

Seminar 2

(S2.1)

- (i) Demonstrați că orice intervale deschise (a, b) , (c, d) ale lui \mathbb{R} sunt echipotente.
- (ii) Demonstrați că $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ și \mathbb{R} sunt echipotente.

Demonstrație:

- (i) Fie funcția

$$f : (a, b) \rightarrow (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \quad \text{pentru orice } x \in (a, b).$$

Dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ și $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d-c$. Adăugând c , rezultă că funcția noastră este bine definită, i.e. valoarea dată de noi pentru $f(x)$ se află într-adevăr în (c, d) . Definim funcția

$$g : (c, d) \rightarrow (a, b), \quad g(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a \quad \text{pentru orice } x \in (c, d).$$

Se observă ușor că f și g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, (a, b) și (c, d) sunt echipotente.

- (ii) Știm că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0, 1)$.

O soluție directă este: se ia funcția $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0, 1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ și \mathbb{R} sunt echipotente.

Se ia apoi funcția $h : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in (0, 1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1]$ și $(0, 1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcția $j : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in [0, 1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ și $[0, 1]$ sunt echipotente.

În sfârșit, se observă ușor că funcția $F : (0, 1] \rightarrow [0, 1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui F fiind tot F). Prin urmare, $(0, 1]$ și $[0, 1)$ sunt echipotente.

□

(S2.2) Fie X o mulțime. Să se arate că nu există o funcție surjectivă cu domeniul X și codomeniul $\mathcal{P}(X)$.

Demonstrație: Presupunem că ar exista, și fie $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulțimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicție. □

(S2.3) Arătați, pe rând, următoarele:

- (i) \mathbb{N}^* este numărabilă.
- (ii) \mathbb{Z} este numărabilă.
- (iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Demonstrație:

- (i) Definim

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n + 1.$$

Se demonstrează imediat că f este bijecție, inversa sa fiind

$$f^{-1} : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, \quad f^{-1}(n) = n - 1.$$

- (ii) Enumerăm elementele lui \mathbb{Z} astfel:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

Funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ corespunzătoare acestei enumerări este următoarea:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ e par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ e impar.} \end{cases}$$

E clar că f e bijectivă și că $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin:

$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{dacă } s \geq 0 \\ -2s - 1 & \text{dacă } s < 0 \end{cases}$$

este inversa lui f .

- (iii) Ordonăm elementele lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ după suma coordonatelor și în cadrul elementelor cu aceeași sumă după prima componentă în ordine crescătoare:

linia 0	$(0, 0),$
linia 1	$(0, 1), (1, 0),$
linia 2	$(0, 2), (1, 1), (2, 0),$
linia 3	$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0),$
\vdots	
linia k	$(0, k), (1, k-1), \dots, (k-1, 1), (k, 0),$
\vdots	

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, pe linia k sunt $k + 1$ perechi $(i, k - i), i = 0, \dots, k$. Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel: $f(0, 0) = 0, f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 2, \dots$. În general, $f(i, j)$ se definește ca fiind numărul perechilor situate înaintea lui (i, j) . Deoarece (i, j) este al $(i + 1)$ -lea element pe linia $i + j$, rezultă că înaintea sa sunt $1 + 2 + 3 + \dots + (i + j) + i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ elemente. Așadar, bijectia va fi funcția

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(i, j) = \frac{(i + j)(i + j + 1)}{2} + i.$$

Această funcție se numește și *funcția numărare diagonală a lui Cantor* (în engleză, *Cantor pairing function*).

□

(S2.4) Arătați, pe rând, următoarele:

- (i) Produsul cartezian a două mulțimi numărabile este numărabil.
- (ii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.

Demonstrație:

- (i) Fie A_1 și A_2 două mulțimi numărabile. Prin urmare, le putem enumera:

$$A_1 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, \dots\}, \quad A_2 = \{a_{2,0}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots\}.$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A_1 \times A_2, \quad f(m, n) = (a_{1,m}, a_{2,n}).$$

Se demonstrează ușor că f este bijecție.

- (ii) Demonstrăm prin inducție după n că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și pentru orice mulțimi numărabile A_1, \dots, A_n , $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ este numărabilă.

$n = 2$: Aplicăm (i).

$n \Rightarrow n + 1$. Fie A_1, \dots, A_{n+1} mulțimi numărabile și $B = \prod_{i=1}^n A_i$. Atunci B este numărabilă, conform ipotezei de inducție, deci, conform (i), $B \times A_{n+1}$ este numărabilă. Se observă imediat că funcția

$$f : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \rightarrow B \times A_{n+1}, \quad f((a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})) = ((a_1, a_2, \dots, a_n), a_{n+1})$$

este bijecție. Prin urmare, $\prod_{i=1}^{n+1} A_i$ este numărabilă.

□

Definiția 1. O familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ se numește **disjunctă** dacă pentru orice $i, j \in I$ cu $i \neq j$ avem $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(S2.5) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A'_i := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A'_i \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ și că $(A'_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulțimi.

Demonstrație: Este evident că, pentru orice $i \in I$, funcția

$$f_i : A_i \rightarrow A'_i, \quad f_i(a) = (i, a)$$

este bijecție.

Presupunem prin reducere la absurd că $(A'_i)_{i \in I}$ nu este o familie disjunctă de mulțimi. Atunci există $j, k \in I$ cu $j \neq k$ a.î. $A'_j \cap A'_k \neq \emptyset$, deci există $x \in A'_j \cap A'_k$. Deoarece $x \in A'_j$, există $a \in A_j$ cu $x = (j, a)$. Similar, deoarece $x \in A'_k$, există $b \in A_k$ cu $x = (k, b)$. Rezultă că $(j, a) = (k, b)$, deci $k = j$, ceea ce contrazice presupunerea. □