Практическое занятие 1

Задача 1

Исследуйте поведение функции в точке x_0, используя производные высших порядков.

1. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x)$, $x_0 = 0$.
2. $y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x$, $x_0 = 1$.
3. $y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2$, $x_0 = 1$.
4. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}$, $x_0 = 2$.
5. $y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2)$, $x_0 = 2$.
6. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2)$, $x_0 = -2$.
7. $y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x)$, $x_0 = -1$.
8. $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 1$.
9. $y = 6x^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$, $x_0 = 2$.
10. $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$, $x_0 = -1$.
11. $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$, $x_0 = -1$.
12. $y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x$, $x_0 = -1$.
13. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$, $x_0 = 0$.
14. $y = 2e^{x-1} - 2\cos(x-1) - 2x(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3$, $x_0 = 1$.
15. $y = 4(x-1) - (x-1)^2 - 2\cos(x-3)$, $x_0 = 3$.
16. $y = 2e^x - 2\cos x - 2x(x+1) - \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 0$.
17. $y = 2\ln x + (x-2)^2$, $x_0 = 1$.
18. $y = 2e^x + 2\sin x - x^2 - 4x$, $x_0 = 0$.
19. $y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$, $x_0 = 2$.
20. $y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.
21. $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$, $x_0 = -2$.
22. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1)$, $x_0 = 1$.
23. $y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1$, $x_0 = 0$.
24. $y = 1 - 2x - x^2 + 2\cos(x+1)$, $x_0 = -1$.
25. $y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.
26. $y = x^2 + 2\ln(x+2)$, $x_0 = -1$.
27. $y = 6e^{x+1} - (x+1)^3 - 3(x+1)^2 - 6x + 1$, $x_0 = -1$.
28. $y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4$, $x_0 = -2$.
29. $y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x$, $x_0 = 1$.
30. $y = 4x - x^2 - 2\cos(x-2)$, $x_0 = 2$.

Задача 2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

1. $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$ при $x\in[-3;\ 4]$.
2. $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ при $x\in[-3;\ 3]$.
3. $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ при $x\in[-1;\ 5]$.
4. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ при $x\in[0;\ 1]$.
5. $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$ при $x\in[2;\ 4]$.
6. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x\in[-1;\ 6]$.
7. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ при $x\in[-2;\ 1]$.
8. $y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13$ при $x\in[2;\ 5]$.
9. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ при $x\in[0;\ 4]$.
10. $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$ при $x\in[-4;\ -1]$.
11. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ при $x\in[1;\ 5]$.
12. $y=\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{8}{x-2}+5$ при $x\in[-2;\ 1]$.
13. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x\in[-1;\ 3]$.

14. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ при $x \in [0;\ 4]$.

15. $y = x + 2\sqrt{x}$ при $x \in [0;\ 4]$.

16. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ при $x \in [-2;\ 2]$.

17. $y = \sqrt[3]{100 - x^2}$ при $x \in [-6;\ 8]$.

18. $y = \dfrac{10x}{1+x^2}$ при $x \in [0;\ 3]$.

19. $y = -\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$ при $x \in [-5;\ 1]$.

20. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$ при $x \in [-4;\ 2]$.

21. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$ при $x \in [-1;\ 7]$.

22. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ при $x \in [1;\ 5]$.

23. $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ при $x \in [-2;\ 1]$.

24. $y = \dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}$ при $x \in [1;\ 4]$.

25. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$ при $x \in [-1;\ 2]$.

26. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$ при $x \in [-3;\ 3]$.

27. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$ при $x \in [1;\ 9]$.

28. $y = 2\sqrt{x} - x$ при $x \in [0;\ 4]$.

29. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$ при $x \in [0;\ 6]$.

30. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$ при $x \in [1;\ 4]$.

Задача 3

Решить задачи

1.1. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна? (*Ответ*: $\sqrt{2}$.)

1.2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площадью так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма. (*Ответ*: $a/2$ и $a/(4\cos\alpha)$.)

1.3. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность. (*Ответ*: $H = 2R$.)

1.4. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим? (*Ответ*: $20\sqrt{3}/3$ см.)

1.5. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим? (*Ответ*: $p/2$.)

1.6. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R. (*Ответ*: $4R/3$.)

1.7. Проволокой, длина которой l м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей? (*Ответ*: $l/4$ м.)

1.8. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом a. (*Ответ*: a^2.)

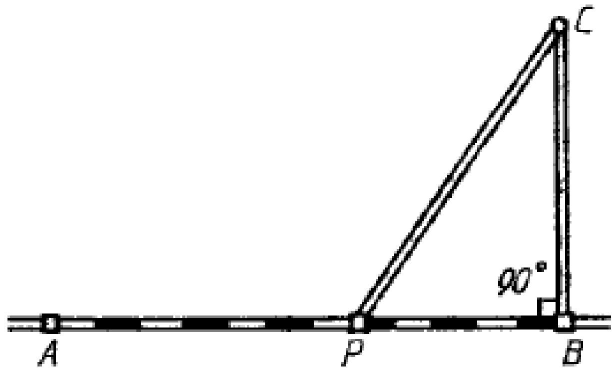
1.9. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки? (*Ответ*: длина балки $40/3$ м, сторона поперечного сечения $2\sqrt{2}/3$ м.)

1.10. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком — 5 км/ч, а на лодке — 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время? (*Ответ*: в 3 км от лагеря.)

1.11. Полоса жести шириной a, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей? (*Ответ*: $\varphi=\pi$.)

1.12. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? (Величина прогиба обратио пропорциональна произведению ширины b поперечного сечения и куба высоты h.) (*Ответ*: $b=d/2$, $h=d\sqrt{3}/2$.)

1.13. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1 км (AB) равна k_1 р., а автомобильной (PC) — k_2 р. ($k_1<k_2$). В каком месте P надо иачать строительство шоссе, чтобы возможно дешевле доставлять груз из пункта A в C? Известно, что $|AB|=a$, $|BC|=b$ $\left(\textit{Ответ}\text{: на расстоянии } a-\frac{k_1 b}{\sqrt{k_2^2-k_1^2}} \text{ от точки } A.\right)$



1.14. Человеку нужно добраться из пункта A, находящегося на одном берегу реки, в пункт B на другом ее берегу. Зная, что скорость движения по берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом человек должен пересечь реку, чтобы достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки h, расстояние между пунктами A и B (вдоль берега) равно a. (*Ответ*: $\max(\arccos(1/k), \operatorname{arctg}(h/a))$.)

1.15. На прямолинейном отрезке AB, соединяющем два источника света: A (силой p) и B (силой q), найти точку M, освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) $\left(\textit{Ответ}\text{: на расстоянии } \dfrac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}} \text{ от точки } A.\right)$

1.16. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещениость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) (*Ответ*: $r/\sqrt{2}$.)

1.17. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H, радиус основания R. (*Ответ*: радиус основания цилиндра $R/2$, высота $H/2$.)

1.18. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим? (*Ответ*: $2\pi\sqrt{2/3}$.)

1.19. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший. (*Ответ*: радиус основания конуса $\sqrt{\dfrac{S}{\pi\sqrt{3}}}$, высота $\sqrt{\dfrac{S(3\pi-1)}{\pi\sqrt{3}}}$.)

1.20. Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, от которой проложат шоссе к пункту B, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижения между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе — 20 км/ч. (*Ответ*: 25 км.)

1.21. Канал, ширина которого a м, под прямым углом впадает в другой канал шириной b м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов. (*Ответ*: $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ м.)

1.22. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом R. (*Ответ*: $8R$.)

1.23. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь ее будет наибольшей, если боковые стороны равны b, а меньшее основание a. (*Ответ*: $\cos\varphi = (\sqrt{a^2+8b^2}-a)/(4b)$.)

1.24. Из фигуры, ограниченной кривой $y=3\sqrt{x}$ и прямыми $x=4$, $y=0$, вырезать прямоугольник наибольшей площадью. (*Ответ*: $S=9{,}22$.)

1.25. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиусом R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какой должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем? (*Ответ*: $5R/3$.)

1.26. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V. Стоимость 1 м^2 материала, из которого изготавливается дно бака, составляет P_1 р., а стоимость 1 м^2 материала, идущего на стенки бака,— P_2 р. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальными? (*Ответ*: P_2/P_1.)

1.27. Сосуд с вертикальными стенками высотой H, наполненный невязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x — расстояние от отверстия до поверхности жидкости; g — ускорение свободного падения. (*Ответ*: на середине высоты H.)

1.28. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света? (*Ответ*: 2,1 м.)

1.29. На странице книги печатный текст занимает площадь S; ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого — b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей? (*Ответ*: b/a.)