FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 10

(S10.1) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine (slabă) cu TC, iar Teorema de compacitate cu TK. Avem că:

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash \varphi &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.47)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din Propoziţia 1.62.(i))}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din TC)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.34.(ii))}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi. && \text{(din TK - versiunea 3)}
\end{aligned}$$

□

(S10.2) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică imediat Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Vrem să arătăm că o mulţime de formule este consistentă dacă şi numai dacă este satisfiabilă. Fie $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine tare cu TCT. Avem că:

$$\begin{aligned}
\Gamma \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \Gamma \nvdash \bot && \text{(din Propoziţia 1.60)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \nvDash \bot && \text{(din TCT - versiunea 2)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \text{ este satisfiabilă.} && \text{(din Propoziţia 1.32)}
\end{aligned}$$

□

(S10.3) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg\neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 &\sim ((v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1)) \vee v_0 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0) && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0), && \text{(idempotenţă)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \vee \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

$\square$

(S10.4) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi a funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.75 şi 1.77, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.76 şi 1.77, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 1.71.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

$\square$

(S10.5) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziţia 1.42.(ii).

Demonstrăm (i):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S8.3).(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$	(S8.4)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (4)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S8.3).(iii)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (5), (6).

Demonstrăm (ii):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(A1) şi Propoziţia 1.40.(i)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \bot)$	(S8.3).(iii)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to \bot$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (6)
(8)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	(7) şi (S8.2).

Demonstrăm (iii):

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S8.3).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	(S8.3).(ii)
(8)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (6), (7)
(9)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \bot$	(MP): (2), (8)
(10)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	(9) şi (S8.2).

Demonstrăm (iv), implicaţia “$\Rightarrow$”:

(1)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)	$\{\varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei
(4)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	(3)
(5)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \varphi$	(i)
(6)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \psi$	(ii)
(8)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (6), (7).

Demonstrăm (iv), implicaţia “$\Leftarrow$”:

(1)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)		$\vdash (\varphi \land \psi) \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \land \psi) \to \chi$	(2)
(4)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \varphi \land \psi$	(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$