

大数运算实现

目录

一、预定义的一些函数和宏（在.h文件中） 4

1. 1024 位的大整数 BN 2048 位 BND 4

2. 常数 0, 1, 2, 其中 0 是最常用的 4

3. 状态标志 flag, 一开始写的时候用上了, 后面写着就没用上, 以后修改扩展的时候可以用 4

4. 常用函数 4

二、主要函数概览(在.h文件中) 5

1. 加法 5

2. 减法 5

3. 乘法 5

4. 除法 6

5. 取模 6

6. 信安数学中的函数 6

7. 位运算函数 6

8. 特殊操作的函数 6

9. SHA-1 的函数和常数 6

10. 字符串和文件处理 7

三、函数细节说明 7

1. 加法 7

1.1 int add_b(BN a, BN b, BN sum) 7

1.2 void add(BN a, BN b, BN sum) 7

1.3 int adduint_b(BN a, uint32_t b, BN sum) 8

2. 减法 8

2.1 int sub_b(BN a, BN b, BN result); //result=a-b 8

2.2 void sub(BN a, BN b, BN result) 8

3. 乘法 8

3.1 int mul_b(BN a, BN b, BN &result) 8

3.2 int mul(BN a, BN b, BN result) 8

4. 除法 8

4.1 int div_b(BN a, BN b, BN q, BN rem) 8

4.2 int remdiv_b(BN a, BN b, BN & rem)	9
5. 取模.....	11
5.1 int modn_b(BN a, BN n, BN & rem) rem=a mod n	11
5.2 int modadd_b(BN a, BN b, BN n, BN & result);	11
5.3 void modsub_b(BN a, BN b, BN n, BN &result);	11
5.4 void modmul(BN a, BN b, BN n, BN & result)	11
6. 信安数学中常用函数	11
6.1 int gcd_b(BN a, BN b, BN & result);//求最大公因子, result=(a,b)	11
6.2 int inv_b(BN a, BN n, BN & x) //求逆.....	11
6.3 int modexp_b(BN b, BN n, BN m, BN & result);//模幂运算	12
6.4 int fermat_b(BN a); //用费马小定理检测 a 是不是素数.....	12
6.5 void crt_b(BN a, BN b, BN p, BN q, BN & result);//中国剩余定理..	12
7. 位运算函数	12
7.1 int shl_b(BN a);//左移一位.....	12
7.2 int shr_b(BN a) //右移一位.....	13
7.3 uint32_t getbits_b(BN a) //获取 a 的二进制位数.....	13
8. 特殊操作函数	13
8.1 void exclu();//求前几十个素数的乘积, 存在文件中	13
8.2 int genBN(BN result, int bits);//产生 bits 个二进制位大数 result.	13
8.3 void writerand(char * addr);//把 rand()产生的随机数写到 addr 中 ...	13
8.4 int findprime(BN a, int bits);//寻找 bits 位素数 a.....	13
8.5 void genpq(char * p_path, char * q_path);//产生私钥 p 和 q.....	14
9. 哈希函数 SHA-1 部分	14
10. 字符串处理部分	14
10.1 string bn2str(BN bignum);//bignum 转化为字符串形式返回	14
10.2 int str2bn(BN & bignum, string strbn);//字符串形式的转化为大数	15
10.3 int readbn(BN &bignum, string filename)//从文本中读取大数	15
10.4 int writebn(string filename, BN bignum)//写入大数到文本.....	15
四、参考文献.....	15

一、预定义的一些函数和宏（在.h文件中）

1. 1024 位的大整数 BN 2048 位 BND

它们的第 0 “位” 都用来表示 “位” 数，每 “位” 是一个 32 位的二进制数 uint32_t

```
#define BITPERDIGIT 32//每个小块是uint32，32位顺序和人期望是一致的，当黑盒就好
#define BASE 0x100000000U//每个小块uint32，基数就是2^32,可以在模的时候用上
#define BNMAXDGT 32//最多32 “位” 个32位
#define ALLONE 0xffffffffU
#define ALLONEL 0xffffffffUL
typedef uint32_t BN[BNMAXDGT + 1];//BN是1024+32位的，多一位表示位数
#define BNMAXBIT BNMAXDGT<<5 //BN最大能处理1024位
#define BNDMAXBIT BNMAXBIT<<1 //BND最大能处理2048位
typedef uint32_t BND[1 + (BNMAXDGT << 1)];//BND能处理2048位，长度是2048+32
#define BNSIZE sizeof(BN)//BN 占用的字节数
```

2. 常数 0, 1, 2, 其中 0 是最常用的

```
BN ZERO_BN = { 0 };//0
BN ONE_BN = { 1, 1 };//1
BN TWO_BN = { 1, 2 };//2
```

3. 状态标志 flag，一开始写的时候用上了，后面写着就没用上，以后修改扩展的时候可以用

```
#define FLAG_OK 0 //正常
#define FLAG_OF 1 //上溢了，最后一次[31]+[31]出现了进位，自动模除不用管
#define FLAG_UF 2//可能是减法下溢了
#define FLAG_DIVZERO 3//除0错误
#define FLAG_FILE_ERROR 4//读写文件错误
#define FLAG_NOINV 5//不互素没有逆元
#define FLAG_ERROR 6//出错了
```

4. 常用函数

```
#define MIN(a,b) ((a)<(b)?(a):(b)) //比较大小
#define DIGITS_B(n_b) ((uint32_t)*(n_b)) //获得位数，[0]里面存的是 uint32 格式的位数
#define SETDIGITS_B(n_b, b) (*(n_b) = (uint32_t)(b)) //设置位数，置[0]为想要的位数
#define MSDPTR_B(n_b) ((n_b) + DIGITS_B(n_b)) //指向最高位，用指针加法
#define LSDPTR_B(n_b) ((n_b)+1) //指向最低位，[0]是位数，[1]才是数字
#define SETZERO_B(n_b) (*(n_b) = 0) //置为全0，位数置为0就可以了，0位，以后可以覆盖
inline void INCDIGITS_B(BN n_b) {*(n_b) = *(n_b)+1; } //增加1位位数
inline void DECDIGITS_B(BN n_b) //减少1位位数
```

```

{   if (DIGITS_B(n_b) > 0)      *(n_b) = *(n_b)-1; }
//消除前导0, 只要有32为基数的位数, 且那一位为0, 就位数减去1位, 获得实际“位”数
inline void RMLDZRS_B(BN n_b)
{   while ((DIGITS_B(n_b) > 0) && (*MSDPTR_B(n_b) == 0))
    {DECDIGITS_B(n_b);}
}

//设置一个uint32数为大数, 只占1“位”
inline void SETONEBIT_B(BN num, uint32_t u)
{
    *LSDPTR_B(num) = u;
    SETDIGITS_B(num, 1);
    RMLDZRS_B(num);
}

//拷贝src_b到dest_b中, 可以复制BND, 与结构无关
inline void cpy_b(BN dest_b, BN src_b);

//比较大小两个大数大小, 相等返回0, 大于返回1, 小于返回-1
inline int cmp_b(BN a, BN b)

//设置每一位为0xffffffff来实现小减大取模, 减法用到
inline void setmax_b(BN & a)

```

二、主要函数概览(在.h文件中)

1. 加法

```

int add_b(BN a, BN b, BN sum); //a+b=sum, 会模掉1024位
void add(BN a, BN b, BN sum); //add的另一个形式, 区别是sum可能比预料的多一位, 在求模加的时候用得到, 没有模1024位
int adduint_b(BN a, uint32_t b, BN sum); //a加一个uint32形式的b, a+b=sum
int adduint_b(uint32_t a, BN b, BN &sum);

```

2. 减法

```

int sub_b(BN a, BN b, BN &result); //result=a-b
int subuint_b(BN a, uint32_t b, BN &result); //减一个uint32
void sub(BN a, BN b, BN result); //没有模1024位的减法, 会用的到

```

3. 乘法

```

int mul_b(BN a, BN b, BN &result); //result = a*b 留下1024位

```

```
int mul(BN a, BN b, BN result); //没有模 $2^{32}$ 的乘法
```

4. 除法

```
int div_b(BN a, BN b, BN q, BN rem); //a=q*b+rem, 商是q, 余数是rem, a可以是BND, 应付模幂运算
```

```
int remdiv_b(BN a, BN b, BN & rem); //取余数除法, a/b的余数是rem
```

5. 取模

```
int modn_b(BN a, BN n, BN & rem); //rem=a mod n
```

```
int modadd_b(BN a, BN b, BN n, BN & result); //result=a+b(mod n)
```

```
void modsub_b(BN a, BN b, BN n, BN & result); //result = a - b(mod n)
```

```
void modmul(BN a, BN b, BN n, BN & result); //模乘, result=a*b (mod n)
```

6. 信安数学中的函数

```
int gcd_b(BN a, BN b, BN & result); //求公因子, result=(a,b)
```

```
int inv_b(BN a, BN n, BN & x); //如果(a,n)=1, 则有 $ax \equiv 1 \pmod{n}$ ; 否则异常没有逆元, 返回0, 显然逆元不可能为0
```

```
int modexp_b(BN b, BN n, BN m, BN & result); //模幂运算, 用的模平方, result=  $b^n \pmod{m}$ 
```

```
int fermat_b(BN a); //用费马小定理检测a是不是素数, 选的是2/3/5/7, 200位的a会出现误报, 500位还没有发现误报
```

```
void crt_b(BN a, BN b, BN p, BN q, BN & result); //用中国剩余定理求模幂,  $a^b \pmod{p*q}$ 
```

7. 位运算函数

```
int shl_b(BN a); //左移一位
```

```
int shr_b(BN a); //右移一位
```

```
uint32_t getbits_b(BN a); //获取a的二进制位数, a可以是BND形式, 最大2048
```

8. 特殊操作的函数

```
void exclu(); //求前几十个素数的乘积, 存在文件中, 便于后面找素数的时候利用乘积求gcd, 多求gcd, 少进行费马检测
```

```
int genBN(BN result, int bits); //利用sha-1结果产生bits个二进制位的大数result
```

```
void writerand(char * addr); //把随机数写到addr中, 后面对它求哈希
```

```
int findprime(BN a, int bits); //寻找bits位素数a, 会调用genBN产生一个大数, 然后利用exclu()结果进行调整才去费马
```

```
void genpq(char * p_path, char * q_path); //产生私钥p和q存在p_path和q_path文件中
```

9. SHA-1 的函数和常数

```
uint32_t H0 = 0x67452301;
```

```

uint32_t H1 = 0xEFCDAB89;
uint32_t H2 = 0x98BADCFE;
uint32_t H3 = 0x10325476;
uint32_t H4 = 0xC3D2E1F0;

const uint32_t K0 = 0x5A827999;
const uint32_t K1 = 0x6ED9EBA1;
const uint32_t K2 = 0x8F1BBCDC;
const uint32_t K3 = 0xCA62C1D6;
void subround(uint32_t & A, uint32_t & B, uint32_t & C, uint32_t & D, uint32_t & E,
uint32_t & W, uint32_t K, int mode);
long long msgsize(char*plainaddr);
inline uint32_t cirleft(uint32_t word, int bit);
int myshal(char *inputfileaddr, char *output);//每次调用用的是全局的，相当于一个状态向量
int SHA1(char *inputfileaddr, char *output);//每次调用里面会重新初始化向量
int checkresult(char * plainpath, char * decryptpath);//检查明文和解密以后是否相同，相同返回1

```

10. 字符串和文件处理

```

string bn2str(BN bignum);//bignum转化为字符串形式返回，返回的不显示前导0，和正常预期是一样的，可以吞下BND
int str2bn(BN & bignum, string strbn);//字符串形式的转化为大数，只能转化为BN
int readbn(BN &bignum, string filename);//从文件filename中读取大数到bignum中，字符串是16进制的不能是0x开头
int writebn(string filename, BN bignum);//把大数bignum写入到文件filename中，不带前导0和前缀0x

```

三、函数细节说明

1. 加法

1.1 int add_b(BN a, BN b, BN sum)

- ①结果可能是1025位的，这种情况下会留下1024位。所以结果先存在temp中，temp比BN多1位。然后用aptr和bptr分别指向长和短的那个数的最低位，maptr和mbptr指向最高位。
- ②使用循环，来一位位加，中间结果存在carry中，carry是64位的，carry的高32位中存的是进位，低32位是本位和，把本位和赋值给和。
- ③最后可能会多了1位，这种情况下需要处理，如果超过了1024位，取模

1.2 void add(BN a, BN b, BN sum)

相比于 add_b(), 只是最后少了一步返回溢出标志，发生移除时不置为 32 “位” 取模。

1.3 int adduint_b(BN a, uint32_t b, BN sum)

调用add_b()来实现加1个uint32_t类型的数据。

2. 减法

2.1 int sub_b(BN a, BN b, BN result); //result=a-b

与加法类似，减法也采用循环来实现，先判断 a 和 b 的大小，如果 $a > b$ 就按正常的减，和加法类似，中间结果存在 carry 中，可以判断是否有借位，每次 a 的位减 b 的位时，还要减去上一次的借位。否则执行 $b - a$ ，然后取 1024 位模。

2.2 void sub(BN a, BN b, BN result)

这个函数和之前那个 sub_b 区别在于，没有比较 a 和 b 大小，直接做 $a - b$ 。一般情况下已知 $a > b$ ，直接调 sub，也不需要模 1024。

3. 乘法

3.1 int mul_b(BN a, BN b, BN &result)

乘法计算 a 和 b 的乘积，结果存在 result 中，结果大于 1024 位就模掉 1024 位。计算的时候，也用 uint64_t carry 保存本位和和进位，结果先存在 BND 形式的变量中，因为结果很可能会超过 1024 位。

先完成 $(bn-1bn-2 \dots b1) \cdot a0$ ，然后再进入循环，此时 a[1] 已经做了，从 a[2] 开始循环做乘法，加上上一次进位 carry。循环完之后去掉前导 0，判断是不是超过 1024 位，如果是，取 1024 位，然后复制到结果 result 中。

3.2 int mul(BN a, BN b, BN result)

与前一个乘法的区别在于，没有模 1024 位，结果可以是 2048 位，做模幂的时候会用到，那时候乘积很可能是大于 1024 位的，如计算 $p \cdot p$ 。

4. 除法

4.1 int mydiv_b(BN a, BN b, BN q, BN rem)

除法采用的是笨方法，计算机组成原理里面最简单的除法。把 a 想象成二进制展开了，把 b 想象成二进制展开了，然后把 b 左移移到和 a 对齐，然后进行比较大小操作，一个个二进制位上商。注意的地方是，除法很可能会出现 a 是 BND，然后商也是 BND，所以为了能对齐，把 a 存在 r_t 中，把 b

存在 BND 格式的 b_t 中，方便移位对齐。

除法调用的减法是 sub()，因为不能模 1024 位。除法调用的加法是 adduint()，商每次加 1 以后左移 1 位或者不左移 1 位。最后 r_t 中剩下的就是余数。这个除法效率不高，所以导致了程序整体不快。

4.2 int remdiv_b(BN a, BN b, BN & rem)

取余除法，值返回余数，不需要商的情况下使用，它调用的是除法 div_b。

4.3 int div_b(BN a, BN b, BN rem)

使用 Knuth 方法的除法估计每次上的商 q'。根据 Knuth 的定理，在满足前提的情况下 q' 至多比真实的 Q 大 2。扩大 a 和 b 的倍数，但是 b 的位数不变时，依然满足这种前提。

For programming this procedure we must repeatedly determine, for two large numbers $R = (r_n r_{n-1} \dots r_0)_B$ and $b = (b_{n-1} b_{n-2} \dots b_0)_B$ with $\lfloor R/b \rfloor < B$, the quotient $Q := \lfloor R/b \rfloor$ ($r_n = 0$ is a possibility). Here we take from Knuth the given approximation \hat{q} of Q , which is computed from the leading digits of R and b .

Let

$$\hat{q} := \min \left\{ \left\lfloor \frac{r_n B + r_{n-1}}{b_{n-1}} \right\rfloor, B - 1 \right\}. \quad (4.1)$$

If $b_{n-1} \geq \lfloor B/2 \rfloor$, then for \hat{q} (see [Knut], Section 4.3.1, Theorems A and B), we have $\hat{q} - 2 \leq Q \leq \hat{q}$. Under the favorable assumption that the leading digit of the divisor is sufficiently large in comparison to B then as an approximation to Q , \hat{q} is at most too large by 2 and is never too small. $B/2$

By scaling the operands a and b this can always be achieved. We choose $d > 0$ such that $db_{n-1} \geq \lfloor B/2 \rfloor$, set $\hat{a} := ad = (\hat{a}_{m+n} \hat{a}_{m+n-1} \dots \hat{a}_0)_B$, and set $\hat{b} := bd = (\hat{b}_{n-1} \hat{b}_{n-2} \dots \hat{b}_0)_B$. The choice of d is then made in such a way that the number of digits of \hat{b} never increases in comparison to that of b . In the above notation it is taken into account that \hat{a} possibly contains one more digit than a (if this is not the case, then we set $\hat{a}_{m+n} = 0$). In any case, it is practical to choose d as a power of 2, since then the scaling of the operands can be carried out with simple shift operations. Since both operands are multiplied by a common factor, the quotient is unchanged; we have $\lfloor \hat{a}/\hat{b} \rfloor = \lfloor a/b \rfloor$.

在《计算机程序设计艺术 第二卷》中第三章如下阐述：

设 $u = (u_n u_{n-1} \dots u_1 u_0)_b$ 和 $v = (v_{n-1} \dots v_1 v_0)_b$ 是 b 进制下的非负整数，其中 $u/v < b$ 。试求一个算法以确定 $q = \lfloor u/v \rfloor$ 。

$$\begin{array}{r} \phantom{u_n u_{n-1} \dots u_1 u_0} q \\ v_{n-1} \dots v_1 v_0 \overline{) u_n u_{n-1} \dots u_1 u_0} \\ \underline{\phantom{u_n u_{n-1} \dots u_1 u_0} \longleftarrow qv \longrightarrow} \\ \phantom{u_n u_{n-1} \dots u_1 u_0} \longleftarrow r \longrightarrow \end{array}$$

图 6 要求：一个快速地确定 q 的方式

是使得 $0 \leq r < v$ 的惟一整数。

这个问题的最明显的解决方法,是根据 u 和 v 的最高位数字,来对 q 做推测。这一方法是否可靠不够明显,但这种算法是值得研究的。因此我们置

$$\hat{q} = \min \left(\left\lfloor \frac{u_n b + u_{n-1}}{v_{n-1}} \right\rfloor, b - 1 \right) \quad (2)$$

这个公式说, \hat{q} 是通过把 u 的两位前导数字除以 v 的前导数字得到的;而且若结果是 b 或更大,则以 $b - 1$ 代替之。

现在我们研究一个值得注意的事实,即只要 v_{n-1} 适当大,这个值 \hat{q} 总是非常近似于所求的答案 q 。为了分析 \hat{q} 怎样接近于 q ,我们首先要说明 \hat{q} 绝不会太小。

定理 A 在上述记号下 $\hat{q} \geq q$ 。

定理 B 如果 $v_{n-1} \geq \lfloor b/2 \rfloor$, 则 $q - 2 \leq q \leq \hat{q}$ 。

算法如下,但是细节处理上有不同:

Algorithm for division with remainder of $a = (a_{m+n-1}a_{m+n-2} \dots a_0)_B \geq 0$
by $b = (b_{n-1}b_{n-2} \dots b_0)_B > 0$

1. Determine the scaling factor d as given above.
2. Set $r := (r_{m+n}r_{m+n-1}r_{m+n-2} \dots r_0)_B \leftarrow (0a_{m+n-1}a_{m+n-2} \dots a_0)_B$.
3. Set $i \leftarrow m + n, j \leftarrow m$.
4. Set $\hat{q} \leftarrow \min \left\{ \left\lfloor \frac{\hat{r}_i B + \hat{r}_{i-1}}{\hat{b}_{n-1}} \right\rfloor, B - 1 \right\}$ with the digits \hat{r}_i, \hat{r}_{i-1} , and \hat{b}_{n-1} obtained from scaling by d (see above). If $\hat{b}_{n-2}\hat{q} > (\hat{r}_i B + \hat{r}_{i-1} - \hat{q}\hat{b}_{n-1})B + \hat{r}_{i-2}$, set $\hat{q} \leftarrow \hat{q} - 1$ and repeat this test.
5. If $r - b\hat{q} < 0$, set $\hat{q} \leftarrow \hat{q} - 1$.
6. Set $r := (r_i r_{i-1} \dots r_{i-n})_B \leftarrow (r_i r_{i-1} \dots r_{i-n})_B - b\hat{q}$ and $q_j \leftarrow \hat{q}$.
7. Set $i \leftarrow i - 1$ and $j \leftarrow j - 1$; if $i \geq n$, go to step 4.
8. Output $q = (q_m q_{m-1} \dots q_0)_B$ and $r = (r_{n-1} r_{n-2} \dots r_0)_B$.

实现细节:

①uint32_t 的数移动 32 位的结果是不动不是 0, 如果要移位 32 位, 哪怕是 uint32_t 的也要先换成 uint64_t 进行操作。

②超过 32 位的两个数相乘结果会溢出, 超过 64 位。

③做检验时, 括号中不会超过 64 位, 但是括号中结果乘以 B 就不知道了, 可以做检验, 检验括号中的数是否比 $B(2^{32})$ 大, 如果大于 B , 不等式右边就比 $B*B$ 大; 不等式左边 $b_{n-2}*q$ 小于 $B*B$, 不用做不等式比较, 跳过了溢出这种可能性; 重复做的时候也是需要这样考虑。

4. Set $\hat{q} \leftarrow \min \left\{ \left\lfloor \frac{\hat{r}_i B + \hat{r}_{i-1}}{\hat{b}_{n-1}} \right\rfloor, B-1 \right\}$ with the digits \hat{r}_i, \hat{r}_{i-1} , and \hat{b}_{n-1} obtained from scaling by d (see above). If $\hat{b}_{n-2}\hat{q} > (\hat{r}_i B + \hat{r}_{i-1} - \hat{q}\hat{b}_{n-1})B + \hat{r}_{i-2}$, set $\hat{q} \leftarrow \hat{q} - 1$ and repeat this test.

④第⑤步判断，可以先执行 $r-q*b$ ，如果最后有借位，说明商估计大了，需要把一个 b 加回去， $q-1$ 是真实的商。

5. 取模

5.1 `int modn_b(BN a, BN n, BN & rem) rem=a mod n`

直接调用除法 `div_b(a, n, q, rem)`。

5.2 `int modadd_b(BN a, BN b, BN n, BN & result); //result=a+b(mod n)`

模加，使用 `add()` 加完以后用 `modn_b()` 取模。

5.3 `void modsub_b(BN a, BN b, BN n, BN & result); //result = a - b(mod n)`

模减，使用 `sub()` 减完以后用 `modn_b()` 取模。

5.4 `void modmul(BN a, BN b, BN n, BN & result) //模乘, result=a*b (mod n)`

模乘，使用 `mul()` 乘完以后用 `modn_b()` 取模。

6. 信安数学中常用函数

6.1 `int gcd_b(BN a, BN b, BN & result); //求最大公因子, result=(a, b)`

求公因子，使用欧几里得除法，辗转相除，利用 $(a, b) = (b, r)$ ，每次执行除法 `div_b(a, b, q, r)`，当 r 为 0 时， b 就是最大公因子。

6.2 `int inv_b(BN a, BN n, BN & x) //求逆`

如果 $(a, n)=1$ ，则有 $ax = 1 \pmod{n}$ ；否则异常没有逆元，返回 0，显然逆元不可能为 0。函数执行步骤如下：

- ①调用了 `gcd_b(BN a, BN b, BN & result)` 函数，先求公因子判断是否存在逆元，然后才求逆。
- ②求逆时，对于 `inv_b(a, n, x)`，初始化 $u=1, g=a, v1=0, v3=n$ 。
- ③用 `div_l(g, v3, q, t3)` 计算带余除法， $g=q \cdot v3+t3$ ，令 $t1=u-q \cdot v1 \pmod{n}$ ， $u=v1, g=v3, v1=t1, v3=t3$ 。
- ④如果 $v3=0$ ，则把 u 赋值给 x ，作为结果，否则回到步骤②。

Extended Euclidean algorithm for calculating $\gcd(a, n)$ and the multiplicative inverse of $a \bmod n, 0 \leq a, 0 < n$

1. Set $u \leftarrow 1, g \leftarrow a, v_1 \leftarrow 0$, and $v_3 \leftarrow n$.
2. Calculate q, t_3 with $g = q \cdot v_3 + t_3$ and $t_3 < v_3$ by division with remainder and set $t_1 \leftarrow u - q \cdot v_1 \bmod n, u \leftarrow v_1, g \leftarrow v_3, v_1 \leftarrow t_1, v_3 \leftarrow t_3$.
3. If $v_3 = 0$, output g as $\gcd(a, n)$ and u as the inverse of $a \bmod n$ and terminate the algorithm; otherwise, return to step 2.

6.3 `int modexp_b(BN b, BN n, BN m, BN & result);` //模幂运算

- ①使用模平方算法，配合调用 `modmul()` 模乘函数；
- ②对指数 n 进行二进制展开，初始化 $a=1, b=b, m=m$ 。
- ③对于 n 的二进制展开，从低到高一位位来判断， $b=b*b \pmod{m}$ ，如果这一位为 1，则 $a=a*b \pmod{m}$ ，否则 $a=a$ ；
- ④最后 n 的二进制位都算完了， a 就是结果。

6.4 `int fermat_b(BN a);` //用费马小定理检测 a 是不是素数

选的参数是 2/3/5/7，200 位的 a 会出现检测失效，500 位还没有发现检测失效。

先是求 $(a, 2), (a, 3), (a, 5), (a, 7)$ 确认是互素的，然后再求 $t^{a-1} \bmod a$ ，调用 `modexp()` 函数来求，其中 t 依次带入 2/3/5/7，如果模幂结果不是 1，就返回 0 (a 是合数)，否则返回 1 (a 是素数)。

6.5 `void crt_b(BN a, BN b, BN p, BN q, BN & result);` //中国剩余定理

求模幂， $a^b \bmod (p*q)$

- ①先计算 b_1 和 b_2 : $a^b = b_1 \bmod p \quad a^b = b_2 \bmod q$
- ②得到方程组
$$\begin{aligned} x &= b_1 \bmod p \\ x &= b_2 \bmod q \end{aligned}$$
- ③求逆然后得到结果：
$$\begin{aligned} m_1 &= p; m_2 = q \quad m = m_1 * m_2; \\ M_1 &= m_2 = q \quad M_2 = m_1 = p \\ M_1 * M_1' &= 1 \bmod p \quad M_2 * M_2' = 1 \bmod q \\ \text{result} &= b_1 * M_1' * M_1 + b_2 * M_2' * M_2 \bmod(m) \end{aligned}$$

7. 位运算函数

7.1 `int shl_b(BN a);` //左移一位

也是用一个 64 位的 `carry` 保存中间结果，`carry = ((uint64_t)(*aptr) << 1) | (carry >> BITPERDIGIT)`，每次 `carry` 为本位左移 1 位同时最右边 1 位也就是第 1 位为上一次左移到的第 33 位。然后再将低 32 位赋给 `a` 的对应位，进行循环。左移和加法一样最后检查 `carry` 的第 33 位是不是 1，是的话，再次赋值，总位数加 1。

7.2 `int shr_b(BN a)` //右移一位

与左移类似，只是会出现有一位移到后面去了，赋值本位的时候需要把最左那位赋值为上次移动到后面的那位。使用中间变量 undercarry。

7.3 `uint32_t getbits_b(BN a)` //获取 a 的二进制位数

先去掉前导 0，然后剩下的位数就是以 2^{32} 为基数的位数，这个位数先乘 32，得到的总位数并不是最终结果，因为最高位可能没有满，也可能满了。拿最高位 high 和 `bit32=80000000U` 比较，如果 high 小于它，总位数减 1，high 左移 1 位，进行循环，最后得到的就是真实的位内也不含前导 0 的位数。

8. 特殊操作函数

8.1 `void exclu()` //求前几十个素数的乘积，存在文件中

这个函数是为了后面找大素数时求 gcd 用的，使用时需要手动进入修改产生对应大素数乘积个数，文件名也要修改，`findprime` 中对应位置也需要修改。

8.2 `int genBN(BN result, int bits)` //产生 bits 个二进制位的大数 result

①产生方法为，对于从低到高每一位（一位包含了 32 个二进制位），调用 `void writerand(char * addr)` 函数，往 `addr` 中写一个随机数，然后调用之前写的 SHA-1 函数，计算 `addr` 出随机数文件的哈希值，然后取 32 个二进制位（8 个十六进制位，也就是 8 个哈希结果的字符）。

②最高位（最高的可能有 1-32 个二进制位）需要特殊处理，因为最高如果是要 32 位，产生的哈希值第一位如果是 A 以下，如 0-9，那最高就没有 32 位，得到的大数会小于 `bits`。这种情况下，特殊化处理，多次产生直到产生的是所要的为止。其它时候可以左右移位来满足最高位的需求。

8.3 `void writerand(char * addr)` //把 rand() 产生的随机数写到 addr 中

使用的是 `rand()` 函数，设置了 `srand(time)`。为了后面对它求哈希准备。

8.4 `int findprime(BN a, int bits)` //找 bits 位素数 a，30 素数 17 次循环（20-35 素数都还好）

①该函数调用了 `genBN(BN result, int bits)` 函数产生随机数，调用了 `int fermat_b(BN a)` 费马检测函数对大数进行素性检测，同时它利用了 `exclu()` 函数预先产生的前几十个素数的乘积结果，利用了 `gcd_b(BN a, BN b, BN & result)` 函数求公因子。同时需要用到 `SETONEBIT_B(BN num, uint32_t u)` 函数设置大数 `num` 为一个 `uint32_t` 的数 `u`。用到了加法函数 `add_b(BN a, BN b, BN sum)`。

②过程是：

- (1) 首先读取前 20 个素数的乘积 `fac`，第 20 个素数存在 `temp3` 中；
- (2) 随机产生满足位数要求的大数 `bignum`；
- (3) 求公因子 `gcd_b(fac, bignum, gcd)`，如果 `gcd=1`，就拿这个大数去做费马检测步骤(7)。如果 `gcd` 比第 20 个素数还要大，或者很不幸这个大数是偶数 `gcd=2` 或者 `gcd` 比 `temp3` 大，就回到(2)；

- (4) 对大数进行微调，初始化微调变量 `linshi=2`，循环变量 `i=0`；
- (5) 大数 `bignum` 加上 `linshi`，得到调整后的 `adjnum`，对 `adjnum` 和 `fac` 求最大公因子 `gcd`。
- (6) 如果 `gcd` 为 1，就进行费马检测，步骤 (7)，`linshi` 设为 2。如果 `gcd` 不是 1，且 `gcd<temp3`，则 `linshi=linshi*gcd`，循环变量 `i++`，回到 (5)；否则重新生成一个，回到 (2)。
- (7) 如果费马检测结果为 1，则判定产生的是素数，否则回到 (2)。

8.5 `void genpq(char * p_path, char * q_path);` //产生私钥 `p` 和 `q`

产生私钥 `p` 和 `q` 存在 `p_path` 和 `q_path` 文件中。会打印出 `p` 和 `q` 的位数。默认 `p` 是 524 位，`q` 是 500 位，乘起来大概是 1024 位。如果需要修改位数，进入手动修改。

9. 哈希函数 SHA-1 部分

//SHA-1的函数和常数

```
uint32_t H0 = 0x67452301;
uint32_t H1 = 0xEFCDB89;
uint32_t H2 = 0x98BADCFE;
uint32_t H3 = 0x10325476;
uint32_t H4 = 0xC3D2E1F0;
const uint32_t K0 = 0x5A827999;
const uint32_t K1 = 0x6ED9EBA1;
const uint32_t K2 = 0x8F1BBCDC;
const uint32_t K3 = 0xCA62C1D6;
void subround(uint32_t & A, uint32_t & B, uint32_t & C, uint32_t & D, uint32_t & E,
uint32_t & W, uint32_t K, int mode);
long long msgsize(char*plainaddr);
inline uint32_t cirleft(uint32_t word, int bit);
int mysha1(char *inputfileaddr, char *output); //每次调用用的是全局的，相当于一个状态向量
int SHA1(char *inputfileaddr, char *output); //每次调用里面会重新初始化向量
int checkresult(char * plainpath, char * decryptpath); //检查明文和解密以后是否相同，相同返回 1
```

其中需要注意的地方是，因为 `H0`、`H1`、`H2`、`H3`、`H4` 是全局变量，在后面 `checkresult()` 的时候调用的是 `SHA-1` 而不是 `mysha1()`。`SHA-1` 开头重新对初始化向量进行了赋值，而 `mysha1` 是没有赋值的，相当于每次调用 `mysha1()` 它的初始化状态是由前一次决定的，这样产生的随机数用来寻找素数比较快，而调用 `SHA-1()` 找素数就非常慢，运气好几十秒，运气不好跑几分钟都没有出来一个。

10. 字符串处理部分

10.1 `string bn2str(BN bignum);` //bignum 转化为字符串形式返回

返回的不显示前导 0，和正常预期是一样的，可以吞下 `BND` 然后吐出字符串。内部的缓冲区 `char strbignum[520]`，如果是 265 大小，则只能吞下 `BN`。需要检查的是，到底高位的位内有没有前导零，

有的话需要用字符串处理的方式去掉，中间“位”有零也必须显示，而高位为了方便，不显示 0，只显示有效数字。

10.2 `int str2bn(BN & bignum, string strbn);` //字符串形式的转化为大数

只能转化为 BN，转的时候，倒着转，先找到字符串的末位，然后每次取 8 个字符，拼成 32 位，直到到了最高位如果剩余的不够 8 个字符，再拼出最高位。

10.3 `int readbn(BN &bignum, string filename)` //从文本中读取大数

从文本中读取字符串以后调用 `str2bn()`。

10.4 `int writebn(string filename, BN bignum)` //写入大数到文本

调用 `bn2str()` 把大数转为字符串，然后写入到文本。

四、参考文献

实现时，格式一开始参考了《密码学 C/C++语言实现》中的格式，经典的算法参照《信息安全数学基础》及《密码学 C/C++语言实现》进行了实现。

[1]陈恭亮. 信息安全数学基础(第2版) [M]. 北京：清华大学出版社. 2014： 7-8，； 20-37, 76-78, 80-82, 97-99, 198-201.

[2]迈克尔·威尔森巴赫. 密码学C/C++语言实现(第2版) [M]. 北京：机械工业出版社. 2016： 7-9, 12-17, 21-23, 43-46, 78-79, 112-113.

[3]Knuth. 计算机程序设计艺术 第二卷(第3版) [M]. 北京：国防工业出版社. 2009： 245-247