FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 7

(S7.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia din mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots \\ & \text{dacă şi numai dacă} & (e(v) = 0 \text{ pentru orice } v \in V) \\ & & \text{sau } (e(v) = 1 \text{ pentru orice } v \in V) \\ & & \text{sau (există } k \geq 1 \text{ a.î. } e(v_i) = 0 \text{ pentru orice } i < k \text{ şi} \\ & & e(v_i) = 1 \text{ pentru orice } i \geq k). \end{array}$$

Definim $e^0 : V \to \{0,1\}$, $e^0(v) = 0$, $e^1 : V \to \{0,1\}$, $e^1(v) = 1$ şi, pentru orice $k \geq 1$,

$$e_k : V \to \{0,1\}, \quad e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \geq 1\} \cup \{e^0, e^1\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & e \vDash v_0 \text{ şi } e \vDash v_n \to v_{n+1} \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 7 \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) = 1 \text{ şi } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } n \in \{0,1,\ldots,8\}. \end{array}$$

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

$\square$

(S7.2) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

Demonstraţie:

Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) şi $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 \;=\; \boldsymbol{\neg} e(v_0) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_1) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_2) = \boldsymbol{\neg} 1 \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_1) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_2) = 0 \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_1) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_2) = e(v_1) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \mathbin{\boldsymbol{\vee}} 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. $\square$

(S7.3) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1 \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

   (a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \to 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

"$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

□

Notaţie

Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm

$$\Gamma \vDash_{fin} \varphi \quad :\iff \quad \textit{există o submulţime finită } \Delta \textit{ a lui } \Gamma \textit{ a.î. } \Delta \vDash \varphi.$$

(S7.4) Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ avem că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem întâi că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \vDash \varphi \iff$ (din Propoziţia 1.33.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).
Apoi, cum o mulţime finit satisfiabilă înseamnă o mulţime pentru care orice submulţime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă $\iff$ există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Δ' e nesatisfiabilă (**).
Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).
Pentru "(*) implică (**)", luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
Pentru "(**) implică (*)", luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulţime finită a lui Γ. Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Δ' e nesatisfiabilă, rezultă că şi $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. □