FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 14

(S14.1) Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t, dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Demonstraţie: Aplicăm inducţia pe termeni. Avem următoarele cazuri:

• $t = v \in V$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = e_1(v) = e_2(v) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.
• $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2) = c^{\mathcal{A}}$.
• $t = ft_1 \dots t_m$, cu $f \in \mathcal{F}_m, m \geq 1$ şi $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni. Deoarece $Var(t_i) \subseteq Var(t)$, rezultă că pentru orice $i = 1, \dots, m$, avem $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t_i)$. Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducţie pentru a concluziona că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

□

(S14.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

este validă;

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\varphi \to \forall x\varphi$$

este validă;

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\exists x(x = t)$$

este validă.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \nvDash (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 2.26, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

(iii) Trebuie arătat, folosind (S12.1).(iv), că există un $b \in A$ astfel încât $\mathcal{A} \vDash (x = t)[e_{x\leftarrow b}]$, i.e. că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b})$. Cum $x \notin Var(t)$, aplicând Propoziţia 2.24, avem $t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acum e simplu, luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.

□

(S14.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y, z) = d) \\
\varphi_2 &= \forall y(\forall xP(x, y) \to \exists zQ(x, z)) \\
\varphi_3 &= \exists x\forall yP(x, y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall zR(z)) \\
\varphi_4 &= \exists z(\exists xQ(x, z) \lor \exists xR(x)) \to \neg(\neg\exists xR(x) \land \forall x\exists zQ(z, x))
\end{aligned}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y, z) = d) &\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x(f(x) = c \land \exists z\neg(g(y, z) = d) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x\exists z(f(x) = c \land \neg(g(y, z) = d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall y(\forall xP(x,y) \to \exists zQ(x,z)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y\exists z(\forall xP(x,y) \to Q(x,z)) \vDash \forall y\exists z(\forall uP(u,y) \to Q(x,z)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y\exists z\exists u(P(u,y) \to Q(x,z)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists x\forall yP(x,y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall zR(z)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x(\forall yP(x,y) \lor \neg\exists y\forall z(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x(\forall yP(x,y) \lor \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x(\forall uP(x,u) \lor \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \lor \neg(S(y) \to R(z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists z(\exists xQ(x,z) \lor \exists xR(x)) \to \neg(\neg\exists xR(x) \land \forall x\exists zQ(z,x)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to (\neg\neg\exists xR(x) \lor \neg\forall x\exists zQ(z,x)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to (\exists xR(x) \lor \exists x\forall z\neg Q(z,x)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists x(R(x) \lor \forall z\neg Q(z,x)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists x\forall z(R(x) \lor \neg Q(z,x)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists u\forall v(R(u) \lor \neg Q(v,u)) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \\
\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z) \lor R(x)) \to (R(u) \lor \neg Q(v,u)))
\end{aligned}$$

$\square$