

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS

Análisis Complejo

Una Pequeña (Gran) Introducción

AUTORES:

Rosas Hernandez Oscar Andrés

Lopez Manriquez Angel

Índice general

I	Números Complejos	3
1.	Definiciones	4
1.1.	Definición de Números Complejos	5
1.2.	Definiciones Utiles	5
1.3.	Funciones Trigonometricos	6
1.3.1.	Evaluación Rápida	6
1.3.2.	Identidades Importantes	6
2.	Aritmética Compleja	7
2.1.	Operaciones Básicas	8
2.2.	Elemento Identidad	9
2.3.	Inverso Multiplicativo	9
2.4.	Campo de los Complejos	10
2.5.	Conjugados	11
2.6.	Módulo o Valor Absoluto	13
3.	Forma Polar y Argumentos	16
3.1.	Forma Polar	17
3.1.1.	De forma Polar a forma Rectangular	17
3.1.2.	De forma Rectangular a forma Polar	17
3.2.	Argumento de z	18
3.3.	Leyes de Aritmetica	19
3.4.	Ley de Moivre's	21

4. Forma Exponencial ó de Euler	22
4.1. Forma de Euler	23
4.1.1. e^z	23
4.1.2. Lemmas y Propiedades	24
4.2. Identidad de Lagrange	25
5. Ecuaciones y Raíces	26
5.1. n-Raíces de un Numero z	27
 II Funciones Complejas	 28
6. Funciones Complejas	29

Parte I

Números Complejos

Capítulo 1

Definiciones

1.1. Definición de Números Complejos

Definición 1.1.1 (Números Complejos) *Definamos al Conjunto de los números complejos \mathbb{C} como:*

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \} \quad (1.1)$$

Podemos usar la notación $a + bi$, $a + ib$ y (a, b) de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool pero la ultima mas concreta).

1.2. Definiciones Utiles

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo i para simplificar $i = \sqrt{-1}$, de ahí la propiedad famosa $i^2 = -1$.
- **Parte Real:** Considere el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Im(z) = b$

1.3. Funciones Trigonometricos

1.3.1. Evaluación Rápida

- $\cos(n \cdot \theta) = \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$
- $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0$
- $\sin(n \cdot \theta) = 0$
- $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \begin{cases} = 1 & \text{Si } n \text{ es par} \\ = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$

1.3.2. Identidades Importantes

- **Pitagórica:** $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \cos(a)\sin(b) \pm \sin(a)\cos(b)$

Capítulo 2

Aritmética Compleja

2.1. Operaciones Básicas

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces:

■ **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (2.1)$$

■ **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \quad (2.2)$$

■ **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 + b_1b_2i^2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \end{aligned} \quad (2.3)$$

■ **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_1b_2 - a_2b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \quad z_2 \neq 0 \quad (2.4)$$

2.2. Elemento Identidad

- Denotamos a $0 = 0 + 0i$ como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a $1 = 1 + 0i$ como el elemento identidad multiplicativa, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

2.3. Inverso Multiplicativo

Si $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$ entonces podemos denotar al inverso de z como z^{-1}

Creo que es más que obvio que $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$.

Pero además podemos escribir a z^{-1} como $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Demostración:

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \left(\frac{a - bi}{a - bi} \right) = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Gracias a lo anterior podemos escribirlo de distintas maneras:

- **De forma Rectangular:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \quad (2.5)$$

- **Con Magnitudes y Conjugados:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.6)$$

2.4. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

■ **Definición 2.4.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (2.7)$$

■ **Definición 2.4.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (2.8)$$

■ **Definición 2.4.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \quad (2.9)$$

■ **Definición 2.4.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \quad (2.10)$$

■ **Definición 2.4.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_2 + z_3) \cdot z_1 &= (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

■ **Definición 2.4.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (2.12)$$

■ **Definición 2.4.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (2.13)$$

■ **Definición 2.4.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \quad (2.14)$$

■ **Definición 2.4.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = 1 \quad (2.15)$$

2.5. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ que lo definimos como: $\bar{z} = a - bi$

Usando la definición podemos demostrar algunas propiedades muy importantes:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$

Demostración:

Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2\end{aligned}$$

Ahora para la parte mas general:

Creo que cuando $k = 1$ es demasiado sencillo hasta para escribirlo y lo que acabamos de demostrar es para cuando $k = 2$, por lo tanto lo único que tenemos que probar es que:

Si $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \cdots + \bar{z}_n$ se cumple entonces también lo hará $\overline{z_1 + \cdots + z_{n+1}} = \bar{z}_1 + \cdots + \bar{z}_{n+1}$

Lo cual se logra dandote cuenta que $z_{n+1} = \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}$ y dandote cuenta que volviste al caso de $k = 2$.

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ y mas general tenemos que: $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{z}_n$

Demostración:

Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 \cdot a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = (a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) \\ &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\end{aligned}$$

Ahora para la parte mas general se demuestra de manera casi identica a la propiedad pasada.

$$\blacksquare \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Demostración:

Definidos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z_1 \cdot \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)i} \\ &= \overline{z_1} \cdot \left[\overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)} + \overline{\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)i}\right] = \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i\right] = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} \\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \overline{\overline{z}} = z$$

Demostración: $\overline{\overline{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi$

$$\blacksquare z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Demostración: $z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

Demostración:

Dado a $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \frac{z + \overline{z}}{2} &= \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a \\ &= \operatorname{Re}(a + bi) \end{aligned}$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Demostración:

Dado a $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \frac{z - \overline{z}}{2i} &= \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b \\ &= \operatorname{Im}(a + bi) \end{aligned}$$

2.6. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que definir el Módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

Demostración:

Ya habíamos visto que $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)^2$ (recuerda que $Im(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Re(z)| = Re(z)$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)^2$ (recuerda que $Re(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Im(z)| = Im(z)$

- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2)$

Demostración:

Ya sabemos que $|z + \bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$ y recuerda que $2Re(z) = z + \bar{z}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

- $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

Demostración:

Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que $|z| = |\bar{z}|$:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

■ **Desigualdad del Triángulo:** $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración:

Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al revés:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ y además $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$ lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$ donde $k \geq 0$.

Ya sabemos que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$ y $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$, ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Ahora veamos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= [|z_1|^2 + |z_2|^2] + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = [(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}|] + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

Donde $k = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) - 2|z_1\overline{z_2}|$, ahora además podemos decir que si $k \geq 0$ entonces así lo será $\frac{k}{2}$, por lo tanto: $\frac{k}{2} = \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) - |z_1\overline{z_2}|$, pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica $w = z_1\overline{z_2}$ y tenemos que $\operatorname{Re}(w) - |w|$. Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, así que por lo tanto $k \geq 0$ y la propiedad siempre se cumple.

Sabemos que $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ además ahora sabemos que: $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$ y como $|z| = |-z|$ Que es lo mismo que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

Y listo, todas las propiedades están listas.

Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$$

$$\blacksquare \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Demostración:

Recuerda que: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ Entonces $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \bar{z}_1 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \sqrt{z_2 \bar{z}_2} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Demostración:

Usando la idea de que: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right| &= \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right| \\ &= |z_1| \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)} \\ &= |z_1| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \cdot \frac{1}{|a + bi|} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Forma Polar y Argumentos

3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ está medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como (r, θ) , donde $r \geq 0$ y θ medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r \cos(\theta)$
- $b = r \sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como $(a + bi)$, entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

3.2. Argumento de z

Definimos al argumento de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como $\theta = \arg(z)$, es decir, al final del día $\arg(z)$ es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\theta) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Pero como \sin y \cos son funciones periódicas con 2π , es decir $\arg(z)$ no es único.

Además para encontrarlo usamos $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$ pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

Argumento Principal

Ya que $\arg(z)$ es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de z como $\text{Arg}(z)$ y que será el ángulo que cumpla con que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\text{Arg}(z)) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\text{Arg}(z)) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Podemos probar que $\text{Arg}(z)$ para alguna z cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a $\arg(z)$ como:

$$\arg(z) = \{ \text{Arg}(z) + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad (3.1)$$

3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como $z_1 = (r_1, \theta_1)$ y $z_2 = (r_2, \theta_2)$ es decir $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ y $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$ entonces tenemos que:

■ **Producto de Números Complejos:**

$$z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$$

Demostración:

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **División de Números Complejos:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right), (\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Demostración:

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ y hacer:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \frac{\bar{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\bar{z_2}}{(r_2)^2} \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \bar{z_2} = \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a: $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **Simplificar Potencias de z :**

$$z^n = [(r^n), (n \cdot \theta)]$$

Ideas:

No considero a esto una demostración, por basta con darte cuenta que z^n es $z \cdot z \cdot z \dots$ n veces.

Por lo tanto puedes aplicar la regla: $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$ que ya que $z_1 = z_2$ se puede simplificar a $z \cdot z = [2r, 2\theta]$.

Y llegar a ese resultado mediante la inducción.

3.4. Ley de Moivre's

$$z^n = r^n (\cos (n \cdot \theta) + i \sin (n \cdot \theta)) \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

Se puede dar una demostracion muy sencilla, no se porque los libros usan induccion matematica para demostrar el teorema de Moivre...

En fin, expresando a z en su forma polar y usando la fórmula de Euler, tenemos:

$$\begin{aligned} z^n &= (a + bi)^n \\ &= [r (\cos (\theta) + i \sin (\theta))]^n \\ &= r^n (\cos (\theta) + i \sin (\theta))^n \\ &= r^n (e^{\theta i})^n \\ &= r^n e^{(\theta i)n} \\ &= r^n e^{(n\theta)i} \\ &= r^n (\cos (n \cdot \theta) + i \sin (n \cdot \theta)) \end{aligned}$$

Capítulo 4

Forma Exponencial ó de Euler

4.1. Forma de Euler

Podemos también expresar un número complejo de la siguiente manera:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (4.1)$$

Ideas:

Esta fórmula sale de a partir de las Series de Taylor para la función exponencial:

$$e^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots \quad (4.2)$$

Pasa algo muy interesante al hacer $k = i\theta$, pues vemos que aparecen claramente la forma en que tenemos de representar a las funciones seno y coseno como polinomios infinitos:

$$\begin{aligned} \blacksquare \sin(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \blacksquare \cos(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + \left(-\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \dots\right) i \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{aligned}$$

4.1.1. e^z

También podemos ver más generalmente que e^z se puede reducir a:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)) = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

4.1.2. Lemmas y Propiedades

$$\blacksquare \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] + [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) + \cos(\theta) - i \sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2 \cos(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Tip: $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ y $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Y si simplificamos

$$\blacksquare \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] - [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) - \cos(\theta) + i \sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2i \sin(\theta)}{2i} \\ &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Tip: $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ y $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Y si simplificamos

4.2. Identidad de Lagrange

$$1 + \cos(1\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1 \right) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) && \text{Recuerda que: } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \right) && \text{Recuerda que: } \sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \left(\frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}} \right) \right) && \text{Multiplica por Uno ;)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) && \text{Expande} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) && \text{Organizando, gracias denominador común} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + 1 \right) && \text{Simplificar} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} + 1 \right) && \text{Añadimos esto} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1 \right) && \text{Recuerda que } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Capítulo 5

Ecuaciones y Raíces

5.1. n-Raíces de un Numero z

En general decir que un número w es un raíz enésima de un número complejo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ se cumpla que:

$$w^n = z$$

Donde obviamente $n \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema 5.1.1 *Existen exactamente n raíces para $w^n = z$*

Que puedes encontrar con:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

Demostración:

Tengamos dos números: $z = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$ y $w = p [\cos(\phi) + i \sin(\phi)]$

Entonces de la ecuación decir $w^n = z$ es lo mismo que decir que:

$$(p [\cos(\phi) + i \sin(\phi)])^n = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \quad p^n [\cos(\phi) + i \sin(\phi)]^n = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

De esta ecuación tenemos que:

$$\blacksquare \quad p^n = r$$

Por lo tanto podemos definir a $p = \sqrt[n]{r}$ donde $\sqrt[n]{r}$ es la única raíz positiva de un número $r \in \mathbb{R}$.

$$\blacksquare \quad (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

Gracias a $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ Por lo tanto podemos decir que:

- $\cos(n\theta) = \cos(\phi)$
- $\sin(n\theta) = \sin(\phi)$

Y por lo tanto tener que:

- $\sin(\phi) = \sin \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right)$
- $\cos(\phi) = \cos \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right)$

Y finalmente podemos generalizar los resultados como:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) \right] \quad (5.2)$$

Parte II

Funciones Complejas

Capítulo 6

Funciones Complejas

Cualquier función compleja $w = f(z)$ puede ser representada como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $x, y \in \mathbb{R}$