Семинар №7
Условные распределения и подсчёт условных матожиданий.

Лемма 1. *Пусть* X *и* Y *– н.о.р. сл.в., а* $f(x,y) = f(y,x)$ *– функция, действующая из* $\mathbb{R}^2$ *в* $\mathbb{R}$*. Тогда* $E(X|f(X,Y)) = E(Y|f(X,Y))$ *п.н.*

Задача. Пусть X и Y – н.о.р. сл.в.. Найти $E(X|X+Y)$.

Решение.

По лемме, $E(X|X+Y) = E(Y|X+Y)$, поэтому $E(X|X+Y) = \frac{1}{2}(E(X|X+Y)+E(Y|X+Y)) = \frac{1}{2}E(X+Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2}$.$\square$

Подсчёт условных математических ожиданий.

Определение. Величиной $E(\xi|\eta = y)$ называют такую борелевскую функцию $\varphi(y)$, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $E(\xi I\{\eta \in B\}) = \int\limits_B \varphi(y) P_\eta(dy)$.

Определение. Условное распределение $P_\xi(B|\eta = y) = P(\xi \in B|\eta = y) := E(I\{\xi \in B\}|\eta = y)$.

Тогда $E(f(\xi)|\eta = y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) P_\xi(dx|\eta = y)$. Осталось научиться находить условное распределение.

Определение. Условной плотностью называется такая функция $f_{\xi|\eta}(x|y)$, что $P_\xi(B|\eta = y) = \int\limits_B f_{\xi|\eta}(x|y)dx$.

Если $\exists$ совместная плотность $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$, то условную плотность можно найти следующим образом: $f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)}$. Тогда условное матожидание при условии $\eta = y$ равно $E(g(\xi)|\eta = y) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)dx$

Порядок вычисления условного математического ожидания $E(g(\xi)|\eta)$.

1. Найти $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$ – совместную плотность распределения ξ и η.
2. Найти $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dx$.
3. Тогда условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)}$ при $f_\eta(y) > 0$ и равна 0 при $f_\eta(y) = 0$.
4. Вычислить $\varphi(y) = E(g(\xi)|\eta = y) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)dx$.
5. Подставить η вместо y в формулу для $\varphi(y)$, чтобы получить окончательный ответ: $E(g(\xi)|\eta) = \varphi(\eta)$.

Задача. Пусть ξ, η – н.о.р. сл.в. с распределением $Exp(1)$. Найти $E(\xi^2|\xi+\eta)$.

Решение.

По определению, $E(\xi^2|\xi+\eta = y) = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 f_{\xi|\xi+\eta}(x|y)dx$, а условная плотность равна $f_{\xi|\xi+\eta}(x|y) = \frac{f_{(\xi,\xi+\eta)}(x,y)}{f_{\xi+\eta}(y)}$.

Найдём совместную плотность случайных величин ξ и $\xi+\eta$.

$$P(\xi \le x, \xi+\eta \le y) = \int\limits_{u \le x,\ u+v \le y} \underbrace{e^{-u}e^{-v} I\{u > 0\} I\{v > 0\}}_{\text{совместная плотность } \xi \text{ и } \eta} dvdu =$$

$$= I(y \ge x) \int\limits_0^x \int\limits_0^{y-u} e^{-u}e^{-v} dvdu = I(y \ge x) \int\limits_0^x e^{-u}(1 - e^{u-y})du = I(y \ge x)(-xe^{-y} + 1 - e^{-x}).$$

Тогда $f_{(\xi,\xi+\eta)}(x,y) = \frac{\partial^2 P(\xi \leq x, \xi+\eta \leq y)}{\partial x \partial y} = I(y \geq x \geq 0)e^{-y}$.
Теперь найдём плотность $\xi+\eta$ с помощью совместной плотности ξ и $\xi+\eta$:

$$f_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi,\xi+\eta)}(x,y)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} I(y \geq x \geq 0)e^{-y}dx = \int\limits_{0}^{y} e^{-y}dx = ye^{-y}I\{y > 0\}.$$

Таким образом, $f_{\xi|\xi+\eta}(x|y) = \frac{f_{(\xi,\xi+\eta)}(x,y)}{f_{\xi+\eta}(y)} = \frac{1}{y}I\{y \geq x > 0\}$. Осталось найти само условное матожидание.
$\varphi(y) = E(\xi^2|\xi+\eta = y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{y}I\{y \geq x \geq 0\}dx = \int\limits_{0}^{y} \frac{x^2}{y}dx = \frac{y^2}{3}$.
Окончательно получаем $E(\xi^2|\xi+\eta) = \varphi(\xi+\eta) = \frac{(\xi+\eta)^2}{3}$. $\square$