

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS

---

# Análisis Complejo

---

Una Pequeña (Gran) Introducción

**AUTOR:**

Rosas Hernandez Oscar Andrés

# Índice general

<b>I</b>	<b>Números Complejos</b>	<b>2</b>
<b>1.</b>	<b>Definiciones</b>	<b>3</b>
1.1.	Definición de Números Complejos . . . . .	4
1.2.	Términos Comunes . . . . .	4
<b>2.</b>	<b>Aritmética Compleja</b>	<b>5</b>
2.1.	Operaciones Básicas . . . . .	6
2.2.	Campo de los Complejos . . . . .	7
2.3.	Cero y la Identidad . . . . .	8
2.4.	Conjugados . . . . .	8
2.5.	Módulo o Valor Absoluto . . . . .	9
2.6.	Inverso Multiplicativo . . . . .	11
<b>3.</b>	<b>Forma Polar y Argumentos</b>	<b>12</b>
3.1.	Forma Polar . . . . .	13
3.1.1.	De forma Polar a forma Rectangular . . . . .	13
3.1.2.	De forma Rectangular a forma Polar . . . . .	13
3.2.	Argumento de $z$ . . . . .	14
3.3.	Leyes de Aritmetica . . . . .	15

# Parte I

## Números Complejos

# Capítulo 1

## Definiciones

## 1.1. Definición de Números Complejos

**Definición 1.1.1 (Números Complejos)** *Definamos al Conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  como:*

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \} \quad (1.1)$$

Podemos usar la notación  $a + bi$  y  $a + ib$  de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool).

## 1.2. Términos Comunes

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo  $i$  para simplificar  $i = \sqrt{-1}$ , de ahí una propiedad muy famosa de que  $i^2 = -1$ .
- **Parte Real:** Considere el número  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , entonces decimos que  $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el número  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , entonces decimos que  $Im(z) = b$

## Capítulo 2

# Aritmética Compleja

## 2.1. Operaciones Básicas

Si  $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$  y  $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$  entonces:

■ **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (2.1)$$

■ **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \quad (2.2)$$

■ **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 + b_1b_2i^2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \end{aligned} \quad (2.3)$$

■ **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

*Vamos a necesitar además que  $z_2 \neq 0$  (muy obvio)*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_1b_2 - a_2b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \quad (2.4)$$

## 2.2. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

■ **Definición 2.2.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (2.5)$$

■ **Definición 2.2.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (2.6)$$

■ **Definición 2.2.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \quad (2.7)$$

■ **Definición 2.2.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \quad (2.8)$$

■ **Definición 2.2.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_2 + z_3) \cdot z_1 &= (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

■ **Definición 2.2.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (2.10)$$

■ **Definición 2.2.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (2.11)$$

■ **Definición 2.2.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \quad (2.12)$$

■ **Definición 2.2.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = 1 \quad (2.13)$$



## 2.3. Cero y la Identidad

- Denotamos a  $0 = 0 + 0i$  como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple  $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a  $1 = 1 + 0i$  como el elemento identidad multiplicativa, ya que se cumple  $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

## 2.4. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  es simplemente  $\bar{z} = a - bi$

Además tenemos que:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$
- $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2bi$
- $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

## 2.5. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que el Módulo de  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  es simplemente  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$
- **Lemma 2.5.1**  $|Re(z)| \leq |z|$  y  $|Im(z)| \leq |z|$

*Demostración:*

Ya habíamos visto que  $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

Entonces podemos ver que  $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)^2$  (recuerda que  $Im(z)^2 \geq 0$ ) por lo tanto tenemos que  $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$  ya que  $|Re(z)| = Re(z)$

Entonces podemos ver que  $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)^2$  (recuerda que  $Re(z)^2 \geq 0$ ) por lo tanto tenemos que  $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$  ya que  $|Im(z)| = Im(z)$

- **Lemma 2.5.2**  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2)$

*Demostración:*

Ya sabemos que  $|z + \bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$  y recuerda que  $2Re(z) = z + \bar{z}$ ,  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$  entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

- **Lemma 2.5.3**  $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

*Demostración:*

Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que  $|z| = |\bar{z}|$ :

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

■ **Lemma 2.5.4 (Desigualdad del Triángulo)**  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

*Demostración:*

*Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al réves:*

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  si y solo si  $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$  y además  $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$  lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si  $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$  donde  $k \geq 0$ .

Ya sabemos que  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$  y  $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}|$ , ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como  $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Ahora veamos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= [|z_1|^2 + |z_2|^2] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = [(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}|] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

Donde  $k = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - 2|z_1 \overline{z_2}|$ , ahora además podemos decir que si  $k \geq 0$  entonces así lo será  $\frac{k}{2}$ , por lo tanto:  $\frac{k}{2} = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - |z_1 \overline{z_2}|$ , pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica  $w = z_1 \overline{z_2}$  y tenemos que  $\operatorname{Re}(w) - |w|$ . Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ , así que por lo tanto  $k \geq 0$  y la propiedad siempre se cumple.

Sabemos que  $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$  además ahora sabemos que:  $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$  y como  $|z| = |-z|$  Que es lo mismo que  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ .

Y listo, todas las propiedades están listas.

Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que:  $|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$

## 2.6. Inverso Multiplicativo

Si  $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$  entonces podemos denotar al inverso de  $z$  como  $z^{-1}$

Creo que es más que obvio que  $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$ .

- Podemos escribir a  $z^{-1}$  como  $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

**Demostración:**

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \left( \frac{a - bi}{a - bi} \right) = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) - \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \quad (2.14)$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.15)$$

**Recuerda:**  $\bar{z} = a - bi$  y  $|z| = a^2 + b^2$

## Capítulo 3

### Forma Polar y Argumentos

### 3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla  $(r, \theta)$ , donde  $r \geq 0$  y  $\theta$  está medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

#### 3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como  $(r, \theta)$ , donde  $r \geq 0$  y  $\theta$  medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r \cos(\theta)$
- $b = r \sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es  $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

#### 3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como  $(a + bi)$ , entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

## 3.2. Argumento de $z$

Definimos al argumento de un número  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  como  $\theta = \arg(z)$ , es decir, al final del día  $\arg(z)$  es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\theta) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Pero como sin y cos son funciones periódicas con  $2\pi$ , es decir  $\arg(z)$  no es único.

Además para encontrarlo usamos  $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$  pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$  por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

### Argumento Principal

Ya que  $\arg(z)$  es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de  $z$  como  $\text{Arg}(z)$  y que será el ángulo que cumpla con que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\text{Arg}(z)) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\text{Arg}(z)) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Podemos probar que  $\text{Arg}(z)$  para alguna  $z$  cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a  $\arg(z)$  como:

$$\arg(z) = \{ \text{Arg}(z) + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad (3.1)$$

### 3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como  $z_1 = (r_1, \theta_1)$  y  $z_2 = (r_2, \theta_2)$  es decir  $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$  y  $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$  entonces tenemos que:

■ **Producto de Números Complejos:**

$$z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$$

**Demostración:**

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

Podemos reducirlo a:  $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$  y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que  $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **División de Números Complejos:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[ \left( \frac{r_1}{r_2} \right), (\theta_1 - \theta_2) \right]$$

**Demostración:**

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  y hacer:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{\bar{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\bar{z_2}}{(r_2)^2} = \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \bar{z_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

Podemos reducirlo a:  $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$  y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que  $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$