

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS

---

# Análisis Complejo

---

Una Pequeña (Gran) Introducción

**AUTORES:**

Rosas Hernandez Oscar Andrés

Lopez Manriquez Angel

# Índice general

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Números Complejos</b>                     | <b>3</b>  |
| <b>1.</b> | <b>Definiciones</b>                          | <b>4</b>  |
| 1.1.      | Definición de Números Complejos . . . . .    | 5         |
| 1.2.      | Términos Comunes . . . . .                   | 5         |
| <b>2.</b> | <b>Aritmética Compleja</b>                   | <b>6</b>  |
| 2.1.      | Operaciones Básicas . . . . .                | 7         |
| 2.2.      | Elemento Identidad . . . . .                 | 8         |
| 2.3.      | Inverso Multiplicativo . . . . .             | 8         |
| 2.4.      | Campo de los Complejos . . . . .             | 9         |
| 2.5.      | Conjugados . . . . .                         | 10        |
| 2.6.      | Módulo o Valor Absoluto . . . . .            | 12        |
| <b>3.</b> | <b>Forma Polar y Argumentos</b>              | <b>15</b> |
| 3.1.      | Forma Polar . . . . .                        | 16        |
| 3.1.1.    | De forma Polar a forma Rectangular . . . . . | 16        |
| 3.1.2.    | De forma Rectangular a forma Polar . . . . . | 16        |
| 3.2.      | Argumento de $z$ . . . . .                   | 17        |
| 3.3.      | Leyes de Aritmetica . . . . .                | 18        |
| 3.4.      | Ley de Moivre's . . . . .                    | 20        |
| <b>4.</b> | <b>Forma Exponencial</b>                     | <b>21</b> |
| 4.1.      | Forma de Euler . . . . .                     | 22        |
| 4.1.1.    | $e^z$ . . . . .                              | 22        |

|  |           |
|--|-----------|
| 4.1.2. Lemmas y Propiedades . . . . .    | 23        |
| 4.2. Identidad de Lagrange . . . . .     | 24        |
| <b>5. Ecuaciones y Raíces</b>            | <b>25</b> |
| 5.1. n-Raíces de un Numero $z$ . . . . . | 26        |
| <b>II Funciones Complejas</b>            | <b>27</b> |
| <b>6. Funciones Complejas</b>            | <b>28</b> |

# Parte I

## Números Complejos

# Capítulo 1

## Definiciones

## 1.1. Definición de Números Complejos

**Definición 1.1.1 (Números Complejos)** *Definamos al Conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  como:*

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \} \quad (1.1)$$

Podemos usar la notación  $a + bi$ ,  $a + ib$  y  $(a, b)$  de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool pero la ultima mas concreta).

## 1.2. Términos Comunes

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo  $i$  para simplificar  $i = \sqrt{-1}$ , de ahí la propiedad famosa  $i^2 = -1$ .
- **Parte Real:** Considere el complejo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , entonces decimos que  $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el complejo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , entonces decimos que  $Im(z) = b$

## Capítulo 2

# Aritmética Compleja

## 2.1. Operaciones Básicas

Si  $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$  y  $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$  entonces:

■ **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (2.1)$$

■ **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \quad (2.2)$$

■ **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \end{aligned} \quad (2.3)$$

■ **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \quad z_2 \neq 0 \quad (2.4)$$



## 2.2. Elemento Identidad

- Denotamos a  $0 = 0 + 0i$  como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple  $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a  $1 = 1 + 0i$  como el elemento identidad multiplicativa, ya que se cumple  $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

## 2.3. Inverso Multiplicativo

Si  $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$  entonces podemos denotar al inverso de  $z$  como  $z^{-1}$

Creo que es más que obvio que  $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$ .

Pero además podemos escribir a  $z^{-1}$  como  $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

**Demostración:**

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \left( \frac{a - bi}{a - bi} \right) = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Gracias a lo anterior podemos escribirlo de distintas maneras:

- **De forma Rectangular:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) - \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \quad (2.5)$$

- **Con Magnitudes y Conjugados:**

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.6)$$

## 2.4. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

■ **Definición 2.4.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (2.7)$$

■ **Definición 2.4.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (2.8)$$

■ **Definición 2.4.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \quad (2.9)$$

■ **Definición 2.4.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \quad (2.10)$$

■ **Definición 2.4.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_2 + z_3) \cdot z_1 &= (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

■ **Definición 2.4.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (2.12)$$

■ **Definición 2.4.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (2.13)$$

■ **Definición 2.4.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \quad (2.14)$$

■ **Definición 2.4.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = 1 \quad (2.15)$$

## 2.5. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  que lo definimos como:  $\bar{z} = a - bi$

Usando la definición podemos demostrar algunas propiedades muy importantes:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  y mas general tenemos que:  $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$

**Demostración:**

Definidos  $z_1 = a_1 + ib_1$  y  $z_2 = a_2 + ib_2$ . Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2\end{aligned}$$

Ahora para la parte mas general:

Creo que cuando  $k = 1$  es demasiado sencillo hasta para escribirlo y lo que acabamos de demostrar es para cuando  $k = 2$ , por lo tanto lo único que tenemos que probar es que:

Si  $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \cdots + \bar{z}_n$  se cumple entonces también lo hará  $\overline{z_1 + \cdots + z_{n+1}} = \bar{z}_1 + \cdots + \bar{z}_{n+1}$

Lo cual se logra dandote cuenta que  $z_{n+1} = \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}$  y dandote cuenta que volviste al caso de  $k = 2$ .

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  y mas general tenemos que:  $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{z}_n$

**Demostración:**

Definidos  $z_1 = a_1 + ib_1$  y  $z_2 = a_2 + ib_2$ . Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 \cdot a_2 + ib_2} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = (a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) \\ &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\end{aligned}$$

Ahora para la parte mas general se demuestra de manera casi identica a la propiedad pasada.

$$\blacksquare \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

**Demostración:**

Definidos  $z_1 = a_1 + ib_1$  y  $z_2 = a_2 + ib_2$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z_1 \cdot \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)i} \\ &= \overline{z_1} \cdot \left[\overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)} + \overline{\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)i}\right] = \overline{z_1} \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i\right] = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} \\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \overline{\overline{z}} = z$$

**Demostración:**  $\overline{\overline{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi$

$$\blacksquare \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

**Demostración:**  $z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

$$\blacksquare \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

**Demostración:**

Dado a  $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \frac{z + \overline{z}}{2} &= \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a \\ &= \operatorname{Re}(a + bi) \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

**Demostración:**

Dado a  $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \frac{z - \overline{z}}{2i} &= \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b \\ &= \operatorname{Im}(a + bi) \end{aligned}$$

## 2.6. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que definir el Módulo de  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  como  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

- $|Re(z)| \leq |z|$  y  $|Im(z)| \leq |z|$

**Demostración:**

Ya habíamos visto que  $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

Entonces podemos ver que  $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)^2$  (recuerda que  $Im(z)^2 \geq 0$ ) por lo tanto tenemos que  $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$  ya que  $|Re(z)| = Re(z)$

Entonces podemos ver que  $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)^2$  (recuerda que  $Re(z)^2 \geq 0$ ) por lo tanto tenemos que  $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$  ya que  $|Im(z)| = Im(z)$

- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2)$

**Demostración:**

Ya sabemos que  $|z + \bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$  y recuerda que  $2Re(z) = z + \bar{z}$ ,  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$  entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2 \bar{z}_2 \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

- $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2|$

**Demostración:**

Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que  $|z| = |\bar{z}|$ :

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

■ **Desigualdad del Triángulo:**  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**Demostración:**

Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al revés:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  si y solo si  $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$  y además  $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$  lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si  $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$  donde  $k \geq 0$ .

Ya sabemos que  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$  y  $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$ , ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como  $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Ahora veamos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= [|z_1|^2 + |z_2|^2] + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = [(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z_2}|] + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

Donde  $k = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) - 2|z_1\overline{z_2}|$ , ahora además podemos decir que si  $k \geq 0$  entonces así lo será  $\frac{k}{2}$ , por lo tanto:  $\frac{k}{2} = \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) - |z_1\overline{z_2}|$ , pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica  $w = z_1\overline{z_2}$  y tenemos que  $\operatorname{Re}(w) - |w|$ . Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ , así que por lo tanto  $k \geq 0$  y la propiedad siempre se cumple.

Sabemos que  $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$  además ahora sabemos que:  $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$  y como  $|z| = |-z|$  Que es lo mismo que  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ .

Y listo, todas las propiedades están listas.

Además creo que es bastante obvio que por inducción tenemos que:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$$

$$\blacksquare \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

**Demostración:**

Recuerda que:  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  Entonces  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \bar{z}_1 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 z_2 \cdot \bar{z}_1 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2} \\ &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \sqrt{z_2 \bar{z}_2} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \left| \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

**Demostración:**

Usando la idea de que:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \right| &= \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right| \\ &= |z_1| \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = |z_1| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)} \\ &= |z_1| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |z_1| \cdot \frac{1}{|a + bi|} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

## Capítulo 3

### Forma Polar y Argumentos



### 3.1. Forma Polar

Podemos expresar un punto en el plano complejo mediante la tupla  $(r, \theta)$ , donde  $r \geq 0$  y  $\theta$  está medido en radianes.

Entonces podemos pasar rápido y fácil de un sistema de coordenadas a otro como:

#### 3.1.1. De forma Polar a forma Rectangular

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como  $(r, \theta)$ , donde  $r \geq 0$  y  $\theta$  medido como radianes.

Entonces tenemos que:

- $a = r \cos(\theta)$
- $b = r \sin(\theta)$

Otra forma de escribirlo es  $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

#### 3.1.2. De forma Rectangular a forma Polar

Supongamos que tenemos un punto que podemos describir como  $(a + bi)$ , entonces podemos decir que:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{b}{a}) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

## 3.2. Argumento de $z$

Definimos al argumento de un número  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  como  $\theta = \arg(z)$ , es decir, al final del día  $\arg(z)$  es un ángulo.

Este ángulo tiene que cumplir las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\theta) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\theta) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Pero como  $\sin$  y  $\cos$  son funciones periódicas con  $2\pi$ , es decir  $\arg(z)$  no es único.

Además para encontrarlo usamos  $\tan(\frac{b}{a})^{-1}$  pero resulta que esta función solo regresa ángulos entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$  por lo tanto habrá problemas con números en el segundo y tercer cuadrante.

### Argumento Principal

Ya que  $\arg(z)$  es más bien un conjunto de ángulos, podemos considerar al ángulo o argumento principal de  $z$  como  $\text{Arg}(z)$  y que será el ángulo que cumpla con que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos(\text{Arg}(z)) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare \sin(\text{Arg}(z)) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \blacksquare -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Podemos probar que  $\text{Arg}(z)$  para alguna  $z$  cualquiera será única.

Por lo tanto ahora podemos definir a  $\arg(z)$  como:

$$\arg(z) = \{ \text{Arg}(z) + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad (3.1)$$

### 3.3. Leyes de Aritmetica

Supón dos números complejos de manera polar como  $z_1 = (r_1, \theta_1)$  y  $z_2 = (r_2, \theta_2)$  es decir  $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$  y  $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$  entonces tenemos que:

■ **Producto de Números Complejos:**

$$z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$$

**Demostración:**

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos multiplicar como ya sabemos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a:  $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$  y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que  $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **División de Números Complejos:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right), (\theta_1 - \theta_2)\right]$$

**Demostración:**

Esto es muy sencillo, primero ya que tenemos los dos números en forma rectangular podemos dividir como ya sabemos, pero vamos a hacer un poco de trampa ingeniosa, usamos la idea de que  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  y hacer:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = z_1 \frac{\bar{z}_2}{(r_2)^2} \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} z_1 \bar{z}_2 = \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= \frac{1}{(r_2)^2} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_2))i] \end{aligned}$$

Usando las leyes de senos y cosenos:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

Podemos reducirlo a:  $z_1 z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$  y creo que de ahí podemos reducirlo casi mentalmente ya que  $(r, \theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

■ **Simplificar Potencias de  $z$ :**

$$z^n = [(r^n), (n \cdot \theta)]$$

**Ideas:**

No considero a esto una demostración, por basta con darte cuenta que  $z^n$  es  $z \cdot z \cdot z \dots$  n veces.

Por lo tanto puedes aplicar la regla:  $z_1 z_2 = [(r_1 r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$  que ya que  $z_1 = z_2$  se puede simplificar a  $z \cdot z = [2r, 2\theta]$ .

Y llegar a ese resultado mediante la inducción.

### 3.4. Ley de Moivre's

$$z^n = r^n (\cos (n \cdot \theta) + i \sin (n \cdot \theta)) \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}$$

**Demostración:**

Se puede dar una demostracion muy sencilla, no se porque los libros usan induccion matematica para demostrar el teorema de Moivre...

En fin, expresando a  $z$  en su forma polar y usando la fórmula de Euler, tenemos:

$$\begin{aligned} z^n &= (a + bi)^n \\ &= [r (\cos (\theta) + i \sin (\theta))]^n \\ &= r^n (\cos (\theta) + i \sin (\theta))^n \\ &= r^n (e^{\theta i})^n \\ &= r^n e^{(\theta i)n} \\ &= r^n e^{(n\theta)i} \\ &= r^n (\cos (n \cdot \theta) + i \sin (n \cdot \theta)) \end{aligned}$$

## Capítulo 4

### Forma Exponencial

## 4.1. Forma de Euler

Podemos también expresar un número complejo de la siguiente manera:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (4.1)$$

### Ideas:

Esta fórmula sale de a partir de la serie de McLaurin para la función exponencial:

$$e^k = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots$$

Pasa algo muy interesante al hacer  $k = i\theta$ , pues vemos que se hayan las series de McLaurin del seno y coseno:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) i \\ &= \cos(\theta) + \sin(\theta) i \end{aligned}$$

### 4.1.1. $e^z$

También podemos ver más generalmente que  $e^z$  se puede reducir a:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)) = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

### 4.1.2. Lemmas y Propiedades

$$\blacksquare \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] + [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) + \cos(\theta) - i \sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2 \cos(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Tip:  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$  y  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Y si simplificamos

$$\blacksquare \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} &= \frac{[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] - [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) - \cos(\theta) + i \sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2i \sin(\theta)}{2i} \\ &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Tip:  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$  y  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Y si simplificamos



## 4.2. Identidad de Lagrange

$$1 + \cos(1\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1 \right) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) && \text{Recuerda que: } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \right) && \text{Recuerda que: } \sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \left( \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) + \frac{e^{(n+1)-i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \left( \frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}} \right) \right) && \text{Multiplica por Uno ;)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) && \text{Expande} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) && \text{Organizando, gracias denominador común} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} + 1 \right) && \text{Simplificar} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - e^{(n+\frac{1}{2})-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} + 1 \right) && \text{Añadimos esto} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1 \right) && \text{Recuerda que } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

## Capítulo 5

### Ecuaciones y Raíces

## 5.1. n-Raíces de un Numero $z$

En general decir que un número  $w$  es un raíz enésima de un número complejo  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$  se cumpla que:

$$w^n = z$$

Donde obviamente  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Teorema 5.1.1** *Existen exactamente  $n$  raíces para  $w^n = z$*

Que puedes encontrar con:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

**Demostración:**

Tengamos dos números:  $z = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$  y  $w = p [\cos(\phi) + i \sin(\phi)]$

Entonces de la ecuación decir  $w^n = z$  es lo mismo que decir que:

$$(p [\cos(\phi) + i \sin(\phi)])^n = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \quad p^n [\cos(\phi) + i \sin(\phi)]^n = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

De esta ecuación tenemos que:

$$\blacksquare \quad p^n = r$$

Por lo tanto podemos definir a  $p = \sqrt[n]{r}$  donde  $\sqrt[n]{r}$  es la única raíz positiva de un número  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\blacksquare \quad (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

Gracias a  $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$  Por lo tanto podemos decir que:

- $\cos(n\theta) = \cos(\phi)$
- $\sin(n\theta) = \sin(\phi)$

Y por lo tanto tener que:

- $\sin(\phi) = \sin \left( \frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right)$
- $\cos(\phi) = \cos \left( \frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right)$

Y finalmente podemos generalizar los resultados como:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + (2\pi)k}{n} \right) \right] \quad (5.2)$$

# Parte II

## Funciones Complejas

## Capítulo 6

# Funciones Complejas

Cualquier función compleja  $w = f(z)$  puede ser representada como  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  donde  $x, y \in \mathbb{R}$