Семинар №6
Условное математическое ожидание.

Рассмотрим сначала поясняющий пример. Пусть (ξ, η) – случайный вектор со следующим распределением:

	3	4
1	1/6	1/3
2	1/3	1/6

Пусть значение η фиксировано, тогда мы можем найти условное распределение ξ при фиксированном значении η: $P(\xi = 3|\eta = 1) = \frac{P(\xi=3,\eta=1)}{P(\eta=1)} = \frac{1}{3}$, $P(\xi = 4|\eta = 1) = \frac{2}{3}$, $P(\xi = 3|\eta = 2) = \frac{2}{3}$, $P(\xi = 4|\eta = 2) = \frac{1}{3}$.

Условное математическое ожидание в таком случае логично находить по формуле $E(\xi|\eta = x) = \sum\limits_{k=1}^{2} y_k P(\xi = y_k|\eta = x)$. Таким образом, получаем, что $E(\xi|\eta = 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ и $E(\xi|\eta = 2) = 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$. Видим отсюда, что условное матожидание ξ зависит от фиксированного значения η, т.е. является $\sigma(\eta)-$ измеримой случайной величиной, где $\sigma(\eta)$ – сигма-алгебра, порождённая случайной величиной η.
В общем случае оказывается проще определить сначала условное математическое ожидание, а потом, с помощью него, – условное распределение.

Определение. Случайная величина η $(= E(\xi|\mathcal{G}))$ называется условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}$, если
1) η является $\mathcal{G}-$ измеримой случайной величиной.
2) Выполнено интегральное свойство: $\forall A \in \mathcal{G}$ выполнено $\int\limits_A \xi dP = \int\limits_A E(\xi|\mathcal{G})dP$ (или, другими словами, $E\xi I_A = E(E(\xi|\mathcal{G})I_A)$).

Лемма 1. *Условное математическое ожидание $E(\xi|\mathcal{G})$ – существует и единственно п.н. при $E|\xi| < \infty$ (следует из теоремы Радона-Никодима).*

Определение. Условное распределение относительно сигма-алгебры задаётся как $P(B|\mathcal{G}) = E(I_B|\mathcal{G})$. Кроме того, условное математическое ожидание одной случайной величины относительно другой равно $E(\xi|\eta) = E(\xi|\sigma(\eta))$.
Теперь выясним, как выглядит условное математическое ожидание в простейшем случае.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{G}$ – сигма-алгебра, порождённая разбиением $\{D_n, n \in \mathbb{N}\}$, причём $P(D_n) > 0$. Тогда $E(\xi|\mathcal{G})\ (\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{E(\xi I_{D_n})}{P(D_n)} I_{D_n}(\omega)$, т.е. условное матожидание на произвольном D_n равно усреднению случайной величины ξ на этом множестве.*

Доказательство.
По определению, условное математическое ожидание $\eta = E(\xi|\mathcal{G})$ измеримо относительно сигма-алгебры $\mathcal{G} \Longrightarrow \eta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n I_{D_n}$, поскольку на элементах разбиения оно должно равняться константе, иначе не будет $\mathcal{G}-$ измеримой случайной величиной.
Проверим теперь выполнение второго свойства из определения условного матожидания: $\forall A \in \mathcal{G}$ (фактически, можно проверять только для множеств D_n, так как они образуют разбиение) $E\xi I_{D_n} = E(E(\xi|\mathcal{G}) \cdot I_{D_n}) = E(\eta I_{D_n}) = |$т.к. η на множестве D_n равно $c_n| = c_n E I_{D_n} = c_n P(D_n)$, откуда видим, что $c_n = \frac{E\xi I_{D_n}}{P(D_n)}$. $\square$

Свойства условного математического ожидания (УМО).

1) Если ξ – $\mathcal{G}-$ измерима, то $E(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ п.н..
2) Линейность.
3) Если $\xi \leq \eta$, то и $E(\xi|\mathcal{G}) = E(\eta|\mathcal{G})$ п.н..
4) Если ξ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}$, то $E(\xi|\mathcal{G}) = E\xi$ п.н..
5) (Телескопическое свойство) Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, тогда
$E(E(\xi|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(\xi|\mathcal{G}_1)$ и
$E(E(\xi|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}) = \mathcal{E}(\xi|\mathcal{G})$.
6) (Формула полной вероятности) $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E\xi$.
7) Если ξ – $\mathcal{G}-$ измерима, то $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \xi E(\eta|\mathcal{G})$.
8) (Аналог теоремы Лебега) Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $|\xi_n| \leq \eta$ для всех n и $E\eta < \infty$. Тогда $E(\xi_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{\text{п.н.}} E(\xi|\mathcal{G})$.

Задача. Пусть ξ, η – независимые случайные величины, распределённые по закону $N(3, 4)$ Найти $E((\xi - 3\eta)^2|\eta)$.
Решение.
По второму свойству УМО, $E((\xi - 3\eta)^2|\eta) = E(\xi^2|\eta) - 6E(\xi\eta|\eta) + 9E(\eta^2|\eta)$.
Поскольку ξ и η независимы, то ξ^2 не зависит от $\sigma(\eta)$ и, по свойству 4), $E(\xi^2|\eta) = E\xi^2 = D\xi + (E\xi)^2 = 13$.
По свойствам 4) и 7), $E(\xi\eta|\eta) = \eta E(\xi|eta) = \eta E\xi = 3\eta$, далее, по свойству 1), $E(\eta^2|\eta) = \eta^2$.
В итоге, $E((\xi - 3\eta)^2|\eta) = 9\eta^2 - 18\eta + 13$. $\square$

Задача. Пусть (ξ, η) – гауссовский вектор с матожиданием $(1, -1)$ и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти $E(\xi - \eta|\xi + \eta)$.
Решение.
Известно, что если две нормальные случайные величины не коррелированы, то они независимы. Пусть требуется найти $E(X|Y)$, где X и Y – нормальные случайные величины. Метод решения подобных задач заключается в том, чтобы представить X как $\alpha Y + Z$, где случайная величина Z распределена нормально и не зависит от Y. Тогда $E(X|Y) = E(\alpha Y + Z|Y) = \alpha Y + EZ$.
Итак, найдём такое α, что $(\xi - \eta) - \alpha(\xi + \eta)$ не зависело от $\xi + \eta$. Т.е. $cov((\xi - \eta) - \alpha(\xi + \eta), \xi + \eta)$ должна равняться 0.

$$cov((\xi - \eta) - \alpha(\xi + \eta), \xi + \eta) = (1 - \alpha)cov(\xi, \xi) - (1 + \alpha)cov(\eta, \eta) - 2\alpha cov(\xi, \eta) = 2(1 - \alpha) - 3(1 + \alpha) - 2\alpha = 0,$$

отсюда, $\alpha = -\frac{1}{7}$. Тогда легко записать ответ: $E(\xi - \eta|\xi + \eta) = -\frac{\xi+\eta}{7} + E((\xi - \eta) - +\frac{1}{7}(\xi + \eta)) = 2 - \frac{\xi+\eta}{7}$. $\square$