

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS

Análisis Complejo

Una Pequeña (Gran) Introducción

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andrés

Índice general

I	Números Complejos	2
1.	Definiciones	3
1.1.	Definición de Números Complejos	4
1.2.	Términos Comunes	4
2.	Aritmética Compleja	5
2.1.	Operaciones Básicas	6
2.2.	Campo de los Complejos	7
2.3.	Cero y la Identidad	8
2.4.	Conjugados	8
2.5.	Módulo o Valor Absoluto	9
2.6.	Inverso Multiplicativo	11
2.7.	n-Raíces de un Numero z	12
3.	Forma Polar y Argumentos	13
3.1.	Forma Polar	14
3.1.1.	De forma Polar a forma Rectangular	14
3.1.2.	De forma Rectangular a forma Polar	14
3.2.	Argumento de z	15
3.3.	Leyes de Aritmetica	16
3.4.	Ley de Moivre's	18
4.	Forma Exponencial	19
4.1.	Fórmula de Euler	20

4.2. Identidad de Lagrange	21
--------------------------------------	----

Parte I

Números Complejos

Capítulo 1

Definiciones

1.1. Definición de Números Complejos

Definición 1.1.1 (Números Complejos) *Definamos al Conjunto de los números complejos \mathbb{C} como:*

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \} \quad (1.1)$$

Podemos usar la notación $a + bi$ y $a + ib$ de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool).

1.2. Términos Comunes

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo i para simplificar $i = \sqrt{-1}$, de ahí una propiedad muy famosa de que $i^2 = -1$.
- **Parte Real:** Considere el número $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el número $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Im(z) = b$

Capítulo 2

Aritmética Compleja

2.1. Operaciones Básicas

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces:

■ **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (2.1)$$

■ **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \quad (2.2)$$

■ **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 + b_1b_2i^2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \end{aligned} \quad (2.3)$$

■ **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

Vamos a necesitar además que $z_2 \neq 0$ (muy obvio)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_1b_2 - a_2b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \quad (2.4)$$

2.2. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

■ **Definición 2.2.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (2.5)$$

■ **Definición 2.2.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (2.6)$$

■ **Definición 2.2.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \quad (2.7)$$

■ **Definición 2.2.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \quad (2.8)$$

■ **Definición 2.2.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_2 + z_3) \cdot z_1 &= (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

■ **Definición 2.2.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (2.10)$$

■ **Definición 2.2.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (2.11)$$

■ **Definición 2.2.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \quad (2.12)$$

■ **Definición 2.2.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = 1 \quad (2.13)$$

2.3. Cero y la Identidad

- Denotamos a $0 = 0 + 0i$ como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a $1 = 1 + 0i$ como el elemento identidad multiplicativa, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

2.4. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es simplemente $\bar{z} = a - bi$

Además tenemos que:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$
- $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2bi$
- $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

2.5. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que el Módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es simplemente $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$
- **Lemma 2.5.1** $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

Demostración:

Ya habíamos visto que $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)^2$ (recuerda que $Im(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Re(z)| = Re(z)$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)^2$ (recuerda que $Re(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Im(z)| = Im(z)$

- **Lemma 2.5.2** $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2)$

Demostración:

Ya sabemos que $|z + \bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$ y recuerda que $2Re(z) = z + \bar{z}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2 \bar{z}_2 \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

- **Lemma 2.5.3** $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

Demostración:

Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que $|z| = |\bar{z}|$:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

■ **Lemma 2.5.4 (Desigualdad del Triángulo)** $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración:

Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al réves:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ y además $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$ lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$ donde $k \geq 0$.

Ya sabemos que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$ y $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}|$, ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Ahora veamos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= [|z_1|^2 + |z_2|^2] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = [(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}|] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

Donde $k = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - 2|z_1 \overline{z_2}|$, ahora además podemos decir que si $k \geq 0$ entonces así lo será $\frac{k}{2}$, por lo tanto: $\frac{k}{2} = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - |z_1 \overline{z_2}|$, pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica $w = z_1 \overline{z_2}$ y tenemos que $\operatorname{Re}(w) - |w|$. Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, así que por lo tanto $k \geq 0$ y la propiedad siempre se cumple.

Sabemos que $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ además ahora sabemos que: $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$ y como $|z| = |-z|$ Que es lo mismo que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

Y listo, todas las propiedades están listas.

Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que: $|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$

2.6. Inverso Multiplicativo

Si $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$ entonces podemos denotar al inverso de z como z^{-1}

Creo que es más que obvio que $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$.

- Podemos escribir a z^{-1} como $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Demostración:

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \left(\frac{a - bi}{a - bi} \right) = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \quad (2.14)$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.15)$$

Recuerda: $\bar{z} = a - bi$ y $|z| = a^2 + b^2$

2.7. n-Raíces de un Numero z

En general decir que un número w es un raíz enésima de un número complejo z (siempre que $z \neq 0$) si cumpla que:

$$w^n = z \quad (2.16)$$

Donde obviamente $n \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema 2.7.1 *Existen exactamente n raíces para $w^n = z$*

Y puedes encontrar las n raíces variando k de 0 a n :

$$w_k = n\sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) \quad (2.17)$$

Demostración:

Tengamos dos números:

- $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
- $w = p(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$

Entonces de la ecuación:

$$w^n = z$$

$$[p(\cos(\phi) + i \sin(\phi))]^n = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \quad \text{Simplemente sustituimos}$$

Tenemos que:

- $p^n = r$

Por lo tanto podemos definir a $p = \sqrt[n]{r}$ donde $\sqrt[n]{r}$ es la única raíz positiva de un número $r \in \mathbb{R}$.

- $\cos(\theta) + i \sin(\theta)^n = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$

Gracias por $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ Por lo tanto podemos decir que:

- $\cos(n\theta) = \cos(\phi)$
- $\sin(n\theta) = \sin(\phi)$

Por $\phi = \frac{\theta + 2(n+m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2mn\pi}{n} + 2\pi$ y por lo tanto tener que:

- $\sin(\phi) = \sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$
- $\cos(\phi) = \cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right)$

Por lo tanto podemos generalizar los resultados como:

$$w_k = n\sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n}\right) \quad (2.18)$$

Capítulo 3

Forma Polar y Argumentos

3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ está medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r \cos(\theta)$
- $b = r \sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como $(a + bi)$, entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

3.2. Argumento de z

Definimos al argumento de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $\theta = \arg(z)$, es decir, al final del día $\arg(z)$ es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\theta) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Pero como \sin y \cos son funciones periódicas con 2π , es decir $\arg(z)$ no es único.

Además para encontrarlo usamos $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$ pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

Argumento Principal

Ya que $\arg(z)$ es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de z como $\text{Arg}(z)$ y que será el ángulo que cumpla con que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\text{Arg}(z)) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\text{Arg}(z)) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Podemos probar que $\text{Arg}(z)$ para alguna z cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a $\arg(z)$ como:

$$\arg(z) = \{ \text{Arg}(z) + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad (3.1)$$

3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como $z_1 = (r_1, \theta_1)$ y $z_2 = (r_2, \theta_2)$ es decir $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ y $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$ entonces tenemos que:

■ **Producto de Números Complejos:**

$$z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$$

Demostración:

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)) i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **División de Números Complejos:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right), (\theta_1 - \theta_2) \right]$$

Demostración:

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ y hacer:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\bar{z}_2}{(r_2)^2} \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \bar{z}_2 = \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2) i \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)) i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **Potencias de z :**

$$z^n = [(r^n), (n \cdot \theta)]$$

Demostración:

No considero a esto una demostración, pero si te das cuenta usando $z^2 = [(r^2), (\theta + \theta)]$.

Y cosas como $z^{-2} = [(r^{-2}), (-\theta - \theta)]$

3.4. Ley de Moivre's

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta)$$

Demostración:

Supongamos que tenemos un número donde $|z| = 1$ entonces $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ y al preguntar por z^n = tenemos que:

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta)$$

Capítulo 4

Forma Exponencial

4.1. Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \tag{4.1}$$

Ideas:

Esta formula sale de una serie infinita: $e^k = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots$

Pasa algo muy interesante al poner $k = i\theta$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{aligned}$$

4.2. Identidad de Lagrange

$$1 + \cos(1\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} + 1 \right) \quad (4.2)$$

Ideas:

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})$$

Recuerda que: $\cos(x) = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \right)$$

Recuerda que: $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \left(\frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}} \right) \right)$$

Multiplica por Uno ;)

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right)$$

Expande

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right)$$

Organizando, gracias denominador común

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + 1 \right)$$

Simplificar

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} + 1 \right)$$

Añadimos esto

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} + 1 \right)$$

Recuerda que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$