Relazione 04:
Integrali

Cafasso Dario
De Maria Giuseppe
De Rosa Mino
Pellecchia Pietro

June 18, 2018

L'obbiettivo dell'esperienza è quello di integrare una funzione su un intervallo $[a, b]$ una volta noto il suo valore in N+1 punti, oppure nota la funzione stessa. Si parlerà dunque di "integrazione per interpolaizione" e di "integrazione ricorsiva".

Integrazione per interpolazione

Nel caso in cui sia noto il valore della funzione in N+1 punti, i metodi studiati sono quello dei trapezi e quello di simpson:

- Il metodo dei trapezi consiste in un'approssimazione lineare della funzione, calcolando per ogni coppia di punti la retta passante per gli stessi e osservando, tramite varie semplificazioni, che la stima dell'integrale corrisponde alla somma delle aree dei trapezi sottesi alle rette trovate per ogni coppia.

$$S_t = \frac{(b-a)}{2N} \sum_{i=0}^{N} (y_i + y_{i+1})$$

- Il metodo di simpson consiste in un'approssimazione al secondo ordine della funzione, calcolando per ogni terna di punti consecutiva la parabola passante per gli stessi. Una conseguenza naturale di ciò è che il numero di punti N deve essere dispari. L'approssimazione così ottenuta è più precisa rispetto ai trapezi di due ordini di grandezza.

$$S_s = \frac{(b-a)}{3N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} (y_i + y_{i+2} + 4y_{i+1})$$

Volendo integrare una funzione f(x) con N+1 punti sia con la formula dei trapezi che con quella di Simpson e volendo studiare l'errore relativo al variare del numero di punti forniti, osserviamo che:

- Trapezi
  in alcuni casi l'errore numerico può sopraggiungere prima che sia raggiunta la precisione data, e comunque negli altri casi essa è raggiunta molto più lentamente rispetto al metodo di Simpson

- Simpson
  la precisione aumenta rapidamente finchè l'errore non raggiunge la precisione, dopodiché interviene l'errore numerico

Integrazione funzione sin(x)

Vogliamo integrare la funzione f(x)=sin(x) tra 0 e π con i metodi sopra elencati e studiare l'errore relativo delle due formule in funzione del passo, graficando in scala logaritmica. Calcolando l'integrale eseguendo 10^4 passi si ottengono i seguenti valori:

- S=1.9999999835506608 per il metodo dei trapezi;

- S=1.9999999999999984 per il metodo di Simpson;

Qui si nota come il metodo di Simpson sia molto più preciso del metodo dei trapezi; grafichiamo l'errore relativo dei due metodi in funzione del numero di passi:

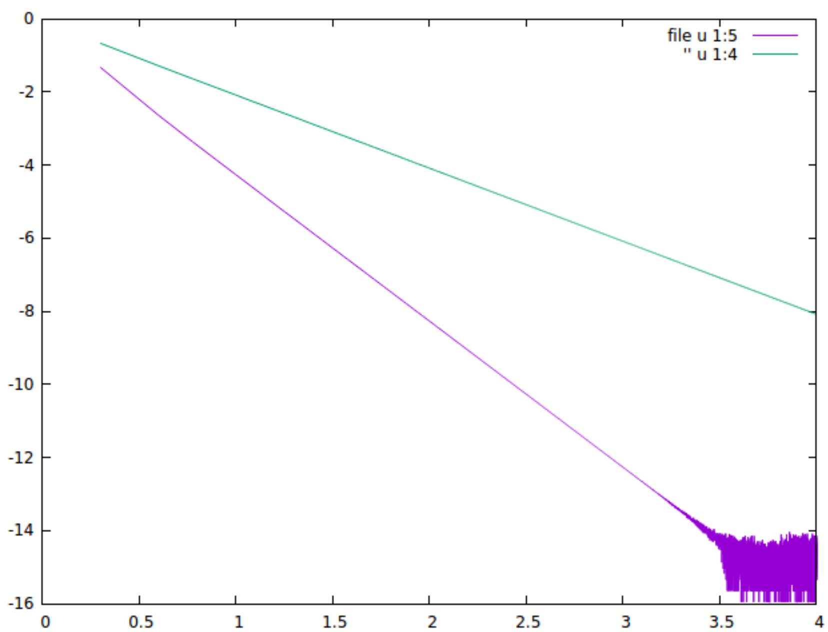

Figure 1: Errore relativo all'aumentare del numero di passi
Simpson in viola e Trapezi in azzurro

Come si nota dal grafico, il metodo di Simpson arriva più velocemente alla recisione richiesta (10^{-12}), invece il metodo dei trapezi è molto più lento. Inoltre, si evince che il numero di passi ottimale per il metodo di Simpson, prima di cadere in errore numerico, è dell'ordine di 10^3, invece per ottenere la precisione richiesta con il metodo dei trapezi, è necessario un numero spropositato di passi (nel caso in cui sia possibile arrivarci senza cadere in errore numerico). Scegliendo il passo ottimale per il metodo di Simpson, i risultati dell'integrale sono:

- S=1.9999983550656624 per i trapezi;
- S=2.0000000000010831 per Simpson.

Integrazione ricorsiva

Nel secondo caso invece, avendo a disposizione tutta la funzione integranda, possiamo implementare una funzione che calcola l'integrale utilizzando il metodo dei trapezi in maniera ricorsiva.

Il valore dell'integrale viene calcolato nel modo seguente: utilizzando come valore sulle y la media del valore della funzione agli estremi dell'intervallo, questa viene moltiplicata per il passo, ottenendo un valore; utilizzando come valore sulle y il valore della funzione nel punto medio dell'intervallo, questo viene moltiplicato per il passo, ottenendo un altro valore; la media di questi due restituisce un altro valore, che sarà quello di riferimento. Calcolato così, per ogni intervallo, il valore dell'integrale, per ottenere il risultato finale basta sommare il valore ottenuto da tutti i singoli intervalli.

La stessa operazione viene ripetuta in maniera iterativa chiamando la funzione su intervalli di ampiezza pari alla metà di quella di partenza, finchè non si raggiunge la precisione desiderata (controllata dallo scarto del valore dell'integrale tra due iterazioni successive).

Volendo calcolare lo stesso integrale del caso precedentemente trattato con un errore relativo pari a 10^{-6} e poi di 10^{-9}, con un minimo di 10 steps e un massimo di 10000, osserviamo che:

- Il risultato del calcolo con un errore di 10^{-6} è
  Trapezoid min_steps=10, max_steps=10000, eps=1.E-3 Integrale= 1.999998331070; rel.err.= 0.8E-06; steps= 1021
- Richiedendo un errore di 10^{-9} il risultato del calcolo è
  Trapezoid min_steps=10, max_steps=10000, eps=1.E-3 Integrale= 1.999999998468; rel.err.= 0.8E-09; steps= 32767