Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Avanzadas

# Análisis Complejo

Una Pequeña (Gran) Introducción

**Autores:**
Rosas Hernandez Oscar Andrés
Lopez Manriquez Angel

# Índice general

# Parte I

# Números Complejos

# Capítulo 1

# Definiciones

## 1.1. Definición de Números Complejos

**Definición 1.1.1 (Números Complejos)** *Definamos al Conjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *como:*

$$\mathbb{C} = \left\{ \ a + bi \ \mid \ a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \ \right\} \tag{1.1}$$

Podemos usar la notación $a + bi$, $a + ib$ y $(a, b)$ de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool pero la ultima mas concreta).

## 1.2. Términos Comúnes

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo $i$ para simplificar $i = \sqrt{-1}$, de ahí la propiedad famosa $i^2 = -1$.
- **Parte Real:** Considere el complejo $z = a+bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Im(z) = b$

# Capítulo 2

# Aritmética Compleja

## 2.1. Operaciones Básicas

Si $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ entonces:

- **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{2.1}$$

- **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \tag{2.2}$$

- **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \end{aligned} \tag{2.3}$$

- **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \qquad z_2 \neq 0 \tag{2.4}$$

## 2.2. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

- **Definición 2.2.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \tag{2.5}$$

- **Definición 2.2.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{2.6}$$

- **Definición 2.2.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C},\ \ \forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \tag{2.7}$$

- **Definición 2.2.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ \exists z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \tag{2.8}$$

- **Definición 2.2.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{gathered} \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \ z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1) \end{gathered} \tag{2.9}$$

- **Definición 2.2.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \tag{2.10}$$

- **Definición 2.2.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \tag{2.11}$$

- **Definición 2.2.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C},\ \ \forall z_1 \in \mathbb{C},\ \ 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \tag{2.12}$$

- **Definición 2.2.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\},\ \ \exists z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 1 \tag{2.13}$$

v

## 2.3. Cero y la Identidad

- Denotamos a $0 = 0 + 0i$ como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C},\ \ z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a $1 = 1 + 0i$ como el elemento identidad multiplicatica, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C},\ \ z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

## 2.4. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es simplemente $\overline{z} = a - bi$

Además tenemos que:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{\Pi_{j=1}^{n} z_j} = \prod_{j=1}^{n} \overline{z_j}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

## 2.5. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que el Módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es simplemente $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$

- **Lemma 2.5.1** $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

  ***Demostración:***

  *Ya habiamos visto que* $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

  *Entonces podemos ver que* $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)$ *(recuerda que* $Im(z)^2 > 0$*) por lo tanto tenemos que* $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$ *ya que* $|Re(z)| = Re(z)$

  *Entonces podemos ver que* $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)$ *(recuerda que* $Re(z)^2 > 0$*) por lo tanto tenemos que* $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$ *ya que* $|Im(z)| = Im(z)$

- **Lemma 2.5.2** $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$

  ***Demostración:***

  *Ya sabemos que* $|z + \overline{z}|^2 = z \cdot \overline{z}$ *y recuerda que* $2Re(z) = z + \overline{z}$, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ *entonces tenemos que:*

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\bar{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + z_2\overline{z_2} \\
&= z_1\bar{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2
\end{aligned}
$$

- **Lemma 2.5.3** $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$

  ***Demostración:***

  *Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que* $|z| = |\overline{z}|$*:*

$$
\begin{aligned}
|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}
$$

- **Lemma 2.5.4 (Desigualdad del Triángulo)** $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

  ***Demostración:***

  *Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al réves:*

  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *si y solo si* $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ *y además* $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$ *lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.*

  *Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si* $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$ *donde* $k \geq 0$.

  *Ya sabemos que* $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$ *y* $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$, *ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como* $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

  *Ahora veamos que:*

  $$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= \left[|z_1|^2 + |z_2|^2\right] + 2Re(z_1\overline{z_2}) = \left[(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}|\right] + 2Re(z_1\overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

  *Donde* $k = 2Re(z_1\overline{z_2}) - 2|z_1\overline{z_2}|$, *ahora además podemos decir que si* $k \geq 0$ *entonces así lo será* $\frac{k}{2}$, *por lo tanto:* $\frac{k}{2} = Re(z_1\overline{z_2}) - |z_1\overline{z_2}|$, *pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica* $w = z_1\overline{z_2}$ *y tenemos que* $Re(w) - |w|$. *Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que* $|Re(z)| \leq |z|$, *así que por lo tanto* $k \geq 0$ *y la propiedad siempre se cumple.*

  *Sabemos que* $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ *además ahora sabemos que:* $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$ *y como* $|z| = |-z|$ *Que es lo mismo que* $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

  *Y listo, todas las propiedades están listas.*

  *Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que:* $|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$

## 2.6. Inverso Multiplicativo

Si $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{\ 0\ \}$ entonces podemos denotar al inverso de $z$ como $z^{-1}$

Creo que es más que obvio que $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi}$.

- Podemos escribir a $z^{-1}$ como $\dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$

  **Demostración**:

  Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right) = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right) i \tag{2.14}$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{2.15}$$

  **Recuerda**: $\overline{z} = a - bi$ y $|z| = a^2 + b^2$

## 2.7. n-Raíces de un Numero $z$

En general decir que un número $w$ es un raíz enesíma de un número complejo $z$ (siempre que $z \neq 0$) si cumpla que:

$$w^n = z \tag{2.16}$$

Donde obviamente $n \in \mathbb{Z}^+$.

**Teorema 2.7.1** *Existen exactamente $n$ raíces para $w^n = z$*

*Y puedes encontrar las $n$ raíces variando $k$ de 0 a $n$:*

$$w_k = n\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) \tag{2.17}$$

***Demostración****:*

*Tengamos dos números:*

- $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
- $w = p(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$

*Entonces de la ecuación:*

$$\begin{aligned} w^n &= z \\ [p(\cos(\phi) + i\sin(\phi))]^n &= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \qquad \textit{Simplemente sustituimos} \end{aligned}$$

*Tenemos que:*

- $p^n = r$

  *Por lo tanto podemos definir a $p = \sqrt{n}$ donde $\sqrt{n}$ es la única raíz positiva de un número $r \in \mathbb{R}$.*

- $\cos(\theta) + i\sin(\theta)^n = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$

  *Gracias por* $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ *Por lo tanto podemos decir que:*

  - $\cos(n\theta) = \cos(\phi)$
  - $\sin(n\theta) = \sin(\phi)$

  *Por* $\phi = \dfrac{\theta + 2(n+m)\pi}{n} = \dfrac{\theta + 2mn\pi}{n} + 2\pi$ *y por lo tanto tener que:*

  - $\sin(\phi) = \sin\left(\dfrac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$
  - $\cos(\phi) = \cos\left(\dfrac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$

*Por lo tanto podemos generalizar los resultados como:*

$$w_k = n\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) \tag{2.18}$$

# Capítulo 3

# Forma Polar y Argumentos

## 3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla $(r, \theta)$ , donde $r \geq 0$ y $\theta$ esta medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

### 3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como $(r, \theta)$, donde $r \geq 0$ y $\theta$ medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r\cos(\theta)$
- $b = r\sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

### 3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como $(a + bi)$, entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan(\frac{b}{a})^{-1} & \text{si } a > 0 \\ \tan(\frac{b}{a})^{-1} + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan(\frac{b}{a})^{-1} - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

## 3.2. Argumento de $z$

Definimos al argumento de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $\theta = arg(z)$, es decir, al final del día $arg(z)$ es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

- $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Pero como sin y cos con funciones periodicas con $2\pi$, es decir $arg(z)$ no es único.

Además para encontrarlo usamos $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$ pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

### Argumento Principal

Ya que $arg(z)$ es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de $z$ como $Arg(z)$ y que será el ángulo que cumpla con que:

- $\cos(Arg(z)) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $\sin(Arg(z)) = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $-\frac{\pi}{2} < Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$

Podemos probar que $Arg(z)$ para alguna $z$ cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a $arg(z)$ como:

$$arg(z) = \{ \ Arg(z) + 2n\pi \ \mid \ n \in \mathbb{Z} \ \} \tag{3.1}$$

## 3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como $z_1 = (r_1, \theta_1)$ y $z_1 = (r_2, \theta_2)$ es decir $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)$ entonces tenemos que:

- **Producto de Números Complejos:**
  $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$

  **Demostración**:

  Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

  $$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$
  $$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))i]$$

  Usando las leyes de senos y cosenos:

  - $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

  Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

- **División de Números Complejos:**
  $\frac{z_1}{z_2} = [(\frac{r_1}{r_2}), (\theta_1 - \theta_2)]$

  **Demostración**:

  Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ y hacer:

  $$\begin{aligned}
  \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\overline{z_2}}{(r_2)^2} \\
  &= \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \overline{z_2} = \frac{1}{(r_2)^2}(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\
  &= \frac{1}{(r_2)^2}(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i \\
  &= \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))i]
  \end{aligned}$$

  Usando las leyes de senos y cosenos:

  - $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  - $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

  Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

## 3.4. Ley de Moivre's

$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}$

**Demostración**:

Se puede dar una demostracion muy sencilla, no se porque los libros usan induccion matematica para demostrar el teorema de Moivre... en fin, expresando a $z$ en su forma polar y usando la formula de Euler, tenemos:

$$z^n = (r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = r^n(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \tag{3.2}$$

$$= r^n e^{n\theta i} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \tag{3.3}$$

$$\tag{3.4}$$

# Capítulo 4

# Forma Exponencial

## 4.1. Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Esta formula sale de a partir de la serie de McLaurin para la funcion exponencial

$$e^k = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots$$

Pasa algo muy interesante al hacer $k = i\theta$, pues vemos que se hayan las series de McLaurin del seno y coseno:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{aligned}$$

## 4.2. Identidad de Lagrange

$$1 + \cos(1\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1\right) \tag{4.1}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) && \text{Recuerda que: } \cos(x) = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1}\right) && \text{Recuerda que: } \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \iff |r| < 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1}\left(\frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}}\right)\right) && \text{Multiplica por Uno ;)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) && \text{Expande} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right) && \text{Organizando, gracias denominador común} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + 1\right) && \text{Simplificar} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} + 1\right) && \text{Añadimos esto} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1\right) && \text{Recuerda que } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
\end{aligned}
$$

# Capítulo 5

# Funciones complejas

Cualquier funcion compleja $w = f(z)$ puede ser representada como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $x, y \in \mathbb{R}$