

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS

Análisis Complejo

Una Pequeña (Gran) Introducción

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andrés

Índice general

I	Números Complejos	2
1.	Definiciones	3
1.1.	Definición de Números Complejos	4
1.2.	Términos Comunes	4
2.	Aritmética Compleja	5
2.1.	Operaciones Básicas	6
2.2.	Campo de los Complejos	7
2.3.	Cero y la Identidad	8
2.4.	Conjugados	8
2.5.	Módulo o Valor Absoluto	9
2.6.	Inverso Multiplicativo	11

Parte I

Números Complejos

Capítulo 1

Definiciones

1.1. Definición de Números Complejos

Definición 1.1.1 (Números Complejos) *Definamos al Conjunto de los números complejos \mathbb{C} como:*

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1} \} \quad (1.1)$$

Podemos usar la notación $a + bi$ y $a + ib$ de manera intercambiable (pero personalmente la primera se me hace la más cool).

1.2. Términos Comunes

- **Unidad Imaginaria:** Usamos el símbolo i para simplificar $i = \sqrt{-1}$, de ahí una propiedad muy famosa de que $i^2 = -1$.
- **Parte Real:** Considere el número $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Re(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** Considere el número $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces decimos que $Im(z) = b$

Capítulo 2

Aritmética Compleja

2.1. Operaciones Básicas

Si $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ y $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ entonces:

■ **Definición 2.1.1 (Suma de Complejos)**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (2.1)$$

■ **Definición 2.1.2 (Resta de Complejos)**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \quad (2.2)$$

■ **Definición 2.1.3 (Multiplicación de Complejos)**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 + b_1b_2i^2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \end{aligned} \quad (2.3)$$

■ **Definición 2.1.4 (División de Complejos)**

Vamos a necesitar además que $z_2 \neq 0$ (muy obvio)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_1b_2 - a_2b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \quad (2.4)$$

2.2. Campo de los Complejos

Recuerda que el hecho de que los Complejos sean un campo nos dice que cumple con que:

■ **Definición 2.2.1 (Ley Aditiva Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (2.5)$$

■ **Definición 2.2.2 (Ley Aditiva Conmutativa)**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (2.6)$$

■ **Definición 2.2.3 (Elemento Indentidad Aditivo)**

$$\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1 \quad (2.7)$$

■ **Definición 2.2.4 (Existen Inversos Aditivos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 \quad (2.8)$$

■ **Definición 2.2.5 (Ley Distributiva)**

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) \\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_2 + z_3) \cdot z_1 &= (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

■ **Definición 2.2.6 (Ley Multiplicativa Asociativa)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (2.10)$$

■ **Definición 2.2.7 (Ley Multiplicativa Distributiva)**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (2.11)$$

■ **Definición 2.2.8 (Elemento Indentidad Multiplicativo)**

$$\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \quad (2.12)$$

■ **Definición 2.2.9 (Existen Inversos Multiplicativos)**

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = 1 \quad (2.13)$$

2.3. Cero y la Identidad

- Denotamos a $0 = 0 + 0i$ como el elemento cero o identidad aditiva, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- Denotamos a $1 = 1 + 0i$ como el elemento identidad multiplicativa, ya que se cumple $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

2.4. Conjugados

Tenemos que el Conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es simplemente $\bar{z} = a - bi$

Además tenemos que:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$
- $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2bi$
- $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

2.5. Módulo o Valor Absoluto

Tenemos que el Módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es simplemente $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$
- **Lemma 2.5.1** $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$

Demostración:

Ya habíamos visto que $|z|^2 = x^2 + y^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Im(z)^2 = Re(z)^2$ (recuerda que $Im(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Re(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Re(z)| = Re(z)$

Entonces podemos ver que $|z|^2 - Re(z)^2 = Im(z)^2$ (recuerda que $Re(z)^2 \geq 0$) por lo tanto tenemos que $|Im(z)|^2 \leq |z|^2$ ya que $|Im(z)| = Im(z)$

- **Lemma 2.5.2** $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2)$

Demostración:

Ya sabemos que $|z + \bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$ y recuerda que $2Re(z) = z + \bar{z}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

- **Lemma 2.5.3** $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

Demostración:

Esta la vamos a empezar al réves, solo recuerda que $|z| = |\bar{z}|$:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

■ **Lemma 2.5.4 (Desigualdad del Triángulo)** $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración:

Ok, esto aún estará intenso, así que sígueme, vamos a hacerlo más interesante, ya tenemos las piezas necesarias. Así que vamos a hacerlo al réves:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ y además $|z_1 + z_2|, |z_1|, |z_2| \geq 0$ lo cual si que se cumple, pues los módulos nunca son negativos.

Y lo que dije anteriormente se cumple si y solo si $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + k$ donde $k \geq 0$.

Ya sabemos que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$ y $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}|$, ahora vamos a acomodar un poco, podemos poner lo último como $(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Ahora veamos que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= [|z_1|^2 + |z_2|^2] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = [(|z_1| + |z_2|)^2 - 2|z_1 \overline{z_2}|] + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 + k \end{aligned}$$

Donde $k = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - 2|z_1 \overline{z_2}|$, ahora además podemos decir que si $k \geq 0$ entonces así lo será $\frac{k}{2}$, por lo tanto: $\frac{k}{2} = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - |z_1 \overline{z_2}|$, pero si les cambias en nombre ves que todo se simplifica $w = z_1 \overline{z_2}$ y tenemos que $\operatorname{Re}(w) - |w|$. Espera, recuerda que ya habíamos demostrado que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, así que por lo tanto $k \geq 0$ y la propiedad siempre se cumple.

Sabemos que $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ además ahora sabemos que: $|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$ y como $|z| = |-z|$ Que es lo mismo que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

Y listo, todas las propiedades están listas.

2.6. Inverso Multiplicativo

Si $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$ entonces podemos denotar al inverso de z como z^{-1}

Creo que es más que obvio que $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$.

- Podemos escribir a z^{-1} como $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Demostración:

Veamos como llegar a eso paso a paso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \left(\frac{a - bi}{a - bi} \right) = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) - \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right) i \quad (2.14)$$

- Gracias al inciso anterior podemos separar la parte real y la imaginaria como:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.15)$$

Recuerda: $\bar{z} = a - bi$ y $|z| = a^2 + b^2$