Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Avanzadas

Análisis Complejo

Una Pequeña (Gran) Introducción

Autores:
Rosas Hernandez Oscar Andrés
Lopez Manriquez Angel

Índice general

Parte I

Números Complejos

Capítulo 1

Definiciones

1.1. Definición de Números Complejos

Definición 1.1.1 (Números Complejos) *Definamos al Conjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *como:*

$$\mathbb{C} = \left\{ \ a + bi \ \mid \ a, b \in \mathbb{R} \ \ y \ \ i = \sqrt{-1} \ \right\} \tag{1.1}$$

Podemos usar la notación $a + bi$, $a + ib$ y (a, b) de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool pero la ultima mas concreta).

1.2. Definiciones Utiles

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo i para simplificar $i = \sqrt{-1}$, de ahí la propiedad famosa $i^2 = -1$.
- **Parte Real:** Considere el complejo $z = a+bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Im(z) = b$

1.3. Repeticiones de i

- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n} = 1$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+1} = i$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+2} = -1$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+3} = -i$

1.4. Funciones Trigonometricos

1.4.1. Evaluación Rápida

- $\cos(n \cdot \theta) = \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$
- $\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$
- $\sin(n \cdot \theta) = 0$
- $\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right) \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$

1.4.2. Identidades Importantes

- **Pitagórica:** $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \cos(a)\sin(b) \pm \sin(a)\cos(b)$

Capítulo 2

Aritmética Compleja

2.1. Operaciones Básicas

Si $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ entonces:

- **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{2.1}$$

- **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \tag{2.2}$$

- **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \end{aligned} \tag{2.3}$$

- **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \qquad z_2 \neq 0 \tag{2.4}$$

2.2. Elemento Identidad

- Denotamos a $0 = 0 + 0i$ como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C},\ \ z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a $1 = 1 + 0i$ como el elemento identidad multiplicatica, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C},\ \ z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

2.3. Inverso Multiplicativo

Si $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{\ 0\ \}$ entonces podemos denotar al inverso de z como z^{-1}

Creo que es más que obvio que $z^{-1} = \dfrac{1}{a+bi}$.

Pero además podemos escribir a z^{-1} como $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

Demostración:

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right) = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Gracias a lo anterior podemos escribirlo de distintas maneras:

- **De forma Rectangular:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i \tag{2.5}$$

- **Con Magnitudes y Conjugados:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{2.6}$$

2.4. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

- **Definición 2.4.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \tag{2.7}$$

- **Definición 2.4.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{2.8}$$

- **Definición 2.4.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C},\ \ \forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \tag{2.9}$$

- **Definición 2.4.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ \exists z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \tag{2.10}$$

- **Definición 2.4.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \ z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1)\end{gathered} \tag{2.11}$$

- **Definición 2.4.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \tag{2.12}$$

- **Definición 2.4.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \tag{2.13}$$

- **Definición 2.4.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C},\ \ \forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \tag{2.14}$$

- **Definición 2.4.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\},\ \ \exists z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 1 \tag{2.15}$$

2.5. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ que lo definimos como: $\overline{z} = a - bi$

Usando la definición podemos demostrar algunas propiedades muy importantes:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$

  Demostración:

  Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} \qquad = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

  Ahora para la parte mas general:

  Creo que cuando $k = 1$ es demasiado sencillo hasta para escribirlo y lo que acabamos de demostrar es para cuando $k = 2$, por lo tanto lo único que tenemos que probar es que:

  Si $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}$ se cumple entonces también lo hará $\overline{z_1 + \cdots + z_{n+1}} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_{n+1}}$

  Lo cual se logra dandote cuenta que $z_a = \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}$. y dandote cuenta que volviste al caso de $k = 2$.

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \cdots \cdot \overline{z_n}$

  Demostración:

  Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 \cdot a_2 + ib_2} \qquad = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

  Ahora para la parte mas general se demuestra de manera casi identica a la propiedad pasada.

- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

  Demostración:

  Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$

  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z_1 \cdot \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i} \\ &= \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i\right] = \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) i\right] = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} \\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{aligned}$$

- $\overline{\overline{z}} = z$

  Demostración: $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a + bi$

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

  Demostración: $z \cdot \overline{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

- $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

  Demostración:

  Dado a $z = a + ib$

$$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2} &= \frac{(a+bi)+(a-bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a \\ &= Re(a+bi)\end{aligned}$$

- $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

  Demostración:

  Dado a $z = a + ib$

$$\begin{aligned}\frac{z-\overline{z}}{2i} &= \frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b \\ &= Im(a+bi)\end{aligned}$$

2.5.1. Coordenadas Conjugadas

Hay alguien que usando las propiedades de $a + ib$ donde tenemos que:

- $a = \frac{(z+\overline{z})}{2}$

- $b = \frac{(z-\overline{z})}{2i}$

Para hablar de coordenadas conjugadas a los que denominamos de manera similiar a las polares y rectanguales (que veremos mas a detalle en este libro):

- $z = (a, b)$
- $z = (r, \theta)$
- $z = (z, \overline{z})$

2.6. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que definir el Módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

  Demostración:

  Ya habiamos visto que $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

  Entonces podemos ver que $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)$ (recuerda que $Im(z)^2 > 0$) por lo tanto tenemos que $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Re(z)| = Re(z)$

  Entonces podemos ver que $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)$ (recuerda que $Re(z)^2 > 0$) por lo tanto tenemos que $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Im(z)| = Im(z)$

- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$

  Demostración:

  Ya sabemos que $|z + \overline{z}|^2 = z\overline{z}$ y recuerda que $2Re(z) = z + \overline{z}$, $|z|^2 = z\overline{z}$ entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\bar{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + z_2\overline{z_2} \\
&= z_1\bar{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2
\end{aligned}
$$

- $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$

  Demostración:

  Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que $|z| = |\overline{z}|$:

$$
\begin{aligned}
|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}
$$

- **Desigualdad del Triangulo:** $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

  Demostración:

  Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al réves:

  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ y además $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$ lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

  Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$ donde $k \geq 0$.

  Ya sabemos que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$ y $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$, ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

  Ahora veamos que:

  $$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= \left[|z_1|^2 + |z_2|^2\right] + 2Re(z_1\overline{z_2}) = \left[(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}|\right] + 2Re(z_1\overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

  Donde $k = 2Re(z_1\overline{z_2}) - 2|z_1\overline{z_2}|$, ahora además podemos decir que si $k \geq 0$ entonces así lo será $\frac{k}{2}$, por lo tanto: $\frac{k}{2} = Re(z_1\overline{z_2}) - |z_1\overline{z_2}|$, pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica $w = z_1\overline{z_2}$ y tenemos que $Re(w) - |w|$. Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que $|Re(z)| \leq |z|$, así que por lo tanto $k \geq 0$ y la propiedad siempre se cumple.

  Sabemos que $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ además ahora sabemos que: $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$ y como $|z| = |-z|$ Que es lo mismo que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

  Y listo, todas las propiedades están listas.

  Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que:
  $|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

  Demostración:

  Recuerda que: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ Entonces $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1}\ \overline{z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \overline{z_2}} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

- $\left| \left(\dfrac{z_1}{z_2} \right) \right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

  Demostración:

  Usando la idea de que: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right| &= \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right| \\ &= |z_1| \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)} \\ &= |z_1| \, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \, \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \cdot \frac{1}{|a + bi|} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

2.7. Producto Punto y Cruz

2.7.1. Producto Punto

De manera muy parecido a como definimos el producto punto entre dos vectores, podemos definir el producto punto entre dos números complejos como:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2) + (b_1 b_2) = |z_1||z_2| \cos(\theta) \tag{2.16}$$

Donde θ es el angulo más pequeño entre dichos números.

2.7.2. Producto Punto

De manera muy parecido a como definimos el producto cruz entre dos vectores, podemos definir el producto cruz entre dos números complejos como:

$$z_1 \times z_2 = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{2.17}$$

Nota que dicho "vector" es perpendicular al plano complejo.

Pero generalmente lo que nos importa es su magnitud, que recuerda que se puede entender como el área del paralelogramo formado por esos dos números.

Lo entendemos como:

$$|z_1 \times z_2| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = |z_1||z_2| \sin(\theta) \tag{2.18}$$

Donde θ es el angulo más pequeño entre dichos números.

Capítulo 3

Forma Polar y Argumentos

3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ esta medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como (r, θ), donde $r \geq 0$ y θ medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r\cos(\theta)$
- $b = r\sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como $(a + bi)$, entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan(\frac{b}{a})^{-1} & \text{si } a > 0 \\ \tan(\frac{b}{a})^{-1} + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan(\frac{b}{a})^{-1} - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

3.2. Argumento de z

Definimos al argumento de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $\theta = arg(z)$, es decir, al final del día $arg(z)$ es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

- $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Pero como sin y cos con funciones periodicas con 2π, es decir $arg(z)$ no es único.

Además para encontrarlo usamos $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$ pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

Argumento Principal

Ya que $arg(z)$ es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de z como $Arg(z)$ y que será el ángulo que cumpla con que:

- $\cos(Arg(z)) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $\sin(Arg(z)) = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $-\frac{\pi}{2} < Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$

Podemos probar que $Arg(z)$ para alguna z cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a $arg(z)$ como:

$$arg(z) = \{ \ Arg(z) + 2n\pi \ \mid \ n \in \mathbb{Z} \ \} \tag{3.1}$$

3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como $z_1 = (r_1, \theta_1)$ y $z_1 = (r_2, \theta_2)$ es decir $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)$ entonces tenemos que:

- **Producto de Números Complejos:**
  $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$

  Demostración:

  Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))i]$$

  Usando las leyes de senos y cosenos:

  - $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

  Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

- **División de Números Complejos:**
  $\frac{z_1}{z_2} = [(\frac{r_1}{r_2}), (\theta_1 - \theta_2)]$

  Demostración:

  Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ y hacer:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\overline{z_2}}{(r_2)^2} \\
&= \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \overline{z_2} = \frac{1}{(r_2)^2}(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\
&= \frac{1}{(r_2)^2}(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i \\
&= \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))i]
\end{aligned}$$

  Usando las leyes de senos y cosenos:

  - $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

  Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

- **Simplificar Potencias de z:**

  $z^n = [(r^n), (n \cdot \theta)]$

  Ideas:

  No considero a esto una demostración, por basta con darte cuenta que z^n es $z \cdot z \cdot z \dots$ n veces.

  Por lo tanto puedes aplicar la regla: $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$ que ya que $z_1 = z_2$ se puede simplificar a $z \cdot z = [2r, 2\theta]$.

  Y llegar a ese resultado mediante la inducción.

3.4. Ley de Moivre's

$z^n = r^n (\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta)) \quad$ donde $n \in \mathbb{Z}$

Demostración:

Se puede dar una demostracion muy sencilla, no se porque los libros usan induccion matematica para demostrar el teorema de Moivre...

En fin, expresando a z en su forma polar y usando la fórmula de Euler, tenemos:

$$\begin{aligned}
z^n &= (a + bi)^n \\
&= [r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^n \\
&= r^n (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\
&= r^n \left(e^{\theta i}\right)^n \\
&= r^n e^{(\theta i)n} \\
&= r^n e^{(n\theta)i} \\
&= r^n (\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta))
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Forma Exponencial ó de Euler

4.1. Forma de Euler

Podemos también expresar un número complejo de la siguiente manera:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \tag{4.1}$$

Ideas:

Esta fórmula sale de a partir de las Series de Taylor para la función exponencial:

$$e^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots \tag{4.2}$$

Pasa algo muy interesante al hacer $k = i\theta$, pues vemos que aparecen claramente la forma en que tenemos de representar a las funciones seno y coseno como polinomios infinitos:

- $\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!}$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^5}{5!} \cdots\right) + \left(-\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} \cdots\right) i \\ &= \cos(\theta) \qquad\qquad\qquad\qquad + \sin(\theta)\, i \end{aligned}$$

4.1.1. e^z

También podemos ver más generalmente que e^z se puede reducir a:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)) = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

4.1.2. Lemmas y Propiedades

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] + [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]}{2} && \text{Tip: } \cos(\theta) = \cos(-\theta) \text{ y } \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \\
&= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} && \text{Y si simplificamos} \\
&= \frac{2\cos(\theta)}{2} \\
&= \cos(\theta)
\end{aligned}
$$

- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] - [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]}{2} && \text{Tip: } \cos(\theta) = \cos(-\theta) \text{ y } \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \\
&= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2} && \text{Y si simplificamos} \\
&= \frac{2i\sin(\theta)}{2i} \\
&= \sin(\theta)
\end{aligned}
$$

4.2. Identidad de Lagrange

$$1 + \cos(1\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} + 1\right) \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) && \text{Recuerda que: } \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+1)i\theta}-1}{e^{i\theta}-1} + \frac{e^{(n+1)-i\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\right) && \text{Recuerda que: } \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+1)i\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) + \frac{e^{(n+1)-i\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\left(\frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}}\right)\right) && \text{Multiplica por Uno ;)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) && \text{Expande} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) && \text{Organizando, gracias denominador común} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} + 1\right) && \text{Simplificar} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} + 1\right) && \text{Añadimos esto} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} + 1\right) && \text{Recuerda que } \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Ecuaciones y Raíces

5.1. n-Raíces de un Numero Complejo

En general decir que un número w es un raíz enesíma de un número complejo $z \in \mathbb{C} - \{ \ 0 \ \}$ es que cumple que:

$$w^n = z$$

Donde obviamente $n \in \mathbb{Z}^+$.

5.1.1. Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 5.1.1 *Teorema Fundamental del Álgebra Todo polinomio de grado n tiene mínimo 1 raíz*

No desmotraremos este asombroso teorema por ahora, pero si un colorario (específicamente) en el campo de los complejos: "Un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces".

5.1.2. Encontrar las Raíces de un Número Complejo

Teorema 5.1.2 *Existen exactamente n raíces para $w^n = z$ donde $w, z \in \mathbb{C}$*

Suponiendo a $z = (r, \theta)$ entonces las podemos encontrar tan fácil como:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5.1}$$

Demostración:

Tengamos dos números: $z = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$ y $w = p\left[\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right]$

Entonces de la ecuación decir $w^n = z$ es lo mismo que decir que:

$$\left(p\left[\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right]\right)^n = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$$
$$p^n\left[\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right]^n = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$$

De esta ecuación tenemos que:

- $p^n = r$

  Por lo tanto podemos definir a $p = \sqrt{r}$ donde $\sqrt{r}$ es la raíz enesíma del módulo de dicho número.

- $\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$

  Gracias a $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ Por lo tanto podemos decir que:

  - $\cos(n\theta) = \cos(\phi)$
  - $\sin(n\theta) = \sin(\phi)$

  Y gracias a que ambas funciones son periodicas cada 2π, por lo tanto:

  - $\sin(\phi) = \sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$
  - $\cos(\phi) = \cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$

Y finalmente podemos generalizar los resultados como:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)\right] \tag{5.2}$$

Parte II

Funciones Complejas

Capítulo 6

Funciones Complejas

6.1. Funciones en General

Una función compleja es aquella que toma un número complejo y regresa otro número complejo es decir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Podemos decir entonces que bajo una función compleja f dada un número z este será "mapeado" a w.

$$
\begin{aligned}
z &\xrightarrow{f(z)} w \\
x + yi &\xrightarrow{f(z)} u + iv
\end{aligned}
$$

Si te das cuenta podemos ver que tanto la parte imaginaria de w (v) como su parte real (u) depende de los valores de x, y por lo tanto podemos verlas como funciones multivariables, por lo tanto tenemos que:

Cualquier función compleja $w = f(z)$ puede ser representada como:

$$f(z) = f(x + yi) = u_{(x,y)} + iv_{(x,y)} \qquad \text{donde } x, y \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$

Ahora que las hemos definido formalmente podemos mostar las funciones complejas mas famosas.

6.2. Funciones Hiperbolicas $cosh(x)$ y $senh(x)$

A ver, antes que nada, estas no son funciones complejas en si, pero nos van a servir mucho.

Recuerda que dijimos que:

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\begin{aligned}
cos(ix) &= \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} \\
&= \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} \\
&= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\
&= cosh(x)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
sen(ix) &= \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} \\
&= \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} \\
&= \frac{-1}{2i} e^{x} - e^{-x} \\
&= \frac{i}{2} e^{x} - e^{-x} \\
&= i \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \right) \\
&= i \cdot senh(x)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Estas funciones tiene unas propiedades bien locas como:

- $sinh(x)^2 + cosh(x)^2 = 1$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
cosh(x)^2 - sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{4}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) + \left(\frac{-e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + -e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{4}{4}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

6.3. Trigonometricas Complejas: $cos(z)$ y $sin(z)$

$$
\begin{aligned}
cos(a + bi) &= cos(a)cos(bi) - sen(a)sen(bi) \\
&= cos(a)cosh(b) - i(sen(a)senh(b))
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

$$
\begin{aligned}
sin(a + bi) &= sin(a)cos(bi) + cos(a)sen(bi) \\
&= sin(a)cosh(b) + i(cos(a)senh(i))
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

6.4. Funciones e^z y $Ln(z)$

La función exponencial es demasiado sencilla de definir:

$$\begin{aligned} e^{a+bi} &= e^a e^{bi} \\ &= e^a \cos(b) + i \sin(b) \\ &= e^a \cos(b) + ie^a \sin(b) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Vamos a definir de manera completamente arbitraria al logaritmo de un número complejo:

$$Ln(z) = ln(|z|) + iArg(z) \tag{6.7}$$

Esta definición nos permite que esta nueva función herede las propiedades comunes del logaritmo.

6.5. $z_1^{z_2}$

Gracias a la definición podemos definir esta operación como:

$$\begin{aligned} z_1^{z_2} &= (z_1)^a + (z_2)^{bi} \\ &= (z_1)^a e^{Ln(z_2^{bi})} \\ &= (z_1)^a e^{bi \cdot Ln(z_2)} \end{aligned}$$

Capítulo 7

Límites

7.1. Límites en Cálculo Real

Antes de empezar a hablar sobre como podemos definir el límite en el campo de los complejos, veamos como llegamos a esa definición en los números reales.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{7.1}$$

De manera completamente informal podemos decir que el Límite de arriba es cierto si cuando $f(x)$ se acerca a L, x se acerca a a.

Es decir, si se acerca, la distancia entre $f(x)$ y L y x y a cada vez se va haciendo más pequeña, lo cuando lo podemos añadir para hacer a la definición más precisa.

Límite: $|f(x) - L|$ se hace casi cero cuando $|x - a|$ se acerca a cero.

Ahora simplemente vamos a formalizar lo que significa pequeño:

- δ hablará de lo pequeño que será $|x - a|$
- ϵ hablará de lo pequeño que será $|f(x) - L|$

Por lo tanto estamos listo para la definición formal en todo su esplendor:

7.1.1. Definición Formal

- En forma geométrica, si a es un punto en la recta númerica, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee al eligir puntos lo bastante cercanos a a (excluyendo a $x = a$).
- Se dice que un número L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a si para todo número positivo ϵ (tan pequeño como se desee) se halla un número positivo δ (que por lo general depende de ϵ) tal que si$0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.
- Decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

Capítulo 8

Derivación

8.1. Funciones Analíticas

Eventualmente nuestra meta con estas funciones complejas es hacer calculo con ellas, es derivarlas e integrarlas (en especial integrales de contorno o de línea), hacer un montón de cosas locas, y para poder hacer todo eso tendremos que hacer que nuestra funciones se porten bien, es decir que sean diferenciables, que sus derivadas esten definidas y que sean continuas.

Si recuerdas de Análisis Real teníamos que para que una función fuera continua ambos límites, tanto por la derecha como por la izquierda tenian que existir y ser iguales.

Ahora bien, con las funciones complejas la restricción es mucho mas fuerte pues no solo nos podemos acercar por la derecha o por la izquierda, sino que por todos lados.

Despúes veremos que hay algo llamado las Ecuaciones de Cauchy Riemann que nos hablan mucho de si una función es analítica o no.

8.2. Continuidad

Decimos que una función $f(z)$ es continua en un punto si y solo si:

- La función $f(z)$ tiene que estar valuado en z_0
- El $\lim_{z \to z_0} f(z)$ tiene que existir
- Sin importar desde donde te aproximes los límites existen y son iguales

8.3. Definición Formal

Podemos definir formalmente a nuestra derivada de una manera muy sencilla:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \end{aligned} \tag{8.1}$$

8.4. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en Rectangular

Recuerda que el hecho de que una función $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ sea diferenciable nos da grandes restricciones sobre como son $u(x, y), v(x, y)$, veamos que dichas restricciones salen de la misma definición:

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x\Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}
\end{aligned}
$$

Además sabemos que si es diferenciable, los límites tiene que coincidir sin importar de por donde nos acercamos al valor, por lo tanto tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x\Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right]
\end{aligned}
$$

Y si te das cuentas, estos dos límites estan mostrando derivadas parciales, así que al igualar ambas tenemos que:

$$
\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}
$$

Por lo tanto podemos comparar la parte real e imaginaria como:

- $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$

Estas son conocidas como las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por lo tanto formalizamos como que una condición necesaria para que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región es que cumplan las Ecucaciones de Cauchy-Riemann.

8.5. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en Forma Polar

8.5.1. Demostración usando Rectangular

Sea una función $f(r,\theta) = u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ ananlítica, entonces se satisface las ecuaciones en forma rectangular:

- $\dfrac{\partial\, u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial\, v(x,y)}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial\, u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial\, v(x,y)}{\partial x}$

Y dado que $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, entonces:

- $r(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\theta(x,y) = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

y también tenemos que:

- $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$
- $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$

Ahora, hay que demostrar estas 4 ecuaciones:

$$\frac{\partial\, r}{\partial x} = \cos(\theta) \qquad \frac{\partial\, r}{\partial y} = \sin(\theta) \qquad \frac{\partial\, \theta}{\partial x} = \frac{-\sin(\theta)}{r} \qquad \frac{\partial\, \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, r}{\partial x} &= \frac{\partial\ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(2x) \\
&= x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\cos(\theta)\left(r^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\cos(\theta)\, r^{-1} \\
&= \cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, r}{\partial y} &= \frac{\partial\ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(2y) \\
&= y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\sin(\theta)\left(r^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\sin(\theta)\, r^{-1} \\
&= \sin(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \theta}{\partial x} &= \frac{\partial\ arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{-y}{x^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{-y}{x^2} \\
&= \frac{-y}{y^2+x^2} \\
&= \frac{-r\sin(\theta)}{r^2} \\
&= \frac{-\sin(\theta)}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \theta}{\partial y} &= \frac{\partial\ arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x}{y^2+x^2} \\
&= \frac{r\cos(\theta)}{r^2} \\
&= \frac{\cos(\theta)}{r}
\end{aligned}$$

Entonces usando la gran regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, u(r,\theta)}{\partial x} &= \frac{\partial\, u}{\partial r}\frac{\partial\, r}{\partial x} + \frac{\partial\, u}{\partial \theta}\frac{\partial\, \theta}{\partial x} && \text{Regla de la Cadena} \\
&= \frac{\partial\, u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial\, u}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r} && \text{Sustituyendo}
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, v(r,\theta)}{\partial y} &= \frac{\partial\, v}{\partial r}\frac{\partial\, r}{\partial y} + \frac{\partial\, v}{\partial \theta}\frac{\partial\, \theta}{\partial y} && \text{Regla de la Cadena} \\
&= \frac{\partial\, u}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{\partial\, u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r} && \text{Sustituyendo}
\end{aligned}$$

Ahora de las ecuaciones de Cauchy - Riemann tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\, u}{\partial x} - \frac{\partial\, v}{\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial\, u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial\, u}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r}\right) - \left(\frac{\partial\, u}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{\partial\, u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right) \\
&= \cos(\theta)\left(\frac{\partial\, u}{\partial r} - \frac{\partial\, v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\right) + \sin(\theta)\left(-\frac{\partial\, u}{\partial \theta} - \frac{\partial\, v}{\partial r}\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

Y ya que $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ son linealmente independientes (si no me creen intenten hacer el Wroksiano, porque yo no lo intentaré) tenemos que todo lo que las multiplique tiene que ser cero, es decir:

Tenemos que $0 = \frac{\partial\, u}{\partial r} - \frac{\partial\, v}{\partial \theta}\frac{1}{r}$ por lo que un simple despeje tenemos que: $\frac{\partial\, u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\, v}{\partial \theta}$

Tenemos que $0 = -\frac{\partial\, u}{\partial \theta} - \frac{\partial\, v}{\partial r}\frac{1}{r}$ por lo que un simple despeje tenemos que: $\frac{\partial\, u}{\partial \theta} = \frac{-1}{r}\frac{\partial\, v}{\partial r}$

Por lo tanto tenemos que:

- $\frac{\partial\, u}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, v}{\partial \theta}\right)$
- $\frac{\partial\, v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial\, u}{\partial \theta}\right)$

8.5.2. Comprobación usando Rectangular

Sea una función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica, entonces se satisface las ecuaciones en forma rectangular:

- $\dfrac{\partial\, u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial\, v(x,y)}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial\, u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial\, v(x,y)}{\partial x}$

Y dado que $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, entonces:

- $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$
- $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$

Entonces usando la gran regla de la cadena tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\, u}{\partial r} &= \frac{\partial\, u}{\partial x}\frac{\partial\, x}{\partial r} + \frac{\partial\, u}{\partial y}\frac{\partial\, y}{\partial r} && \text{Regla de la Cadena} \\
&= \frac{\partial\, u}{\partial x}\frac{\partial\, r\cos(\theta)}{\partial r} + \frac{\partial\, u}{\partial y}\frac{\partial\, r\sin(\theta)}{\partial r} && \text{Expandamos} \\
&= \frac{\partial\, u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial\, u}{\partial y}\sin(\theta) && \text{Resolvemos} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, u}{\partial x} r\cos(\theta) + \frac{\partial\, u}{\partial y} r\sin(\theta)\right) && \text{Creamos una r mágica} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, v}{\partial y} r\cos(\theta) - \frac{\partial\, v}{\partial x} r\sin(\theta)\right) && \text{Usando Cauchy - Riemann} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, v}{\partial x} - r\sin(\theta) + \frac{\partial\, v}{\partial y} r\cos(\theta)\right) && \text{Reordenamos} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, v}{\partial x}\frac{\partial\, x}{\partial \theta} + \frac{\partial\, v}{\partial y}\frac{\partial\, y}{\partial \theta}\right) && \text{Ve que son iguales} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, v}{\partial \theta}\right) && \text{Regla de la Cadena a la inversa}
\end{aligned}
$$

De manera analoga tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} && \text{Regla de la Cadena} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial r\cos(\theta)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial r\sin(\theta)}{\partial r} && \text{Expandamos} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\sin(\theta) && \text{Resolvemos} \\
&= \frac{-1}{r}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} r\cos(\theta) - \frac{\partial v}{\partial y} r\sin(\theta)\right) && \text{Creamos una r mágica} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y} r\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial x} r\sin(\theta)\right) && \text{Usando Cauchy - Riemann} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos(\theta)\right) && \text{Reordenamos} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) && \text{Ve que son iguales} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) && \text{Regla de la Cadena a la inversa}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que:

- $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\right)$
- $\dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{-1}{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

8.6. Funciones Analíticas y Cauchy - Riemann

Recapitulemos todo lo que hemos visto de las ecuaciones de Cauchy - Riemann usando estos dos teoremas:

Teorema 8.6.1 *Si $f(z) = u_{(x,y)} + iv_{(x,y)}$ es analítica en una región R entonces se satisface estas ecuaciones dentro de R.*

$$\frac{\partial\, u_{(x,y)}}{\partial x} = \frac{\partial\, v_{(x,y)}}{\partial y} \qquad \frac{\partial\, u_{(x,y)}}{\partial y} = -\frac{\partial\, v_{(x,y)}}{\partial x}$$

Por otro lado también tenemos que:

Teorema 8.6.2 *Si las siguientes condiciones se cumplen en una región R entonces la función es analítica.*

- *Todas las derividas parciales existen y son continuas*

  $$\frac{\partial\, u}{\partial x} \quad \frac{\partial\, u}{\partial y} \qquad \frac{\partial\, v}{\partial x} \quad \frac{\partial\, v}{\partial y}$$

- *Satisfacen las Relaciones de Cauchy Riemann:*

  $$\frac{\partial\, u_{(x,y)}}{\partial x} = \frac{\partial\, v_{(x,y)}}{\partial y} \qquad \frac{\partial\, u_{(x,y)}}{\partial y} = -\frac{\partial\, v_{(x,y)}}{\partial x}$$

8.7. Funciones Armonicas y Ecuaciones de Laplace

Teorema 8.7.1 *Si $f(z) = u_{(x,y)} + iv_{(x,y)}$ es analítica en una región R entonces se satisface estas ecuaciones dentro de R.*

$$\nabla^2 u_{(x,y)} = 0 \;\; y \;\; \nabla^2 v_{(x,y)} = 0$$

Este Teorema sale simplemente derivando las Ecuaciones de Cauchy - Riemann y haciendo un poco de algebra.

Debido a que $u_{(x,y)}, v_{(x,y)}$ satisfacen la Ecuación de Laplace tenemos que son consideradas funciones armonicas.

Capítulo 9

Integración

9.1. Integrales Complejas

Supongamos que tenemos una función $f(z)$ si queremos integrarla desde un punto complejo a hasta otro punto complejo b.

Si estuvieramos hablando de una simple integral en los números reales entonces tenemos que basta con recorrer la recta númerica desde a hasta b.

Pero ¡Sorpresa! Eso no se puede hacer con una integral compleja porque ya que son efectivamente números en dos dimensiones, no hay un camino para llegar, sino una infinidad de caminos.

Y el gran problema es que cada camino podría darte un valor diferente al momento de calcular la integral.

Así que para integrar una función compleja es necesario que me digas cual será la curva por la cual integraremos dicha función, debido a esto hay grandes relaciones sobre como funciona una integral compleja y una integral de línea.

Esto se debe basicamente a que los números complejos no viven en una línea, una recta númerica, sino en todo un plano complejo.

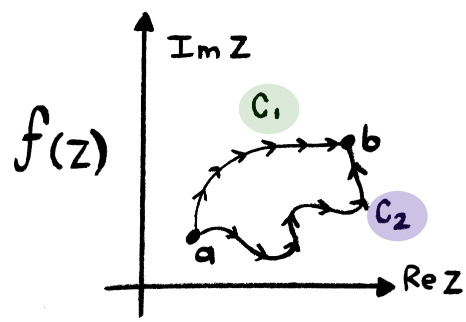

Figura 9.1: ¿Qué camino sigo? C_1 ó C_2

9.1.1. Calcular un Integral Compleja sobre C

Supongamos que tenemos una función $f(z) = u_{(x,y)} + iv_{(x,y)}$ sobre una curva arbitraria $\mathcal{C}$ desde el punto a hasta b

Supongamos que dicha curva se puede expresar usando ecuaciones parametricas de tal manera que x, y son funciones de un párametro t tal que así: $x(t)$ y $y(t)$.

Entonces tenemos que podemos expresar a a y a b como:

- $a = x(\alpha) + iy(\alpha)$
- $b = x(\beta) + iy(\beta)$

Entonces ya podemos definir lo que significa una integral compleja:

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C f(x+iy)(dx+idy) \\
&= \int_C (u+iv)(dx+idy) \\
&= \int_C udx - vdy + i\int_c vdx + udy
\end{aligned}
$$

Apliquemos un cambio de variable: $dx = \frac{dx}{dt}dt$ y $dy = \frac{dy}{dt}dt$

Por lo tanto finalmento podemos decir que:

$$
\begin{aligned}
\int_c f(z)dz &= \int_\alpha^\beta u\frac{dx}{dt}dt - v\frac{dy}{dt}dt + i\int_\alpha^\beta v\frac{dx}{dt}dt + u\frac{dy}{dt}dt \\
&= \int_\alpha^\beta u_{(x,y)}x'(t)dt - v_{(x,y)}y'(t)dt + i\int_\alpha^\beta v_{(x,y)}x'(t)dt + u_{(x,y)}y'(t)dt
\end{aligned}
$$

9.1.2. Parametrización

Otra forma complemente igual de valida es no parametrizar las funciones en parte real e imaginaria.

Entonces podemos defininir $\int_c f(z)dz$ para cualquier curva cerrada. Si C esta parametrizada por $r(t),\ a \leq t \leq b$ tenemos que podemos ver a $r'(t)$ como una curva compleja y:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(r(t))\ r'(t)\ dt$$

O también es común ponerlo como:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\ z'(t)\ dt$$

9.2. Integrales Bonitas: Antiderivadas

Ya que hemos aprendido todo esto sobre las integrales podemos ver que el hecho de parametrizar simplifica enormemente todo el trabajo que tenemos que hacer sobre las mismas, llegando a esto tan bonito:

Sea $z(t) = x(t) + iy(t)$ entonces suponiendo que sean continuas en $[a, b]$ tenemos que:

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^b (x(t) + iy(t))dt = \int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt$$

9.3. Teorema de la Deformación

Sea Γ y γ dos trayectorias cerradas en una región del plano R con γ en el interior de Γ.

Sea $f(z)$ una función diferenciable en un conjunto abierta que contiene ambas trayectorias y todos los puntos entre ellas, entonces:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz$$

9.4. Teorema de Cauchy-Goursat

Si $f(z)$ es analítica y estamos hablando de una curva simple, es decir en la que no se cruza consigo mismo, entonces tenemos que:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Ideas:

Antes que hablar de la demostración del Teorema tenemos que recordar lo que significa que una Región R sea simplemente conexa.

"Un Región R es simplemente conexa si cada curva simple en R es la frontera de una región contenida en R"

De esto podemos ver que por ejemplo el disco $\{\ z \in \mathbb{C},\ \mid\ |z| < 1\ \}$ es simplemente conexo, pero el anillo $\{\ z \in \mathbb{C},\ \mid\ 1 < |z| < 1\ \}$ no lo es.

Usando el Teorema de Green:

Supongamos que C es un curva simple cerrada que esta limitada por D entonces si queremos aplicar el Teorema de Green a la integral: $\int_C f(z)dz$ ya que tenemos que:

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy)$$

Entonces podemos ver que:

$$\int_C f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial\, v}{\partial x} - \frac{\partial\, u}{\partial y}\right) dA + i \iint_D \left(\frac{\partial\, u}{\partial x} - \frac{\partial\, v}{\partial y}\right) dA$$

Entonces el integrando será siempre cero si y solo si las ecuaciones de Cauchy Riemann se mantienen.

9.5. Teorema de la Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre la frontera de $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es cerrada y simplemente conexa en una región R, entonces tenemos si a pertenece a la región R se cumple que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Pero esta no es la forma en la que comunmente la usamos, sino que la usamos como un pequeño truco para poder calcular algunas integrales, esto lo escribimos entonces así:

$$2\pi i \; f(a) = \oint_C \frac{f(z)dz}{z-a}$$

9.5.1. Teorema de Integral vs Formula de la Integral

Consideremos un ejemplo que creo que pone todo mas claro, supon la función $f(z) = z^2 + z + 1$ a lo largo de el circulo unitario.

Por lo tanto tenemos que:

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} (e^{2it} + e^{it} + 1)ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} (e^{3it} + e^{2it} + e^{it})dt$$

Creo que es muy sencillo ver que esta integral será cero, porque el periodo de el seno y coseno es 2π, por lo tanto al momento de evaluar todo se cancela.

Pero por otro lado imagina:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it})ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

¿Pero porque no dio cero?

Porque $\frac{1}{z}$ es analítica en la región $\mathbb{C} - \{\ 0\ \}$ pero vimos que esta región no es simplemente conexa, por lo tanto no podemos aplicar el Teorema de Cauchy.

9.5.2. Ejemplos

Sea la curva aquella descrita por el circulo $|z+1| = \frac{1}{2}$ calcule:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)}$$

Solución:

Simplemente tenemos que darnos cuenta que el punto de indeterminación de nuestra integral es $z = 0$ y $z = -1$, ahora, si te das cuenta podemos poner nuestra integral como:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z-(-1))}$$

Entonces podemos separarlo como:

- $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$
- $a = -1$
- $f(a) = \dfrac{1}{(-1)^2} = \dfrac{1}{1} = 1$

Por lo tanto:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)} = 2\pi i \, f(a) = 2\pi i$$

9.6. Teorema de Cauchy de Derivación de Orden Superior

Sea $f(z)$ diferenciable en un conjunto G entonces $f(z)$ tiene derivadas de todos los ordenes en cada punto de G, más aún si C es una trayectoria cerrada en G que encierra unicamente puntos de G, en particular a z_0 tenemos que:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Pero esta no es la forma en la que comunmente la usamos, sino que la usamos como un pequeño truco para poder calcular algunas integrales, esto lo escribimos entonces así:

$$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

9.6.1. Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la curva aquella descrita por el circulo $|z| = \frac{1}{2}$ calcule:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)}$$

Solución:

Simplemente tenemos que darnos cuenta que el punto de indeterminación de nuestra integral es $z = 0$ y $z = -1$, ahora, si te das cuenta podemos poner nuestra integral como:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)}$$

Entonces podemos separarlo como:

- $n = 1$
- $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$
- $f'(z) = -\dfrac{1}{(z+1)^2}$
- $z_0 = 0$
- $f'(z_0) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$

Por lo tanto:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = (2\pi i) - 1 = -2\pi i$$

Ejemplo 2

Sea la curva aquella descrita por el circulo $|z| = 3$ calcule:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)}$$

Solución:

Ya que nuestra curva encierra a ambos puntos de indeterminación tenemos que separarla:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{z^2(z+1)} &= \frac{Az+B}{z^2} + \frac{C}{z+1} \\
1 &= (Az+B)(z+1) + z^2(C) \\
1 &= Az^2 + Bz + Az + B + Cz^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$A + C = 0 \qquad A + B = 0 \qquad B = 1$$

Es decir:

$$A = -1 \qquad B = 1 \qquad C = 1$$

Entonces podemos separarlo como:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)} &= \oint_C \frac{Az+B}{z^2} dz + \oint_C \frac{C}{z+1} dz \\
&= \oint_C \frac{-(z)dz}{z^2} + \oint_C \frac{dz}{z^2} + \oint_C \frac{dz}{z+1} \\
&= \oint_C \frac{-dz}{z} + \oint_C \frac{dz}{z^2} + \oint_C \frac{dz}{z+1}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a ir resolviendo una por una:

- La primera se puede resolver con la Teorema de la Integral de Cauchy pues tenemos que:
  - $f(z) = -1$
  - $f(0) = -1$

  Por lo tanto:

  $$\oint_C \frac{-dz}{z} = 2\pi i f(0) = -2\pi i$$

- La segunda se puede resolver con la Teorema de Derivación Superior pues tenemos que:
  - $f(z) = 1$
  - $f'(z) = 0$

  Por lo tanto:

  $$\oint_C \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi i}{n!} 0 = 0$$

- La tercera se puede resolver con la Teorema de la Integral de Cauchy pues tenemos que:
  - $f(z) = 1$
  - $f(-1) = 1$

  Por lo tanto:

  $$\oint_C \frac{dz}{z+1} = 2\pi i f(-1) = 2\pi i$$

Finalmente tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{dz}{z^2(z+1)} &= \oint_C \frac{-dz}{z} + \oint_C \frac{dz}{z^2} + \oint_C \frac{dz}{z+1} \\
&= -2\pi i \quad + 0 \qquad + 2\pi i \\
&= 0
\end{aligned}$$

Parte III

Series Complejas y Residuos

Capítulo 10

Series Complejas

10.1. Serie Geométrica

Si $|z| < 1$ entonces la Serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} az^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} az^k = a + az + az^2 + az^3 + \dots$$

Converge a $\dfrac{a}{1-z}$

Demostración:

Ahora podemos encontrar una expresión para la suma parcial S_n como:
$S_n = a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n-1}$.

Ahora el gran truco para poder evaluar más sencillo S_n lo que podemos hacer es:

$$\begin{aligned}
S_n &= a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n-1} \\
zS_n &= az + az^2 + az^3 + az^4 + \cdots + az^n \\
S_n - zS_n &= (a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n-1}) - (az + az^2 + az^3 + az^4 + \cdots + az^n) \\
S_n - zS_n &= a - az^n \\
S_n(1-z) &= a - az^n \\
S_n &= \frac{a(1-z^n)}{1-z}
\end{aligned}$$

Ahora $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ siempre que $|z| < 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a(1-z^n)}{1-z} &= \frac{a(1-0)}{1-z} \\
&= \frac{a}{1-z}
\end{aligned}$$

10.2. Series de Potencias

Una serie de Potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$$

Ahora, hay muchas cosas que debes saber, muchos nombres y designaciones que hacemos a las series de potencias:

- Se dice que la Serie centrada en z_0
- Hablamos de un radio de convergencia de dicha serie, el radio puede ser:
  - El radio es 0, entonces decimos que solo converge en $z = z_0$
  - El radio es finito, entonces la serie converge siempre que z este dentro del radio
  - El radio es infinito, en ese cado siempre converge
- Es conveniente decir que $(z-z_0)^0 = 1$ incluso cuando $z = z_0$
- La corresponcia entre un número complejo z que se encuentre dentro del círculo de convergencia y en número w al cual converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ es de uno a uno.

  Por lo tanto podemos ver a una serie de convergencia como una función $f(z) = w$

10.3. Series de Taylor

Sea $f(z)$ análitica en el interior de un círculo C_0 con centro en z_0 y radio r_0. Entonces para cada punto z en el interior de C_0 se tiene que $f(z)$ se puede escribir como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Además para cualquier círculo en el interior de C_0 la serie converge uniformemente.

Ideas:

Podemos diferenciar a una serie de potencias simplemente diferenciando término por término, y como creo que es más que obvio, el diferenciar una serie de potencias no hace que cambie su radio de convergencia.

Es decir, una serie de pontencia define a una función infinitamente derivable que tendrá el mismo radio de convergencia.

Ahora, veamos que pasa el derivar una serie de potencia:
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_k \ k(z - z_0)^{k-1} &&= a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \dots \\
f''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_k \ (k)(k - 1)(z - z_0)^{k-2} &&= (2)(1)a_2 + (3)(2)a_3(z - z_0) + \dots \\
f'''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_k \ (k)(k - 1)(k - 2)(z - z_0)^{k-3} &&= (3)(2)a_3 + \dots
\end{aligned}$$

Hay una relación entre los coeficientes de a_k y la derivadas de $f(z)$, entonces tenemos que $f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = 1!(a_1)$, $f''(z_0) = 2!(a_2)$, $f'''(z_0) = 3!(a_3)$.

Entonces en general tenemos que $\dfrac{d^n\ f(z)}{dz^n} = (n!)a_n$

Con lo que con un simple despeje tenemos que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Por lo tanto tenemos que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

10.3.1. Series de Taylor Famosas

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$sen(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

$$cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

$$a\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a(z^n) \quad \text{si } |z| < 1$$

$$a\left(\frac{1}{1+z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a(z^n)(-1)^{n-1} \quad \text{si } |z| < 1$$

$$(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} z^{n-r}$$

10.4. Series de Maclaurin

Si $z_0 = 0$ entonces la Serie de Taylor recibe un nombre especial

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Y si, eso es todo, una Serie de Taylor con $z_0 = 0$.

10.5. Series de Laurent

Si $z = z_0$ es una singularidad aislada de una función $f(z)$ entonces tenemos que podemos escribir a la función como:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Ideas:

Si una función no es analítica en el punto $z = z_0$, entonces en este punto decimos que tenemos una singularidad o un punto singular de la función.

Ahora vamos a ver un nuevo tipo de las Series de Potencias de $f(z)$ sobre una singularidad aislada sobre z_0. Esta nueva serie involucrará a potencias positivas como no negativas de $(z - z_0)$.

Si $z = z_0$ es una singularidad de una función $f(z)$ entonces es muy obvio que no podemos expandirla como una Serie de Potencias común con z_0 en su centro.

Pero si $z = z_0$ es una singularidad aislada entonces podemos representarla como una Serie Potencias que involucra potencias negativas y positivas.

$$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + a_0 + a_1(z-z_0)^1 + +a_2(z-z_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \qquad\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

Llamamos a la parte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ como la parte principal, y decimos que esta suma converge si $|z - z_0| > r$

La parte $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$como la parte análitica y decimos que esta suma converge si $|z-z_0| < R$

10.5.1. Coeficientes de la Serie de Laurent

Podemos encontrar facilmente los coeficientes de una Serie de Taylor como:
$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Podemos hacer algo parecido con las Series de Laurent y decir que:

Para la Parte Análitica tenemos que:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Para la Parte Principal tenemos que:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$$

Donde C es cualquier curva cerrrada que rodea a z_0.

10.5.2. Ejemplos

Ejemplo 1

Encuentra la expansión de $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^4}$ alrededor de $z = 0$

Solución:

Recuerda que $\sin(z) = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \dots$

$$\frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

Donde tenemos que:

- Parte Analítica: $\dfrac{z}{5!} - \dfrac{z^3}{7!} + \dots$
- Parte Principal: $\dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{3!z}$

Ejemplo 2

Encuentre la expansión de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en:

- $0 < |z| < 1$

  Demostración:

  Estamos de acuerdo en que la Superficie $0 < |z| < 1$ representa el círculo unitario menos $z = 0$, por lo tanto tenemos una superficie que encierra a un punto de singularidad.

  Por lo tanto tenemos que hacer una expansión de $\dfrac{1}{z(z-1)}$ que involucre a $(z - 0)$.

  Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\ &= \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{1}{1-z}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{z}\right)\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots\right) \\ &= -\left(\frac{1}{z}\right) - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots \end{aligned}$$

  Sabemos que $\dfrac{1}{1-z} = \left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots\right)$ si y solo si $|z| < 1$ y al multiplicarlo por $\dfrac{1}{z}$ entonces tenemos que la expresión general converge si y solo si $0 < |z| < 1$.

- $1 < |z|$

  Demostración:

  Estamos de acuerdo en que la Superficie $1 < |z|$ representa todo el plano complejo excepto el círculo unitario, por lo tanto tenemos una superficie que encierra a un punto de singularidad.

  Por lo tanto tenemos que hacer una expansión que involucre a $(z - 0)$.

  Ahora tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\
&= \left(\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{1+z+z^2+z^3+z^4+\dots}\right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \dots
\end{aligned}
$$

  La serie $1+z+z^2+z^3+z^4+\dots$ converge si y solo si $|\frac{1}{z}| < 1$ por lo tanto su inversa converge si y solo si $|z| > 1$

- $0 < |z-1| < 1$

  Demostración:

  Estamos de acuerdo en que la Superficie $0 < |z-1| < 1$ representa el círculo unitario pero centrado en $z = 1$, por lo tanto tenemos una superficie que encierra a un punto de singularidad.

  Por lo tanto tenemos que hacer una expansión que involucre a $(z - 1)$.

  Ahora tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\
&= \frac{1}{(z+1-1)(z-1)} \\
&= \left(\frac{1}{z-1}\right)\left(\frac{1}{1+(z-1)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{z-1}\right)[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+(z-1)^4-\dots] \\
&= \left(\frac{1}{z-1}\right) + 1 + (z-1) + (z-1)^3 + (z-1)^4 + \dots]
\end{aligned}
$$

  Ahora como $z \neq 1$ entonces $0 < |z-1|$, y gracias a la serie geometrica tenemos que $|z-1| < 1$, por lo tanto la expresión converge si $0 < |z-1| < 1$

10.5.3. Polos y Singularidades Aisladas

Supongamos que tenemos una función como:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Y que $z = z_0$ es nuestra singularidad.

- Si la parte principal de nuestra Serie de Laurent **no tiene elementos** entonces decimos que existe una **Singularidad Removible**.

  $$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

- Si la parte principal de nuestra Serie de Laurent **tiene una cantidad finita de elementos** entonces decimos que tenemos un **Polo de Orden** n.

  Si es que tenemos solo un elemento decimos que es un Polo Simple

  $$a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

- Si la parte principal de nuestra Serie de Laurent **tiene una cantidad infinita de elementos** entonces decimos que tenemos una **Singularidad Escencial**

  $$\cdots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Capítulo 11

Residuos

11.1. Definición

Supongamos que tenemos una función como:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
\end{aligned}
$$

Entonces en especial el primer coeficiente (a_{-1}) es tan especial que recibe el nombre de residuo.

Solemos denotar el Residuo de $f(z)$ sobre el punto $z = z_0$ como:

$$a_{-1} = Res(f(z), z_0)$$

11.2. Encontrar Residuos

- La forma más trivial de encontrar nuestro residuo sobre $f(z)$ a lo largo de un punto z_0 es simplemente hayar la Serie de Laurent de dicha función y tomar el coeficiente de $\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}$.

  No tengo que demostrar esto, despúes de todo esta es la definición

- Vimos que encontramos una fórmula para encontrar un coeficiente arbitario dentro de la Serie de Laurent, esta fórmula funciona para encontrar a los términos de la Parte Principal: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$

  Entonces:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz$$

- Si $f(z)$ tiene un Polo Simple en $z = z_0$, entonces tenemos que:

$$Res(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$$

  Demostración:

  Considera que z_0 es un Polo Simple, entonces la función tiene esta forma: $\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}a_0 + a_1(z-z_0)^1 + a_2(z-z_0)^2 + \dots$

  Donde a_{-1} es diferente de cero. Ahora simplemente al multiplicar todo por $(z - z_0)$ y más aún tomando el límite tenemos que: $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}[a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \dots] = a_1$

- Si $f(z)$ tiene un Polo de Orden n en $z = z_0$, entonces tenemos que:

$$Res(f(z), z_0) = \left(\frac{1}{(n-1)!}\right)\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)$$

- Si $f(z)$ se puede escribir como $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ y $g(z_0) \neq 0$ entonces tenemos que podemos encontrar el residuo de un polo simple como:

$$Res(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

11.3. Ejemplos sobre Encontrar Residuo

Ejemplo 1

Encuentra los residuos de $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$

Solución:

- Para $z = 3$ vemos un Polo Simple por lo que podemos decir que:

$$\begin{aligned} Res(f(z), 3) &= \lim_{z \to 3} (z-3) f(z) \\ &= \lim_{z \to 3} (z-3) \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{(3-1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Para $z = 1$ vemos un Polo de Orden 2 por lo que podemos decir que:

$$\begin{aligned} Res(f(z), 1) &= \lim_{z \to 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (z-1)^2 f(z) \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \frac{1}{z-3} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{-1}{(z-3)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

11.4. Teorema de Residuo de Cauchy

Supongamos que tenemos una función que sea analítica excepto en $z_1, z_2, \dots, z_n$ encerrados por C entonces:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=0}^{n} Res(f(z), z_i)$$

11.5. Usar Teorema del Residuo para: $\int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta$

La idea esta en convertir una integral de variable real en una integral compleja donde nuestro recorrido será el círculo unitario centrado en el origen.

El primer paso esta en parametrizar el recorrido como:

- $z = e^{i\theta}$
- $dz = ie^{i\theta} d\theta$
- $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$
- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right)$

Por lo tanto finalmente tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta = \oint_C F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

11.6. Usar Teorema del Residuo para: $\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_C \int_{\infty}^{\infty} f(z)dz$$

11.7. Usar Teorema del Residuo para: $\int_{\infty}^{\infty} Trig\alpha x$ dx