FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$. Să se demonstreze că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x:

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\vee} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\wedge} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\leftrightarrow} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \boldsymbol{\neg}\varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\vee} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg(\varphi \to \neg\psi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \boldsymbol{\neg}(\varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg}\psi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\wedge} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \psi^{\mathcal{A}}(e)) \boldsymbol{\wedge} (\psi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \varphi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\leftrightarrow} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(iv) Avem:

$$\begin{aligned}
(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=1 \iff \neg(\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=1\\
&\iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=0\\
&\iff \text{ există } a\in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a})=0\\
&\iff \text{ există } a\in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a})=1.
\end{aligned}$$

□

(S12.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar}=(\dot{<};\dot{+},\dot{\times},\dot{S};\dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N}=(\mathbb{N},<,+,\cdot,S,0)$.

(i) Fie $x,y\in V$ cu $x\neq y$, şi $t=\dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y=\dot{\times}(\dot{S}x,\dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e:V\to\mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x)=3$ şi $e(y)=7$.

(ii) Fie $\varphi=x\dot{<}\dot{S}y\to(x\dot{<}y\vee x=y)=\dot{<}(x,\dot{S}y)\to(\dot{<}(x,y)\vee x=y)$. Să se arate că $\mathcal{N}\vDash\varphi[e]$ pentru orice $e:V\to\mathbb{N}$.

Demonstraţie:

(i) Pentru orice interpretare $e:V\to\mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}
t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e),(\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e))=(\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e)\cdot(\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)\\
&= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e))\cdot\dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e))=S(e(x))\cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e)))\\
&= S(e(x))\cdot S(S(e(y))).
\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x)=3$ şi $e(y)=7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e)=S(3)\cdot S(S(7))=4\cdot 9=36.$$

(ii) Pentru orice interpretare $e:V\to\mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\vDash\varphi[e] &\iff \mathcal{N}\nvDash(\dot{<}(x,\dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N}\vDash(\dot{<}(x,y)\vee x=y)[e]\\
&\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x),S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau}\\
&\qquad \mathcal{N}\vDash(\dot{<}(x,y))[e] \text{ sau } \mathcal{N}\vDash(x=y)[e]\\
&\iff <(e(x),S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x),e(y))\\
&\qquad \text{sau } e(x)=e(y)\\
&\iff e(x)\geq S(e(y)) \text{ sau } e(x)<e(y) \text{ sau } e(x)=e(y)\\
&\iff e(x)\geq e(y)+1 \text{ sau } e(x)<e(y) \text{ sau } e(x)=e(y).
\end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash \varphi[e] & \iff \mathcal{N} \not\vDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\
& \iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\
& \iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y).
\end{aligned}$$

□

(S12.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Demonstraţie: Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 & \iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\
& \iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
& \iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
& \iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
& \iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
& \iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) \leq e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
& \iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e(v_3) \leq a \\
& \iff e(v_3) = 0.
\end{aligned}$$

□