Relazione 03: Derivata numerica

Pietro Pellecchi

June 18, 2018

Derivazione numerica di una funzione assegnata per punti

Il nostro scopo è calcolare numericamente la derivata di una funzione incognita y=f(x) della quale conosciamo solo dei valori y_i, con i=0,...,N con N+1 punti equispaziati, con passo h, $x_i=x_o+ih$. E' stata calcolata sia la derivata prima che la derivata seconda di f(x), utilizzando i seguenti procedimenti:

- Formula a 3 punti:
  è ottenuta eliminando le potenze pari, per la derivata prima e, le potenze dispari, per la derivata seconda, nello sviluppo in serie di Taylor della funzione considerata e prendendo poi il primo termine dello sviluppo, avendo così un errore del secondo ordine.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

- Formula a 5 punti:
  si ottine migliorando la precisione della formula a 3 punti, considerando anche il termine successivo dello sviluppo in serie, inserendo dei coefficienti tali da annullare quest'ultimo, ottenendo un errore del quarto ordine.

$$f'(x_i) = \frac{4}{3}\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i-2})}{4h}\right)$$

Funzione f(x)=Sinx

Abbiamo calcolato derivata prima e derivata seconda della funzione f(x)=Sin(x) assegnando 10,20,50 punti equispaziati tra 0 e 2π, confrontando i risultatati ottenuti con i valori assunti dalla derivata prima f'(x)=Cos(x) e con i valori assunti dalla derivata seconda f"(x)=-Sin(x) :

- 10 punti assegnati:

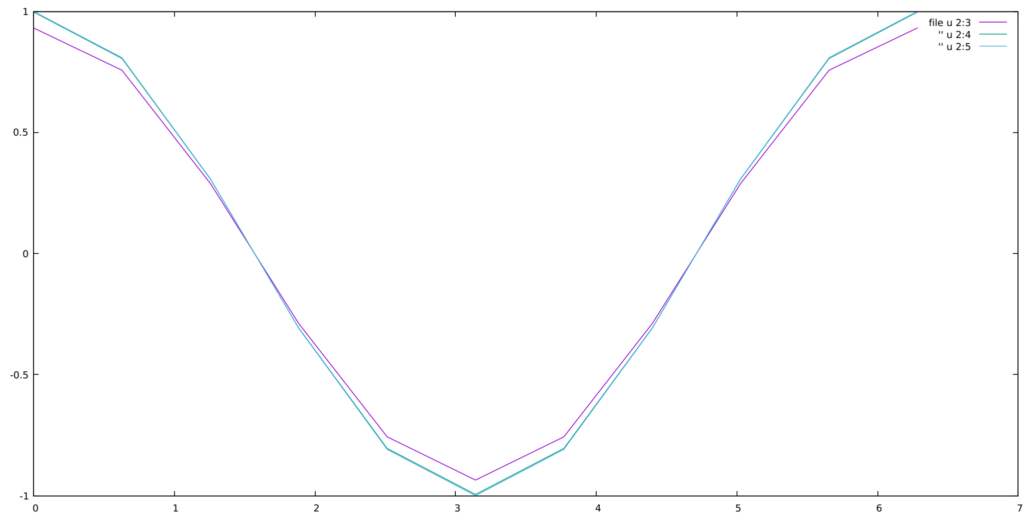

Figure 1: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata prima calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata prima calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

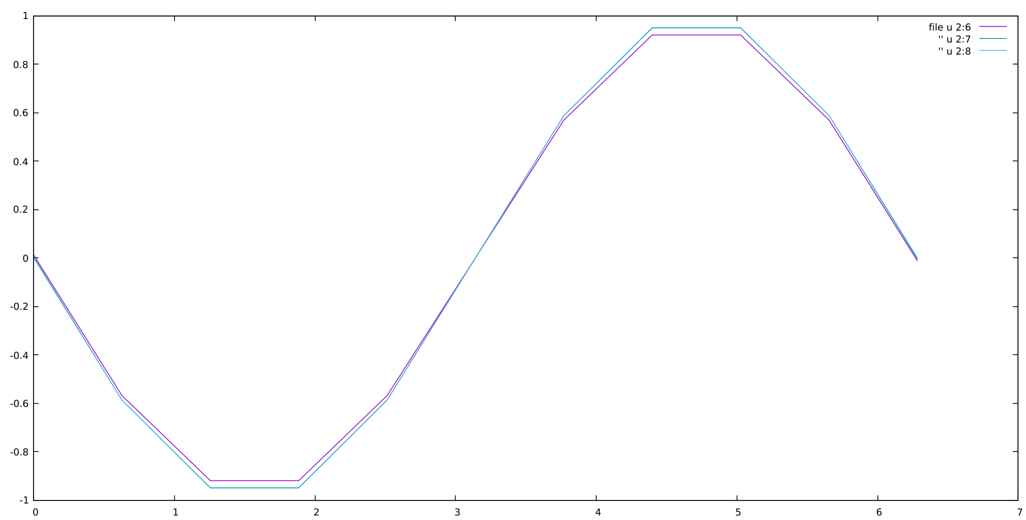

Figure 2: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata seconda calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata seconda calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

- 20 punti assegnati:

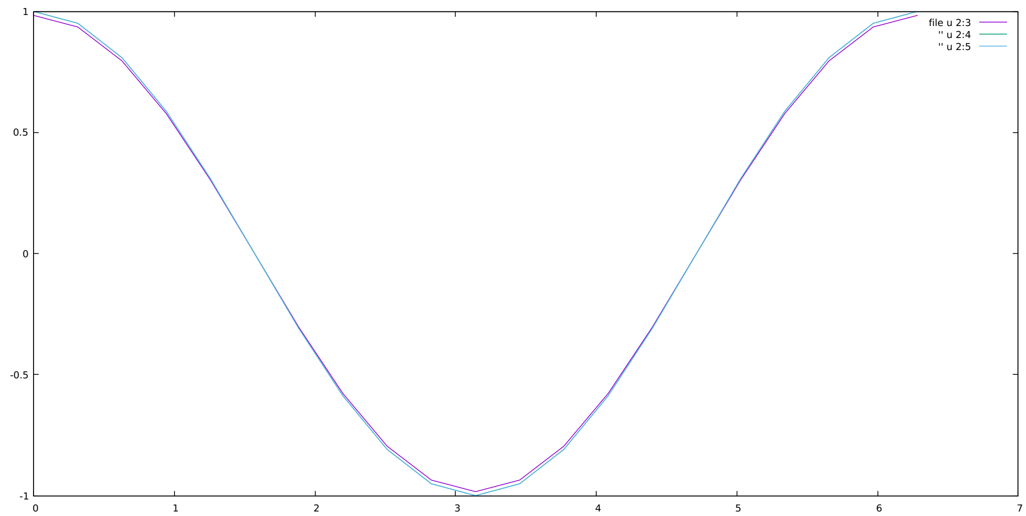

Figure 3: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata prima calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata prima calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

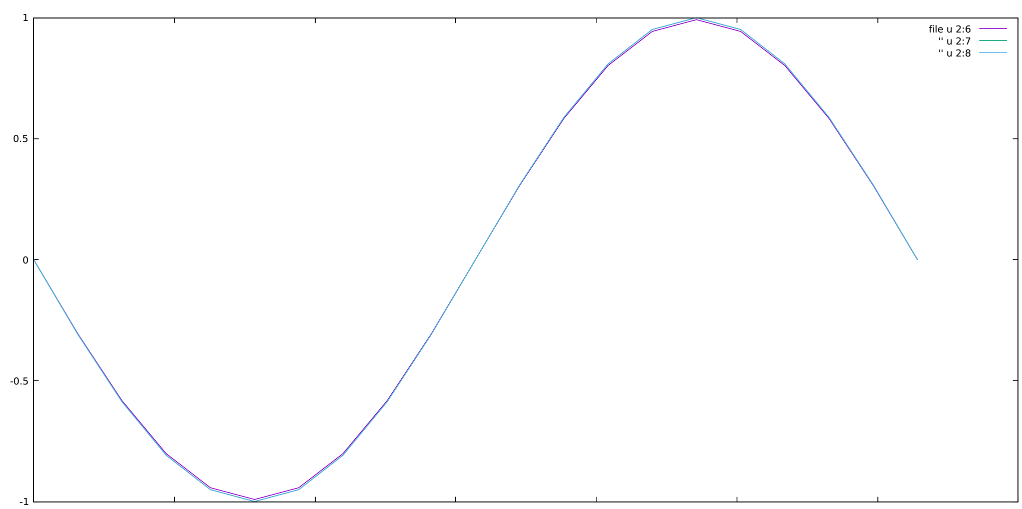

Figure 4: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata seconda calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata seconda calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

- 50 punti assegnati:

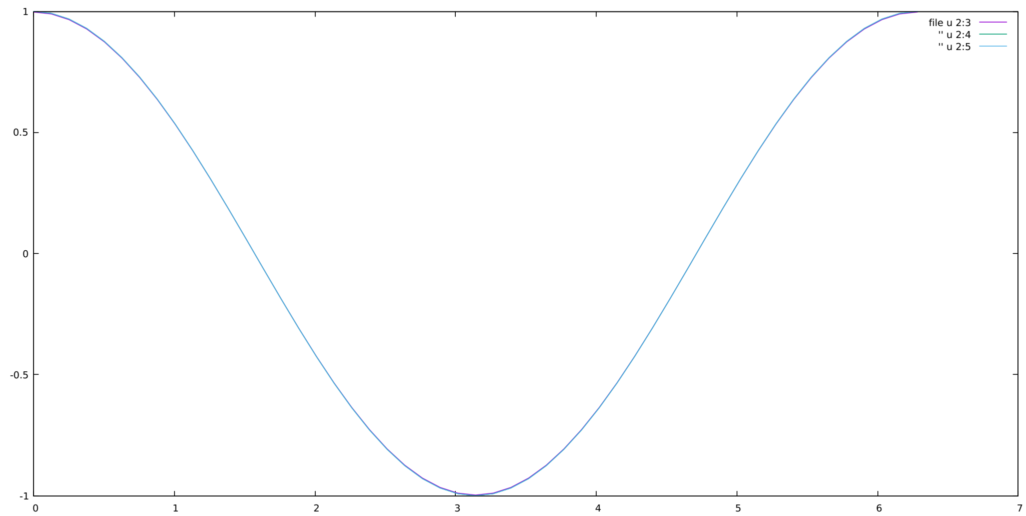

Figure 5: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata prima calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata prima calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

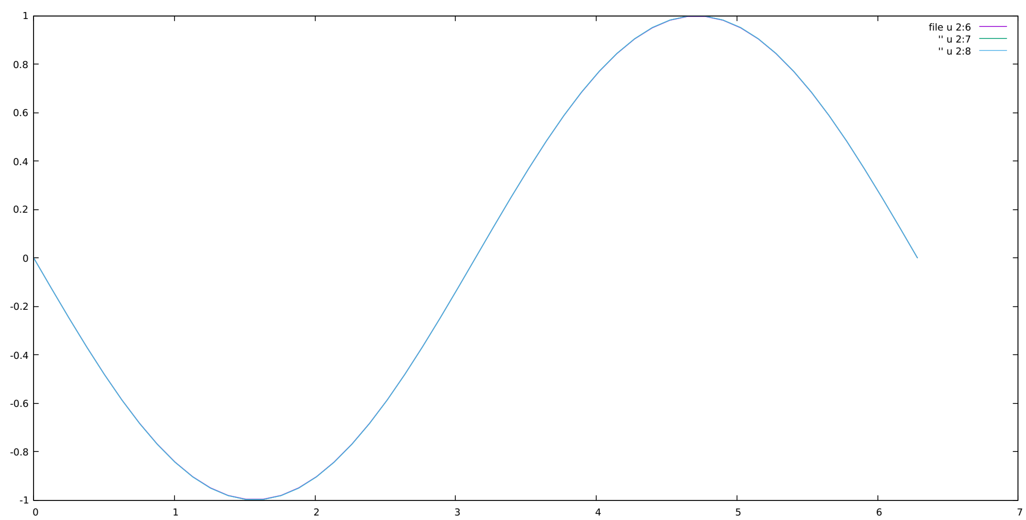

Figure 6: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata seconda calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata seconda calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

Come si può notare, fornendo 10 punti equispaziati, la formula a 3 punti non coincide con la funzione reale, sia nel caso della derivata prima, che nel caso della derivata seconda. I valori ottenuti con la formula a cinque punti, invece coincidono con i valori reali già a 10 punti forniti. Aumentando il numero di punti poi, si nota che la formula a punti ha dei miglioramente fino a che a 50 punti le 3 curve coincidono del tutto.

Funzione f(x)=ln(x)

Abbiamo calcolato derivata prima e derivata seconda della funzione f(x)=ln(x) assegnando 10,20,50 punti equispaziati tra 0,1 e 10, confrontando i risultatati ottenuti con i valori assunti dalla derivata prima f'(x)=1/x e con i valori assunti dalla derivata seconda f"(x)=-1/x^2:

- 10 punti assegnati:

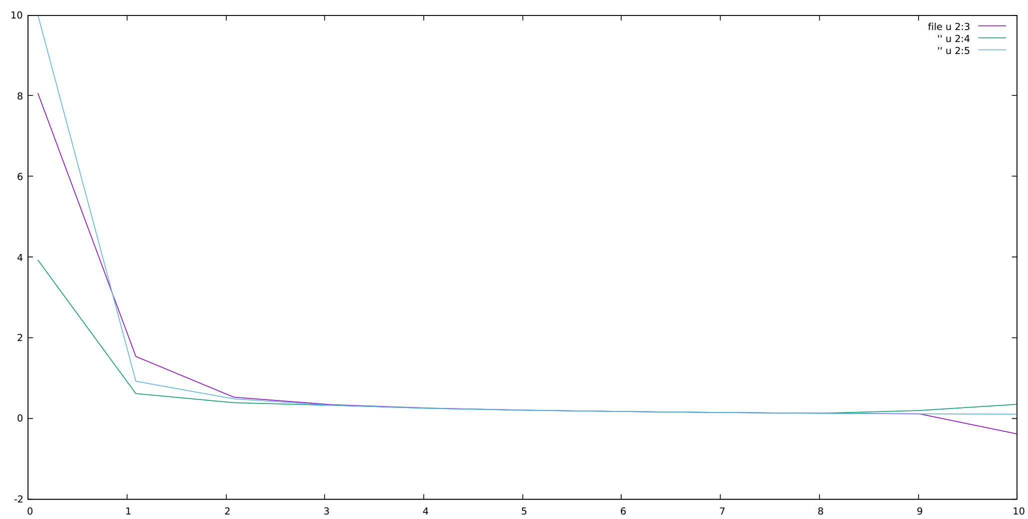

Figure 7: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata prima calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata prima calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

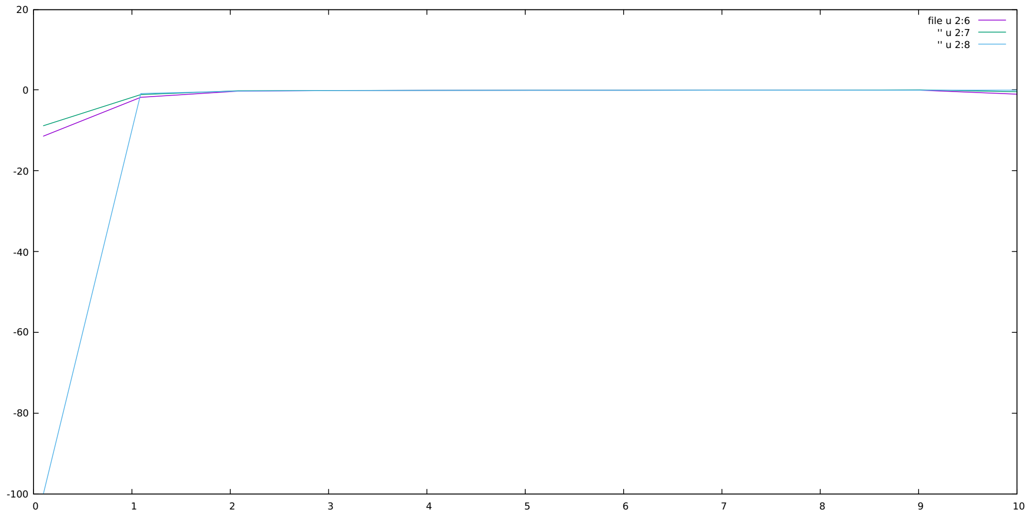

Figure 8: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata seconda calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata seconda calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

- 20 punti assegnati:

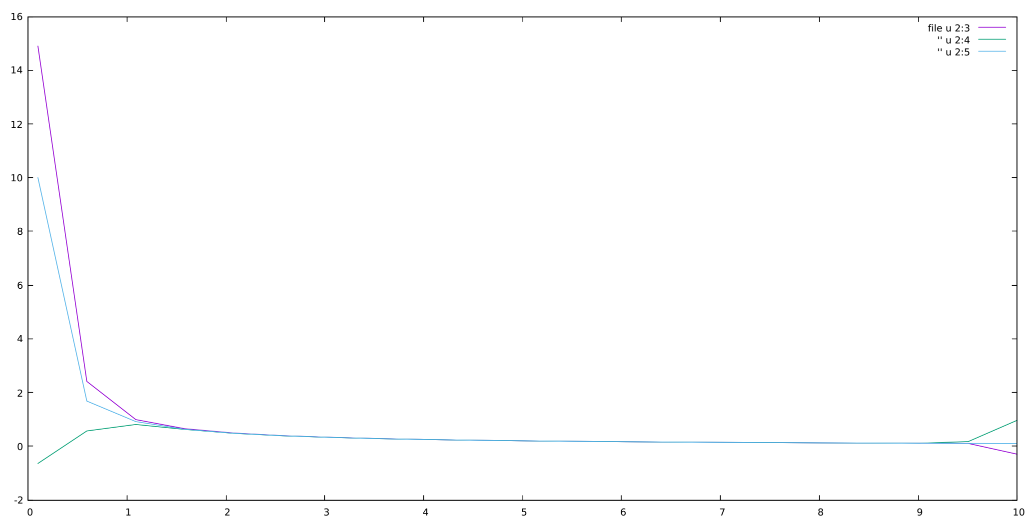

Figure 9: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata prima calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata prima calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

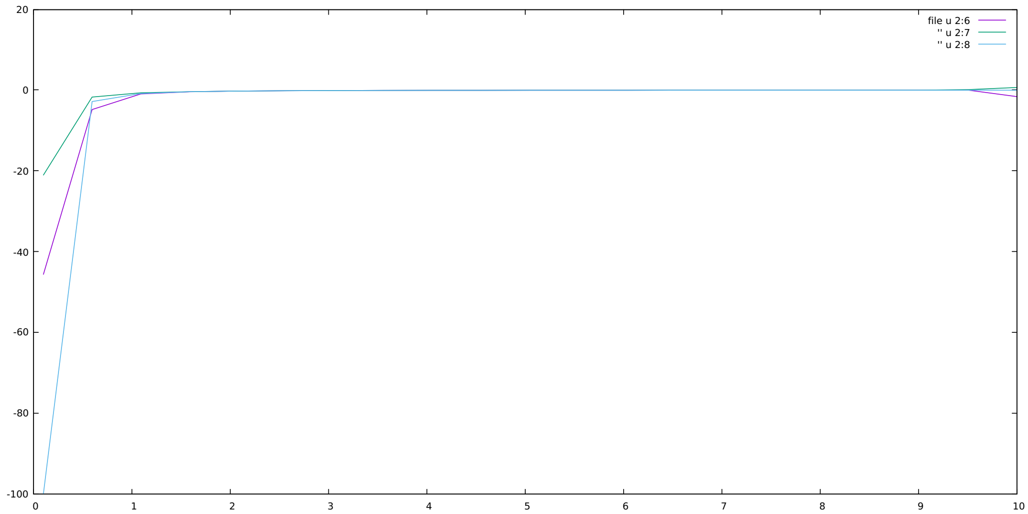

Figure 10: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata seconda calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata seconda calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

- 50 punti assegnati:

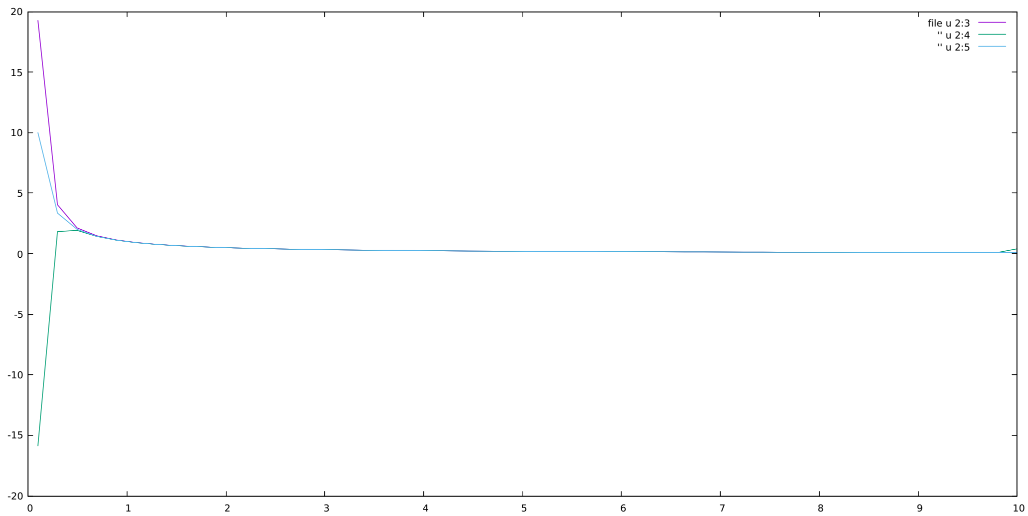

Figure 11: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata prima calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata prima calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

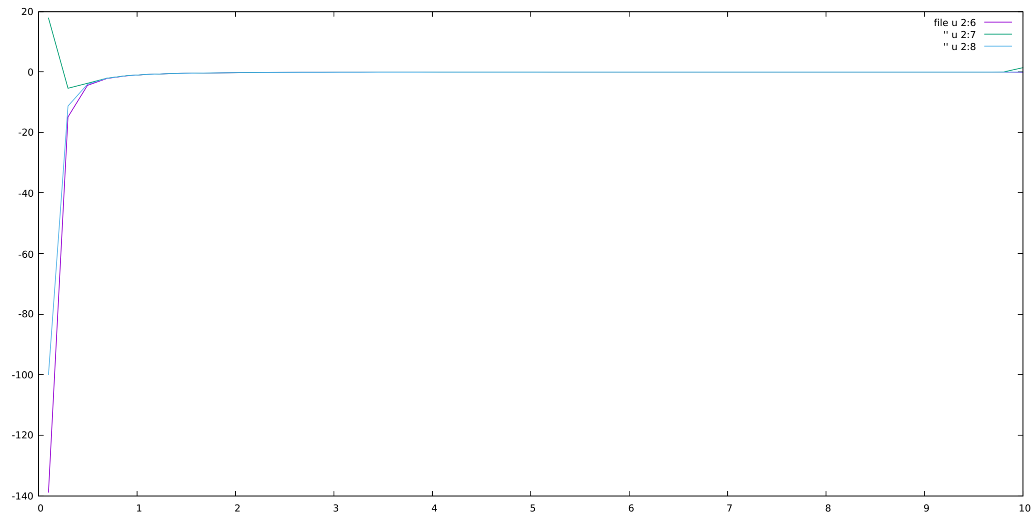

Figure 12: in viola, in verde, in blu, sono rispettivamente la derivata seconda calcolata usando la formula a 3 punti, la derivata seconda calcolata usando la formula a 5 punti e i valori veri assunti dalla derivata della funzione considerata

Qui è più evidente l'errore che commettono le due formule; in nessuno dei 3 casi le tre curve coincidono, in particolare gli errori sono elevati avvicinandosi all'origine muovendosi sull'asse delle ascisse, in quanto abbiamo dei valori prossimi allo zero al denominatore, il chè porta a degli errori maggiori. Sul tratto con pendenza minora le curve concidono fino a chè l'errore non sopragiunge.

Derivazione numerica di una funzione nota

Supponiamo di conoscere l'espressione analitica della funzione oppure possiamo, in qualche modo, conoscere i valori che assume in ogni punto. In tal caso si può costruire una fuzione ricorsiva per il calcolo della derivata, in cui definisco un passo iniziale e un errore entro il quale voglio conoscerla; l'importrante è che nell'iterazione il passo decresca; se usassi u passo che si dimezza ad ogni iterazaione costruirei una griglia equispaziata, a quel punto la formula da utilizzare è:

$$f'(x) = \frac{4}{3} g_{h_n} - \frac{1}{3} g_{h_{n-1}}$$

dove $g_{h_n} = \frac{f(x+h_n)-f(x-h_n)}{2h_n}$ è il rapporto incrementale.

Se il passo non è scelto in modo che si dimezzi ad ogni iterazione:

$$f'(x) = g_{h_n} + o(h^2)$$

Funzione f(x)=Sin(x)

Abbiamo calcolato la derivata prima e la derivata seconda della funzione f(x)=Sin(x) con un passo che si dimezza ad ogni iterazione con un errore di 10^{-6},10^{-12}, confrontando i risultati ottenuti con i valori veri assunti dalle derivate della funzione.

- Passo iniziale=1

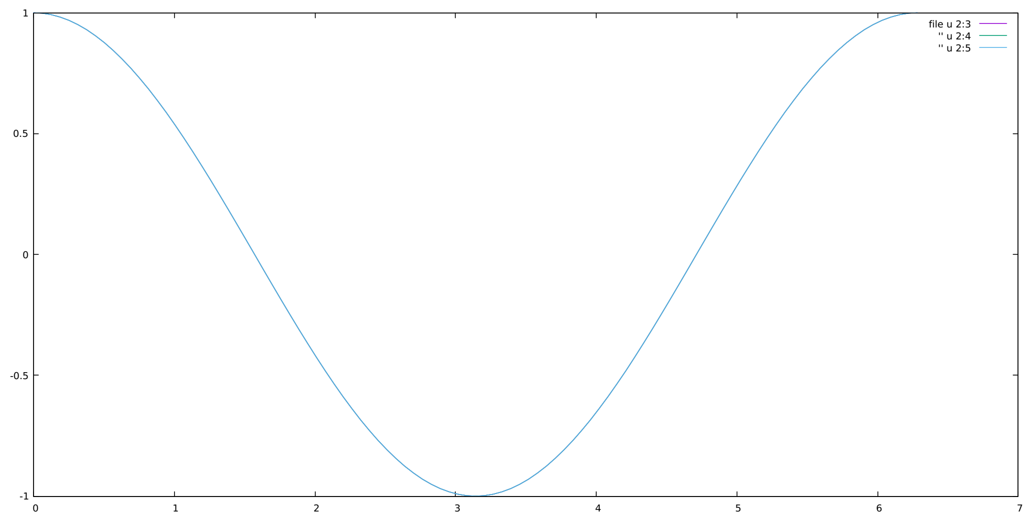

Figure 13: in viola, in verde, in blu, rispettivamente la derivata prima con un errore dell'ordine di 10^{-6}, la derivata prima con un errore di 10^{-12}e la derivata prima della funzione

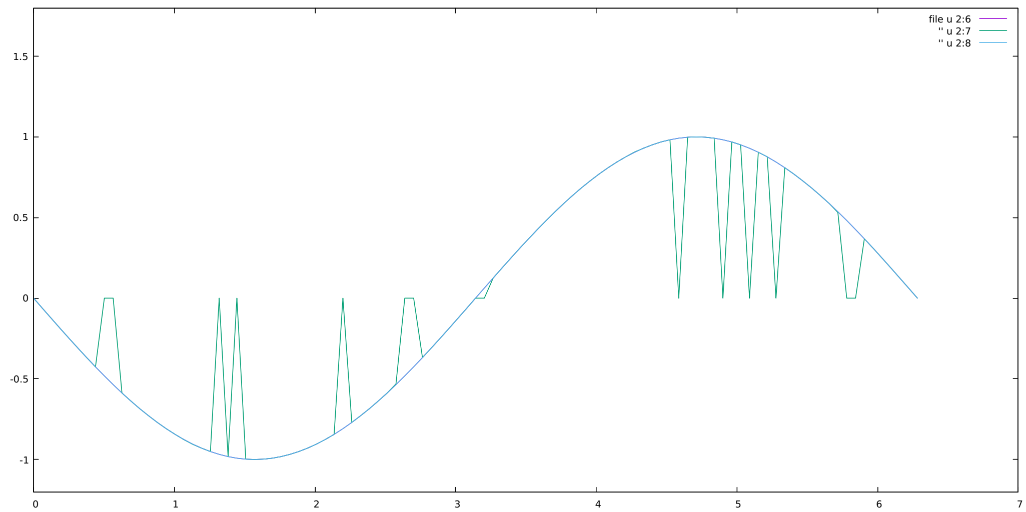

Figure 14: in viola, in verde, in blu, rispettivamente la derivata seconda con un errore dell'ordine di 10^{-6}, la derivata seconda con un errore di 10^{-12}e la derivata seconda della funzione

- Passo iniziale=0,2

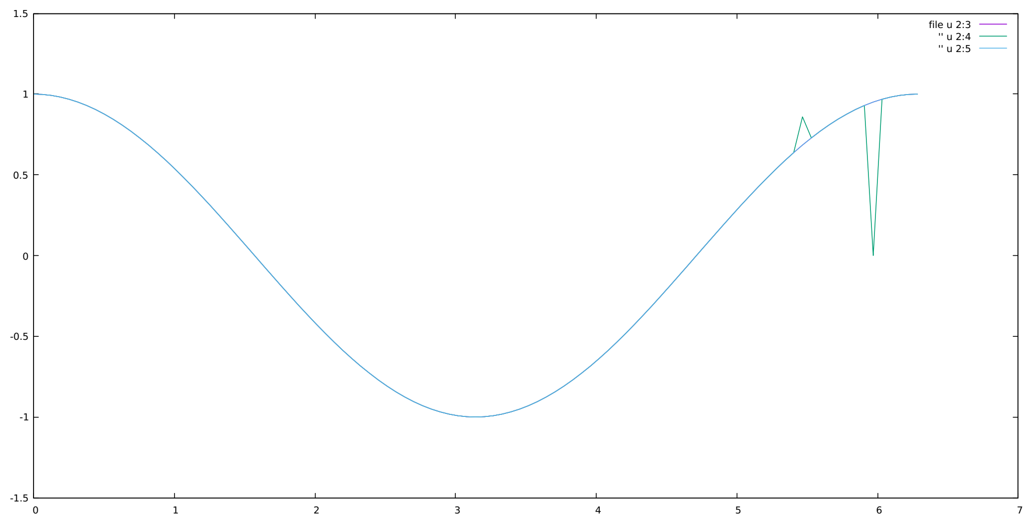

Figure 15: in viola, in verde, in blu, rispettivamente la derivata prima con un errore dell'ordine di 10^{-6}, la derivata prima con un errore di 10^{-12}e la derivata prima della funzione

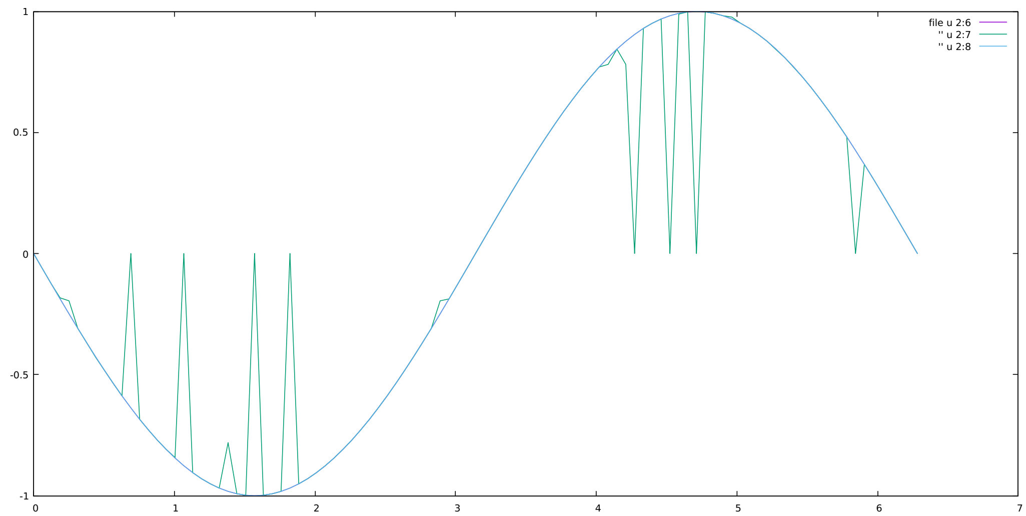

Figure 16: in viola, in verde, in blu, rispettivamente la derivata seconda con un errore dell'ordine di 10^{-6}, la derivata seconda con un errore di 10^{-12}e la derivata seconda della funzione

Come si può notare dai grafici delle derivate calcolate con un passo iniziale di 1, le 3 derivate prime coincidono, invce la derivata seconda con una precisione di 10^{-12}è affetta da errore numerico. Riducendo il passo iniziale a 0,2 l'errore numerico sopraggiunge anche la derivata prima sia ad una precisione di 10^{-6} sia ad una precisione di 10^{-12}.