале. Тогда ограничение записывается так:

$$A_{\text{б}}^* X_{\text{б}}^* + A_c^* X_c^* = B$$

$$X^* = \begin{pmatrix} X_{\text{б}}^* \\ X_c^* \end{pmatrix}$$

$$X_c^* = 0$$

$$X_{\text{б}}^* = A_{\text{б}}^{*-1} B$$

$$f_{\text{п}}(X^*) = C^T X^* = C_{\text{б}}^{*T} X_{\text{б}}^* + \text{C}_{\text{c}}^{*T} X_c^* = C_{\text{б}}^{*T} A_{\text{б}}^{*-1} B \qquad (29)$$

I. Покажем, что $\lambda^T = C_б^{*T} A_б^{*-1}$ является допустимым значением двойственной задачи, то есть $A^T\lambda \geq C$

Транспонируем:

$$\lambda^T A \geq C^T$$

Для j-го элемента:

$$\lambda^T a_j \geq c_j$$

Надо показать, что λ удовлетворяет

$$c_j - \lambda^T a_j \leq 0 \;\; c_j - C_б^{*T} A_б^{*-1} a_j \leq 0, j = \overline{1, n}$$

или $\Delta_j^* \leq 0$

На последнем шаге симплекс-метода $\Delta_j^* \leq 0$

Поскольку все выкладки равносильны, то идя по обратному пути придём к тому, что $A^T\lambda \geq C$.

Покажем, что это λ оптимальное.

$f_{Д}(\lambda) = B^T\lambda = \lambda^T B = C_{б}^{*T} A_{б}^{*-1} B = f_{п}(X^*)$ (по (29))

Возьмём $\bar{\lambda}$ - любое, удовлетворяющее ограничению двойственной задачи, X^* - оптимальное решение прямой задачи.

$$f_{Д}(\bar{\lambda}) \geq f_{п}(X^*) = f_{Д}(\lambda) = f_{Д}\left(C_{б}^{*T} A_{б}^{*-1}\right)$$

Получили, что для любого $\bar{\lambda}$, удовлетворяющего ограничению двойственной задачи,

$$f_{Д}\left(C_{б}^{*T} A_{б}^{*-1}\right) \leq f_{Д}(\bar{\lambda})$$

Значит

$\lambda^* = C_{б}^{*T} A_{б}^{*-1}$ – оптимальное решение двойственной задачи и $f_{п}(X^*) = f_{Д}(\lambda^*)$

2)Условие дополняющей нежесткости.

Надо доказать:

$X_j^*(A^T\lambda^* - C)_j$=0

Но $(A^T\lambda^* - C)_j = -\Delta_j^*$

То есть нужно доказать:

$$X_j^*\Delta_j^* = 0$$

Так как X^* удовлетворяет ограничениям задачи, возможны два варианта:

$X^* = 0$. Тогда условие дополняющей нежесткости выполнено.

X^* >0 $\Rightarrow j \in J_б \Rightarrow \Delta_j^* = 0 \Rightarrow$ условие дополняющей нежесткости выполнено.

3) Пусть для определенности прямая задач имеет неограниченное решение $f_{\text{п}} = \infty$. Докажем, что двойственная задача не имеет допустимого решения.

Допустим противное. Пусть существует $\bar{\lambda}$ - допустимое решения двойственной задачи.

$$f_{\text{Д}}(\bar{\lambda}) = B^T \bar{\lambda} < \propto$$

По пункту 1а $f_{\text{Д}} \geq f_{\text{п}} = \propto$. Противоречие.

Аналогично доказывается если $f_{\text{Д}} = -\propto$, то нет допустимого решения у прямой задачи.

Теорема доказана.

Вторая теорема двойственности

Теорема. Рассмотрим симметричную пару двойственных задач.

$max\{C^T X | AX \leq B, X \geq 0\}$ (30) и

$min\{B^T A^T \lambda \geq C, \quad \geq 0\}$ (31)

Пусть X^* и λ^* являются соответственно решениями прямой и двойственной задач. $f_{\text{п}}(X^*), f_{\text{Д}}(\lambda^*)$ соответственно точки максимума и минимума. Тогда:

$$f_{\text{п}}(X^*) = f_{\text{Д}}(\lambda^*)$$

Выполняются соотношения дополняющей нежесткости:

а) $X_j^*(A^T\lambda^* - C)_j = 0, j = \overline{1, n}$

б) $\lambda_i^*(AX^* - B)_i = 0, i = \overline{1, m}$

Если одна из задач имеет неограниченное решение, то другая не имеет допустимого решения, но не наоборот:

$f_{\text{п}} = \infty \Rightarrow \lambda = \varnothing$

$f_{\text{Д}} = \infty \Rightarrow X = \varnothing$

Доказательство.

Сведём прямую задачу (30) к каноническому виду.

Введём $\bar{X} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} n \\ m \end{array}$

$\max\{\bar{C}^T \bar{X} | \bar{A}\bar{X} = B, \bar{X} \geq 0\}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline A & E \\ \hline \end{array}$

(32)

$\bar{C}^T \bar{X} = C^T X, \quad \bar{A}\bar{X} = AX + Y = B, \; X \geq 0, \; Y \geq 0$

Задача (32) полностью эквивалентна задаче (30).

В соответствии с первой теоремой двойственности можно написать двойственную задачу для задачи (32):

$min\{B^T \bar{A}^T \lambda \geq \bar{C}\}$ (33)

Условие неравенства в ограничениях задачи (33) распадается на два неравенства.

$$\begin{matrix} \boxed{A^T} & & \boxed{C} \\ \boxed{E} & & \boxed{0} \end{matrix} \qquad\qquad A^T\lambda \geq C, \qquad\qquad \geq 0$$

Таким образом, задача (33) полностью эквивалентна задаче (31). Значит, между (30) и (31) выполняются те же самые соотношения, что и между (32) и (33).

По первой теореме двойственности для задач (32) и (33):

$$\left.\begin{matrix} f_{\text{п}} = f_{\text{Д}} \\ f_{\text{п}} = \bar{C}^T \bar{X}^* = C^T X^* \\ f_{\text{Д}} = B^T \lambda^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow C^T X^* = B^T \lambda^* \Rightarrow f_{\text{п}}(X^*) = f_{\text{Д}}(\lambda^*)$$

2)По первой теореме двойственности для (32) и (33)

$$\bar{X}_j^*(\bar{A}^T\lambda^* - \bar{C})_j = 0,\ j = \overline{1, m+n}$$

$$\bar{X}^{*T}(\bar{A}^*\lambda^* - \bar{C}) = 0$$

X^T	Y^T

$A^T\lambda - C$
λ-0

Разбиваем на две части.

$$X_j^*(\bar{A}^T\lambda^* - C)_j = 0, \qquad j = \overline{1, n}$$

$$Y_i^*\lambda_i^* = 0, \qquad i = \overline{1, m}$$

$$Y = B - AX^* \Rightarrow Y_i^* = (B - AX^*)_i$$

$$(B - AX^*)_i\lambda_i^* = 0, \qquad i = \overline{1, m}$$

$$(B - AX^*)^T\lambda^* = 0$$

$$\lambda^{*T}(B - AX^*) = 0$$

$$\lambda_i^*(AX^* - B)_i = 0, i = \overline{1, m}$$

3)Докажем сначала вспомогательное утверждение:

$$f_{Д}(\lambda) \geq f_{п}(X)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^T * \ | \ AX \leq B \quad \lambda^T AX \leq \lambda^T B \\ A^T \lambda \geq C \quad \lambda^T A \geq C^T \ | * X \geq 0 \quad \lambda^T AX \geq C^T X \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^T B \geq$$

$$C^T X \Rightarrow B^T \lambda \geq C^T X$$

Следовательно, $f_{Д}(\lambda) \geq f_{п}(X)$.

Пусть для определенности прямая задач имеет неограниченное решение$f_{п} = \infty$. Докажем, что двойственная задача не имеет допустимого решения.

Допустим противное. Пусть существует $\bar{\lambda}$ - допустимое решения двойственной задачи.

$$f_{Д}(\bar{\lambda}) = B^T \bar{\lambda} < \propto$$

По вспомогательному утверждению $f_{Д} \geq f_{п} = \propto$. Противоречие.

Аналогично доказывается если $f_{Д} = -\propto$, то нет допустимого решения у прямой задачи.

Теорема доказана.

Задание для домашней расчетной работы

Условие задачи (i – Ваш номер в журнале преподавателя)

Для кормления животного ежедневно требуются витамины А, В и С. Эти витамины содержатся в кормовых смесях двух видов. Известно процентное содержание каждого витамина в каждой из смесей, дневная норма витаминов и цена каждой смеси. Определить наиболее дешёвый рацион, обеспечивающий норму. При какой цене смеси 1 её будет невыгодно (выгодно) использовать в рационе?

	Смесь 1	Смесь 2	Норма
А	-	0,1 %	0,003 г.
В	0,3 %	$\left(3 - \frac{i}{24}\right) \cdot 0{,}1\%$	0,027 г.
С	0,1%	$\left(2 + \frac{i}{30}\right) \cdot 0{,}1\%$	$\left(12 + \frac{i}{2}\right) \cdot 0{,}001$ г.
Цена	0,1 руб./г.	$0{,}015 \cdot (3 + \lvert i - 6 \rvert)$ руб./г.	.

Решить 3 способами:

- Графический метод
- Симплекс-метод
- Через двойственную задачу

Пример решения домашней расчетной работы.

I. **Условие задачи**

Для кормления животного ежедневно требуются витамины A, B и C. Эти витамины содержатся в кормовых смесях двух видов. Известно процентное содержание каждого витамина в каждой из смесей, дневная норма витаминов и цена каждой смеси. Определить наиболее дешёвый рацион, обеспечивающий норму. При какой цене смеси 1 её будет невыгодно (выгодно) использовать в рационе?

	Смесь 1	Смесь 2	Норма
A	-	0,1 %	0,003 г.
B	0,3 %	0,217%	0,027 г.
C	0,1%	0,267 %	0,022 г.
Цена	0,1 руб./г.	0,255 руб./г.	.

Решить 3 способами:

- Графический метод
- Симплекс-метод
- Через двойственную задачу

II. **Математическая постановка задачи**

Обозначим x_1^*, x_2^* - вес оптимального количества корма 1 и 2 соответственно. Тогда нам надо решить следующую задачу линейного программирования: найти минимум f при ограничениях (1)

$$f = 0{,}1x_1 + 0{,}255x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 0{,}001x_2 \geq 0{,}003 \\ 0{,}003x_1 + 0{,}00217x_2 \geq 0{,}027 \\ 0{,}001x_1 + 0{,}00267x_2 \geq 0{,}0215 \end{cases} \qquad (1)$$

Или: min{C^T^X | AX≥B, X≥0}

Где C=$\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}255 \end{pmatrix}$ A=$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}001 \\ 0{,}003 & 0{,}00217 \\ 0{,}001 & 0{,}00267 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0{,}003 \\ 0{,}027 \\ 0{,}022 \end{pmatrix}$ X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2{,}267 \geq 22 \end{cases}$$

Графический метод.

$f = 0{,}1x_1 + 0{,}255 \rightarrow$ min

При следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 \geq 2{,}2 \end{cases} \qquad (2)$$

Построим область G, заданную системой неравенств (2) и

$$graf = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}255 \end{pmatrix}$$

Удобно построить $\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}55 \end{pmatrix}$

15
X2
10
5
0
10grad f
0
5
10
15
20
X1

Движемся противоположно направлению градиента и определим оптимальное решение. Оно расположено на пересечении следующих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2{,}17x_2 = 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} 66 - 8{,}01x_2 + 2{,}17x_2 = 27 \\ x_1 = 22 - 2{,}67x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5{,}84x_2 = 39 \\ x_1 = 22 - 2{,}67 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 6{,}678 \\ x_1 = 4{,}1695 \end{cases}$$

Следовательно $x_1^* = 4{,}1695$

$$x_2^* = 6{,}678$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 4{,}1695 \\ 6{,}678 \end{pmatrix}$$

Вычислим f^*

$$f^* = 0{,}1x_1^* + 0{,}255x_2^* = 0{,}1 * 4{,}1695 + 0{,}255 * 6{,}678 = 2{,}11984 \approx 2{,}12$$

IV. **Симплекс-метод.**

Зная, что

$\min(0{,}1x_1 + 0{,}255x_2) = -\max(-0{,}1x_1 - 0{,}255x_2)$

будем искать max функции *-f*

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 - x_4 = 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 - x_5 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1{,}5} \end{cases}$$

Применим метод искусственного базиса. Для этого введем переменные y_1, y_2, y_3

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 - x_4 + y_2 = 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 - x_5 + y_3 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1{,}5} \\ y_j \geq 0, j = \overline{1{,}3} \end{cases}$$

Будем решать вспомогательную задачу

W= $y_1 + y_2 + y_3 \quad \rightarrow \min$

$$y_1 = 3 - x_2 + x_3$$

$$y_2 = 27 - 3x_1 - 2{,}17x_2 + x_4$$

$$y_3 = 22 - x_1 - 2{,}67x_2 + x_5$$

$$W = -4x_1 - 5{,}84x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 52$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
y_1	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	-2,17	0	1	0	27
y_3	-1	-2,67	0	0	1	22
W	-4	-5,84	1	1	1	52

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ. Видим, что при увеличении x_2 быстрее всего до нуля доходит y_1.Меняем y_1 и x_2 местами.

$$x_2 = 3 + x_3 - y_1$$

$$y_2 = 27 - 3x_1 - 2{,}17(3 + x_3 - y_1) + x_4 =$$

$$= 20{,}49 - 3x_1 - 2{,}17x_3 + 2{,}17y_1 + x_4$$

$$y_3 = 22 - x_1 - 2{,}67(3 + x_3 - y_1) + x_5 =$$

$$= 13{,}99 - x_1 - 2{,}67x_3 + 2{,}67y_1 + x_5$$

$$\mathrm{W} = -4x_1 - 5{,}84(3 + x_3 - y_1) + x_3 + x_4 + x_5 + 52 =$$

$$= -4x_1 + 5{,}84y_1 - 4{,}84x_3 + x_4 + x_5 + 34{,}48$$

	x_1	y_1	x_3	x_4	x_5	β
x_2	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	2,17	-2,17	1	0	20,49
y_3	-1	2,67	-2,67	0	1	13,39
W	-4	5,84	-4,84	1	1	34,48

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ. Видим, что при увеличении x_3 быстрее всего до нуля доходит y_3. Меняем y_3 и x_3 местами.

$$x_3 = -0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 5{,}24$$

$$x_2 = 3 + (-0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 5{,}24) - y_1 =$$
$$= 8{,}24 - 0{,}375x_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5$$

$$y_2 = 20{,}37 - 3x_1 - 2{,}21(-0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 +$$
$$+5{,}24) + 2{,}17y_1 + x_4 = 9{,}119 - 2{,}186x_1 + 0{,}814y_3 +$$
$$+x_4 - 0{,}814x_5$$

$$\mathrm{W} = -4x_1 + 5{,}84y_1 - 4{,}84(+(-0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 +$$
$$+0{,}375x_5 + 5{,}24) + x_4 + x_5 + 34{,}48 =$$
$$= -2{,}185x_1 + y_1 + 1{,}815y_3 + x_4 - 0{,}815x_5 + 9{,}089$$

	x_1	y_1	y_3	x_4	x_5	β
x_2	-0,375	0	-0,375	0	0,375	8,246
y_2	-2,186	0	0,814	1	-0,814	9,119
x_3	-0,375	1	-0,375	0	0,375	5,246
W	-2,185	1,815	1	1	-0,815	9,089

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ. Видим, что при увеличении x_1 быстрее всего до нуля доходит y_2.Меняем y_2 и x_1 местами.

$$x_1 = -0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17$$

$$x_2 = -0{,}375(-0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17)$$
$$-0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 8{,}24 =$$
$$= 0{,}171y_2 - 0{,}515y_3 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5 + 6{,}678$$

$$x_3 = -0{,}375(-0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17)$$
$$+y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 5{,}24 =$$
$$= 0{,}171y_2 + y_1 - 0{,}515y_3 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5 + 3{,}678$$

$$\mathrm{W} = -2{,}185(-0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17)$$
$$+y_1 + 1{,}815y_3 + x_4 - 0{,}815x_5 + 9{,}089 = y_1 + y_2 + y_3$$

	y_2	y_1	y_3	x_4	x_5	β
x_2	0,171	0	-0,515	-0,171	0,515	6,678
x_1	-0,457	0	0,372	0,457	-0,372	4,17
x_3	0,171	1	-0,515	-0,171	0,515	3,678
W	1	1	1	0	0	0

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все $\Delta \geq 0$. Вспомогательная задача решена. Вернёмся теперь к исходной задаче. Выбросим вспомогательные переменные y_1, y_2, y_3 , так как они нам больше не понадобятся.

$$x_1 = 4{,}17 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5$$
$$x_2 = 6{,}678 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5$$
$$x_3 = 3{,}678 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5$$
$$f = 0{,}1x_1 + 0{,}255x_2 = 0{,}1(4{,}17 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5) +$$
$$+0{,}255(6{,}678 - 0{,}1761 + 0{,}515x_5) =$$
$$= 2{,}11949 + 0{,}0021x_4 + 0{,}0941x_5$$

	x_4	x_5	β
x_2	-0,171	0,515	6,678
x_1	0,457	-0,372	4,17
x_3	-0,171	0,515	3,678
-f	-0,0021	-0,0941	-2,11949

Обе характеристические разности отрицательные.

Найдено оптимальное решение.

$$x_1^* = 4{,}17$$

$$x_2^* = 6{,}678$$

$$f^* = 2{,}11949 \approx 2{,}12$$

V. **Решение двойственной задачи.**

Прямая задача:

$\min\{C^T X \mid AX \geq B,\ X \geq 0\}$

$$\begin{cases} x_2 \geq 0{,}003 \\ x_1 \geq 0 \\ 0{,}003x_1 + 0{,}00217x_2 \geq 0{,}027 \\ x_1 + 0{,}00267x_2 \geq 0{,}022 \end{cases}$$

и функционал $\min\{0{,}1x_1 + 0{,}255x_2\}$

Построим двойственную задачу:

$\max\{B^T \lambda \mid A^T \lambda \leq C,\ \lambda \geq 0\}$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}001\\ 0{,}003 & 0{,}00217\\ 0{,}001 & 0{,}00267\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0{,}003\\ 0{,}027\\ 0{,}022\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0{,}1\\ 0{,}255\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}0 & 0{,}003 & 0{,}001\\ 0{,}001 & 0{,}00217 & 0{,}00267\end{pmatrix}$$

Двойственная задача имеет вид:

$\max\{0{,}003\lambda_1+0{,}027\lambda_2+0{,}022\lambda_3\}$ при ограничениях:

$$\begin{cases}0{,}003\lambda_2+0{,}001\lambda_3\le 0{,}1\\ \lambda_1+0{,}00217\lambda_2+0{,}00267\lambda_3\le 0{,}255\\ \lambda_i\ge 0,\, i=\overline{1{,}3}\end{cases}$$

Решим двойственную задачу Симплекс-методом.

Приведём к каноническому виду, введя дополнительные переменные λ_4, λ_5. При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 100 \\ \lambda_1 + 2{,}17\lambda_2 + 2{,}67\lambda_3 + \lambda_5 = 255 \end{cases}$$

Построим симплекс-таблицу:

$$\lambda_4 = -3\lambda_2 - \lambda_3 + 0{,}1$$
$$\lambda_5 = -\lambda_1 - 2{,}17\lambda_2 - 2{,}67\lambda_3 + 0{,}255$$
$$f_{Д} = 3\lambda_1 + 27\lambda_2 + 22\lambda_3$$

	λ_1	λ_2	λ_3	β
λ_4	0	-3	-1	100
λ_5	-1	-2,17	-2,67	255
$f_Д$	0,003	0,027	0,022	0

Выбираем наибольшую положительную Δ. Видим, что при увеличении λ_2 быстрее всего до нуля дойдёт λ_4. Меняем λ_2 и λ_4 местами.

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}(-\lambda_3 - \lambda_4 + 100) = -0{,}3333\lambda_3 - 0{,}3333\lambda_4 + 33{,}33$$

$$\lambda_5 = -\lambda_1 - 2{,}17(-0{,}3333\lambda_3 - 0{,}3333\lambda_4 + 33{,}33) - 2{,}67\lambda_3 +$$
$$+255 = -_{\lambda_1} - 1{,}9467\lambda_3 + 0{,}7233\lambda_4 + 182{,}7$$

$$f_Д = 0{,}003\lambda_1 + 0{,}027(-0{,}3333\lambda_3 - 0{,}3333\lambda_4 + 33{,}33) + 0{,}022\lambda_3$$
$$=$$

$$= 0{,}003\lambda_1 + 0{,}013009\lambda_3 - 0{,}0089991\lambda_4 + 0{,}8999$$

	λ_1	λ_4	λ_3	β
λ_2	0	-0,3333	-0,3333	33,33
λ_5	-1	0,7233	-1,9467	182,7
$f_Д$	0,003	-0,0089991	0,013009	0,8999

Выбираем наибольшую положительную Δ. Видим, что при увеличении λ_3 быстрее всего до нуля дойдёт λ_5. Меняем λ_3 и λ_5 местами.

$$\lambda_3 = \frac{1}{1{,}9467}(-\lambda_1 + 0{,}7233\lambda_4 - \lambda_5 + 182{,}7) =$$

$$= -0{,}5137_{\lambda_1} + 0{,}372\lambda_4 - 0{,}5137\lambda_5 + 93{,}85$$

$$\lambda_2 = -0{,}3333\big(-0{,}5137_{\lambda_1} + 0{,}372\lambda_4 - 0{,}5137\lambda_5 + 93{,}85\big) -$$

$$-0{,}3333\lambda_4 + 33{,}33 =$$

$$= 0{,}1712\lambda_1 - 0{,}4573\lambda_4 + 0{,}1712\lambda_5 + 0{,}00202$$

$$f_Д = 0{,}003\lambda_1 + 0{,}013009(-0{,}5137_{\lambda_1} + 0{,}372\lambda_4 - 0{,}5137\lambda_5 +$$

$$+93{,}85) - 0{,}008999\lambda_4 + 0{,}8999 =$$

$$= -0{,}003683_{\lambda_1} - 0{,}0041598\lambda_4 - 0{,}006683\lambda_5 + 2{,}1203$$

	λ_1	λ_4	λ_5	β
λ_2	0,1712	-0,4573	0,1712	2,02
λ_3	-0,5137	0,372	-0,5137	93,85
$f_Д$	-0,003683	-0,0041598	-0,006683	2,1203

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все $\Delta \leq 0$.

Итак $\lambda_2^* = 2{,}02$

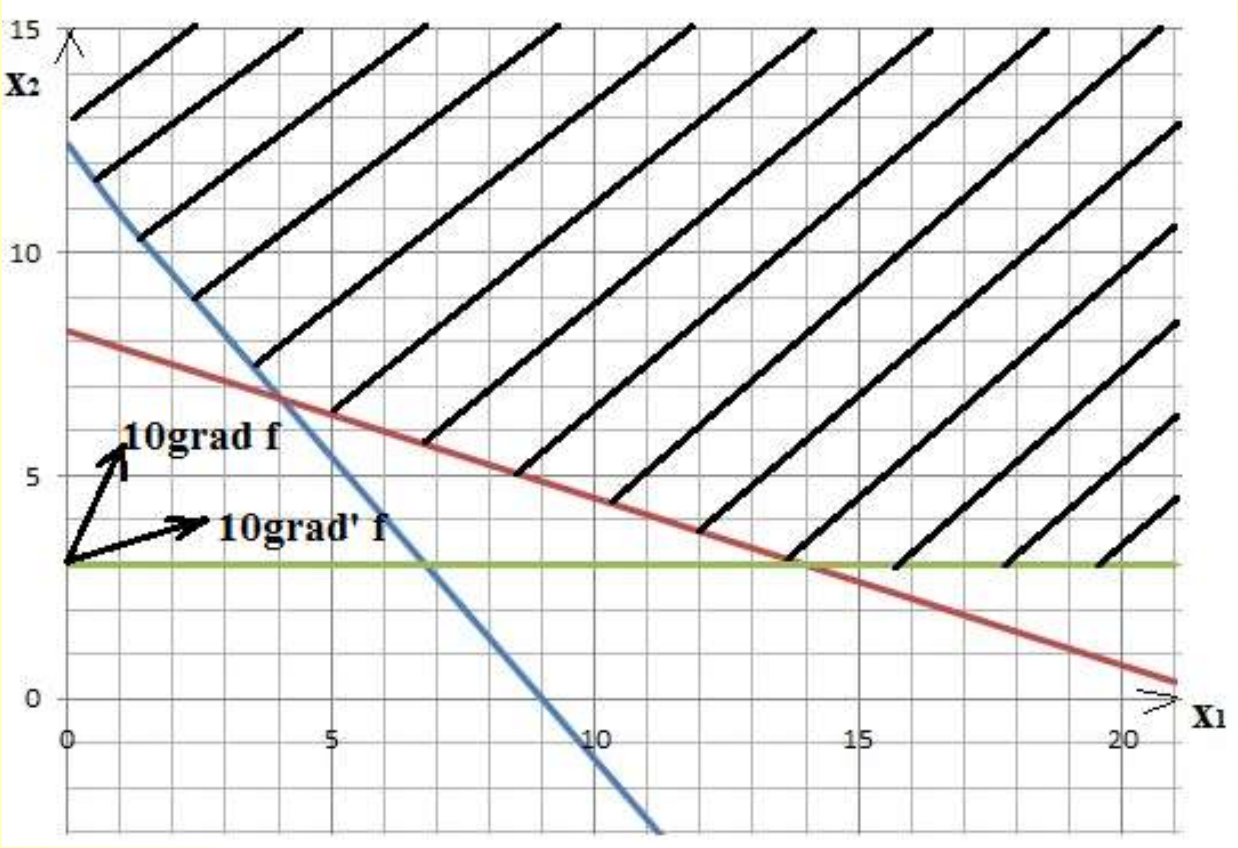
$$\lambda_3^* = 93{,}85$$

$$f^* = 2{,}1203$$

$$\lambda_1^* = \frac{1}{3}(0{,}027\lambda_2^* + 0{,}022\lambda_3^* - f^*) = \frac{1}{3}(0{,}027 * 2{,}02 + \\ +0{,}022 * 93{,}85 - 2{,}1203) = 0$$

Вывод: видим, что во всех трёх методах ответы совпадают.

VI. Найдем при какой цене на смесь 1 её будет невыгодно использовать в рационе.



Будем поворачивать градиент по часовой стрелке до тех пор, пока он не станет перпендикулярен прямой $3x_1+2{,}17x_2=27$. В случае, когда градиент перпендикулярен этой прямой, оптимальным решением будут являться все точки этой прямой, лежащие в G. Если мы будем поворачивать градиент дальше по часовой стрелке, то оптимальным решением будет $x_1^* = 0$, $x_2^* = 12{,}4424$, то есть смесь 1 будет невыгодно использовать в рационе.

Обозначим C_1^*- цена на смесь 1, выше которой её невыгодно будет использовать в рационе.

Тогда $grad'f = (C_1^*, 0{,}255)^T$ перпендикулярен прямой $3x_1+2{,}17x_2=27$ и параллелен вектору $\begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}17 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{C_1^*}{3} = \frac{0{,}255}{2{,}17} \qquad C_1^* = 0{,}3525$$

Таким образом если $C_1 > 0{,}3525$ р/кг, то смесь 1 невыгодно использовать в рационе.

Общий вывод: мы определили наиболее дешевый рацион, который состоит из 4,136 г. смеси 1 и 6,602 г. смеси 2 и нашли цену на смесь 1, при которой её будет невыгодно использовать в рационе.

Ответ: $x_1^* = 4{,}17$ г.

$x_2^* = 6{,}678$ г.

$f_П = 2{,}12$ руб.

$C_1^* = 0{,}3525$ руб.

$\lambda_1^* = 0$

$\lambda_2^* = 2{,}02$

$\lambda_3^* = 93{,}85$

$f_Д = 2{,}12$

Спасибо за внимание!