Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Avanzadas

Análisis Complejo

Una Pequeña (Gran) Introducción

Autores:
Rosas Hernandez Oscar Andrés
Lopez Manriquez Angel

Índice general

Parte I

Números Complejos

Capítulo 1

Definiciones

1.1. Definición de Números Complejos

Definición 1.1.1 (Números Complejos) *Definamos al Conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ como:*

$$\mathbb{C} = \left\{ \ a + bi \ \mid \ a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \ \right\} \tag{1.1}$$

Podemos usar la notación $a + bi$, $a + ib$ y (a, b) de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool pero la ultima mas concreta).

1.2. Definiciones Utiles

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo i para simplificar $i = \sqrt{-1}$, de ahí la propiedad famosa $i^2 = -1$.
- **Parte Real:** Considere el complejo $z = a+bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Im(z) = b$

1.3. Repeticiones de i

- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n} = 1$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+1} = i$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+2} = -1$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, i^{4n+3} = -i$

1.4. Funciones Trigonometricos

1.4.1. Evaluación Rápida

- $\cos(n \cdot \theta) = \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$
- $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$
- $\sin(n \cdot \theta) = 0$
- $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$

1.4.2. Identidades Importantes

- **Pitagórica:** $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \cos(a)\sin(b) \pm \sin(a)\cos(b)$

Capítulo 2

Aritmética Compleja

2.1. Operaciones Básicas

Si $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ entonces:

- **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{2.1}$$

- **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \tag{2.2}$$

- **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \end{aligned} \tag{2.3}$$

- **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \qquad z_2 \neq 0 \tag{2.4}$$

2.2. Elemento Identidad

- Denotamos a $0 = 0 + 0i$ como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C},\ \ z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a $1 = 1 + 0i$ como el elemento identidad multiplicatica, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C},\ \ z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

2.3. Inverso Multiplicativo

Si $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{\ 0\ \}$ entonces podemos denotar al inverso de z como z^{-1}

Creo que es más que obvio que $z^{-1} = \dfrac{1}{a+bi}$.

Pero además podemos escribir a z^{-1} como $\dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Demostración:

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right) = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Gracias a lo anterior podemos escribirlo de distintas maneras:

- **De forma Rectangular:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i \tag{2.5}$$

- **Con Magnitudes y Conjugados:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{2.6}$$

2.4. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

- **Definición 2.4.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \tag{2.7}$$

- **Definición 2.4.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{2.8}$$

- **Definición 2.4.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C},\ \ \forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \tag{2.9}$$

- **Definición 2.4.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ \exists z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \tag{2.10}$$

- **Definición 2.4.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \ z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1)\end{gathered} \tag{2.11}$$

- **Definición 2.4.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \tag{2.12}$$

- **Definición 2.4.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \tag{2.13}$$

- **Definición 2.4.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C},\ \ \forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \tag{2.14}$$

- **Definición 2.4.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\},\ \ \exists z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 1 \tag{2.15}$$

2.5. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ que lo definimos como: $\overline{z} = a - bi$

Usando la definición podemos demostrar algunas propiedades muy importantes:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$

  Demostración:

  Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} \qquad = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

  Ahora para la parte mas general:

  Creo que cuando $k = 1$ es demasiado sencillo hasta para escribirlo y lo que acabamos de demostrar es para cuando $k = 2$, por lo tanto lo único que tenemos que probar es que:

  Si $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}$ se cumple entonces también lo hará $\overline{z_1 + \cdots + z_{n+1}} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_{n+1}}$

  Lo cual se logra dandote cuenta que $z_a = \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}$. y dandote cuenta que volviste al caso de $k = 2$.

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \cdots \cdot \overline{z_n}$

  Demostración:

  Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 \cdot a_2 + ib_2} \qquad = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

  Ahora para la parte mas general se demuestra de manera casi identica a la propiedad pasada.

- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

  Demostración:

  Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$

  Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z_1 \cdot \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i} \\
&= \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i\right] = \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) i\right] = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} \\
&= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}
\end{aligned}
$$

- $\overline{\overline{z}} = z$

  Demostración: $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a + bi$

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

  Demostración: $z \cdot \overline{z} = (a+ib) \cdot (a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

- $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

  Demostración:

  Dado a $z = a + ib$

$$
\begin{aligned}
\frac{z+\overline{z}}{2} &= \frac{(a+bi)+(a-bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a \\
&= Re(a+bi)
\end{aligned}
$$

- $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

  Demostración:

  Dado a $z = a + ib$

$$
\begin{aligned}
\frac{z-\overline{z}}{2i} &= \frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b \\
&= Im(a+bi)
\end{aligned}
$$

2.6. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que definir el Módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

  Demostración:

  Ya habiamos visto que $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

  Entonces podemos ver que $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)$ (recuerda que $Im(z)^2 > 0$) por lo tanto tenemos que $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Re(z)| = Re(z)$

  Entonces podemos ver que $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)$ (recuerda que $Re(z)^2 > 0$) por lo tanto tenemos que $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Im(z)| = Im(z)$

- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$

  Demostración:

  Ya sabemos que $|z + \overline{z}|^2 = z \cdot \overline{z}$ y recuerda que $2Re(z) = z + \overline{z}$, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\bar{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + z_2\overline{z_2} \\
&= z_1\bar{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2
\end{aligned}$$

- $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$

  Demostración:

  Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que $|z| = |\overline{z}|$:

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

- **Desigualdad del Triangulo:** $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

  Demostración:

  Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al réves:

  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ y además $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$ lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

  Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$ donde $k \geq 0$.

  Ya sabemos que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$ y $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$, ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

  Ahora veamos que:

  $$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= \left[|z_1|^2 + |z_2|^2\right] + 2Re(z_1\overline{z_2}) = \left[(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}|\right] + 2Re(z_1\overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

  Donde $k = 2Re(z_1\overline{z_2}) - 2|z_1\overline{z_2}|$, ahora además podemos decir que si $k \geq 0$ entonces así lo será $\frac{k}{2}$, por lo tanto: $\frac{k}{2} = Re(z_1\overline{z_2}) - |z_1\overline{z_2}|$, pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica $w = z_1\overline{z_2}$ y tenemos que $Re(w) - |w|$. Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que $|Re(z)| \leq |z|$, así que por lo tanto $k \geq 0$ y la propiedad siempre se cumple.

  Sabemos que $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ además ahora sabemos que: $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$ y como $|z| = |-z|$ Que es lo mismo que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

  Y listo, todas las propiedades están listas.

  Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que:
  $|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

  Demostración:

  Recuerda que: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ Entonces $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}} \\
&= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1}\ \overline{z_2}} \\
&= \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} \\
&= \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \overline{z_2}} \\
&= |z_1| \cdot |z_2|
\end{aligned}$$

- $\left| \left(\dfrac{z_1}{z_2} \right) \right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

  Demostración:

  Usando la idea de que: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right| &= \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right| \\
&= |z_1| \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)} \\
&= |z_1| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \cdot \frac{1}{|a + bi|} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Forma Polar y Argumentos

3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ esta medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como (r, θ), donde $r \geq 0$ y θ medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r\cos(\theta)$
- $b = r\sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como $(a + bi)$, entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan(\frac{b}{a})^{-1} & \text{si } a > 0 \\ \tan(\frac{b}{a})^{-1} + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan(\frac{b}{a})^{-1} - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

3.2. Argumento de z

Definimos al argumento de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $\theta = arg(z)$, es decir, al final del día $arg(z)$ es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

- $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Pero como sin y cos con funciones periodicas con 2π, es decir $arg(z)$ no es único.

Además para encontrarlo usamos $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$ pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

Argumento Principal

Ya que $arg(z)$ es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de z como $Arg(z)$ y que será el ángulo que cumpla con que:

- $\cos(Arg(z)) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $\sin(Arg(z)) = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $-\frac{\pi}{2} < Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$

Podemos probar que $Arg(z)$ para alguna z cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a $arg(z)$ como:

$$arg(z) = \{\ Arg(z) + 2n\pi \ \mid\ n \in \mathbb{Z}\ \} \tag{3.1}$$

3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como $z_1 = (r_1, \theta_1)$ y $z_1 = (r_2, \theta_2)$ es decir $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)$ entonces tenemos que:

- **Producto de Números Complejos:**
  $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$

  Demostración:

  Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\
z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))i]
\end{aligned}
$$

  Usando las leyes de senos y cosenos:

  - $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

  Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

- **División de Números Complejos:**
  $\frac{z_1}{z_2} = [(\frac{r_1}{r_2}), (\theta_1 - \theta_2)]$

  Demostración:

  Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ y hacer:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\overline{z_2}}{(r_2)^2} \\
&= \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \overline{z_2} = \frac{1}{(r_2)^2}(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\
&= \frac{1}{(r_2)^2}(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i \\
&= \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))i]
\end{aligned}
$$

  Usando las leyes de senos y cosenos:

  - $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

  Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

- **Simplificar Potencias de z:**

  $z^n = [(r^n), (n \cdot \theta)]$

  Ideas:

  No considero a esto una demostración, por basta con darte cuenta que z^n es $z \cdot z \cdot z \dots$ n veces.

  Por lo tanto puedes aplicar la regla: $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$ que ya que $z_1 = z_2$ se puede simplificar a $z \cdot z = [2r, 2\theta]$.

  Y llegar a ese resultado mediante la inducción.

3.4. Ley de Moivre's

$z^n = r^n \left(\cos(n\cdot\theta) + i\sin(n\cdot\theta)\right) \quad$ donde $n \in \mathbb{Z}$

Demostración:

Se puede dar una demostracion muy sencilla, no se porque los libros usan induccion matematica para demostrar el teorema de Moivre...

En fin, expresando a z en su forma polar y usando la fórmula de Euler, tenemos:

$$
\begin{aligned}
z^n &= (a+bi)^n \\
&= \left[r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)\right]^n \\
&= r^n \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n \\
&= r^n \left(e^{\theta i}\right)^n \\
&= r^n e^{(\theta i)n} \\
&= r^n e^{(n\theta)i} \\
&= r^n \left(\cos(n\cdot\theta) + i\sin(n\cdot\theta)\right)
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Forma Exponencial ó de Euler

4.1. Forma de Euler

Podemos también expresar un número complejo de la siguiente manera:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{4.1}$$

Ideas:

Esta fórmula sale de a partir de las Series de Taylor para la función exponencial:

$$e^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots \tag{4.2}$$

Pasa algo muy interesante al hacer $k = i\theta$, pues vemos que aparecen claramente la forma en que tenemos de representar a las funciones seno y coseno como polinomios infinitos:

- $\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!}$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^5}{5!} \cdots\right) + \left(-\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} \cdots\right) i \\ &= \cos(\theta) \qquad\qquad\qquad\qquad + \sin(\theta)\, i \end{aligned}$$

4.1.1. e^z

También podemos ver más generalmente que e^z se puede reducir a:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i\sin(b)) = e^a (\cos(b) + i\sin(b))$$

4.1.2. Lemmas y Propiedades

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] + [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]}{2} && \text{Tip: } \cos(\theta) = \cos(-\theta) \text{ y } \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \\
&= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} && \text{Y si simplificamos} \\
&= \frac{2\cos(\theta)}{2} \\
&= \cos(\theta)
\end{aligned}
$$

- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] - [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]}{2} && \text{Tip: } \cos(\theta) = \cos(-\theta) \text{ y } \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \\
&= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2} && \text{Y si simplificamos} \\
&= \frac{2i\sin(\theta)}{2i} \\
&= \sin(\theta)
\end{aligned}
$$

4.2. Identidad de Lagrange

$$1 + \cos(1\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} + 1\right) \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) && \text{Recuerda que: } \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+1)i\theta}-1}{e^{i\theta}-1} + \frac{e^{(n+1)-i\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\right) && \text{Recuerda que: } \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+1)i\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) + \frac{e^{(n+1)-i\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\left(\frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}}\right)\right) && \text{Multiplica por Uno ;)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) && \text{Expande} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) && \text{Organizando, gracias denominador común} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} + 1\right) && \text{Simplificar} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta}-e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} + 1\right) && \text{Añadimos esto} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} + 1\right) && \text{Recuerda que } \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Ecuaciones y Raíces

5.1. n-Raíces de un Numero Complejo

En general decir que un número w es un raíz enesíma de un número complejo $z \in \mathbb{C} - \{\ 0\ \}$ es que cumple que:

$$w^n = z$$

Donde obviamente $n \in \mathbb{Z}^+$.

5.1.1. Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 5.1.1 *Teorema Fundamental del Álgebra Todo polinomio de grado n tiene mínimo 1 raíz*

No desmotraremos este asombroso teorema por ahora, pero si un colorario (específicamente) en el campo de los complejos: "Un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces".

5.1.2. Encontrar las Raíces de un Número Complejo

Teorema 5.1.2 *Existen exactamente n raíces para $w^n = z$ donde $w, z \in \mathbb{C}$*

Suponiendo a $z = (r, \theta)$ entonces las podemos encontrar tan fácil como:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5.1}$$

Demostración:

Tengamos dos números: $z = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$ y $w = p\left[\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right]$

Entonces de la ecuación decir $w^n = z$ es lo mismo que decir que:

$$\left(p\left[\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right]\right)^n = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$$
$$p^n\left[\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right]^n = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$$

De esta ecuación tenemos que:

- $p^n = r$

  Por lo tanto podemos definir a $p = \sqrt{r}$ donde $\sqrt{r}$ es la raíz enesíma del módulo de dicho número.

- $\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$

  Gracias a $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ Por lo tanto podemos decir que:

  - $\cos(n\theta) = \cos(\phi)$
  - $\sin(n\theta) = \sin(\phi)$

  Y gracias a que ambas funciones son periodicas cada 2π, por lo tanto:

  - $\sin(\phi) = \sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$
  - $\cos(\phi) = \cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$

Y finalmente podemos generalizar los resultados como:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)\right] \tag{5.2}$$

Parte II

Funciones Complejas

Capítulo 6

Funciones Complejas

6.1. Funciones en General

Cualquier función compleja $w = f(z)$ puede ser representada como:

$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $x, y \in \mathbb{R}$

Es decir donde $u(x, y), v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ahora que las hemos definido formalmente podemos mostar las funciones complejas mas famosas.

6.2. Funciones Hiperbolicas $cosh(x)$ y $senh(x)$

A ver, antes que nada, estas no son funciones complejas en si, pero nos van a servir mucho.

Recuerda que dijimos que:

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\begin{aligned}
cos(ix) &= \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} \\
&= \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} \\
&= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\
&= cosh(x)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
sen(ix) &= \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} \\
&= \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} \\
&= \frac{-1}{2i} e^{x} - e^{-x} \\
&= \frac{i}{2} e^{x} - e^{-x} \\
&= i \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \right) \\
&= i \cdot senh(x)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Estas funciones tiene unas propiedades bien locas como:

- $sinh(x)^2 + cosh(x)^2 = 1$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
cosh(x)^2 - sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{4}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) + \left(\frac{-e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + -e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{4}{4}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

6.3. Trigonometricas Complejas: $cos(z)$ y $sin(z)$

$$
\begin{aligned}
cos(a + bi) &= cos(a)cos(bi) - sen(a)sen(bi) \\
&= cos(a)cosh(b) - i(sen(a)senh(b))
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

$$
\begin{aligned}
sin(a + bi) &= sin(a)cos(bi) + cos(a)sen(bi) \\
&= sin(a)cosh(b) + i(cos(a)senh(i))
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

6.4. Funciones e^z y $Ln(z)$

La función exponencial es demasiado sencilla de definir:

$$\begin{aligned} e^{a+bi} &= e^a e^{bi} \\ &= e^a \cos(b) + i \sin(b) \\ &= e^a \cos(b) + ie^a \sin(b) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Vamos a definir de manera completamente arbitraria al logaritmo de un número complejo:

$$Ln(z) = ln(|z|) + iArg(z) \tag{6.6}$$

Esta definición nos permite que esta nueva función herede las propiedades comunes del logaritmo.

6.5. $z_1^{z_2}$

Gracias a la definición podemos definir esta operación como:

$$\begin{aligned} z_1^{z_2} &= (z_1)^a + (z_2)^{bi} \\ &= (z_1)^a e^{Ln(z_2^{bi})} \\ &= (z_1)^a e^{bi \cdot Ln(z_2)} \end{aligned}$$

Capítulo 7

Límites

7.1. Límites en Cálculo Real

Antes de empezar a hablar sobre como podemos definir el límite en el campo de los complejos, veamos como llegamos a esa definición en los números reales.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{7.1}$$

De manera completamente informal podemos decir que el Límite de arriba es cierto si cuando $f(x)$ se acerca a L, x se acerca a a.

Es decir, si se acerca, la distancia entre $f(x)$ y L y x y a cada vez se va haciendo más pequeña, lo cuando lo podemos añadir para hacer a la definición más precisa.

Límite: $|f(x) - L|$ se hace casi cero cuando $|x - a|$ se acerca a cero.

Ahora simplemente vamos a formalizar lo que significa pequeño:

- δ hablará de lo pequeño que será $|x - a|$
- ϵ hablará de lo pequeño que será $|f(x) - L|$

Por lo tanto estamos listo para la definición formal en todo su esplendor:

7.1.1. Definición Formal

- En forma geométrica, si a es un punto en la recta númerica, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee al eligir puntos lo bastante cercanos a a (excluyendo a $x = a$).
- Se dice que un número L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a si para todo número positivo ϵ (tan pequeño como se desee) se halla un número positivo δ (que por lo general depende de ϵ) tal que si$0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.
- Decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si se cumple que:

  $$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

Capítulo 8

Derivación

8.1. Definición Formal

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

8.2. Continuidad

Decimos que una función $f(z)$ es continua en un punto si y solo si:

- La función $f(z)$ tiene que estar valuado en z_0
- El $\lim_{z \to z_0} f(z)$ tiene que existir
- Ambos tienen que coincidir

8.3. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en Rectangular

Recuerda que el hecho de que una función $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ sea diferenciable nos da grandes restricciones sobre como son $u(x, y), v(x, y)$, veamos que dichas restricciones salen de la misma definición:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x\Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

Además sabemos que si es diferenciable, los límites tiene que coincidir sin importar de por donde nos acercamos al valor, por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x\Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] \end{aligned}$$

Y si te das cuentas, estos dos límites estan mostrando derivadas parciales, así que al igualar ambas tenemos que:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

Por lo tanto podemos comparar la parte real e imaginaria como:

- $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$

Estas son conocidas como las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por lo tanto formalizamos como que una condición necesaria para que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región es que cumplan las Ecucaciones de Cauchy-Riemann.

8.4. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en forma Polar

8.4.1. Demostración usando Rectangular

Sea una función $f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ ananlítica, entonces se satisface las ecuaciones en forma rectangular:

- $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

Y dado que $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, entonces:

- $r(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\theta(x,y) = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

y también tenemos que:

- $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$
- $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$

Ahora, hay que demostrar estas 4 ecuaciones:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\theta) \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\theta) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin(\theta)}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(2x) \\
&= x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\cos(\theta)\left(r^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\cos(\theta)\, r^{-1} \\
&= \cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(2y) \\
&= y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\sin(\theta)\left(r^2\right)^{\frac{-1}{2}} \\
&= r\sin(\theta)\, r^{-1} \\
&= \sin(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{-y}{x^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{-y}{x^2} \\
&= \frac{-y}{y^2+x^2} \\
&= \frac{-r\sin(\theta)}{r^2} \\
&= \frac{-\sin(\theta)}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x}{y^2+x^2} \\
&= \frac{r\cos(\theta)}{r^2} \\
&= \frac{\cos(\theta)}{r}
\end{aligned}$$

Entonces usando la gran regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(r,\theta)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} && \text{Regla de la Cadena} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r} && \text{Sustituyendo} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(r,\theta)}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} && \text{Regla de la Cadena} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r} && \text{Sustituyendo} \end{aligned}$$

Ahora de las ecuaciones de Cauchy - Riemann tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right) \\ &= \cos(\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\right) + \sin(\theta)\left(-\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

Y ya que $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ son linealmente independientes (si no me creen intenten hacer el Wroksiano, porque yo no lo intentaré) tenemos que todo lo que las multiplique tiene que ser cero, es decir:

Tenemos que $0 = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}$ por lo que un simple despeje tenemos que: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$

Tenemos que $0 = -\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r}\frac{1}{r}$ por lo que un simple despeje tenemos que: $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$

Por lo tanto tenemos que:

- $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$
- $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

8.4.2. Comprobación usando Rectangular

Sea una función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica, entonces se satisface las ecuaciones en forma rectangular:

- $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

Y dado que $z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, entonces:

- $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$
- $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$

Entonces usando la gran regla de la cadena tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} && \text{Regla de la Cadena} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial r\cos(\theta)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial r\sin(\theta)}{\partial r} && \text{Expandamos} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta) && \text{Resolvemos} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} r\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r\sin(\theta)\right) && \text{Creamos una r mágica} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial y} r\cos(\theta) - \frac{\partial v}{\partial x} r\sin(\theta)\right) && \text{Usando Cauchy - Riemann} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - r\sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y} r\cos(\theta)\right) && \text{Reordenamos} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) && \text{Ve que son iguales} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) && \text{Regla de la Cadena a la inversa}
\end{aligned}
$$

De manera analoga tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} && \text{Regla de la Cadena} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial r\cos(\theta)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial r\sin(\theta)}{\partial r} && \text{Expandamos} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\sin(\theta) && \text{Resolvemos} \\
&= \frac{-1}{r}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} r\cos(\theta) - \frac{\partial v}{\partial y} r\sin(\theta)\right) && \text{Creamos una r mágica} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y} r\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial x} r\sin(\theta)\right) && \text{Usando Cauchy - Riemann} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos(\theta)\right) && \text{Reordenamos} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) && \text{Ve que son iguales} \\
&= \frac{-1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) && \text{Regla de la Cadena a la inversa}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que:

- $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\right)$
- $\dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{-1}{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)$