FMI, Info, Master I
Logică avansată pentru informatică

Examen

1 Logică de ordinul întâi

(P1) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(a) $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x(\varphi \vee \psi)$, pentru orice variabilă x.

(b) $\forall x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\psi \to \varphi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\exists x\varphi \to \exists x\psi \not\vDash \forall x(\varphi \to \psi).$$

(P2) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I ce conţine cel puţin un simbol de relaţie unară P şi un simbol de constantă c. Să se arate:

$$\vDash P(c) \to (\exists v_0 P(v_0)).$$

(P3) [3 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de operaţie unară f;
- un simbol de constantă c.

(i) Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x P(x,y) \to (\neg\exists z(f(z) = c) \wedge \forall v R(v)) \\
\varphi_2 &= \exists x(\forall y S(y) \wedge \neg\exists y Q(x,y)) \to \neg(\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \neg\exists x R(x)).
\end{aligned}$$

(ii) Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul

$$\psi \quad = \quad \exists v_1 \forall v_2 \exists v_3 \exists v_4 \forall v_5 \big((Q(v_1, v_3) \to P(v_2, v_4)) \vee S(v_5) \wedge \neg(R(v_3) \to R(v_5))\big).$$

(P4) [1 punct] Fie φ un enunţ în formă normală prenex şi $(\neg\varphi)^{Sk}$ o formă normală Skolem a lui $\neg\varphi$. Definim $\theta := \neg(\neg\varphi)^{Sk}$. Demonstraţi că

$$\models \theta \text{ dacă şi numai dacă } \models \varphi.$$

2 Logică modală

(P5) [2 puncte] Demonstraţi că următoarele formule nu sunt valide în clasa tuturor cadrelor:

(i) $\Box\bot$;

(ii) $p \to \Box\Diamond p$.

(P6) [2 puncte] Arătaţi că următoarea formulă este **K**-demonstrabilă:

$$\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q).$$

(P7) [2 puncte] Demonstraţi că o mulţime de formule este Λ-inconsistentă dacă şi numai dacă are o submulţime finită Λ-inconsistentă.