Прикладной статистический анализ данных.
3. Проверка непараметрических гипотез.

Павел Швечиков
psad.homework@gmail.com

2017

Виды задач

Одновыборочные:

- X^n
  - среднее выборки равно заданному числу 1 3 8

Двухвыборочные:

- $X_1^{n_1}, X_2^{n_2}$
  - средние выборок равны
    - X_1, X_2 связанные 2 4 9
    - X_1, X_2 независимые 5 10
  - дисперсии выборок равны 6 11

Варианты двухвыборочных гипотез

О положении:

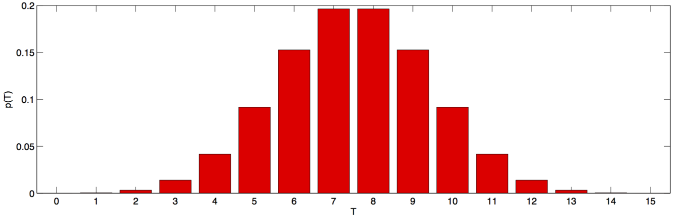
$$H_0\colon \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2, \qquad H_1\colon \mathbb{E}X_1 <\neq> \mathbb{E}X_2;$$
$$H_0\colon \operatorname{med} X_1 = \operatorname{med} X_2, \qquad H_1\colon \operatorname{med} X_1 <\neq> \operatorname{med} X_2;$$
$$H_0\colon \mathbf{P}(X_1 > X_2) = 0.5, \qquad H_1\colon \mathbf{P}(X_1 > X_2) <\neq> 0.5;$$
$$H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x), \qquad H_1\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x+\Delta), \Delta <\neq> 0;$$
$$H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x), \qquad H_1\colon F_{X_1}(x) <\neq> F_{X_2}(x).$$

О рассеянии:

$$H_0\colon \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2, \qquad H_1\colon \mathbb{D}X_1 <\neq> \mathbb{D}X_2;$$
$$H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x+\Delta), \qquad H_1\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(\sigma x+\Delta), \sigma <\neq> 1.$$

(1) Одновыборочный критерий знаков

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n)\,, X_i \neq m_0$
нулевая гипотеза:	$H_0:\ \operatorname{med} X = m_0$
альтернатива:	$H_1:\ \operatorname{med} X <\neq> m_0$
статистика:	$T(X^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} [X_i > m_0]$
нулевое распределение:	$Bin(n, \frac{1}{2})$



(1) Одновыборочный критерий знаков

Пример 1 (Dinse, 1982): выживаемость пациентов с лимфоцитарной лимфомой (в неделях):

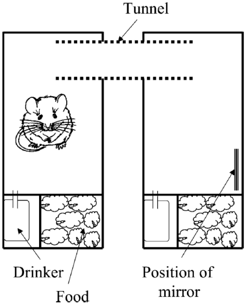
$$49, 58, 75, 110, 112, 132, 151, 276, 281, 362^*$$

Исследование длилось 7 лет, поэтому для пациентов, проживших дольше, выживаемость неизвестна (выборка цензурирована сверху).
Превышает ли среднее время дожития 200 недель?

H_0: медиана времени дожития не больше 200 недель.
H_1: медиана времени дожития больше 200 недель.
Критерий знаков: $p = 0.9453$.

(1) Одновыборочный критерий знаков

Пример 2: (Shervin, 2004): 16 лабораторных мышей были помещены в двухкомнатные клетки, в одной из комнат висело зеркало. Измерялась доля времени, которое каждая мышь проводила в каждой из своих двух клеток.

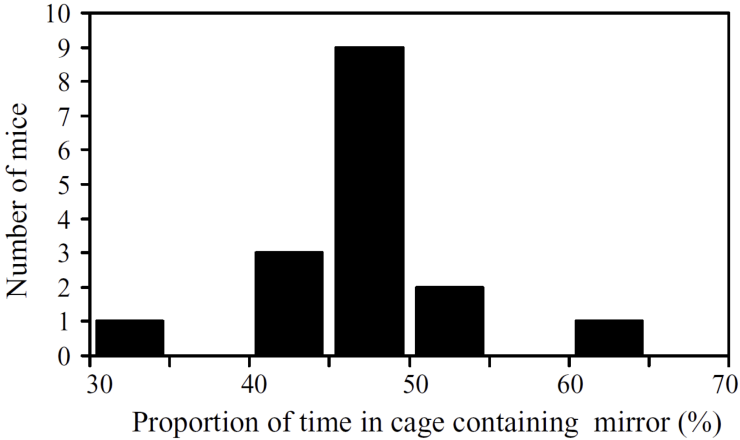


Общая постановка:

$H_0:$ мышам всё равно, висит в клетке зеркало или нет.

$H_1:$ у мышей есть какие-то предпочтения насчёт зеркала.

(1) Одновыборочный критерий знаков



Средняя доля времени, проводимого в клетке с зеркалом — $47.6 \pm 4.7\%$.

(1) Одновыборочный критерий знаков

H_0: медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, равна $\frac{1}{2}$.
H_1: медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, не равна $\frac{1}{2}$.

Редуцированные данные: 0 — мышь провела больше времени в комнате с зеркалом, 1 — в комнате без зеркала.
Статистика: T — число единиц в выборке.

13 из 16 мышей провели больше времени в комнате без зеркала.

Критерий знаков: $p = 0.0213$; доверительный интервал для медианы доли времени, проведённого в комнате с зеркалом:

- $[0.4507, 0.4887]$ — с уровнем доверия 92.32%
- $[0.4263, 0.4894]$ — с уровнем доверия 97.87%
- $[0.4389, 0.4890]$ — приближённый 95% (линейная интерполяция)

(2) Двухвыборочный критерий знаков

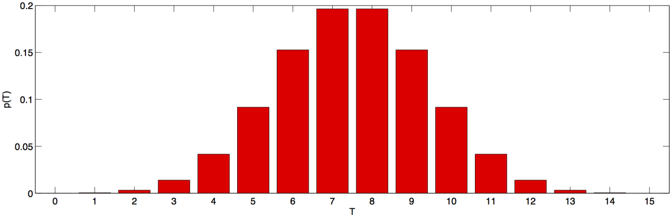
выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_{1i} \neq X_{2i}$
выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0\colon\ \mathbf{P}(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$

альтернатива: $H_1\colon\ \mathbf{P}(X_1 > X_2) <\neq> \frac{1}{2}$

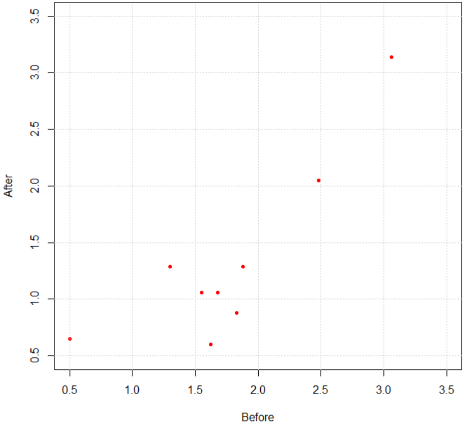
статистика: $T(X_1^n, X_2^n) = \sum_{i=1}^n [X_{1i} > X_{2i}]$

нулевое распределение: $Bin(n, \frac{1}{2})$



(2) Двухвыборочный критерий знаков

Пример 1 (Hollander & Wolfie, 29f): депрессивность 9 пациентов была измерена по шкале Гамильтона до и после первого приёма транквилизатора. Подействовал ли транквилизатор?



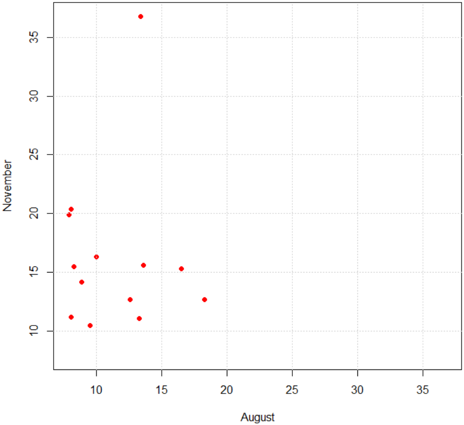
(2) Двухвыборочный критерий знаков

H_0: уровень депрессивности не изменился.
H_1: уровень депрессивности снизился.

Критерий знаков: $p = 0.09$, 95% нижний доверительный предел для медианы изменения — -0.041.

(2) Двухвыборочный критерий знаков

Пример 2: (Laureysens et al., 2004): для 13 разновидностей тополей, растущих в зоне интенсивного загрязнения, в августе и ноябре измерялась средняя концентрация алюминия в микрограммах на грамм древесины.



(2) Двухвыборочный критерий знаков

H_0: концентрация алюминия не менялась.
H_1: концентрация алюминия изменилась.

Для тополей 10 из 13 разновидностей концентрация алюминия увеличилась.

Критерий знаков: $p = 0.0923$, 95% доверительный интервал для медианы изменения — $[-0.687, 10.107]$.

Причины использовать критерий знаков

- Точные разности Δx_i неизвестны, известны только их знаки (сравнение агрессивности комаров).
- Разности Δx_i при H_1 могут быть небольшими по модулю, но иметь систематический характер по знаку (пример с мышами).
- Разности Δx_i при H_0 могут быть большими по модулю, но случайными но знаку (влияние меди на число личинок комаров).

Вариационный ряд, ранги, связки

$$X_1, \ldots, X_n \quad \Rightarrow \quad X_{(1)} \leq \ldots < \underbrace{X_{(k_1)} = \ldots = X_{(k_2)}}_{\text{связка размера } k_2 - k_1 + 1} < \ldots \leq X_{(n)}$$

Ранг наблюдения X_i:
если X_i не в связке, то $\operatorname{rank}(X_i) = r\colon X_i = X_{(r)}$,
если X_i в связке $X_{(k_1)}, \ldots, X_{(k_2)}$, то $\operatorname{rank}(X_i) = \frac{k_1+k_2}{2}$.

(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n)\,, X_i \neq m_0$

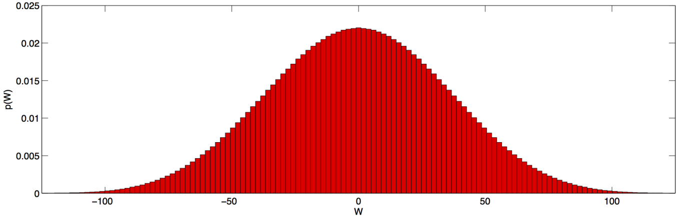
$F(X)$ симметрично относительно медианы

нулевая гипотеза: $H_0\colon\ \operatorname{med} X = m_0$

альтернатива: $H_1\colon\ \operatorname{med} X <\neq> m_0$

статистика: $W(X^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{rank}(|X_i - m_0|) \cdot \operatorname{sign}(X_i - m_0)$

нулевое распределение: табличное



(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

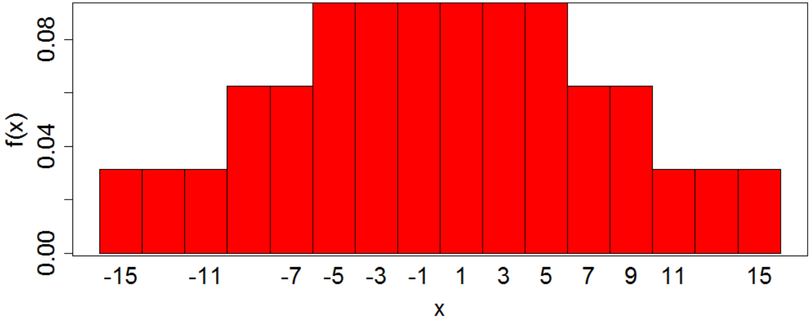
Откуда берётся табличное распределение?

1	2	3	4	5	W
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	-15
$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	-13
$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	-11
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	-9
$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	-9
...	...	...	...	...	...
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	9
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	9
$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	11
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	13
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	15

Всего 2^n вариантов.

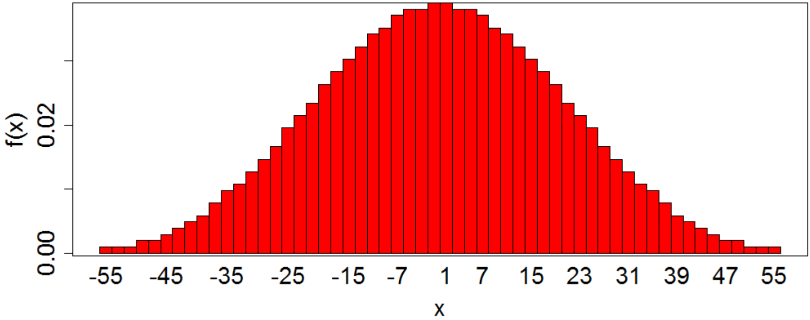
(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

$n = 5$:



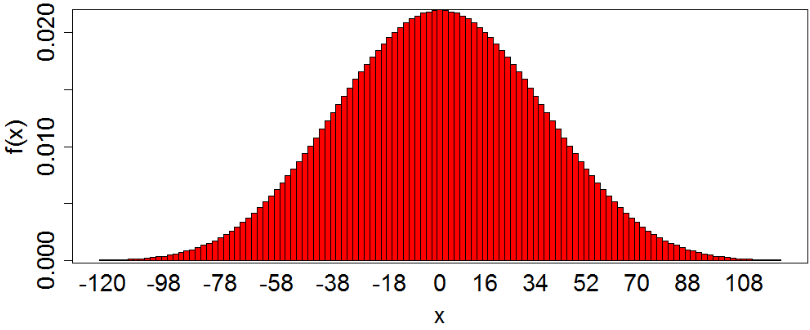
(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

$n = 10$:



(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

$n = 15$:

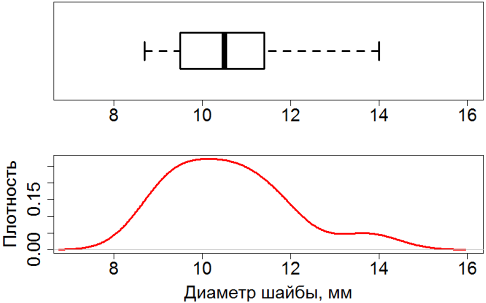


Аппроксимация для $n > 20$:

$$W \approx\sim N\left(0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

(3) Одновыборочный критерий знаковых рангов Уилкоксона

Пример 1 (Bonnini, табл. 1.4): диаметры шайб на производстве ($n = 24$):



Соответствуют ли шайбы стандартному размеру 10 мм?

$H_0:$ средний диаметр шайбы — 10 мм, $\operatorname{med} X = 10$.
$H_1:$ средний диаметр шайбы не соответствует стандарту, $\operatorname{med} X \neq 10$.

Критерий знаковых рангов: $p = 0.0673$, выборочная медиана диаметра — 10.5 мм (95% доверительный интервал — $[9.95, 11.15]$ мм).

(4) Критерий знаковых рангов Уилкоксона для связанных выборок

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$

$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$, $X_{1i} \neq X_{2i}$

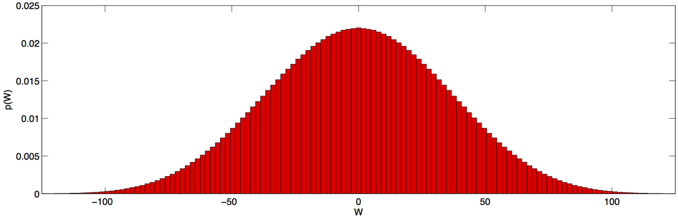
выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0\colon \ \mathrm{med}\,(X_1 - X_2) = 0$

альтернатива: $H_1\colon \ \mathrm{med}\,(X_1 - X_2) <\neq> 0$

статистика: $W(X_1^n, X_2^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{rank}(|X_{1i} - X_{2i}|) \cdot \mathrm{sign}(X_{1i} - X_{2i})$

нулевое распределение: табличное



(4) Критерий знаковых рангов Уилкоксона для связанных выборок

Пример 1 (Kanji, критерий 48): управляемый вручную станок на каждом шаге процесса производит пару пружин. Для 14 пар измерена прочность:

$$X_1: \{1.38, 0.39, 1.42, 0.54, 5.94, 0.59, 2.67, 2.44, 0.56, 0.69, 0.71, 0.95, 0.50, 9.69\},$$
$$X_2: \{1.42, 0.39, 1.46, 0.55, 6.15, 0.61, 2.69, 2.68, 0.53, 0.72, 0.72, 0.93, 0.53, 10.37\}.$$

Одинакова ли прочность пружин в паре?

H_0: средние значение прочности пружин в паре равны.
H_1: средние значение прочности пружин в паре не равны $\Rightarrow p = 0.0142$,
95% доверительный интервал для медианной разности — $[0.005, 0.14]$.

(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$

$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$

выборки независимые

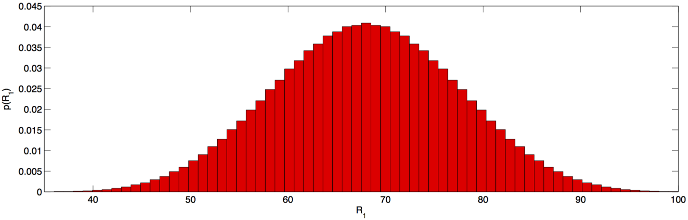
нулевая гипотеза: $H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$

альтернатива: $H_1\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x+\Delta), \Delta <\neq> 0$

статистика: $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n_1+n_2)}$ — вариационный ряд объединённой выборки $X = X_1^{n_1} \bigcup X_2^{n_2}$

$$R_1\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{rank}(X_{1i})$$

нулевое распределение: табличное



(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

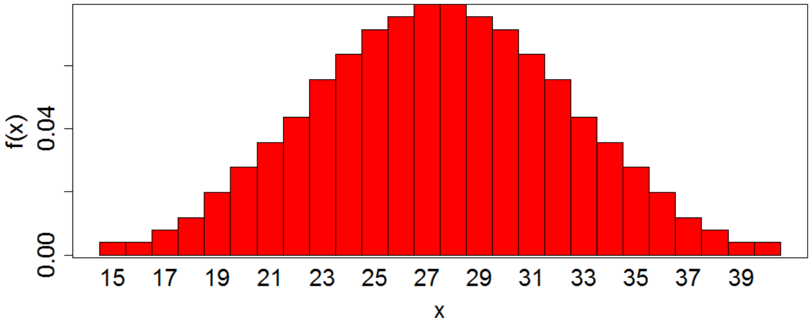
Откуда берётся табличное распределение?

X_1	X_2	R_1
{1,2,3}	{4,5,6,7}	6
{1,2,4}	{3,5,6,7}	7
{1,2,5}	{3,4,6,7}	8
{1,2,6}	{3,4,5,7}	9
{1,2,7}	{3,4,5,6}	10
{1,3,4}	{2,5,6,7}	8
...	...	...
{3,5,7}	{1,2,4,6}	15
{3,6,7}	{1,2,4,5}	16
{4,5,6}	{1,2,3,7}	15
{4,5,7}	{1,2,3,6}	16
{4,6,7}	{1,2,3,5}	17
{5,6,7}	{1,2,3,4}	18

Всего $C_{n_1+n_2}^{n_1}$ вариантов.

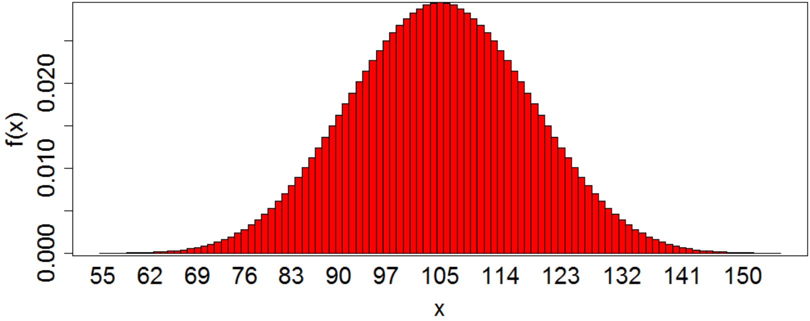
(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

$n_1 = n_2 = 5$:



(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

$n_1 = n_2 = 10$:



Аппроксимация для $n_1, n_2 > 10$:

$$R_1 \sim N\left(\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}, \frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}\right).$$

(5) Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

Пример 1 (Kanji, критерий 52): сотрудник налоговой службы хочет сравнить средние значения в двух выборках заявленных трат на компенсацию командировочных расходов в одной и той же компании в двух разных периодах (расходы скорректированы на инфляцию).

$$X_1: \{50.5, 37.5, 49.8, 56.0, 42.0, 56.0, 50.0, 54.0, 48.0\},$$
$$X_2: \{57.0, 52.0, 51.0, 44.2, 55.0, 62.0, 59.0, 45.2, 53.5, 44.4\}.$$

Равны ли средние расходы?

H_0: средние расходы равны.
H_1: средние расходы не равны $\Rightarrow p = 0.3072$, 95% доверительный интервал для медианной разности — $[-9, 4]$.

Перестановочные критерии

Ранговые критерии:

1. выборки $\Rightarrow$ ранги
2. дополнительное предположение (о равенстве распределений / медиан и пр.)
3. перестановки $\Rightarrow$ нулевое распределение статистики

Что если пропустить пункт 1?

(8) Одновыборочный перестановочный критерий, гипотеза о среднем

выборка: $X_1^n = (X_1, \ldots, X_n)$

$F(X)$ симметрично относительно матожидания

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mathbb{E}X = m_0$

альтернатива: $H_1\colon \mathbb{E}X <\neq> m_0$

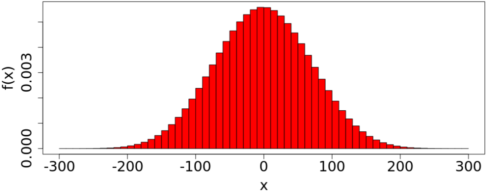
статистика: $T(X^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - m_0)$

нулевое распределение: порождается перебором 2^n знаков перед слагаемыми $X_i - m_0$

Достигаемый уровень значимости — доля перестановок знаков, на которых получилось такое же или ещё более экстремальное значение статистики.

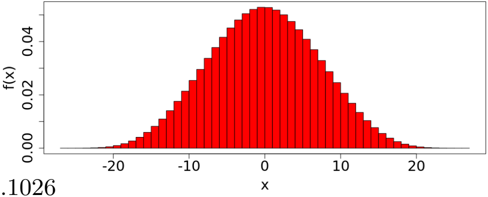
(8) Одновыборочный перестановочный критерий, гипотеза о среднем

Пример (диаметры шайб):
Критерий знаковых рангов:



$p = 0.0673$

Перестановочный критерий:



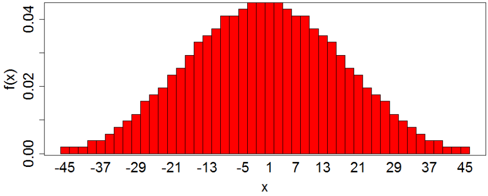
$T = 14.6, p = 0.1026$
95% доверительный интервал для среднего диаметра (BCa бутстреп) — $[10.11, 11.20]$.

(9) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, связанные выборки

выборки:	$X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$
	$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$
	выборки связанные
	распределение попарных разностей симметрично
нулевая гипотеза:	$H_0\colon \mathbb{E}\,(X_1 - X_2) = 0$
альтернатива:	$H_1\colon \mathbb{E}\,(X_1 - X_2) <\neq> 0$
статистика:	$D_i = X_{1i} - X_{2i}$
	$T\left(X_1^n, X_2^n\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$
нулевое распределение:	порождается перебором 2^n знаков перед слагаемыми D_i

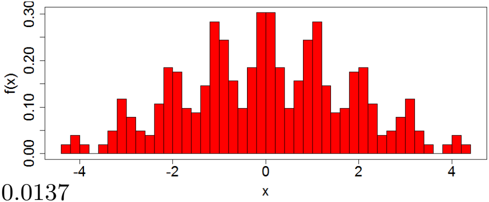
(9) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, связанные выборки

Пример (лечение депрессии):
Критерий знаковых рангов:



$p = 0.019$

Перестановочный критерий:



$T = 3.887, p = 0.0137$
95% доверительный интервал для среднего уменьшения депрессивности (BCa бутстреп) — $[0.1658, 0.6834]$.

(10) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, независимые выборки

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1})$

$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2})$

нулевая гипотеза: $H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$

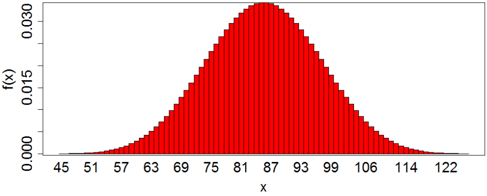
альтернатива: $H_1\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x+\Delta), \Delta <\neq> 0$

статистика: $T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} - \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

нулевое распределение: порождается перебором $C_{n_1+n_2}^{n_1}$ размещений объединённой выборки

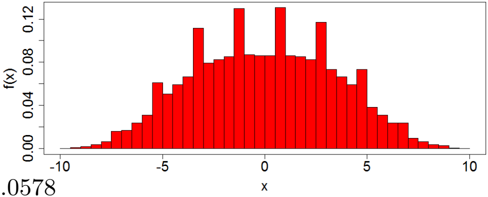
(10) Двухвыборочный перестановочный критерий, гипотеза о средних, независимые выборки

Пример (кофеин и респираторный обмен):
Критерий Манна-Уитни:



$p = 0.0521$

Перестановочный критерий:



$T = 6.33, p = 0.0578$
95% доверительный интервал для разности средних (BCa бутстреп) — $[1.556, 13.667]$.

Особенности перестановочных критериев

- Статистику критерия можно выбрать разными способами.
  В некоторых случаях разные статистики приведут к одному и тому же достигаемому уровню значимости:

$$X^n, \;\; H_0\colon \mathbb{E}X = 0, \; H_1\colon \mathbb{E}X \neq 0,$$

$$T_1\left(X^n\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i \;\; \sim \;\; T_2\left(X^n\right) = \bar{X}.$$

  В других случаях достигаемый уровень значимости будет зависеть от выбора статистики:

$$T_2\left(X^n\right) = \bar{X} \;\; \nsim \;\; T_3\left(X^n\right) = \frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}.$$

- Если множество перестановок G слишком велико, для оценки нулевого распределения T достаточно взять случайное подмножество $G' \in G$. При этом стандартное отклонение достигаемого уровня значимости будет равно примерно $\sqrt{\frac{p(1-p)}{|G'|}}$.

Перестановки и бутстреп

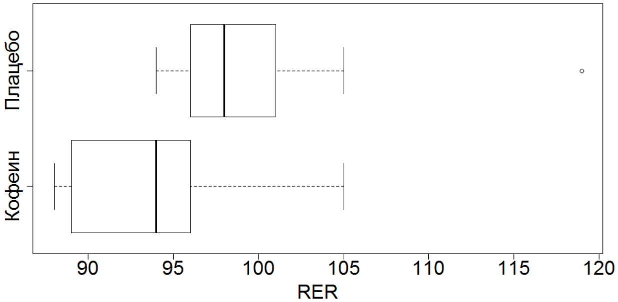
Перестановочные критерии:

1. выборки, статистика
2. дополнительное предположение
3. перестановки $\Rightarrow$ нулевое распределение статистики

Бутстреповые доверительные интервалы:

1. выборки, статистика, оценивающая параметр
2. бутстреп-псевдовыборки $\Rightarrow$ приближённое распределение статистики

Кофеин и респираторный обмен



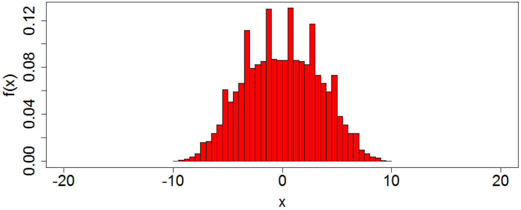
$H_0:$ среднее значение показателя респираторного обмена не отличается в двух группах.

$H_1:$ под воздействием кофеина среднее значение показателя респираторного обмена снижается.

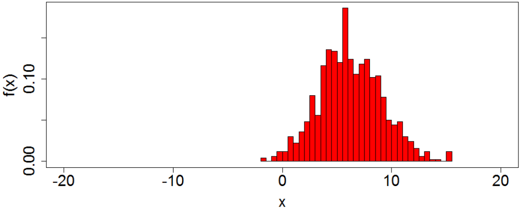
$\bar{X}_{1n} - \bar{X}_{2n} = 6.33$

Кофеин и респираторный обмен

Нулевое распределение перестановочного критерия со статистикой $\bar{X}_{1n} - \bar{X}_{2n}$:

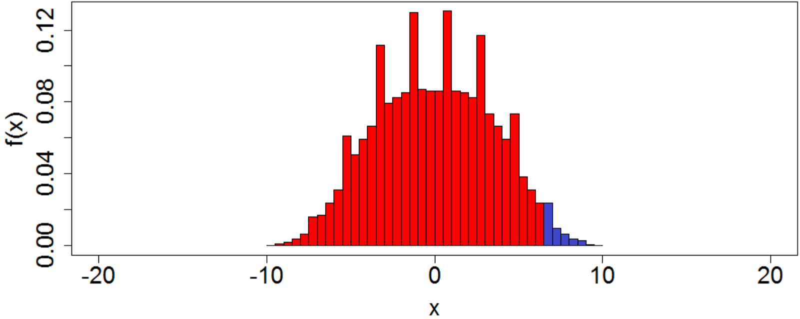


Бутстреп-распределение статистики $\bar{X}_{1n} - \bar{X}_{2n}$:



Кофеин и респираторный обмен

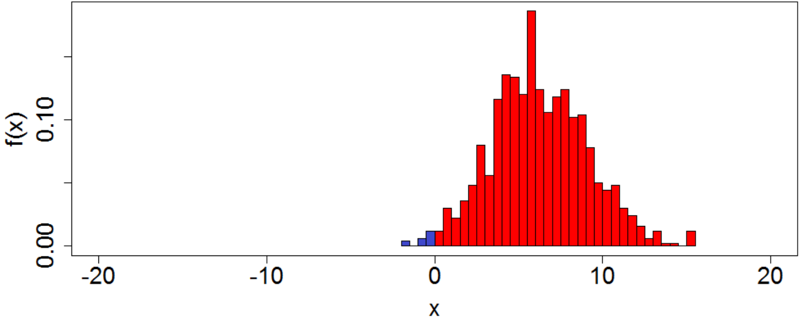
Нулевое распределение перестановочного критерия со статистикой $\bar{X}_{1n} - \bar{X}_{2n}$:



Доля перестановок, на которых среднее больше либо равно 6.33 — 0.0289. Это точный достигаемый уровень значимости перестановочного критерия.

Кофеин и респираторный обмен

Бутстреп-распределение статистики $\bar{X}_{1n} - \bar{X}_{2n}$:



Доля псевдовыборок, на которых среднее меньше либо равно нулю — 0.011.

Это приближённый достигаемый уровень значимости бутстреп-критерия.

Перестановки vs. бутстреп

1. - Перестановочный критерий измеряет расстояние от 0 до $\bar{D}_n$
   - Бутстреп-критерий измеряет расстояние от $\bar{D}_n$ до 0
2. - Перестановочный критерий точный
   - Бутстреп-критерий приближённый
3. - Перестановочный критерий проверяет

     $$H_0\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) \quad \text{против} \quad H_1\colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x+\Delta), \Delta > 0$$

   - Бутстреп-критерий проверяет

     $$H_0\colon \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 \quad \text{против} \quad H_1\colon \mathbb{E}X_1 > \mathbb{E}X_2$$

Литература

- критерии знаков (sign tests) — Kanji, №№ 45, 46;
- критерии знаковых рангов (signed-rank tests) — Kanji, №№ 47, 48;
- критерий Манна-Уитни-Уилкоксона (Mann-Whitney-Wilcoxon test) — Kanji, № 52;
- перестановочные критерии (permutation tests) — Good, 3.2.1, 3.6.4, 3.7.2 (с ошибкой, исправлено в Ramsey);
- двухвыборочные критерии согласия (two-sample goodness-of-fit tests) — Кобзарь, 3.1.2.8.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.

Bonnini S., Corain L., Marozzi M., Salmaso S. *Nonparametric Hypothesis Testing - Rank and Permutation Methods with Applications in R*, 2014.

Dinse G.E. (1982). *Nonparametric estimation for partially-complete time and type of failure data*. Biometrics, 38, 417–431.

Good P. *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses: A Practical Guide to Resampling Methods for Testing Hypotheses*, 2005.

Литература

Hollander M., Wolfe D.A. *Nonparametric statistical methods*, 1973.

Kanji G.K. *100 statistical tests*, 2006.

Laureysens I., Blust R., De Temmerman L., Lemmens C., Ceulemans R. (2004). *Clonal variation in heavy metal accumulation and biomass production in a poplar coppice culture. I. Seasonal variation in leaf, wood and bark concentrations.* Environmental Pollution, 131, 485-494.

Ramsey P.H., Ramsey P.P. (2008). *Brief investigation of tests of variability in the two-sample case*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 78(12), 1125–1131.

Shervin C.M. (2004) *Mirrors as potential environmental enrichment for individually housed laboratory mice*. Applied Animal Behaviour Science, 87(1-2), 95–103.