

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS

Análisis Complejo

Una Pequeña (Gran) Introducción

AUTORES:

Rosas Hernandez Oscar Andrés

Lopez Manriquez Angel

Índice general

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | Números Complejos | 4 |
| 1. | Definiciones | 5 |
| 1.1. | Definición de Números Complejos | 6 |
| 1.2. | Definiciones Utiles | 6 |
| 1.3. | Repeticiones de i | 6 |
| 1.4. | Funciones Trigonometricos | 7 |
| 1.4.1. | Evaluación Rápida | 7 |
| 1.4.2. | Identidades Importantes | 7 |
| 2. | Aritmética Compleja | 8 |
| 2.1. | Operaciones Básicas | 9 |
| 2.2. | Elemento Identidad | 10 |
| 2.3. | Inverso Multiplicativo | 10 |
| 2.4. | Campo de los Complejos | 11 |
| 2.5. | Conjugados | 12 |
| 2.5.1. | Coordenadas Conjugadas | 13 |
| 2.6. | Módulo o Valor Absoluto | 15 |
| 2.7. | Producto Punto y Cruz | 18 |
| 2.7.1. | Producto Punto | 18 |
| 2.7.2. | Producto Punto | 18 |
| 3. | Forma Polar y Argumentos | 19 |
| 3.1. | Forma Polar | 20 |

| | |
|---|-----------|
| 3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular | 20 |
| 3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar | 20 |
| 3.2. Argumento de z | 21 |
| 3.3. Leyes de Aritmetica | 22 |
| 3.4. Ley de Moivre's | 24 |
| 4. Forma Exponencial ó de Euler | 25 |
| 4.1. Forma de Euler | 26 |
| 4.1.1. e^z | 26 |
| 4.1.2. Lemmas y Propiedades | 27 |
| 4.2. Identidad de Lagrange | 28 |
| 5. Ecuaciones y Raíces | 29 |
| 5.1. n-Raíces de un Numero Complejo | 30 |
| 5.1.1. Teorema Fundamental del Álgebra | 30 |
| 5.1.2. Encontrar las Raíces de un Número Complejo | 31 |
| II Funciones Complejas | 32 |
| 6. Funciones Complejas | 33 |
| 6.1. Funciones en General | 34 |
| 6.2. Funciones Hiperbolicas $\cosh(x)$ y $\sinh(x)$ | 35 |
| 6.3. Trigonometricas Complejas: $\cos(z)$ y $\sin(z)$ | 36 |
| 6.4. Funciones e^z y $\ln(z)$ | 37 |
| 6.5. $z_1^{z_2}$ | 37 |
| 7. Límites | 38 |
| 7.1. Límites en Cálculo Real | 39 |
| 7.1.1. Definición Formal | 39 |
| 8. Derivación | 40 |
| 8.1. Definición Formal | 41 |

| | |
|--|----|
| 8.2. Continuidad | 41 |
| 8.3. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en Rectangular | 42 |
| 8.4. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en forma Polar | 43 |
| 8.4.1. Demostración usando Rectangular | 43 |
| 8.4.2. Comprobación usando Rectangular | 46 |

Parte I

Números Complejos

Capítulo 1

Definiciones

1.1. Definición de Números Complejos

Definición 1.1.1 (Números Complejos) *Definamos al Conjunto de los números complejos \mathbb{C} como:*

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \} \quad (1.1)$$

Podemos usar la notación $a + bi$, $a + ib$ y (a, b) de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool pero la ultima mas concreta).

1.2. Definiciones Utiles

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo i para simplificar $i = \sqrt{-1}$, de ahí la propiedad famosa $i^2 = -1$.
- **Parte Real:** Considere el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Im(z) = b$

1.3. Repeticiones de i

- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n} = 1$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+1} = i$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+2} = -1$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+3} = -i$

1.4. Funciones Trigonometricos

1.4.1. Evaluación Rápida

- $\cos(n \cdot \theta) = \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$
- $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$
- $\sin(n \cdot \theta) = 0$
- $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$

1.4.2. Identidades Importantes

- **Pitagórica:** $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \cos(a)\sin(b) \pm \sin(a)\cos(b)$

Capítulo 2

Aritmética Compleja

2.1. Operaciones Básicas

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces:

■ **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (2.1)$$

■ **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \quad (2.2)$$

■ **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \end{aligned} \quad (2.3)$$

■ **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \quad z_2 \neq 0 \quad (2.4)$$

2.2. Elemento Identidad

- Denotamos a $0 = 0 + 0i$ como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a $1 = 1 + 0i$ como el elemento identidad multiplicativa, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

2.3. Inverso Multiplicativo

Si $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$ entonces podemos denotar al inverso de z como z^{-1}

Creo que es más que obvio que $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$.

Pero además podemos escribir a z^{-1} como $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Demostración:

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \left(\frac{a - bi}{a - bi} \right) = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Gracias a lo anterior podemos escribirlo de distintas maneras:

- **De forma Rectangular:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \quad (2.5)$$

- **Con Magnitudes y Conjugados:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.6)$$

2.4. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

■ **Definición 2.4.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (2.7)$$

■ **Definición 2.4.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (2.8)$$

■ **Definición 2.4.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \quad (2.9)$$

■ **Definición 2.4.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \quad (2.10)$$

■ **Definición 2.4.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_2 + z_3) \cdot z_1 &= (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

■ **Definición 2.4.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (2.12)$$

■ **Definición 2.4.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (2.13)$$

■ **Definición 2.4.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \quad (2.14)$$

■ **Definición 2.4.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = 1 \quad (2.15)$$

2.5. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ que lo definimos como: $\bar{z} = a - bi$

Usando la definición podemos demostrar algunas propiedades muy importantes:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$

Demostración:

Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2\end{aligned}$$

Ahora para la parte mas general:

Creo que cuando $k = 1$ es demasiado sencillo hasta para escribirlo y lo que acabamos de demostrar es para cuando $k = 2$, por lo tanto lo único que tenemos que probar es que:

Si $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \cdots + \bar{z}_n$ se cumple entonces también lo hará $\overline{z_1 + \cdots + z_{n+1}} = \bar{z}_1 + \cdots + \bar{z}_{n+1}$

Lo cual se logra dandote cuenta que $z_{n+1} = \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}$ y dandote cuenta que volviste al caso de $k = 2$.

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{z}_n$

Demostración:

Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 \cdot a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = (a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) \\ &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\end{aligned}$$

Ahora para la parte mas general se demuestra de manera casi identica a la propiedad pasada.

$$\blacksquare \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Demostración:

Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z_1 \cdot \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)i} \\ &= \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)i\right] = \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i\right] = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} \\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \overline{\overline{z}} = z$$

Demostración: $\overline{\overline{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi$

$$\blacksquare z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Demostración: $z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

Demostración:

Dado a $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \frac{z + \overline{z}}{2} &= \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a \\ &= \operatorname{Re}(a + bi) \end{aligned}$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Demostración:

Dado a $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \frac{z - \overline{z}}{2i} &= \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b \\ &= \operatorname{Im}(a + bi) \end{aligned}$$

2.5.1. Coordenadas Conjugadas

Hay alguien que usando las propiedades de $a + ib$ donde tenemos que:

$$\blacksquare a = \frac{(z + \overline{z})}{2}$$

$$\blacksquare b = \frac{(z - \bar{z})}{2i}$$

Para hablar de coordenadas conjugadas a los que denominamos de manera similiar a las polares y rectangulares (que veremos mas a detalle en este libro):

$$\blacksquare z = (a, b)$$

$$\blacksquare z = (r, \theta)$$

$$\blacksquare z = (z, \bar{z})$$

2.6. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que definir el Módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

Demostración:

Ya habíamos visto que $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)^2$ (recuerda que $Im(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Re(z)| = Re(z)$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)^2$ (recuerda que $Re(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Im(z)| = Im(z)$

- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2)$

Demostración:

Ya sabemos que $|z + \bar{z}|^2 = z\bar{z}$ y recuerda que $2Re(z) = z + \bar{z}$, $|z|^2 = z\bar{z}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + z_2\bar{z}_2 \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

- $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

Demostración:

Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que $|z| = |\bar{z}|$:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

■ **Desigualdad del Triángulo:** $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración:

Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al revés:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ y además $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$ lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$ donde $k \geq 0$.

Ya sabemos que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$ y $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}|$, ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Ahora veamos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= [|z_1|^2 + |z_2|^2] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = [(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}|] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

Donde $k = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - 2|z_1 \overline{z_2}|$, ahora además podemos decir que si $k \geq 0$ entonces así lo será $\frac{k}{2}$, por lo tanto: $\frac{k}{2} = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - |z_1 \overline{z_2}|$, pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica $w = z_1 \overline{z_2}$ y tenemos que $\operatorname{Re}(w) - |w|$. Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, así que por lo tanto $k \geq 0$ y la propiedad siempre se cumple.

Sabemos que $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ además ahora sabemos que: $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$ y como $|z| = |-z|$ Que es lo mismo que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

Y listo, todas las propiedades están listas.

Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$$

$$\blacksquare \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Demostración:

Recuerda que: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ Entonces $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \bar{z}_1 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \bar{z}_1 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \sqrt{z_2 \bar{z}_2} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Demostración:

Usando la idea de que: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right| &= \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right| \\ &= |z_1| \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)} \\ &= |z_1| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \cdot \frac{1}{|a + bi|} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

2.7. Producto Punto y Cruz

2.7.1. Producto Punto

De manera muy parecido a como definimos el producto punto entre dos vectores, podemos definir el producto punto entre dos números complejos como:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2) + (b_1b_2) = |z_1||z_2| \cos(\theta) \quad (2.16)$$

Donde θ es el ángulo más pequeño entre dichos números.

2.7.2. Producto Punto

De manera muy parecido a como definimos el producto cruz entre dos vectores, podemos definir el producto cruz entre dos números complejos como:

$$z_1 \times z_2 = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (2.17)$$

Nota que dicho “vector” es perpendicular al plano complejo.

Pero generalmente lo que nos importa es su magnitud, que recuerda que se puede entender como el área del paralelogramo formado por esos dos números.

Lo entendemos como:

$$|z_1 \times z_2| = a_1b_2 - a_2b_1 = |z_1||z_2| \sin(\theta) \quad (2.18)$$

Donde θ es el ángulo más pequeño entre dichos números.

Capítulo 3

Forma Polar y Argumentos

3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ está medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r \cos(\theta)$
- $b = r \sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como $(a + bi)$, entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

3.2. Argumento de z

Definimos al argumento de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $\theta = \arg(z)$, es decir, al final del día $\arg(z)$ es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\theta) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Pero como \sin y \cos son funciones periódicas con 2π , es decir $\arg(z)$ no es único.

Además para encontrarlo usamos $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$ pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

Argumento Principal

Ya que $\arg(z)$ es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de z como $\text{Arg}(z)$ y que será el ángulo que cumpla con que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\text{Arg}(z)) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\text{Arg}(z)) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Podemos probar que $\text{Arg}(z)$ para alguna z cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a $\arg(z)$ como:

$$\arg(z) = \{ \text{Arg}(z) + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad (3.1)$$

3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como $z_1 = (r_1, \theta_1)$ y $z_2 = (r_2, \theta_2)$ es decir $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ y $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$ entonces tenemos que:

■ **Producto de Números Complejos:**

$$z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$$

Demostración:

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **División de Números Complejos:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right), (\theta_1 - \theta_2) \right]$$

Demostración:

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ y hacer:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \frac{\bar{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\bar{z_2}}{(r_2)^2} \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \bar{z_2} = \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **Simplificar Potencias de z :**

$$z^n = [(r^n), (n \cdot \theta)]$$

Ideas:

No considero a esto una demostración, por basta con darte cuenta que z^n es $z \cdot z \cdot z \dots$ n veces.

Por lo tanto puedes aplicar la regla: $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$ que ya que $z_1 = z_2$ se puede simplificar a $z \cdot z = [2r, 2\theta]$.

Y llegar a ese resultado mediante la inducción.

3.4. Ley de Moivre's

$$z^n = r^n (\cos (n \cdot \theta) + i \sin (n \cdot \theta)) \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

Se puede dar una demostracion muy sencilla, no se porque los libros usan induccion matematica para demostrar el teorema de Moivre...

En fin, expresando a z en su forma polar y usando la fórmula de Euler, tenemos:

$$\begin{aligned} z^n &= (a + bi)^n \\ &= [r (\cos (\theta) + i \sin (\theta))]^n \\ &= r^n (\cos (\theta) + i \sin (\theta))^n \\ &= r^n (e^{\theta i})^n \\ &= r^n e^{(\theta i)n} \\ &= r^n e^{(n\theta)i} \\ &= r^n (\cos (n \cdot \theta) + i \sin (n \cdot \theta)) \end{aligned}$$

Capítulo 4

Forma Exponencial ó de Euler

4.1. Forma de Euler

Podemos también expresar un número complejo de la siguiente manera:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (4.1)$$

Ideas:

Esta fórmula sale de a partir de las Series de Taylor para la función exponencial:

$$e^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots \quad (4.2)$$

Pasa algo muy interesante al hacer $k = i\theta$, pues vemos que aparecen claramente la forma en que tenemos de representar a las funciones seno y coseno como polinomios infinitos:

$$\begin{aligned} \blacksquare \sin(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \blacksquare \cos(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + \left(-\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \dots\right) i \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{aligned}$$

4.1.1. e^z

También podemos ver más generalmente que e^z se puede reducir a:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)) = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

4.1.2. Lemmas y Propiedades

$$\blacksquare \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] + [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) + \cos(\theta) - i \sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2 \cos(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Tip: $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ y $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Y si simplificamos

$$\blacksquare \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] - [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) - \cos(\theta) + i \sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2i \sin(\theta)}{2i} \\ &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Tip: $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ y $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Y si simplificamos

4.2. Identidad de Lagrange

$$1 + \cos(1\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} + 1 \right) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) && \text{Recuerda que: } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \right) && \text{Recuerda que: } \sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \left(\frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}} \right) \right) && \text{Multiplica por Uno ;)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) && \text{Expande} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) && \text{Organizando, gracias denominador común} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + 1 \right) && \text{Simplificar} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} + 1 \right) && \text{Añadimos esto} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} + 1 \right) && \text{Recuerda que } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Capítulo 5

Ecuaciones y Raíces

5.1. n-Raíces de un Numero Complejo

En general decir que un número w es un raíz enésima de un número complejo $z \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$ es que cumple que:

$$w^n = z$$

Donde obviamente $n \in \mathbb{Z}^+$.

5.1.1. Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 5.1.1 *Teorema Fundamental del Álgebra* Todo polinomio de grado n tiene mínimo 1 raíz

No desmotraremos este asombroso teorema por ahora, pero si un colorario (específicamente) en el campo de los complejos: “Un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces”.

5.1.2. Encontrar las Raíces de un Número Complejo

Teorema 5.1.2 *Existen exactamente n raíces para $w^n = z$ donde $w, z \in \mathbb{C}$*

Suponiendo a $z = (r, \theta)$ entonces las podemos encontrar tan fácil como:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.1)$$

Demostración:

Tengamos dos números: $z = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$ y $w = p [\cos(\phi) + i \sin(\phi)]$

Entonces de la ecuación decir $w^n = z$ es lo mismo que decir que:

$$\begin{aligned} (p [\cos(\phi) + i \sin(\phi)])^n &= r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \\ p^n [\cos(\phi) + i \sin(\phi)]^n &= r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \end{aligned}$$

De esta ecuación tenemos que:

$$\blacksquare \quad p^n = r$$

Por lo tanto podemos definir a $p = \sqrt[n]{r}$ donde $\sqrt[n]{r}$ es la raíz enésima del módulo de dicho número.

$$\blacksquare \quad (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

Gracias a $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ Por lo tanto podemos decir que:

- $\cos(n\theta) = \cos(\phi)$
- $\sin(n\theta) = \sin(\phi)$

Y gracias a que ambas funciones son periodicas cada 2π , por lo tanto:

- $\sin(\phi) = \sin \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right)$
- $\cos(\phi) = \cos \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right)$

Y finalmente podemos generalizar los resultados como:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) \right] \quad (5.2)$$

Parte II

Funciones Complejas

Capítulo 6

Funciones Complejas

6.1. Funciones en General

Cualquier función compleja $w = f(z)$ puede ser representada como:

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ donde } x, y \in \mathbb{R}$$

Es decir donde $u(x, y), v(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ahora que las hemos definido formalmente podemos mostrar las funciones complejas mas famosas.

6.2. Funciones Hiperbolicas $\cosh(x)$ y $\sinh(x)$

A ver, antes que nada, estas no son funciones complejas en si, pero nos van a servir mucho.

Recuerda que dijimos que:

$$\begin{aligned}\blacksquare \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \blacksquare \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\begin{aligned}\cos(ix) &= \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh(x)\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\sin(ix) &= \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2i} \\ &= \frac{-1}{2i} e^x - e^{-x} \\ &= \frac{i}{2} e^x - e^{-x} \\ &= i \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= i \cdot \sinh(x)\end{aligned}\tag{6.2}$$

Estas funciones tiene unas propiedades bien locas como:

$$\blacksquare \sinh(x)^2 + \cosh(x)^2 = 1$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{4}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right) \\ &= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) + \left(\frac{-e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}\right) \\ &= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}\right) \\ &= \left(\frac{4}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

6.3. Trigonometricas Complejas: $\cos(z)$ y $\sin(z)$

$$\begin{aligned} \cos(a + bi) &= \cos(a)\cos(bi) - \sin(a)\sin(bi) \\ &= \cos(a)\cosh(b) - i(\sin(a)\sinh(b)) \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} \sin(a + bi) &= \sin(a)\cos(bi) + \cos(a)\sin(bi) \\ &= \sin(a)\cosh(b) + i(\cos(a)\sinh(i)) \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.4. Funciones e^z y $Ln(z)$

La función exponencial es demasiado sencilla de definir:

$$\begin{aligned} e^{a+bi} &= e^a e^{bi} \\ &= e^a \cos(b) + i \sin(b) \\ &= e^a \cos(b) + i e^a \sin(b) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Vamos a definir de manera completamente arbitraria al logaritmo de un número complejo:

$$Ln(z) = \ln(|z|) + i Arg(z) \tag{6.6}$$

Esta definición nos permite que esta nueva función herede las propiedades comunes del logaritmo.

6.5. $z_1^{z_2}$

Gracias a la definición podemos definir esta operación como:

$$\begin{aligned} z_1^{z_2} &= (z_1)^a + (z_2)^{bi} \\ &= (z_1)^a e^{Ln(z_2^{bi})} \\ &= (z_1)^a e^{bi \cdot Ln(z_2)} \end{aligned}$$

Capítulo 7

Límites

7.1. Límites en Cálculo Real

Antes de empezar a hablar sobre como podemos definir el límite en el campo de los complejos, veamos como llegamos a esa definición en los números reales.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (7.1)$$

De manera completamente informal podemos decir que el Límite de arriba es cierto si cuando $f(x)$ se acerca a L , x se acerca a a .

Es decir, si se acerca, la distancia entre $f(x)$ y L y x y a cada vez se va haciendo más pequeña, lo cuando lo podemos añadir para hacer a la definición más precisa.

Límite: $|f(x) - L|$ se hace casi cero cuando $|x - a|$ se acerca a cero.

Ahora simplemente vamos a formalizar lo que significa pequeño:

- δ hablará de lo pequeño que será $|x - a|$
- ϵ hablará de lo pequeño que será $|f(x) - L|$

Por lo tanto estamos listo para la definición formal en todo su esplendor:

7.1.1. Definición Formal

- En forma geométrica, si a es un punto en la recta numérica, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee al elegir puntos lo bastante cercanos a a (excluyendo a $x = a$).
- Se dice que un número L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a si para todo número positivo ϵ (tan pequeño como se desee) se halla un número positivo δ (que por lo general depende de ϵ) tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.
- Decimos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si y solo si se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

Capítulo 8

Derivación

8.1. Definición Formal

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \end{aligned} \tag{8.1}$$

8.2. Continuidad

Decimos que una función $f(z)$ es continua en un punto si y solo si:

- La función $f(z)$ tiene que estar valuado en z_0
- El $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ tiene que existir
- Ambos tienen que coincidir

8.3. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en Rectangular

Recuerda que el hecho de que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea diferenciable nos da grandes restricciones sobre como son $u(x, y), v(x, y)$, veamos que dichas restricciones salen de la misma definición:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

Además sabemos que si es diferenciable, los límites tiene que coincidir sin importar de por donde nos acercamos al valor, por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] \end{aligned}$$

Y si te das cuentas, estos dos límites estan mostrando derivadas parciales, así que al igualar ambas tenemos que:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

Por lo tanto podemos comparar la parte real e imaginaria como:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \blacksquare \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Estas son conocidas como las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por lo tanto formalizamos como que una condición necesaria para que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región es que cumplan las Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

8.4. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en forma Polar

8.4.1. Demostración usando Rectangular

Sea una función $f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ analítica, entonces se satisfacen las ecuaciones en forma rectangular:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \blacksquare \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

Y dado que $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, entonces:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad r(x, y) &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \blacksquare \quad \theta(x, y) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

y también tenemos que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x(r, \theta) &= r \cos(\theta) \\ \blacksquare \quad y(r, \theta) &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

Ahora, hay que demostrar estas 4 ecuaciones:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin(\theta)}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) \\ &= x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= r \cos(\theta) (r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= r \cos(\theta) r^{-1} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} (2y) \\ &= y (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= r \sin(\theta) (r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= r \sin(\theta) r^{-1} \\ &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{-y}{x^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)} \frac{-y}{x^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)} \frac{-y}{x^2} \\ &= \frac{-y}{y^2 + x^2} \\ &= \frac{-r \sin(\theta)}{r^2} \\ &= \frac{-\sin(\theta)}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)} \frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{y^2 + x^2} \\ &= \frac{r \cos(\theta)}{r^2} \\ &= \frac{\cos(\theta)}{r} \end{aligned}$$

Entonces usando la gran regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} && \text{Regla de la Cadena} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r} && \text{Sustituyendo}\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(r, \theta)}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} && \text{Regla de la Cadena} \\ &= \frac{\partial v}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} && \text{Sustituyendo}\end{aligned}$$

Ahora de las ecuaciones de Cauchy - Riemann tenemos que:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} \right) \\ &= \cos(\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r} \right) + \sin(\theta) \left(-\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{1}{r} \right)\end{aligned}$$

Y ya que $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ son linealmente independientes (si no me creen intenten hacer el Wroksiano, porque yo no lo intentaré) tenemos que todo lo que las multiplique tiene que ser cero, es decir:

Tenemos que $0 = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r}$ por lo que un simple despeje tenemos que: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$

Tenemos que $0 = -\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{1}{r}$ por lo que un simple despeje tenemos que: $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}\blacksquare \quad \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \blacksquare \quad \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

8.4.2. Comprobación usando Rectangular

Sea una función $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica, entonces se satisface las ecuaciones en forma rectangular:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \blacksquare \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

Y dado que $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, entonces:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x(r, \theta) &= r \cos(\theta) \\ \blacksquare \quad y(r, \theta) &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

Entonces usando la gran regla de la cadena tenemos que:

| | |
|--|---------------------------------|
| $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$ | Regla de la Cadena |
| $= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial r \cos(\theta)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial r}$ | Expandamos |
| $= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\theta)$ | Resolvemos |
| $= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} r \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r \sin(\theta) \right)$ | Creamos una r mágica |
| $= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial y} r \cos(\theta) - \frac{\partial v}{\partial x} r \sin(\theta) \right)$ | Usando Cauchy - Riemann |
| $= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - r \sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos(\theta) \right)$ | Reordenamos |
| $= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)$ | Ve que son iguales |
| $= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$ | Regla de la Cadena a la inversa |

De manera analoga tenemos que:

| | |
|---|---------------------------------|
| $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$ | Regla de la Cadena |
| $= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial r \cos(\theta)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial r}$ | Expandamos |
| $= \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y} \sin(\theta)$ | Resolvemos |
| $= \frac{-1}{r} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} r \cos(\theta) - \frac{\partial v}{\partial y} r \sin(\theta) \right)$ | Creamos una r mágica |
| $= \frac{-1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} r \cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial x} r \sin(\theta) \right)$ | Usando Cauchy - Riemann |
| $= \frac{-1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos(\theta) \right)$ | Reordenamos |
| $= \frac{-1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)$ | Ve que son iguales |
| $= \frac{-1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$ | Regla de la Cadena a la inversa |

Por lo tanto tenemos que:

- $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$
- $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$