

Seminar 3

(S3.1) Dați exemple, pe rând, de relații care:

- (i) sunt reflexive și tranzitive, dar nu sunt simetrice;
- (ii) sunt reflexive și simetrice, dar nu sunt tranzitive;
- (iii) sunt simetrice și tranzitive, dar nu sunt reflexive.

Demonstrație: Notăm, pentru orice mulțime C , $\Delta_C := \{(x, y) \in C \times C \mid x = y\}$ (**relația diagonală**).

- (i) \leq pe \mathbb{Z} ; \leq pe \mathbb{R} ; relația de divizibilitate pe \mathbb{Z} .
- (ii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup \{(7, 8), (8, 7), (8, 9), (9, 8)\}$ pe \mathbb{Z} . Nu este tranzitivă, deoarece $(7, 8) \in R$ și $(8, 9) \in R$, dar $(7, 9) \notin R$. Alt exemplu este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 1\}$ (R' nu este tranzitivă, pentru că $(1, 2)$ și $(2, 3)$ sunt în R' , dar $(1, 3)$ nu este).

În general, o intuiție potrivită pentru acest gen de relații este relația de prietenie între oameni (considerând că orice om este prieten cu sine). Doi oameni pot fi prieteni cu un al treilea fără să fie prieteni între ei. Pornind de la această idee, putem construi următorul exemplu “minimal” – luăm mulțimea $A := \{1, 2, 3\}$ și relația R pe ea egală cu $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

- (iii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \setminus \{(7, 7)\}$ pe \mathbb{Z} . Alt exemplu (tot pe \mathbb{Z}) este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \neq 0 \text{ și } y \neq 0\}$.

Observăm, de asemenea, că pe orice mulțime nevidă relația vidă satisface condiția (de ce, totuși, relația vidă pe mulțimea vidă nu este un exemplu?). Un exemplu “minimal”, dar nevid, este următorul: $A := \{1, 2\}$, $R := \{(2, 2)\}$.

□

(S3.2) Fie $R \subseteq A \times A$ o relație descrisă în fiecare situație de mai jos. Verificați, pe rând, dacă R este relație de ordine parțială, strictă sau totală sau relație de echivalență.

- (i) $A = \mathbb{N}$ și $(a, b) \in R$ dacă și numai dacă $a \mid b$.
- (ii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $(a, b)R(c, d)$ dacă și numai dacă $a \leq b$ sau $b \leq d$.
- (iii) $A = \mathbb{N}$ și $(a, b) \in R$ dacă și numai dacă $b = a$ sau $b = a + 1$.
- (iv) A este mulțimea tuturor cuvintelor în limba engleză și $(a, b) \in R$ dacă și numai dacă a nu este mai lung ca b .

Demonstrație:

(i) R este

- (a) tranzitivă: Fie $(a, b) \in R$ și $(b, c) \in R$, deci $a \mid b$ și $b \mid c$. Rezultă că $a \mid c$, deci $(a, c) \in R$.
- (b) reflexivă: Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, avem că $a \mid a$, deci $(a, a) \in R$.
- (c) antisimetrică: Presupunem că $(a, b) \in R$ și $(b, a) \in R$, deci că $a \mid b$ și $b \mid a$. Deoarece $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că $a = b$.

R nu este

- (a) simetrică: avem că $(3, 6) \in R$, deoarece $3 \mid 6$. Pe de altă parte $6 \nmid 3$, prin urmare $(6, 3) \notin R$.
- (b) totală: $2 \nmid 3$ și $3 \nmid 2$. Așadar, $(2, 3) \notin R$ și $(3, 2) \notin R$.

Prin urmare, R este relație de ordine parțială, dar R nu este relație de ordine strictă sau totală și nici relație de echivalență.

- (ii) R este reflexivă, deoarece $b \leq b$, prin urmare $(a, b)R(a, b)$ pentru orice $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Așadar, R nu este relație de ordine strictă. Observăm că R nu este
 - (a) simetrică: $(2, 2)R(4, 3)$, dar $((4, 3), (2, 2)) \notin R$.
 - (b) antisimetrică: $(3, 5)R(7, 2)$ (deoarece $3 \leq 5$) și $(7, 2)R(3, 5)$ (deoarece $2 \leq 5$), dar $(3, 5) \neq (7, 2)$.
 - (c) tranzitivă: $(5, 4)R(5, 6)$ și $(5, 6)R(3, 3)$, dar $((5, 4), (3, 3)) \notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relație de ordine totală sau parțială și nici relație de echivalență.

(iii) În acest caz, $R = \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Este clar că R este reflexivă, deci R nu este o relație de ordine strictă. Se observă că R nu este tranzitivă: $(5, 6) \in R$ și $(6, 7) \in R$, dar $(5, 7) \notin R$. Prin urmare, R nu este nici relație de ordine totală sau parțială și nici relație de echivalență.

(iv) R este reflexivă, deci R nu este o relație de ordine strictă. Observăm că R nu este

(a) antisimetrică: dacă (a, b) și (b, a) sunt în R , atunci a și b au aceeași lungime, dar nu coincid neapărat. De exemplu, $a = \text{“do”}$ și $b = \text{“go”}$.

(b) simetrică: $(\text{“it”}, \text{“and”}) \in R$, dar $(\text{“and”}, \text{“it”}) \notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relație de ordine totală sau parțială și nici relație de echivalență.

□

Definiția 1. Fie A o mulțime și $n \in \mathbb{N}$. Spunem că A are n elemente dacă este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n\}$ (mulțime notată și $\{1, \dots, n\}$).

Definiția 2. O mulțime A se numește **finită** dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A are n elemente.

Definiția 3. O mulțime se numește **infinită** dacă nu e finită.

(S3.3) Fie $n \in \mathbb{N}$ și A o mulțime infinită. Să se arate că există $B \subseteq A$ astfel încât B are n elemente.

Demonstrație: Demonstrăm prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$, iau $B := \emptyset$. Ea are 0 elemente, pentru că este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq 0\}$, care este tot \emptyset (echipotența se realizează via “funcția vidă”, $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$).

Presupunem acum că am arătat existența unei mulțimi C cu n elemente și dorim să construim o mulțime B cu $n + 1$ elemente. Fie $g : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow C$ o bijecție. Dacă am avea $C = A$, atunci existența lui g ar indica faptul că A este finită, contrazicând ipoteza noastră. Rămâne că există $x \in A \setminus C$. Luăm $B := C \cup \{x\}$. Definim $h : \{1, 2, \dots, n + 1\} \rightarrow B$, pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, prin:

$$h(j) := \begin{cases} g(j), & \text{dacă } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ x, & \text{dacă } j = n + 1. \end{cases}$$

Avem că h este bijecția căutată.

□