FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Examen

1 Logică de ordinul întâi

(P1) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(a) $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \;\text{⫤}\models \exists x(\varphi \vee \psi)$, pentru orice variabilă x.

(b) $\forall x(\psi \to \varphi) \;\text{⫤}\models \exists x\psi \to \varphi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\exists x\varphi \to \exists x\psi \not\models \forall x(\varphi \to \psi).$$

Demonstraţie:

(i) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(a) Presupunem $\mathcal{A} \models \exists x(\varphi \vee \psi)[e] \Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. ($\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}]$) $\Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e]$ sau $\mathcal{A} \models (\exists x\psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \vee (\exists x\psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)[e]$

(b) $\forall x(\psi \to \varphi) \;\text{⫤}\models \exists x\psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \models \forall x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \exists x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ $\iff \mathcal{A} \models (\exists x\psi \to \varphi)[e]$.

(ii) Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := \neg(x\dot{<}\dot{0} \vee x = \dot{0})$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$.

$\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \to \exists x\psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{N} \nvDash (\exists x\varphi)[e]$ sau $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \Leftrightarrow$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $n \leq 0$ sau există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$.

Dar $\mathcal{N} \nvDash \forall x(\varphi \to \psi)[e]$.

Presupunem că $\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \to \psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \forall x(\neg\varphi \vee \psi)[e] \Leftrightarrow$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem ($n \leq 0$ sau $n \geq 2$), ceea ce nu este adevărat (luăm $n := 1$, de exemplu).

□

(P2) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I ce conţine cel puţin un simbol de relaţie unară P şi un simbol de constantă c. Să se arate:

$$\vDash P(c) \to (\exists v_0 P(v_0)).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (P(c) \to (\exists v_0 P(v_0)))[e]$, i.e. că $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) \to (\exists v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Presupunem că $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) = 1$ şi cercetăm dacă şi $(\exists v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Din faptul că $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) = 1$, avem că $c^{\mathcal{A}}(e) \in P^{\mathcal{A}}$, deci că $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. Cu scopul unei *reductio ad absurdum* să presupunem că $(\exists v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Despachetând semantic, aceasta înseamnă că nu există $a \in A$ astfel încât $(P(v_0))^{\mathcal{A}}(e_{v_0 \leftarrow a}) = 1$, i.e. $a \in P^{\mathcal{A}}$. Dar aceasta contrazice faptul descoperit anterior, că $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. □

(P3) [3 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de operaţie unară f;
- un simbol de constantă c.

(i) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \exists x P(x,y) \to (\neg\exists z(f(z) = c) \wedge \forall v R(v)) \\ \varphi_2 &= \exists x(\forall y S(y) \wedge \neg\exists y Q(x,y)) \to \neg(\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \neg\exists x R(x)). \end{aligned}$$

(ii) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul

$$\psi = \exists v_1 \forall v_2 \exists v_3 \exists v_4 \forall v_5 \big((Q(v_1,v_3) \to P(v_2,v_4)) \vee S(v_5) \wedge \neg(R(v_3) \to R(v_5))\big).$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\mathrel{\text{⫤}} \forall x(P(x,y) \to (\forall z \neg(f(z)=c) \wedge \forall v R(v)))\\ &\mathrel{\text{⫤}} \forall x(P(x,y) \to \forall z \forall v(\neg(f(z)=c) \wedge R(v)))\\ &\mathrel{\text{⫤}} \forall x \forall z \forall v(P(x,y) \to (\neg(f(z)=c) \wedge R(v)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &\mathrel{\text{⫤}} \exists x(\forall y S(y) \wedge \forall y \neg Q(x,y)) \to (\exists x \forall y \neg Q(x,y) \vee \exists x R(x))\\ &\mathrel{\text{⫤}} \exists x \forall y(S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \to \exists x(\forall y \neg Q(x,y) \vee R(x)))\\ &\mathrel{\text{⫤}} \forall x \exists y((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \to \exists x(\forall y \neg Q(x,y) \vee R(x)))\\ &\mathrel{\text{⫤}} \forall x \exists y((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \to \exists x \forall y(\neg Q(x,y) \vee R(x)))\\ &\mathrel{\text{⫤}} \forall x \exists y((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \to \exists u \forall v(\neg Q(u,v) \vee R(u)))\\ &\mathrel{\text{⫤}} \forall x \exists y \exists u \forall v((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \to (\neg Q(u,v) \vee R(u)))\end{aligned}$$

???TO WRITE??? □

(P4) [1 punct] Fie φ un enunţ în formă normală prenex şi $(\neg\varphi)^{Sk}$ o formă normală Skolem a lui $\neg\varphi$. Definim $\theta := \neg(\neg\varphi)^{Sk}$. Demonstraţi că

$$\models \theta \text{ dacă şi numai dacă } \models \varphi.$$

Demonstraţie: Avem că φ este validă $\iff \neg\varphi$ nu este satisfiabilă $\iff (\neg\varphi)^{Sk}$ nu este satisfiabilă (conform Teoremei 1.54) $\iff \neg(\neg\varphi)^{Sk}$ este validă $\iff \theta$ este validă. □

2 Logică modală

(P5) [2 puncte] Demonstraţi că următoarele formule nu sunt valide în clasa tuturor cadrelor:

(i) $\Box\bot$;

(ii) $p \to \Box\Diamond p$.

Demonstraţie: Exercise 1.3.5., p. 27 din Blackburn+deRijke+Venema. TO WRITE □

(P6) [2 puncte] Arătaţi că următoarea formulă este **K**-demonstrabilă:

$$\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q).$$

Demonstraţie: Exercise 1.6.1, p. 37 din Blackburn+deRijke+Venema. TO WRITE $\square$

(P7) [2 puncte] Demonstraţi că o mulţime de formule este Λ-inconsistentă dacă şi numai dacă are o submulţime finită Λ-inconsistentă.

Demonstraţie: Fie Γ mulţimea de formule.

$\Leftarrow$ Dacă $\Sigma \subseteq \Gamma$ este Λ-inconsistentă, atunci $\Sigma \vdash \bot$. Rezultă că $\Gamma \vdash \bot$, deci Γ este Λ-inconsistentă.

$\Rightarrow$ Presupunem că Γ este Λ-inconsistentă, deci $\Gamma \vdash \bot$. Aplicând Proprietăţi imediate (slideul 179), rezultă că există o submulţime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \bot$. Prin urmare, Σ este Λ-inconsistentă.

$\square$