I. Условие задачи

Для кормления животного ежедневно требуются витамины A, B и C. Эти витамины содержатся в кормовых смесях двух видов. Известно процентное содержание каждого витамина в каждой из смесей, дневная норма витаминов и цена каждой смеси. Определить наиболее дешёвый рацион, обеспечивающий норму. При какой цене смеси 1 её будет невыгодно (выгодно) использовать в рационе?

	Смесь 1	Смесь 2	Норма
A	-	0,1 %	0,003 г.
B	0,3 %	0,217%	0,027 г.
C	0,1%	0,267 %	0,022 г.
Цена	0,1 руб./г.	0,255 руб./г.	.

Решить 3 способами:

- Симплекс-метод
- Графический метод
- Через двойственную задачу

II. Математическая постановка задачи

Обозначим x_1^*, x_2^* - вес оптимального количества корма 1 и 2 соответственно. Тогда нам надо решить следующую задачу линейного программирования: найти минимум f при ограничениях (1)

$$f = 0{,}1x_1 + 0{,}255x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 0{,}001x_2 \geq 0{,}003 \\ 0{,}003x_1 + 0{,}00217x_2 \geq 0{,}027 \\ 0{,}001x_1 + 0{,}00267x_2 \geq 0{,}0215 \end{cases} \qquad (1)$$

Или: min{$C^T X$ | AX≥B, X≥0}

Где C=$\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}255 \end{pmatrix}$ A=$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}001 \\ 0{,}003 & 0{,}00217 \\ 0{,}001 & 0{,}00267 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0{,}003 \\ 0{,}027 \\ 0{,}022 \end{pmatrix}$ X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2{,}267 \geq 22 \end{cases}$$

III. Симплекс-метод.

Зная, что $\min(0{,}1x_1 + 0{,}255x_2) = -\max(-0{,}1x_1 - 0{,}255x_2)$, будем искать max функции *–f.*

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 - x_4 = 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 - x_5 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1{,}5} \end{cases}$$

Применим метод искусственного базиса. Для этого введем переменные y_1, y_2, y_3

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 - x_4 + y_2 = 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 - x_5 + y_3 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1{,}5} \\ y_j \geq 0, j = \overline{1{,}3} \end{cases}$$

Будем решать вспомогательную задачу

W= $y_1 + y_2 + y_3 \quad \to$ min

$y_1 = 3 - x_2 + x_3$

$y_2 = 27 - 3x_1 - 2{,}17x_2 + x_4$

$y_3 = 22 - x_1 - 2{,}67x_2 + x_5$

$W = -4x_1 - 5{,}84x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 52$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
y_1	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	-2,17	0	1	0	27
y_3	-1	-2,67	0	0	1	22
W	-4	-5,84	1	1	1	52

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ. Видим, что при увеличении x_2 быстрее всего до нуля доходит y_1.

Меняем y_1 и x_2 местами.

$x_2 = 3 + x_3 - y_1$

$y_2 = 27 - 3x_1 - 2{,}17(3 + x_3 - y_1) + x_4 =$
$= 20{,}49 - 3x_1 - 2{,}17x_3 + 2{,}17y_1 + x_4$
$y_3 = 22 - x_1 - 2{,}67(3 + x_3 - y_1) + x_5 =$
$= 13{,}99 - x_1 - 2{,}67x_3 + 2{,}67y_1 + x_5$

$\mathrm{W} = -4x_1 - 5{,}84(3 + x_3 - y_1) + x_3 + x_4 + x_5 + 52 =$
$= -4x_1 + 5{,}84y_1 - 4{,}84x_3 + x_4 + x_5 + 34{,}48$

	x_1	y_1	x_3	x_4	x_5	β
x_2	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	2,17	-2,17	1	0	20,49
y_3	-1	2,67	-2,67	0	1	13,39
W	-4	5,84	-4,84	1	1	34,48

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ. Видим, что при увеличении x_3 быстрее всего до нуля доходит y_3.
Меняем y_3 и x_3 местами.

$x_3 = -0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 5{,}24$
$x_2 = 3 + (-0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 5{,}24) - y_1 =$
$= 8{,}24 - 0{,}375x_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5$
$y_2 = 20{,}37 - 3x_1 - 2{,}21(-0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 +$
$+ 5{,}24) + 2{,}17y_1 + x_4 = 9{,}119 - 2{,}186x_1 + 0{,}814y_3 +$
$+ x_4 - 0{,}814x_5$
$\mathrm{W} = -4x_1 + 5{,}84y_1 - 4{,}84(+(-0{,}375x_1 + y_1 - 0{,}375y_3 +$
$+ 0{,}375x_5 + 5{,}24) + x_4 + x_5 + 34{,}48 =$
$= -2{,}185x_1 + y_1 + 1{,}815y_3 + x_4 - 0{,}815x_5 + 9{,}089$

	x_1	y_1	y_3	x_4	x_5	β
x_2	-0,375	0	-0,375	0	0,375	8,246
y_2	-2,186	0	0,814	1	-0,814	9,119
x_3	-0,375	1	-0,375	0	0,375	5,246
W	-2,185	1,815	1	1	-0,815	9,089

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ. Видим, что при увеличении x_1 быстрее всего до нуля доходит y_2.
Меняем y_2 и x_1 местами.

$x_1 = -0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17$

$x_2 = -0{,}375(-0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17)$
$-0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 8{,}24 =$
$= 0{,}171y_2 - 0{,}515y_3 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5 + 6{,}678$

$x_3 = -0{,}375(-0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17)$
$+y_1 - 0{,}375y_3 + 0{,}375x_5 + 5{,}24 =$
$= 0{,}171y_2 + y_1 - 0{,}515y_3 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5 + 3{,}678$

W $= -2{,}185(-0{,}457y_2 + 0{,}372y_3 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5 + 4{,}17)$
$+y_1 + 1{,}815y_3 + x_4 - 0{,}815x_5 + 9{,}089 = y_1 + y_2 + y_3$

	y_2	y_1	y_3	x_4	x_5	β
x_2	0,171	0	-0,515	-0,171	0,515	6,678
x_1	-0,457	0	0,372	0,457	-0,372	4,17
x_3	0,171	1	-0,515	-0,171	0,515	3,678
W	1	1	1	0	0	0

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все $\Delta \geq 0$.
Вспомогательная задача решена. Вернёмся теперь к исходной задаче.
Выбросим вспомогательные переменные y_1, y_2, y_3 , так как они нам больше не понадобятся.

$x_1 = 4{,}17 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5$

$x_2 = 6{,}678 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5$

$x_3 = 3{,}678 - 0{,}171x_4 + 0{,}515x_5$

$f = 0{,}1x_1 + 0{,}255x_2 = 0{,}1(4{,}17 + 0{,}457x_4 - 0{,}372x_5) +$
$+0{,}255(6{,}678 - 0{,}1761 + 0{,}515x_5) =$
$= 2{,}11949 + 0{,}0021x_4 + 0{,}0941x_5$

	x_4	x_5	β
x_2	-0,171	0,515	6,678
x_1	0,457	-0,372	4,17
x_3	-0,171	0,515	3,678
-f	-0,0021	-0,0941	-2,11949

Обе характеристические разности отрицательные. Найдено оптимальное решение.

$x_1^* = 4{,}17$

$x_2^* = 6{,}678$

$f^* = 2{,}11949 \approx 2{,}12$

IV. Графический метод.

$f = 0{,}1x_1 + 0{,}255 \rightarrow$ min

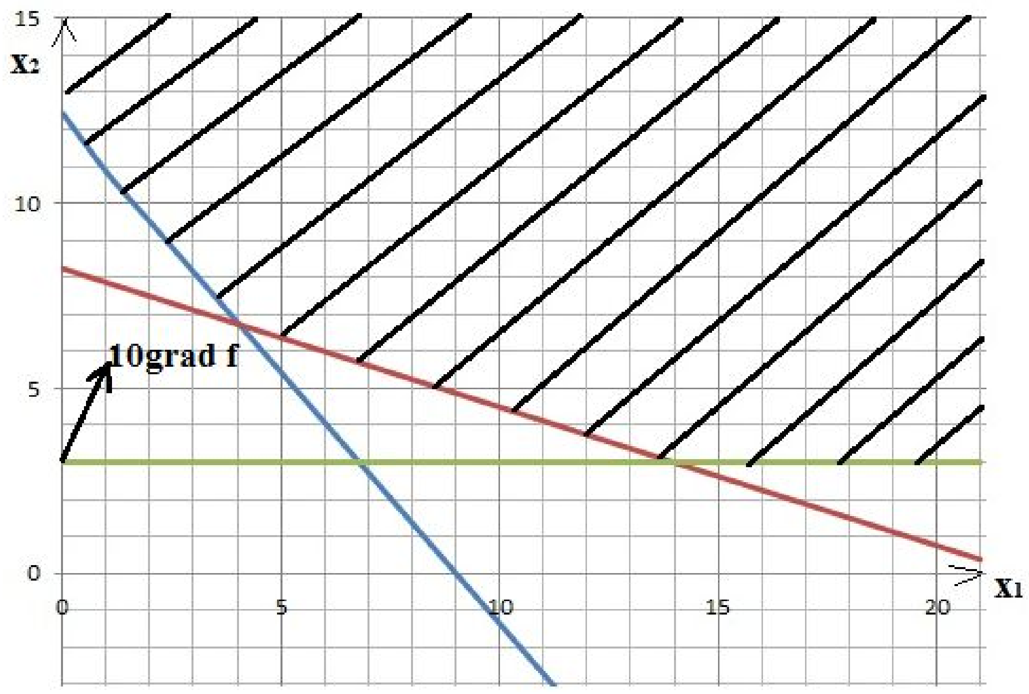
При следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2{,}17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 \geq 2{,}2 \end{cases} \qquad (2)$$

Построим область G, заданную системой неравенств (2) и

$graf = \binom{0{,}1}{0{,}255}$

Удобно построить $\binom{1}{2{,}55}$



Движемся противоположно направлению градиента и определим оптимальное решение. Оно расположено на пересечении следующих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2{,}17x_2 = 27 \\ x_1 + 2{,}67x_2 = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} 66 - 8{,}01x_2 + 2{,}17x_2 = 27 \\ x_1 = 22 - 2{,}67x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5{,}84x_2 = 39 \\ x_1 = 22 - 2{,}67 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 6{,}678 \\ x_1 = 4{,}1695 \end{cases}$$

Следовательно $x_1^* = 4{,}1695$

$x_2^* = 6{,}678$

$$X^* = \begin{pmatrix} 4{,}1695 \\ 6{,}678 \end{pmatrix}$$

Вычислим f^*

$$f^* = 0{,}1x_1^* + 0{,}255x_2^* = 0{,}1 * 4{,}1695 + 0{,}255 * 6{,}678 = 2{,}11984 \approx 2{,}12$$

V. Решение двойственной задачи.

Прямая задача:

min{C^TX | AX≥B, X≥0}

$$\begin{cases} x_2 \geq 0{,}003 \\ x_1 \geq 0 \\ 0{,}003x_1 + 0{,}00217x_2 \geq 0{,}027 \\ x_1 + 0{,}00267x_2 \geq 0{,}022 \end{cases}$$

и функционал min$\{0{,}1x_1 + 0{,}255x_2\}$

Двойственная задача:

max{$B^T\lambda$ | $A^T\lambda$≤C, λ≥0}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}001 \\ 0{,}003 & 0{,}00217 \\ 0{,}001 & 0{,}00267 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}003 \\ 0{,}027 \\ 0{,}022 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}255 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}003 & 0{,}001 \\ 0{,}001 & 0{,}00217 & 0{,}00267 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача имеет вид:

$\max\{0{,}003\lambda_1 + 0{,}027\lambda_2 + 0{,}022\lambda_3\}$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}003\lambda_2 + 0{,}001\lambda_3 \le 0{,}1 \\ \lambda_1 + 0{,}00217\lambda_2 + 0{,}00267\lambda_3 \le 0{,}255 \\ \lambda_i \ge 0, i = \overline{1{,}3} \end{cases}$$

Решим двойственную задачу Симплекс-методом.

Приведём к каноническому виду, введя дополнительные переменные λ_4, λ_5. При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 100 \\ \lambda_1 + 2{,}17\lambda_2 + 2{,}67\lambda_3 + \lambda_5 = 255 \end{cases}$$

Построим симплекс-таблицу:

$$\lambda_4 = -3\lambda_2 - \lambda_3 + 0{,}1$$

$$\lambda_5 = -\lambda_1 - 2{,}17\lambda_2 - 2{,}67\lambda_3 + 0{,}255$$

$$f_Д = 3\lambda_1 + 27\lambda_2 + 22\lambda_3$$

	λ_1	λ_2	λ_3	β
λ_4	0	-3	-1	100
λ_5	-1	-2,17	-2,67	255
$f_Д$	0,003	0,027	0,022	0

Выбираем наибольшую положительную Δ. Видим, что при увеличении λ_2 быстрее всего до нуля дойдёт λ_4. Меняем λ_2 и λ_4 местами.

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}(-\lambda_3 - \lambda_4 + 100) = -0{,}3333\lambda_3 - 0{,}3333\lambda_4 + 33{,}33$$

$$\lambda_5 = -\lambda_1 - 2{,}17(-0{,}3333\lambda_3 - 0{,}3333\lambda_4 + 33{,}33) - 2{,}67\lambda_3 +$$

$$+255 = -\lambda_1 - 1{,}9467\lambda_3 + 0{,}7233\lambda_4 + 182{,}7$$

$$f_Д = 0{,}003\lambda_1 + 0{,}027(-0{,}3333\lambda_3 - 0{,}3333\lambda_4 + 33{,}33) + 0{,}022\lambda_3 =$$

$$= 0{,}003\lambda_1 + 0{,}013009\lambda_3 - 0{,}0089991\lambda_4 + 0{,}8999$$

	λ_1	λ_4	λ_3	β
λ_2	0	-0,3333	-0,3333	33,33
λ_5	-1	0,7233	-1,9467	182,7
$f_Д$	0,003	-0,0089991	0,013009	0,8999

Выбираем наибольшую положительную Δ. Видим, что при увеличении λ_3 быстрее всего до нуля дойдёт λ_5. Меняем λ_3 и λ_5 местами.

$$\lambda_3 = \frac{1}{1,9467}(-\lambda_1 + 0,7233\lambda_4 - \lambda_5 + 182,7) =$$
$$= -0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 + 93,85$$
$$\lambda_2 = -0,3333(-0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 + 93,85) -$$
$$-0,3333\lambda_4 + 33,33 =$$
$$= 0,1712\lambda_1 - 0,4573\lambda_4 + 0,1712\lambda_5 + 0,00202$$
$$f_Д = 0,003\lambda_1 + 0,013009(-0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 +$$
$$+93,85) - 0,008999\lambda_4 + 0,8999 =$$
$$= -0,003683\lambda_1 - 0,0041598\lambda_4 - 0,006683\lambda_5 + 2,1203$$

	λ_1	λ_4	λ_5	β
λ_2	0,1712	-0,4573	0,1712	2,02
λ_3	-0,5137	0,372	-0,5137	93,85
$f_Д$	-0,003683	-0,0041598	-0,006683	2,1203

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все $\Delta \le 0$.

Итак $\lambda_2^* = 2,02$

$\lambda_3^* = 93,85$

$f^* = 2,1203$

$$\lambda_1^* = \frac{1}{3}(0,027\lambda_2^* + 0,022\lambda_3^* - f^*) = \frac{1}{3}(0,027 * 2,02 +$$
$$+0,022 * 93,85 - 2,1203) = 0$$

Найдем оптимальный план в исходной задаче с помощью уравнения:

$$\lambda_i^*(AX^* - B)_i = 0$$

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}02 \\ 93{,}85 \end{pmatrix} \; A = \begin{pmatrix} 0 & 0.001 \\ 0.003 & 0.00217 \\ 0.001 & 0.00267 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.027 \\ 0.022 \end{pmatrix}$$

Производим умножение матриц и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}006x_1^* + 0{,}0043x_2^* - 0{,}054 = 0 \\ 0{,}094x_1^* + 0{,}25x_2^* - 2{,}068 = 0 \end{cases}$$

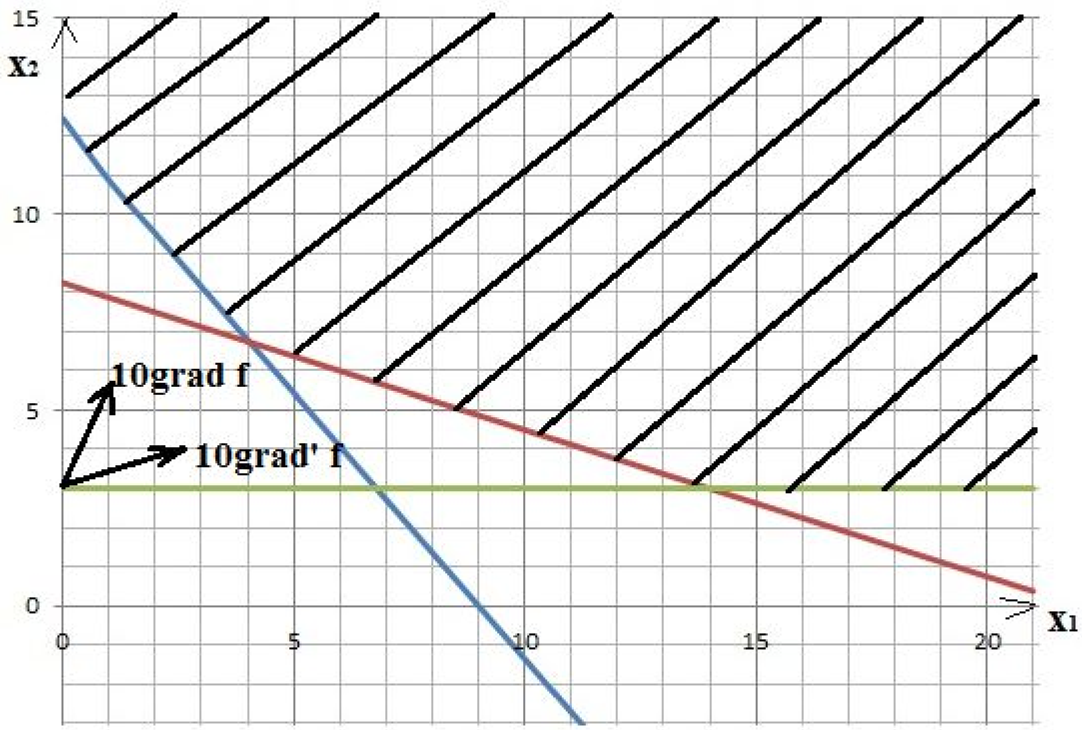
Из которой

$$X^* = \begin{pmatrix} 6.678 \\ 4.17 \end{pmatrix}$$

$f_{п}(x^*) = 0{,}1 * 4{,}17 + 0{,}255 * 6{,}678 = 2{,}11989 \approx 2{,}12$

Вывод: видим, что во всех трёх методах ответы совпадают.

VI. Найдем при какой цене на смесь 1 её будет невыгодно использовать в рационе.



Будем поворачивать градиент по часовой стрелке до тех пор, пока он не станет перпендикулярен прямой $3x_1+2{,}17x_2=27$. В случае, когда градиент перпендикулярен этой прямой, оптимальным решением будут являться все точки этой прямой, лежащие в G. Если мы будем поворачивать градиент дальше по часовой стрелке, то оптимальным решением будет $x_1^* = 0$, $x_2^* = 12{,}4424$, то есть смесь 1 будет невыгодно использовать в рационе.

Обозначим C_1^*- цена на смесь 1, выше которой её невыгодно будет использовать в рационе.

Тогда $grad'f = (C_1^*, 0{,}255)^T$ перпендикулярен прямой $3x_1+2{,}17x_2=27$ и параллелен вектору $\binom{3}{2{,}17}$. Тогда

$$\frac{C_1^*}{3} = \frac{0{,}255}{2{,}17} \qquad C_1^* = 0{,}3525$$

Таким образом если $C_1 > 0{,}3525$ р/кг, то смесь 1 невыгодно использовать в рационе.

Общий вывод: мы определили наиболее дешевый рацион, который состоит из 4,136 г. смеси 1 и 6,602 г. смеси 2 и нашли цену на смесь 1, при которой её будет невыгодно использовать в рационе.

Ответ: $x_1^* = 4{,}17$ г.

$x_2^* = 6{,}678$ г.

$f^* = 2{,}12$ руб.

$C_1^* = 0{,}3525$ руб.

$\lambda_1^* = 0$

$\lambda_2^* = 2{,}02$

$\lambda_3^* = 93{,}85$

$f_Д = 2{,}12$