FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

(S4.1) Fie A, B mulţimi a.î. există $f : B \to A$ injectivă. Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă B este infinită, atunci şi A este infinită.

(ii) Dacă B este infinită şi A este numărabilă, atunci B este numărabilă. În particular, orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Presupunem prin absurd că A este finită. Atunci există n astfel încât A are n elemente. Vom demonstra că există m astfel încât B are m elemente, ceea ce va contrazice ipoteza noastră.

Demonstrăm prin inducţie după n.

Pentru $n = 0$, avem $A = \emptyset$. Dacă am avea un $x \in B$, atunci $f(x) \in A = \emptyset$, contradicţie. Rămâne că $B = \emptyset$. Prin urmare B are 0 elemente, deci putem lua $m := 0$.

Presupunem că am arătat propoziţia pentru mulţimi cu n elemente şi considerăm acum că A are $n+1$ elemente. Luăm $g : \{1, ..., n+1\} \to A$ bijecţie. Notăm $C := g(\{1, ..., n\})$ şi $D := \{x \in B \mid f(x) \in C\}$.

Cum $f(D) \subseteq C$, putem atât restricţiona cât şi corestricţiona pe f la o funcţie $f' : D \to C$ ce ia aceleaşi valori ca f şi este deci tot injectivă. Facem acelaşi lucru pornind de la $g(\{1, ..., n\}) = C$ şi obţinem o bijecţie $g' : \{1, ..., n\} \to C$. Rezultă că C are n elemente. Aplicând ipoteza de inducţie pentru f', obţinem că există p astfel încât D are p elemente şi deci există o bijecţie $h : \{1, ..., p\} \to D$.

Distingem două cazuri. Dacă nu există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, atunci $B = D$ şi deci B are p elemente. Luăm aşadar $m := p$. În celălalt caz, dacă există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, avem că $B = D \cup \{a\}$, iar reuniunea este disjunctă. Luăm acum funcţia $h' : \{1, 2, ..., p + 1\} \to B$, definită, pentru orice j, prin:

$$h'(j) := \begin{cases} h(j), & \text{dacă } j \leq p \\ a, & \text{dacă } j = p + 1. \end{cases}$$

Cum h' este bijectivă, B are $p + 1$ elemente. Luăm, aşadar, în acest caz, $m := p + 1$.

(ii) Demonstrăm prima dată că orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Fie $B \subseteq \mathbb{N}$ infinită, deci nevidă. Construim inductiv o enumerare a sa

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\},$$

unde pentru orice n avem $b_n < b_{n+1}$ şi $b_n \geq n$.

Fie b_0 cel mai mic element al ei. Clar, $b_0 \geq 0$. Atunci, B fiind infinită, $B \setminus \{b_0\}$ rămâne infinită şi deci nevidă. Punem b_1 ca fiind minimul acelei mulţimi. Clar, $b_1 \neq b_0$ şi cum b_0 este minimul lui B, avem că $b_0 < b_1$. Rezultă şi că $b_1 > b_0 \geq 0$, deci $b_1 \geq 1$.

Presupunem că am fixat pe $b_0, \ldots, b_n$ (pentru un $n \geq 1$) şi vrem să îl alegem pe b_{n+1}, Îl punem ca fiind minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_n\}$ şi deci $b_{n+1} \neq b_n$. Dat fiind că b_n fusese ales ca minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$, avem că $b_n < b_{n+1}$ şi deci $b_{n+1} \geq n + 1$.

Luăm funcţia $g : \mathbb{N} \to B$, $g(n) = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Funcţia fiind strict crescătoare, este injectivă. Fie acum $m \in B$. Atunci $b_{m+1} \geq m + 1 > m$. Cum b_{m+1} este minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_m\}$, rezultă că $m \in \{b_0, \ldots, b_m\}$. Deci există $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m$ cu $m = b_i = g(i)$. Am arătat aşadar că g este surjectivă.

Demonstrăm acum enunţul principal. Fie $h : A \to \mathbb{N}$ o bijecţie. Atunci $B \sim g(B) \sim h(g(B))$, deci $h(g(B)$ e infinită şi este submulţime a lui $\mathbb{N}$, deci numărabilă, din cele anterioare. Rezultă că şi B este numărabilă.

$\square$

(S4.2) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă A este finită şi B este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabilă.

(ii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

(iii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

(iv) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Dacă A este finită, atunci are un număr natural de elemente n. Demonstrăm prin inducţie după acel n.

Dacă $n = 0$, atunci $A = \emptyset$ şi $A \cup B = B$, numărabilă.

Presupunem acum adevărată pentru un n şi demonstrăm pentru $n+1$. Putem deci scrie $A = \{a\} \cup A'$ unde $|A'| = n$ şi $a \notin A'$. Atunci $A' \cup B$ e numărabilă, din ipoteza de inducţie – în particular, $A' \cup B \sim \mathbb{N}^*$. Scriem $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B$. Dacă $a \in B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B = A' \cup B$, numărabilă. Dacă $a \notin B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B \sim \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

(ii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, A_n este numărabilă, deci $A_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,k}, \ldots\}$. Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in N} A_n, \quad f(n,m) = a_{n,m}.$$

Se observă uşor, în felul următor, că f este bijecţie. Pentru orice $a \in A$ există un unic $n_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a \in A_{n_a}$ (deoarece $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este familie disjunctă), deci există un unic $m_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a = a_{n_a, m_a}$. Inversa lui f se defineşte, aşadar, astfel:

$$f^{-1} : \bigcup_{n \in N} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f^{-1}(a) = (n_a, m_a).$$

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că $\bigcup_{n \in N} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_n := A_{F(n)}$. Atunci $\bigcup_{n \in N} B_n = \bigcup_{n \in N} A_{F(n)} = \bigcup_{i \in I} A_i$. Însă, din cazul particular de mai sus, rezultă că $\bigcup_{n \in N} B_n$ e numărabilă. Demonstraţia este încheiată.

(iii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Fie $A'_n := \{n\} \times A_n$. Atunci, conform (S2.5), $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile. Aplicăm (ii) pentru a concluziona că $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n$ este numărabilă. Definim

$$f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n, \quad f(a) = (n_a, a),$$

unde $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a \in A_n\}$. Este evident că f este bine definită (din faptul că $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ cu $a \in A_n$, deci mulţimea căreia îi căutăm minimul este nevidă) şi injectivă. De asemenea, din (S4.1).(i), $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este infinită, deoarece A_0 este infinită şi incluziunea

$$j : A_0 \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad j(a) = a$$

este injecţie. În sfârşit, putem aplica (S4.1).(ii) pentru a conchide că $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este o mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Considerăm familia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin:

$$B_n := A_{F(n)}$$

Atunci $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ şi deci $\bigcup_{i\in I} A_i \sim \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \sim \mathbb{N}$.

(iv) Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{\frac{m}{n+1} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Arătăm că mulţimile ce compun această familie numărabilă sunt şi ele numărabile. Luăm pentru orice $n \in \mathbb{N}$, bijecţia $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, definită, pentru orice m, prin $f_n(m) = \frac{m}{n+1}$. Observăm acum că $\mathbb{Q}$ este reuniunea familiei, deci este şi ea numărabilă, aplicând (iii).

□

(S4.3) Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$. Atunci:

(i) Dacă minimul lui S există, atunci acesta este unic.

(ii) Orice minim (maxim) al lui S este element minimal (maximal).

Demonstraţie:

(i) Vom presupune că există două valori minime şi vom demonstra că acestea sunt egale. Fie x minim al lui S, deci pentru orice $y \in S$, $x \leq y$. Fie x' minim al lui S, deci pentru orice $y' \in S$, $x' \leq y'$. Cum $x \leq y$ pentru orice $y \in S$, alegem $y = x'$. Rezultă că $x \leq x'$. Cum $x' \leq y'$ pentru orice $y' \in S$, alegem $y' = x$. Rezulă că $x' \leq x$. Atunci obţinem că $x' = x$, deci minimul este unic.
Se procedează asemănător pentru maxim.

(ii) Fie x minimul mulţimii S. Pentru a demonstra că x este element minimal, vom presupune că există cel puţin un element $t \in S$ a.î. $t \leq x$ şi vom arăta că $t = x$. Cum x este minim şi $t \in S$, rezultă că $x \leq t$. Prin urmare, $t = x$, deci x este element minimal al lui S.
Se procedează asemănător pentru maxim.

□

(S4.4) Fie $D(n) = \{d \in \mathbf{N} |\ \ d|n\}$ şi $P(n) = \{d \in \mathbf{N} |\ \ d|n,\ d \neq 1,\ d \neq n\}$.
Demonstraţi că $(P(n), |)$ şi $(D(n), |)$ sunt mulţimi parţial ordonate. Enumeraţi elementele minimale, elementele maximale, minimul şi maximul (dacă există) pentru următoarele mulţimi: $P(12)$, $P(32)$, $P(72)$, $D(72)$.

Demonstraţie:

Definim relaţia de divizibilitate pe mulţimea $P(n)$ astfel : $R = \{(a, b) \in P(n) \times P(n) | \ a|b\}$.

Reflexivitate

Pentru orice $a \in P(n)$, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a|a$ pentru orice $a \in P(n)$

Antisimetrie

Pentru orice $a, b \in P(n)$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, a) \in R$, atunci:

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|a \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } a = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow a = a \cdot r \cdot t,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow r \cdot t = 1,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{r} \in \mathbb{N}$. Deci r este divizor al lui 1. Rezultă $r = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow a = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$.

Tranzitivitate

Pentru orice $a, b, c \in P(n)$, dacă $(a, b) \in P(n)$ şi $(b, c) \in P(n)$, atunci:

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|c \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } c = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow c = a \cdot r \cdot t,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow a|c, \text{ unde } a, c \in P(n)$$

$\Rightarrow (a, c) \in R$.

În concluzie, R este o relaţie de ordine parţială, deci $(P(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.
Asemător se demonstrează şi că $(D(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.

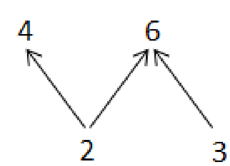
Definiţia 1. *Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Construim diagrama Hasse corespunzătoare sub forma unui graf orientat în modul următor:*

(i) vârfurile grafului reprezintă toate elementele mulţimii A.

(ii) există muchie $x \to y$ dacă $x < y$ şi nu există $z \in A$ a.î. $x < z < y$

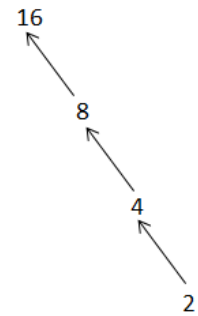
Folosim diagrama Hasse pentru a observa diferenţa dintre elementele minimale(maximale) şi minimul(maximul) unei mulţimi parţial ordonate.

$P(12) = \{2, 3, 4, 6\}$.
Observăm că pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$, sau dacă $y|3$, rezultă $y = 3$. Deci, 2 şi 3 sunt elemente minimale.
Asemănător, pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $4|y$, rezultă $y = 4$, sau dacă $y|6$, rezultă $y = 6$. Deci, 4 şi 6 sunt elemente maximale.
Nu avem element minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie.
Nu avem element maxim, deoarece 4 şi 6 nu sunt într-o relaţie.
Observăm că dacă un element este minimal(maximal), nu implică faptul că el este minim(maxim).



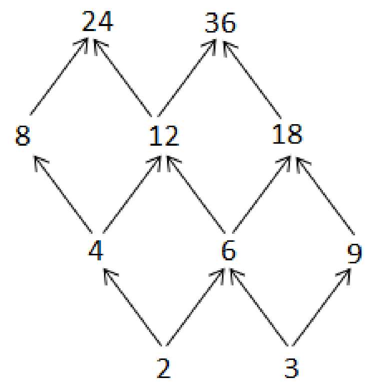
$2|4$
$2|6$
$3|6$

$P(32) = \{2, 4, 8, 16\}$.
2 este element minimal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$.
Exemplu: 4 nu este maximal, deoarece pentru $y|4$, unde $y \in S$, avem $y \in \{2, 4\}$, deci nu implică $y = 4$.
2 este şi minim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $2|y$.
16 este element maximal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $16|y$, rezultă $y = 16$.
Dar 16 este şi maxim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $y|16$.

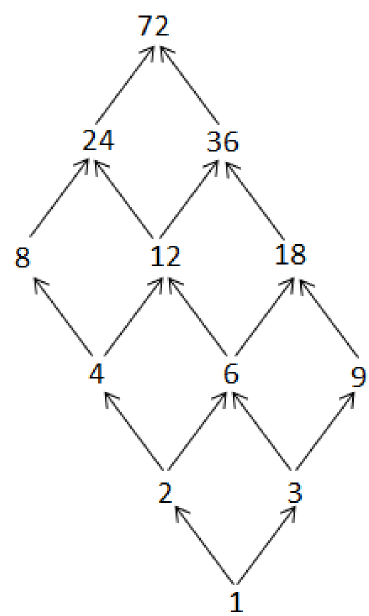


$2|4|8|16$

$P(72) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$.
2 şi 3 sunt elemente minimale.
24 şi 36 sunt elemente maximale.
Nu avem minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate şi nici maxim, deoarece 24 şi 36 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate.



$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
1 este element minimal, dar şi minim.
72 este element maximal, dar şi maxim.



$\square$