FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 13

Notaţia 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice $e : V \to A$ şi orice $a, b \in A$, avem că:*

$$(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a} = (e_{x\leftarrow a})_{y\leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}$. Aşadar,

$$e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b} : V \to A, \quad e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ şi } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S13.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\neg\exists x\varphi \mathrel{\Vert\!\!=} \forall x\neg\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \land \psi) \mathrel{\Vert\!\!=} \forall x\varphi \land \forall x\psi$;

(iii) $\exists y\forall x\varphi \vDash \forall x\exists y\varphi$;

(iv) $\forall x(\varphi \to \psi) \vDash \forall x\varphi \to \forall x\psi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ şi $e : V \to A$.

(i) Ştim că "$\exists x$" este o prescurtare pentru "$\neg\forall x\neg$".
$\mathcal{A} \vDash (\neg\exists x\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\neg\neg\forall x\neg\varphi)[e] \iff$ nu este adevărat că $\mathcal{A} \vDash (\neg\forall x\neg\varphi)[e]$ $\iff$ nu este adevărat că nu este adevărat că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi\land\psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi\land\psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big)$ şi $\big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\big) \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \land \forall x\psi)[e]$.

(iii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{x \leftarrow c})_{y \leftarrow d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$ (**).

Ştim (*) şi vrem să arătăm (**). Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$.

Luăm d să fie b-ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow d}]$. În particular, luând $a := c$, obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$, ceea ce ne trebuia.

(iv) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow a}]$, lucru pe care îl putem scrie şi $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \to \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1$ sau chiar $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi \to \forall x \psi)[e]$, ceea ce este echivalent, din aceleaşi considerente, cu $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e)$.

Dacă $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, suntem OK. Presupunem, aşadar, că $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. pentru orice $b \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = 1$ (**).

Ne rămâne de arătat că $(\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. că pentru pentru orice $c \in A$, $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c})$, iar din (**), că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Deci $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$, ceea ce ne trebuia.

$\square$

(S13.2) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \nvDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;

(ii) $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \nvDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

(iii) $\forall x \exists y \varphi \nvDash \exists y \forall x \varphi$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ şi $\varphi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\varphi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Avem:

(a) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e]$. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ şi $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e].$$

(iii) Fie $\varphi := x\dot{<}y$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}\text{, avem } \mathcal{N} \vDash (\exists y\varphi)[e_{x\leftarrow n}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash (\exists y\forall x\varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e_{y\leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ & \text{avem } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\exists y\forall x\varphi)[e].$$

$\square$

(S13.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \land \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \land \forall x\psi \tag{1}$$

$$\exists x(\varphi \lor \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \lor \exists x\psi \tag{2}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \to \forall x\psi \tag{3}$$

$$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x\psi \to \varphi \tag{4}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\forall x(\varphi \land \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \land \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \land \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \land \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \land \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \lor \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \lor \exists x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \lor \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\varphi \lor \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \lor \exists x\psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \to \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x\psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \exists x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\vDash \forall x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e]$.

$\square$