FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 8

(S8.1) Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$.

Demonstraţie:

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):

$\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.33.(i))
$\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$)
$\iff \Gamma \vDash_{fin} \varphi$ (conform (S7.4)).

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):

Γ este nesatisfiabilă $\iff \Gamma \vDash \bot$ (conform Propoziţiei 1.32)
$\iff \Gamma \vDash_{fin} \bot$ (conform (V3) pentru Γ şi $\bot$)
$\iff$ există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \bot$
$\iff$ există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î.
Δ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.32)
$\iff \Gamma$ nu este finit satisfiabilă.

$\square$

(S8.2) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie:

Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$	(A3) şi Propoziţia 1.40.(i)
(4)	Γ	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \varphi \to \varphi$	Propoziţiile 1.48 şi 1.42.(ii)
(6)	Γ	$\vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S8.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(iv) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3) şi Propoziţia 1.40.(i)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	(S8.3).(i)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm în continuare (iii).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(1) şi (S8.2)
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	(iii) cu $\varphi := \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

□

(S8.4) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demonstraţie:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \varphi \to \psi & \text{Propoziţia 1.40.(ii)} \\
(2) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\psi & \text{Propoziţia 1.40.(ii)} \\
(3) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\neg\varphi & \text{Propoziţia 1.40.(ii)} \\
(4) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi & \text{(S8.3).(iii) şi Propoziţia 1.42.(ii)} \\
(5) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \varphi & \text{(MP): (3), (4)} \\
(6) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \psi & \text{(MP): (1), (5)} \\
(7) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) & \text{(S8.3).(ii) şi Propoziţia 1.42.(ii)} \\
(8) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \psi \to \neg(\varphi \to \varphi) & \text{(MP): (2), (7)} \\
(9) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} & \vdash \neg(\varphi \to \varphi) & \text{(MP): (6), (8)} \\
(10) & \{\varphi \to \psi, \neg\psi\} & \vdash \neg\varphi & \text{(9) şi (S8.2)} \\
(11) & \{\varphi \to \psi\} & \vdash \neg\psi \to \neg\varphi & \text{Teorema deducţiei} \\
(12) & & \vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

$\square$