

Sistemi Complessi

- Storia ed esempi:
 - Moto browniano
 - Longewin
 - ↓
 - Lotka - Volterra
 - Shot-noise
 - e SIR
- Probabilità:
 - Momenti e densità spettrale
 - Grandi numeri e teorema del limite centrale
 - Distribuzioni stabili
 - Funzione caratteristica e generatrice
- Processi di Markov:
 - Definizione e eq. Chapman - Kolmogorov
 - Processo di Wiener
 - Processo di OU
 - Alla Wiener
 - Random Walk
 - Random Telegraph
- Integrali stocastici
- Fokker - Planck:
 - First passage time
 - Distribuzione di equilibrio
 - Condizioni al contorno
 - Metodi degli autovettori e backward FP
- Moser equation:
 - ↓
 - Relazione con MQ e Path-integral
 - Da Moser equation a Fokker - Planck

Storia

Moto browniano

- Poishe Brown (1827)
- Einstein (1905)

- 1. Frequenti impatti
- 2. Descrizione probabilistica
- 3. Dinamica discreta!

Stato attuale $n(\Delta)$: $f(\Delta)$ distribuzione $\int f(\Delta) d\Delta = 1 \quad f(\Delta) = f(-\Delta)$

Probabilità di partire da $x \rightarrow x + \Delta$: $d_n = n f(\Delta) d\Delta$

Po di essere in x al tempo $t + \tau$ è $P(x, t + \tau) dx = \int P(x - \Delta; t) f(\Delta) d\Delta$
 (Chapman-Kolmogorov)

SNLapp di Taylor $P(x, t + \tau) \approx P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial t} \tau$

(Kramers-Moyal) $P(x - \Delta; t) \approx P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Delta^2$

Mettendole insieme e usando $\int \Delta f(\Delta) d\Delta = 0$ abbiamo FOKKER-PLANCK:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad D \equiv \frac{1}{2\tau} \int \Delta^2 f(\Delta) d\Delta$$

Saluzione per $P(x, 0) = \delta(x) \Rightarrow P(x, t) = \sqrt{4\pi Dt} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4Dt} \right\}$

Gaussiano con $\boxed{\sigma^2 = 2Dt}$

Langevin

Introduzione di dinamica messa a punto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{+ rumo T 1D} \quad \langle K \rangle = \langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} k_b T \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{+ termine Stokker per attrito} \quad F_A = 6\pi\eta d \dot{x} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{+ termine rot. random} \end{array} \right\}$$

$$m \ddot{x} = -F_A + \xi$$

↓
mult. per x

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} x^2 - m \dot{x}^2 = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \xi x$$

Prendiamo il valor medio assumendo $\langle \xi x \rangle = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - k_b T = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \exp \left\{ -\frac{6\pi\eta d}{m} t \right\} + \frac{k_b T}{3\pi\eta d} \Rightarrow \text{per t grande: } \boxed{\Delta \langle x^2 \rangle = \frac{k_b T}{3\pi\eta d} t}$$

$$\text{ovvero } \boxed{\sigma^2 = 2Dt \text{ con } D \equiv \frac{k_b T}{6\pi\eta d}}$$

Master equation (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} X + c \cdot b_0 \rightarrow 2X \\ Y + X \rightarrow 2Y \\ Y \rightarrow \text{morte} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta XY \\ \frac{dY}{dt} = \beta XY - \gamma Y \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Andamento} \\ \text{periodico} \\ \text{nel tempo} \end{array}$$


$$P_r(x \rightarrow x+1, y \rightarrow y) = \alpha x \Delta t$$

$P(x, y, t) = \text{probabilità di avere } (x, y) \text{ a } t$

$$P_r(x \rightarrow x-1, y \rightarrow y+1) = \beta xy \Delta t$$

$P_r = \text{probabilità di fare la transizione dopo un intervallo di tempo } \Delta t$

In fine

$$P_r(x \rightarrow x; y \rightarrow y) = 1 - \Delta t(\alpha x + \beta xy + \gamma y)$$

Si può scrivere ora l'evoluzione temporale

$$P(x, y, t + \Delta t) - P(x, y, t) = P_r(x-1 \rightarrow x, y) \cdot P(x-1, y, t) + P_r(x+1 \rightarrow x, y-1 \rightarrow y) \cdot P(x+1, y-1, t) + P_r(x \rightarrow x, y+1 \rightarrow y) \cdot P(x, y+1, t) + [1 - P_r(x \rightarrow x, y \rightarrow y)] \cdot P(x, y, t)$$

e poi si divide tutto per Δt

Esempio: modelli SIR, molto di moda

$$S_{n+1} = S_n - \alpha S_n I_n \Delta t$$

$$P(S, I, R; t) ?$$

$$I_{n+1} = I_n + (\alpha S_n I_n - \gamma I_n) \Delta t$$

$$R_{n+1} = R_n + \gamma I_n \Delta t$$

$$\alpha S_n I \Delta t$$

Probabilità che S diminuisca di uno e che I aumenti di uno

$$S+1 \rightarrow S; I-1 \rightarrow I$$

$$\gamma I_n \Delta t$$

Probabilità che I diminuisca di uno e che R aumenti di uno

$$I+1 \rightarrow I; R-1 \rightarrow R$$

$$P_{S, I, R}^{t+\Delta t} = P_{S, I, R}^t + \Delta t \left\{ P_{S+1, I-1, R}^t P_r(S+1 \rightarrow S, I-1 \rightarrow I, R=R) + P_{S, I+1, R-1}^t P_r(S=S, I+1 \rightarrow I, R-1 \rightarrow R) \right. \\ \left. - \Delta t P_{S, I, R}^t [P_r(S \rightarrow S-1, I \rightarrow I+1, R=R) + P_r(S=S, I \rightarrow I-1, R \rightarrow R+1)] \right\}$$

Shot noise (o Johnson)

Corrente e⁻ non continua

$$I(t) = \sum_{t_k} F(t-t_k)$$

t_k tempi arrivo e⁻

$$F(t-t_k)$$



$$P_n(n \rightarrow n+1) = \lambda \Delta t \quad \text{Birth process}$$

$$\frac{P(n, t+\Delta t) - P(n, t)}{\Delta t} = \lambda (P(n-1, t) - P(n, t))$$

Come si risolve? Tecnica standard

$$\text{Funzione generatrice } G(s, t) = \sum_m s^m P(m, t)$$

$$s^n \partial_t P(n, t) = \lambda [s^n P(n-1, t) - s^n P(n, t)]$$

moltiplico
per s^m



$$\partial_t G(s, t) = \lambda s G(s, t) - \lambda G(s, t) \rightarrow \frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = \lambda (s-1) G(s, t)$$

$$G(s, t) = \exp \{ \lambda(s-1)t \} G(s, 0)$$

$$\text{Ponendo che } 1^\circ \text{ e}^- \text{ arriverà a } t=0^+ \Rightarrow P(0, 0) = 1 \text{ e } P(n, 0) = 0$$

$$\text{da cui } G(s, 0) = 1 \text{ e troviamo quindi}$$

$$G(s, t) = \sum_m s^m P(m, t) = \exp \{ \lambda(s-1)t \} = \sum_n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$



$$P(n, t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Distribuzione Poisson

$$\text{Tornando alla corrente } I(t) = \sum_n F(t-t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(t-x) \mu(x)$$

$$\mu(t) = \frac{dN}{dt} = \sum_n \delta(t-t_n) \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ q e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} \quad (\text{effetto e}^-)$$

da cui ottieniamo l'equazione integrale

$$I(t) = \int_{-\infty}^t q e^{-\alpha(t-x)} \frac{dN(x)}{dx} dx$$

$t-x < 0$ per

$x > t$

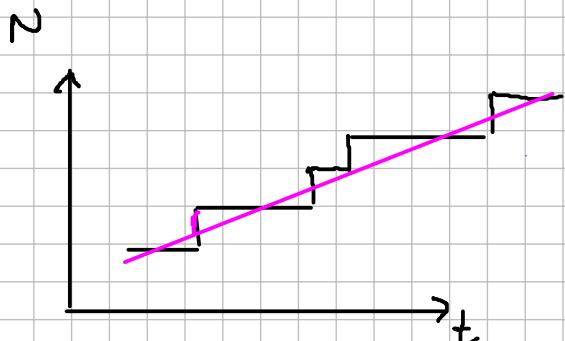
$$\int_t^{+\infty} dx \dots = 0$$

Il problema è che $\frac{dN(x)}{dx}$ non è nulla (è non omogenea)

$$\rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = q e^{-\alpha(t-x)} \frac{dN(x)}{dx} \Big|_{x=t} - \alpha \int_{-\infty}^t q e^{-\alpha(t-x)} \frac{dN(x)}{dx} dx$$

ora $\frac{dI(t)}{dt} = q \mu(t) - \alpha I(t)$

$\mu(t) = \frac{dN(t)}{dt}$ è la derivata di un
processo di Poisson!



$$\langle \mu dt \rangle = \langle dN \rangle = \lambda dt \quad \text{da}$$

$$P(n,t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \langle (dN - \lambda dt)^2 \rangle = \lambda dt$$

Scriviamo quindi le fluttuazioni $d\gamma$ come $dN - \lambda dt$

$$\text{moto } \langle d\gamma \rangle = 0 \quad \text{e scriviamo}$$

$$dI(t) = q \mu(t) dt - \alpha I(t) dt = q(d\gamma + \lambda dt) - \alpha I(t) dt$$

↓

$$\boxed{d\langle I(t) \rangle = q \lambda dt - \alpha \langle I dt \rangle + q \cancel{\langle d\gamma \rangle} = \Rightarrow \frac{d\langle I \rangle}{dt} = q \lambda - \alpha \langle I \rangle}$$

Soluzione stazionaria per $\langle I \rangle_{t \rightarrow +\infty} = q \lambda / \alpha$

Calcoliamo ora la varianza

$$(I + dI)^2 = I^2 + 2IdI + (dI)^2 \rightarrow dI^2 = 2IdI + (dI)^2$$

$$\text{da cui } \frac{1}{2} dI^2 = I \left((q \lambda - \alpha I) dt + q d\gamma \right)$$

prendiamo i valori medi: supponendo $\langle Id\gamma \rangle = 0$ e restiamo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle I^2 \rangle = q \lambda \langle I \rangle - \alpha \langle I^2 \rangle \rightarrow \langle I^2 \rangle_{+\infty} = \frac{q^2 \lambda^2}{\alpha^2}$$

$$\text{ma } \boxed{\sigma^2 = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = 0!}$$

Dove è l'errore? SDE \neq ODE \Rightarrow dobbiamo considerare anche $(dI)^2$!

$$\langle (dI)^2 \rangle = \langle q^2 d\gamma^2 \rangle = q^2 \langle d\gamma^2 \rangle = q^2 \lambda dt! \quad (\text{non funziona})$$

• Probabilità

A probability measure P on a subset \mathcal{A} of \mathcal{S} is defined if a σ -algebra structure on \mathcal{S} exist; then we have:

- 1) $P(A) \geq 0$
- 2) $P(\mathcal{S}) = 1$
- 3) $P(U; A_i) = \sum_i P(A_i)$ if $A_i \cap A_j = \emptyset$
- 4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 5) $P(\emptyset) = 0 \quad \forall i \neq j$

Then (\mathcal{S}, σ, P) is a probability space.

Joint probability: $P(A \cap B) = P(\omega \in A \text{ and } \omega \in B)$

Conditional prob.: $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

Follow $P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) \quad \forall \{B_i\} \mid B_i \cap B_j = \emptyset \text{ e } \cup_i B_i = \mathcal{S}$

Similarly $P(x_1, t_1) = \int dx_2 P(x_1, t_1, x_2, t_2)$.

Expectation values

Average $\langle R \rangle = \sum_i P(A_i) R(A_i) \rightarrow \int_{\omega \in \mathcal{S}} R(\omega) P(\omega) d\omega$

Covariance $\langle x_i, x_j \rangle = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle =$

$$= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \quad \text{e} \quad \langle x_i, x_j \rangle \equiv \sigma^2(x)$$

Moment of x around m of order K $E[x-m]^K = \sum_i (x_i - m)^K P(x_i)$

Correlation $G(z) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(z+s) x(s) ds \stackrel{*}{=} \langle x(z) x(0) \rangle$

* se ergodicità non ci sono punti fissi della mappa evoluzione temporale, ovvia dopo T grande il sistema esplora tutti i punti.

Spectral density $S(w) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi T} |\gamma(w)|^2 \quad \gamma(w) \equiv \int_0^T x(t) e^{-iwt} dt$

$$\text{note } S(w) = \frac{1}{2\pi} \int G(z) e^{-iwz} dz \rightarrow G(z) = \int S(w) e^{iwx} dw$$

Dal punto di vista computazionale conviene $\gamma(w) \rightarrow G(z)$ grazie a FFT che va come $N \ln N$ mentre $G(z)$ va come N^2 .

Legge dei grandi numeri e Teorema del limite centrale

Sotto certi poteri $\langle x(m), x(m) \rangle \rightarrow 0$ per $|m-m| \rightarrow +\infty$ da cui

$$\text{segue } \sigma^2(X_N) \rightarrow 0 \text{ e } \lim_{N \rightarrow +\infty} \bar{X}_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x(m) = \langle X \rangle.$$

Dove così sono quanti $\langle X(m), X(n) \rangle \sim \begin{cases} \alpha \lambda^{-|m-n|} & \Rightarrow \sigma^2(X_N) \sim 1/N \\ \alpha / |m-n| & \Rightarrow \sigma^2(\bar{X}_N) \sim \log N / N \end{cases}$

Prendiamo \bar{X}_i : t.c. $\langle \bar{X}_i \rangle = 0$ e $\langle \bar{X}_i^2 \rangle = b_i^2 < +\infty$. Definiamo $S_N \equiv \sum_{i=1}^N \bar{X}_i$ con com \bar{X}_i e \bar{X}_j indipendenti e $\sigma_N^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2$, e risolviamo la condizione di Lindeberg $\forall t > 0 \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sigma_m^2} \sum_{i=1}^m \int_{|\bar{X}_i| > t \sigma_m} \bar{X}_i^2 P(\bar{X}_i) d\bar{X}_i \right] = 0$

Allora il teorema del limite centrale afferma che $P(S_m / \sigma_m)$ tende a una legge normale con $\sigma^2 = 1$ e media zero.

Esempio: Binomiale, Maxwell, Poisson...

Controesempio: Cauchy (o Lorentz) $P(y) = \alpha / \pi(y^2 - \alpha^2)$ dato $\sigma^2(y) = +\infty$

Come quantificare la velocità di convergenza? definiamo $Y_m \equiv S_m / \sigma_m$

$\phi \equiv \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m$ con $F_m = \int_{-\infty}^t P(Y_m) dY_m$ che rappresenta $P(Y_m > t) \rightarrow$ quantifica la coda $F_m(t) - \phi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} Q_1(t) + \frac{1}{m} Q_2(t) + \dots \right]$ dove Q_j sono polinomi di Chebyshev-Hermite e $Q_1 = \frac{t^2 - 1}{6} K_3$ con $K_3 = E[x - \bar{x}, 3]$.

Più semplice condizione di Berry-Essen $\rightarrow |F_m - \phi| \leq 3 K_3 / \sqrt{m} \sigma^2$.

Limiti di successioni di variabili random

Almost certainly limit $\rightarrow ac\text{-}\lim_{m \rightarrow +\infty} X_m = x$ if $X_m \xrightarrow{v} x$

Mean square limit $\rightarrow ms\text{-}\lim_{m \rightarrow +\infty} X_m = x$ if $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int d\omega p(\omega) [X_m(\omega) - x(\omega)]^2 = 0$

Stochastic limit in probability $\rightarrow st\text{-}\lim_{m \rightarrow +\infty} X_m = x$ if $\lim_{m \rightarrow +\infty} P(|X_m - x| > \epsilon) = 0$

$$\text{dove } P(|X| > \epsilon) = \int d\omega p(\omega) \chi_\epsilon(|X|) \quad \chi_\epsilon(z) = \begin{cases} 1 & |z| > \epsilon \\ 0 & |z| \leq \epsilon \end{cases}$$

ac-limit
or
ms-limit $\Rightarrow St\text{-limit} \Rightarrow$ convergence in distribution $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(X_m) = \langle f(x) \rangle$

Funzione caratteristica e generatrice

Definisco $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $S = (s_1, \dots, s_n)$ allora $\underline{\phi(s)} = \langle \exp\{is \cdot x\} \rangle$

La funzione caratteristica è sostanzialmente una trasformata di Fourier di $P(x)$

$\rightarrow \phi(0) = 1$ normalizzazione $\rightarrow |\phi(s)| \leq 1 \forall s \rightarrow \phi(s) \in UC$

$\rightarrow \exists \langle \prod_i^m X_i^{m_i} \rangle$ allora $\underline{\langle \prod_i^m X_i^{m_i} \rangle} = \prod_i^m (-i) \partial_{s_i} \Big|_{s=0} \phi(s)$

$\rightarrow p(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \phi(s) e^{-isx} ds \rightarrow$ da $p(x) = \prod_i p_i(x_i)$ segue $\phi(s) = \prod_i \phi_i(s_i)$

Definiamo poi la funzione generatrice dei cumulantti come $\Phi(s) = \ln \phi(s)$.

$$\phi(s) = \sum_n i^n / n! \sum_{\{m_i\}}^* \left(\frac{k!}{\prod_i m_i!} \right) \langle X_1^{m_1} \dots X_m^{m_m} \rangle S_1^{m_1} \dots S_m^{m_m}$$

Eguagliando termine a termine $\Phi(s) = \sum_n i^n / n! \sum_{\{m_i\}}^* \left(\frac{k!}{\prod_i m_i!} \right) \langle X_1^{m_1} \dots X_m^{m_m} \rangle S_1^{m_1} \dots S_m^{m_m}$ i contributi dello sviluppo in (teoria 2, <>) sono le funzioni di correlazione comuni) si ha funzionale, abbiamo

$$\langle\langle X \rangle\rangle = \langle X \rangle, \quad \langle\langle X_1 X_2 \rangle\rangle = \langle X_1, X_2 \rangle, \quad \langle\langle X_1 X_2 X_3 \rangle\rangle = \langle X_1 X_2 X_3 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 X_3 \rangle +$$

$$\text{Nota} \rightarrow \langle\langle \prod_i^m X_i^{m_i} \rangle\rangle = \prod_i^m (-i \partial_{S_i})^{m_i} \Phi(s) \Big|_{s=0} - \langle X_2 \rangle \langle X_3 X_1 \rangle - \langle X_3 \rangle \langle X_1 X_2 \rangle + - \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \langle X_3 \rangle$$

Nota 2 → Per la Gamma $\langle\langle \prod_i^m X_i^{m_i} \rangle\rangle = 0 \quad \forall k = \sum_i m_i > 2$

La funzione generatrice $G(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} S^m P(m) = \langle S^m \rangle = \phi(-i \ln s)$ è associata ai momenti fattoriali definiti come $\langle X^r \rangle_f = \langle X^r X^{r-1} \dots X \rangle = \partial_s^r G(s) \Big|_{s=1}$

Nota → Per la Poissoniana $\langle X^r \rangle_f = \lambda^r$ e $G(s) = \exp\{\lambda(s-1)\}$

Infine, anche qui possiamo definire la funzione generatrice dei cumulantti fattoriali come $g(s) = \ln G(s) = \sum_k \langle\langle X^k \rangle\rangle_f (s-1)^k / k!$

Distribuzioni e distribuzioni stabili

Binomiale

$$P_N(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\bar{u} = Np \quad \sigma^2 = Np(1-p)$$

$$E[u, 2] = \sigma^2 + \bar{u}^2$$

Poisson

$$P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\bar{u} = \lambda \quad \sigma^2 = \lambda$$

Gauss

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$$

$$\bar{x} = 0 \quad \sigma^2 = \sigma^2$$

Cauchy

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$\bar{x} = 0 \quad \sigma^2 = +\infty$$

CLT → dice σ^2 finita \Rightarrow convergenza a Gamma per $S_m = \sum_i^m X_i$, ma dove va invece Cauchy? $S_2 = X_1 + X_2 \mid X_i$ indipendenti distribuite con $P(X_i)$

$$P(S_2) = \sum_{X_1}^* P(X_1) P(X_2) = \sum_{X_1} P(X_1) P(S_2 - X_1) = P(X_1) * P(X_2) \text{ convoluzione } (*: t.c. X_1 + X_2 = S_2)$$

Gamma → $G(x')$ con $\sigma^2(x') = 2 \sigma^2(x)$

Uniforme (x) → Triangolare (x')

Cauchy (x) → $C(x')$ con fattore di scala $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Abbiamo quindi che G e C sono invarianti con un ristretto $\tilde{S}_m = \begin{cases} S_m / \sqrt{m} & G \\ S_m / m & C \end{cases}$

Una distribuzione è stabile se invariante sotto convoluzione

La funzione caratteristica associata a una convoluzione è $\phi(u) = \mathbb{E}\{P(S_2)\}$ data da

$\mathbb{E}\{P(X_1) * P(X_2)\} = \mathbb{E}\{P(X_1)\} \mathbb{E}\{P(X_2)\} \rightarrow$ per S_m $\phi_m(u) = [\phi_1(u)]^m \Rightarrow$ è più facile usare il risultato di convoluzioni successive in trasformato

$$\mathbb{E}\{P_G(x)\} \sim e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in convoluzioni →

$$e^{-\frac{m}{2} S^2}$$

$$\mathbb{E}\{P_C(x)\} \sim e^{-\frac{|x|}{\sqrt{m}}}$$

$$e^{-\frac{1}{m} S^2}$$

$$\text{in termini di } x \stackrel{f^{-1}}{\mapsto} \text{ dà} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi(1+(x/m)^2)}}$$

Teorema

Una distribuzione $L(x)$ può essere una distribuzione limite di $S_n = \sum_i^n x_i$ se e soltanto se è stabile.

Teorema

Una distribuzione $L(x)$ è stabile se e soltanto se il logaritmo della sua funzione caratteristica può essere scritto nella rappresentazione di Levy

$$\ln L_{\alpha, \beta}(n) = \begin{cases} i\mu n - |\kappa n|^{\alpha} \cdot [1 - i\beta \frac{n}{|\kappa n|} \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2}] & \alpha \neq 1 \\ i\mu n - |\kappa n| \cdot [1 + i\beta \frac{n}{|\kappa n|} \frac{2}{n} \ln |\kappa n|] & \alpha = 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ e $\mu \in \mathbb{R}$. I termini γ e μ sono dei fattori che rispettano le ordine o spostano l'origine, ma non cambiano la forma, mentre α e β labellano funzioni diverse!

α determina il comportamento a grandi x (i.e. a piccoli n)

β controlla la simmetria e le code della distribuzione ($\beta=0$ simmetrica)

$$\ln L_{\alpha, \beta}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -|\kappa n|^{\alpha} \Rightarrow L_{\alpha, \beta}(n) \sim e^{-|\kappa n|^{\alpha}} \Rightarrow L_{\alpha, \beta}(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$$

Questa distribuzione ha momenti $\langle |x|^{\delta} \rangle$ ben definiti solo per $0 < \delta < \alpha$ ($\int \frac{|x|^{\delta}}{|x|^{\alpha+1}} dx < +\infty$)

Abbiamo quindi $\alpha < 2 \Rightarrow$ varianza non definita e $\alpha < 1 \Rightarrow$ media non definita.

A occhio da $\beta=0$ se $\alpha=1$ è Lorentziana e $\langle x \rangle = 0 < +\infty$ è un caso fortunato!

Per $\alpha=2$ invece $\ln L_{2, \beta}(n) \equiv \ln L_2(n)$ ed è proprio Gaussiana.

Esempio $\beta=1$ e $\alpha=1/2$ è Levy-Smirnov

$$L_{0.5, 1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu) \right\}$$



Teorema

Una distribuzione $p(x)$ è inclusa nel bacino di attrazione di una densità stabile se e soltanto se $p(x) \sim \frac{C_{\pm} x^{\alpha-1}}{|x|^{1+\alpha}}$ per $\alpha, C_{\pm} \in \mathbb{R}_+$, dove C_{\pm} danno info su γ e β .

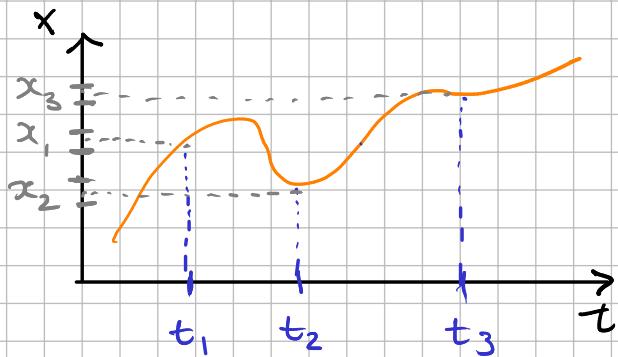
Notiamo infine che le distribuzioni di Levy sono self-simili come evidente dal fatto che S_n risulta lasciando più la distribuzione invariata $\rightarrow L_{\alpha}(cx) = c^{\alpha} L_{\alpha}(x)!$

Nota finale

I processi di Levy sono tali che gli incrementi sono indipendenti ($X_{t+1} - X_t$ non dipende da $X_s \forall s < t$), stazionari ($P(X_{t+1} | X_t) = P(X_t | X_0)$) e continuo nel tempo.

Infine, essi sono a tutti gli effetti dei processi di Markov \rightarrow

• Processi di Markov



Densità $\hat{=}$ probabilità
Totale e completa descrizione
di cosa succede

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_n, t_n)$$

- $P_n \geq 0$ positività

- $P_n(x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_j; \dots) = P_n(\dots; x_j; \dots; x_i)$

\curvearrowright simmetria

- $\int P_n(x_1; x_2; \dots; x_n) dx_n = P_{n-1}(x_1; x_2; \dots; x_{n-1})$

completatezza

- $\int P_1(x_1, t_1) dx_1 = 1$ normalizzazione

La gerarchia delle $P_n \Rightarrow$ definisce il processo!

Un processo si dice stazionario quando

$$\forall n \quad P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t)$$

Probabilità condizionate

Se $t_1, x \in [x_1, x_1 + \Delta x]$

$t_2, x \in [x_2, x_2 + \Delta x] \dots$

Prob. che a t_K $x \in [x_K, x_K + \Delta x]$

$$P_{K+e}(x_1; x_2; \dots; x_{K+e}) = P_K(x_1; x_2; \dots; x_K)$$

• $P_{e|K}(x_{K+1}; \dots; x_{K+e} | x_1; \dots; x_K)$

NOTA $P_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) P_1(x_1, t_1)$

Si parla di processo di Markov quando

$$P_{1|n-1}(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = P_{1|1}(x_n | x_{n-1})$$

loro solo conoscenza di P_1 e $P_{1|1}$ è sufficiente per studiare l'evoluzione del processo!

In altri termini diremo che gli incrementi sono indipendenti

$$P(x_m; x_{m-1}; \dots; x_0) = \prod_{n=1}^{m-1} P(x_n | x_{n-1}) P(x_0)$$

Ricorriamo ora l'espressione dell'equazione di Chapman - Kolmogorov

$$\begin{aligned} P_3(x_3, x_2, x_1) &= P_{1|2}(x_3 | x_2, x_1) P_2(x_2, x_1) = \text{per Markov} \\ &= P_{1|1}(x_3 | x_2) P(x_2 | x_1) P(x_1) \end{aligned}$$

integrandi in x_2 abbiamo

$$\begin{aligned} P_2(x_3, x_1) &= \int P_3(x_3, x_2, x_1) dx_2 = P(x_1) \int P_{1|1}(x_3 | x_2) P(x_2 | x_1) dx_2 \\ &= P(x_3 | x_1) P(x_1) \quad \text{da cui} \end{aligned}$$

$$P(x_3 | x_1) = \int P(x_3 | x_2) P(x_2 | x_1) dx_2$$

Definiamo un processo di Markov continuo come uno t.c.

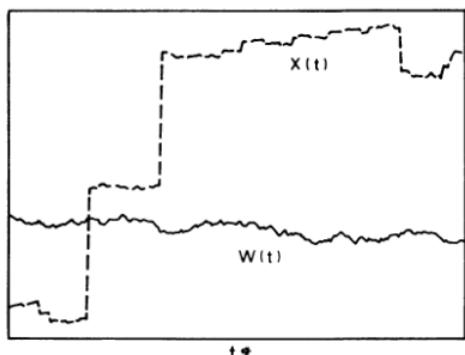
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x_1 - x_2| > \varepsilon} P_{1|1}(x_1, t + \Delta t | x_2, t) = 0$$

In altre parole, la probabilità di fare un salto è nulla.

Esempio: moto browniano

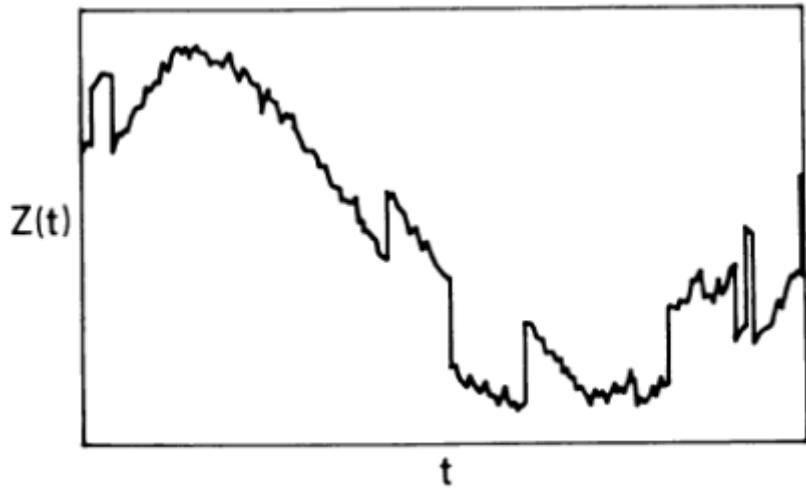
Controesempio: processo Lorentz

Posiamo dividere l'evoluzione in una parte a salti e in una continua?



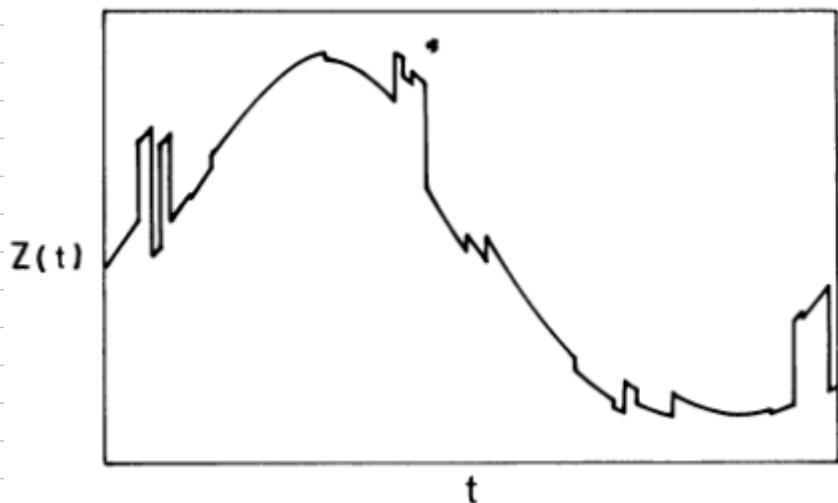
Formal differentiale dell' esponente di Chapman - Kolmogorov

$$\partial_t P(\bar{z}, t' | \bar{x}, t) = - \sum_j \partial_{z_j} [A_j(\bar{z}, t') P(\bar{z}, t' | \bar{x}, t)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_{z_i z_j}^2 [B_{ij}(\bar{z}, t') P(\bar{z}, t' | \bar{x}, t)] + \\ + \int d\gamma [w(\bar{z}|\bar{\gamma}) P(\bar{\gamma}, t' | \bar{x}, t) + w(\bar{\gamma}|\bar{z}) P(\bar{z}, t' | \bar{x}, t)] \quad \left. \right\} w \text{ molto}$$



Jump + drift + diffusione

Queste sono singole
traiettorie (vedremo come
generarle): se ne facciamo
tante \rightarrow distribuzione di
probabilità



Jump + drift (no diff)

Le figure illustrano la differenza
tra le tipologie di traiettorie
quando l'eq di C-K ha certi
termini piuttosto che altri

Recap scheme:

Differential $\longrightarrow A=B=0 \Rightarrow$ Master equation \rightarrow nls sol.

C-K exponent

$w=0 \Rightarrow$ Fokker - Planck $\rightarrow B=0 \Rightarrow$ Liouville equation

↓

drift + diffusione

$\left\{ \begin{array}{l} p(x,t) = \delta(x - \bar{x}(t)) \\ \frac{dx}{dt} = A(x(t), t) \end{array} \right.$

Processo di Wiener

Processo continuo $\partial_t P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \frac{1}{2} \partial_\omega^2 P(\omega, t | \omega_0, t_0)$

Condizione iniziale $P(\omega, t_0 | \omega_0, t_0) = \delta(\omega - \omega_0)$

$$\phi(s, t) = \int d\omega P(\omega, t | \omega_0, t_0) e^{is\omega}$$

$$\partial_t \phi(s, t) = -\frac{1}{2} s^2 \phi(s, t) \Rightarrow \phi(s, t) = \phi(s, t_0) \exp \left\{ -\frac{s^2}{2} (t - t_0) \right\}$$

$$\phi(s, t_0) = e^{is\omega_0} \text{ da condizione iniziale}$$

$$\phi(s, t) = \exp \left\{ -\frac{s^2}{2} (t - t_0) + i\omega_0 s \right\} \text{ da cui}$$

$$P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \mathcal{F}^{-1}\{\phi(s, t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\omega-\omega_0)^2}{t-t_0} \right\}$$

Chiaramente un processo Gaussiano con

$$\langle \omega \rangle = -i \partial_s \phi(s, t) = \omega_0 \quad \& \quad \langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle = t - t_0$$

Questo processo è continuo ma non differenziabile, infatti:

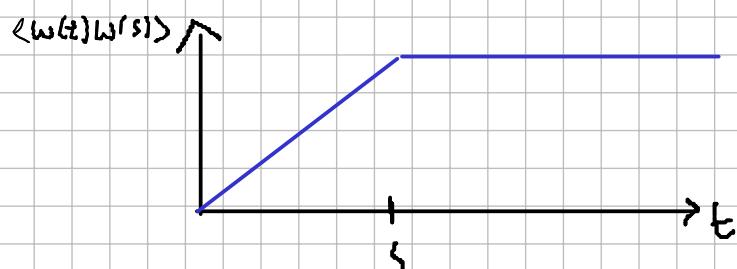
$$\begin{aligned} \text{Prob} \{ |\omega(t+h) - \omega(t)| > kh \} &= 2 \int_{kh}^{\infty} dw \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{w^2}{2h}} = \\ &= \operatorname{erfc}(k\sqrt{\frac{h}{2}}) = 1 - \operatorname{erf}(k\sqrt{\frac{h}{2}}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left[k\sqrt{\frac{h}{2}}\right]^{2n+1}}{(2n+1)} = \end{aligned}$$

$$= \boxed{h \rightarrow 0 \rightarrow 1} \quad \text{oppure} \quad \frac{\omega(t+h) - \omega(t)}{h} > k \quad \forall n$$

Correlazioni $\langle \omega(t) \omega(s) | [\omega_0, t_0] \rangle = \min(t - t_0, s - t_0) + \omega_0^2$

quanto si vede da $\langle \hat{O}(\omega(t), \omega(s)) \rangle = \int d\omega_t d\omega_s \hat{O} P(\omega(t), t; \omega(s), s)$

per $\omega_0^2 = 0$ abbiamo



Processo di OU

Prendendo $A_i(z) = -\alpha$ abbiamo l'aggiunta di un termine d: drift o quello di diffusione ottenendo l'equazione

$$\partial_t P(x,t) = \alpha \partial_x P(x,t) + \frac{D}{2} \partial_x^2 P(x,t)$$

La soluzione ottenuta in modo analogo a prima è

$$\phi(s,t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} s^2 (t-t_0) + i s (x_0 + \alpha(t-t_0)) \right\}$$

da cui $\langle x \rangle = x_0 + \alpha(t-t_0)$. Ponendo $\alpha = x$ abbiamo il processo di Ornstein - Uhlenbeck, da cui soluzione si trova

$$\partial_t P(x,t) = K \partial_x x P(x,t) + \frac{D}{2} \partial_x^2 P(x,t)$$

con il metodo delle caratteristiche

cerchiamo la soluzione nonstazionaria

$$\partial_t P_s(x,t) = 0 \Rightarrow \partial_x K x P(x,t) + \frac{D}{2} \partial_x^2 P(x,t) = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\left[K x P(x,t) + \frac{D}{2} \partial_x P(x,t) \right] = J \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$K p_{\perp} x P(x|x_0) \rightarrow 0 \quad p(x|x_0) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{In tal caso } \frac{d}{dx} P(x,t) = -\frac{2Kx}{D} P(x,t) \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{2K}{D} x dx$$

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} \quad \sigma = \sqrt{D/2K}$$

Ora stabiliamo la dipendenza dal tempo osservando che

$$\partial_t \phi(s,t) = -Ks \partial_s \phi(s,t) - \frac{D}{2} s^2 \phi(s,t)$$

e utilizziamo il metodo delle caratteristiche

$$g = \ln \phi \rightarrow \partial_t g + Ks \partial_s g = -\frac{D}{2} s^2 \rightarrow a \partial_t g + b \partial_s g = c$$

Questo consente nel risolvere l'equazione in maniera geometrica trovando la curva caratteristica $g(s(z), t(z))$.

Consideriamo la superficie $S = (x, y, g(x,y))$ con g soluzione della PDE espresso come $(a, b, c) \cdot \bar{\nabla} F(x,y,z) = 0$. Notiamo che

$F(x, y, z) = g(x, y) - z = 0$ è l'equazione implicita che descrive S' e
 $\nabla F(x, y, z) = (\partial_x g, \partial_y g, -1)^T$ è il vettore normale alla curva $g(x, y)$ e
quindi la PDE esprime che il vettore dei coefficienti è tangente a S' .

In linguaggio di geometria differenziale poniamo che $C^m = (a, b, c)$
è il campo che genera il flusso $X^m(\eta)$:

$$\begin{cases} \frac{dx^m}{d\eta} = C^m(x) \\ x^m(\eta=0) = x_0^m \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} X^m(\eta) \\ \text{curva integrale} \\ \text{o caratteristica} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Parametrizzazione di } S' \\ \text{al variazione di } \eta \text{ e } X^m \end{array}$$

Tornando a OU abbiamo

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dt}{d\eta} = 1 \\ \frac{ds}{d\eta} = ks \\ \frac{dg}{d\eta} = -\frac{1}{2} D s^2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} dt = ds/ks \rightarrow kt - \ln s = C_1 \text{ costante} \\ dg = -\frac{1}{2} D s ds \rightarrow g + \frac{Ds^2}{4k} = C_2 \text{ costante} \\ \text{segno } C_1 = s e^{-kt} \quad C_2 = \phi e^{Ds^2/4k} \end{array}$$

siccome le due costanti dipendono dalla stessa condizione iniziale, potremmo scrivere $C_2 = f(C_1)$, per cui la soluzione diventa $\phi(s, t) = e^{-Ds^2/4k} f(s e^{-kt})$

Troviamo ora f ponendo le condizioni al contorno

$$P(x, 0 | x_0, 0) = \delta(x - x_0) \rightarrow \phi(s, 0) = e^{isx_0} \quad \text{monodromo poi}$$

$$isx_0 = -\frac{Ds^2}{4k} + \ln f(s) \rightarrow f(s) = e^{isx_0 + \frac{Ds^2}{4k}} \quad s \rightarrow se^{-kt}$$

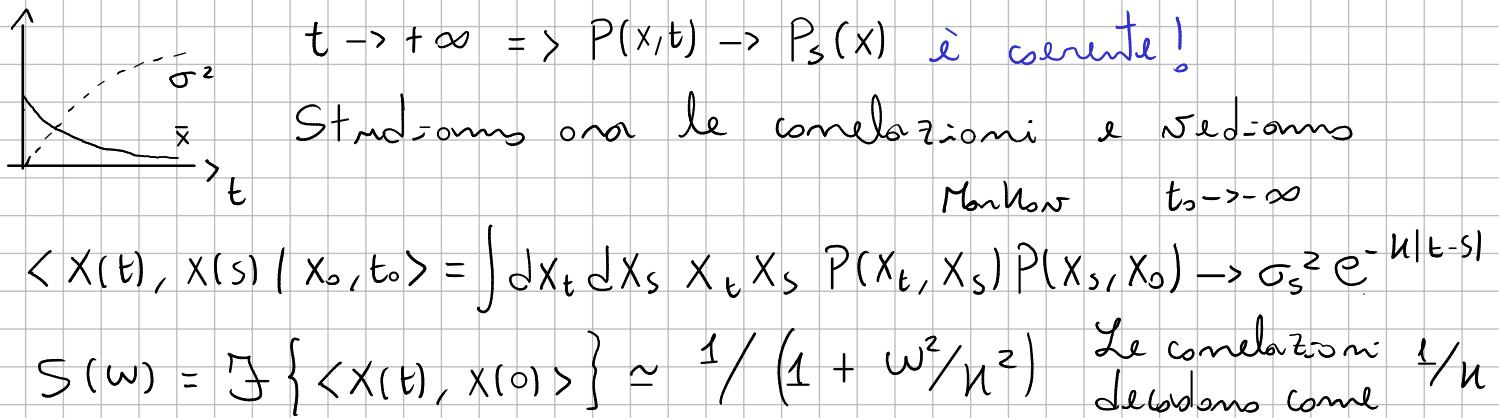
$$\text{in } f(s) \text{ e}$$

$$f(se^{-kt}) = \exp \left\{ ix_0 se^{-kt} + \frac{D}{4k} s^2 e^{-2kt} \right\} \quad \text{da cui}$$

$$\phi(s, t) = \exp \left\{ -\frac{Ds^2}{4k} (1 - e^{-2kt}) + ix_0 e^{-kt} \right\}$$

$$\bar{x} = \langle x \rangle = x_0 e^{-kt} \quad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt})$$

$$P(x, t | x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -(x - \bar{x})^2 / 2\sigma^2 \right\}$$



Random Walk

Nel caso di un salto che avviene a un tempo non finito

$$P(m, t+\Delta t) = P(m, t) + P_{\pm}(m \rightarrow m \pm 1) (P(m-1, t) + P(m+1, t)) - P_{\pm}(m \rightarrow m \pm 1) \Delta t - P_{\pm}(m \rightarrow m+1) P(m, t) - P_{\pm}(m \rightarrow m-1) P(m, t)$$

da cui $\partial_t P(m, t) = \Delta (P(m-1, t) + P(m+1, t)) - 2 \Delta P(m, t)$

Utilizziamo la funzione caratteristica discreta e otteniamo

$$\partial_t \phi(s, t) = \Delta (e^{-is} + e^{is} - 2) \phi(s, t)$$

$$\phi(s, t) = \exp \{ (e^{-is} + e^{is} - 2) \Delta t \} G(s, 0) \rightarrow \exp \{ -s^2 \Delta t \} \text{ per } s \rightarrow 0$$

Nel caso di un salto che avviene a istanti di tempo discreti

$$P(m, (N+1)\tau) \approx P(m, N\tau) + \tau \partial_z P(m, N\tau)$$

$$P(m, (N+1)\tau) = \frac{1}{2} P(m-1, N\tau) + \frac{1}{2} P(m+1, N\tau) \quad \left| \begin{matrix} \frac{1}{2\tau} \text{: probabilità che} \\ \text{arriva/na} \\ \text{o oppure resta} \end{matrix} \right.$$

$$\partial_z P(m, N\tau) = \frac{1}{2\tau} (P(m-1, N\tau) + P(m+1, N\tau) - 2 P(m, N\tau))$$

rispetto al caso precedente.

Nel limite del continuo $x = m\sigma$ $\phi'(s, t) = \phi(ls, t) = \langle e^{isx} \rangle$

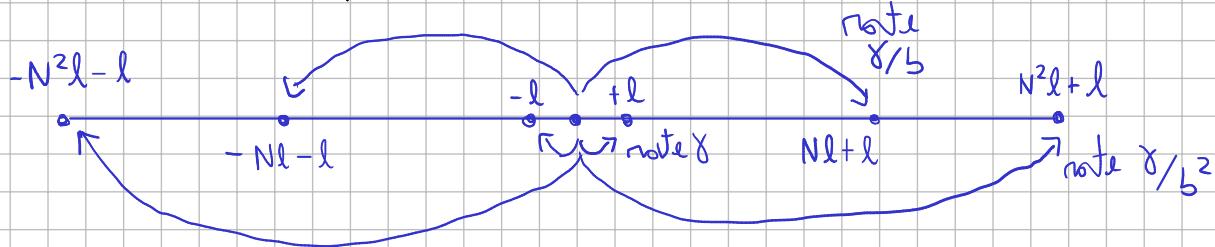
da cui $\phi'(s, t) = \exp \{ (e^{-isl} + e^{isl} - 2) \Delta t \} \rightarrow \exp \{ -s^2 D t \}$

con $D = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta^2}{\Delta} \Delta \rightarrow$ salta l'ipotesi con $\sigma^2 = 2D t$

Abbiamo ritrovato Wiener e Ito-Nieude prendendo il limite anche per $P(m+1, t) \approx P(m, t) + a \partial_x P(m, t) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 P(m, t)!!$

Random Walk alla Wiener

Questo è un esempio di processo di Markov con durata infinita



$$(P(m', t'+\Delta t | m, t) - P(m', t' | m, t)) / \Delta t \equiv \partial_t P(m', t' | m, t)$$

$$" \\ \gamma(P(m'+1, t' | m, t) + P(m'-1, t' | m, t) - 2P(m', t' | m, t)) +$$

$$+ \frac{\gamma}{b} (P(m'+N+1, t' | m, t) + P(m'-N-1, t' | m, t) - 2P(m', t' | m, t)) +$$

$$+ \frac{\gamma}{b^2} (P(m'+N^2+1, t' | m, t) + P(m'-N^2-1, t' | m, t) - 2P(m', t' | m, t)) +$$

$$+ \dots =$$

$$= \gamma \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n} (P(m'+N^n+1, t' | m, t) + P(m'-N^n-1, t' | m, t) - 2P(m', t' | m, t))$$

Utilizziamo la funzione caratteristica $G(s, t) = \langle e^{isM} \rangle$

$$\partial_t G(s, t) = \gamma \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n} (e^{isN^n} + e^{-isN^n} - 2) G(s, t) \equiv f(s) G(s, t) \text{ da cui}$$

$$G(s, t) = \exp \left\{ \gamma \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n} (e^{isN^n} + e^{-isN^n} - 2) t \right\} G(s, 0)$$

Nel limite $\delta = \text{piccolo}$ si osserva

$$G(s, t) = \exp \left\{ \gamma t s^2 / 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (N^2/b)^n \right\}$$

Notiamo che se N^2/b è minore di uno allora $\sigma^2 = \gamma t / (1 - N^2/b)$

mentre se è maggiore di uno abbiamo $\sigma^2 \rightarrow +\infty$.

Studiamo ora altre proprietà del Random Walk ponendo $l \equiv \alpha(M' - M)$.

$$P(l) = \gamma \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n} (\delta(l - N^n \alpha) + \delta(l + N^n \alpha)) \text{ poniamo } \gamma = \frac{b-1}{2b}$$

→ la probabilità di un salto $l = Na$ è sopra di un fattore $1/b$, ovvia dopo

b salti α si può fare un salto Na ; E' possibile generare una gerarchia

→ il processo manifesta dei cluster!

infinita di cluster (autoreferenzialità)?

→ $P(l)$ è stabile!

Si per $\langle l^2 \rangle = +\infty$ ovvia per $\frac{N^2}{b} > 1$

Anolitico in transformata

$$P(n) = \langle e^{i n l} \rangle = \frac{b-1}{b} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\cos(N^j a)}{b^j}$$

Serie di Weierstrass:

Ovunque continuo, non differentiabile

Rispetto a k se $b > M$

- $P(k)$ "scale"

$$\begin{aligned} p(Nk) &= \frac{b-1}{b} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b^j} \cos(N^j a) = \\ &= \frac{b-1}{b} \left\{ \cos(ka) + \frac{1}{b} \cos(kN^2 a) + \frac{1}{b^2} \cos(kN^4 a) + \dots \right\} \\ &= b \frac{b-1}{b} \left\{ \frac{\cos(ka)}{b} + \frac{1}{b^2} \cos(kN^2 a) + \dots \cos(ka) - \cos(ka) \right\} \\ &= b P(k) - (b-1) \cos(ka) \Rightarrow P(k) = \frac{P(Nk)}{b} + \frac{b-1}{b} \cos(ka) \end{aligned}$$

Possiamo scrivere questa $P(k)$ come somma di una parte omogenea e di una parte particolare come

$$P(k) = P_0(k) + P_p(k) = \frac{P_0(Nk)}{b} + \frac{P_p(Nk)}{b} + \frac{b-1}{b} \cos(ka)$$

$$P_p(k) = \frac{P_p(Nk)}{b} + \frac{b-1}{b} \cos(ka) \rightarrow \cos(ka) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m!} (ka)^{2m} \quad e \quad P_p(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m!} C_{2m}(ka)^{2m}$$

$$\text{dove } \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m!} \frac{1}{b} \left\{ b C_{2m}(ka)^{2m} - C_{2m}(Nka)^{2m} - (b-1)(ka)^{2m} \right\} = 0 \rightarrow C_{2m} = \frac{b-1}{b} \left(1 - \frac{N^{2m}}{b} \right)^{-1}$$

$$P_p(k) = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m!} \frac{b-1}{b} \frac{(ka)^{2m}}{\left(1 - \frac{N^{2m}}{b} \right)} \text{ Nota che il contributo alla varianza di questo pezzo è finito dato } \langle l^2 \rangle = (-i)^2 \frac{d^2}{dk^2} P_p(k) \Big|_{k=0} = a^2 \frac{b-1}{b-N^2} < +\infty \text{ e quindi il contributo divergente viene dal pezzo omogeneo.}$$

$$P_0(k) = \frac{P_0(Nk)}{b} \rightarrow \text{Una formula generale di questo tipo di funzioni è } F \left(\exp \left\{ \pm 2\pi i \frac{\ln |ka|}{\ln N} \right\} \right)$$

$$\text{dato che } P_0(Nk) \sim F \left(\exp \left\{ \pm 2\pi i \frac{\ln |Nka|}{\ln N} \right\} \right) = F \left(\exp \left\{ \pm 2\pi i \frac{\ln |ka|}{\ln N} \pm 2\pi i \right\} \right) = F \left(\exp \left\{ \pm 2\pi i \frac{\ln |ka|}{\ln N} \right\} \right)$$

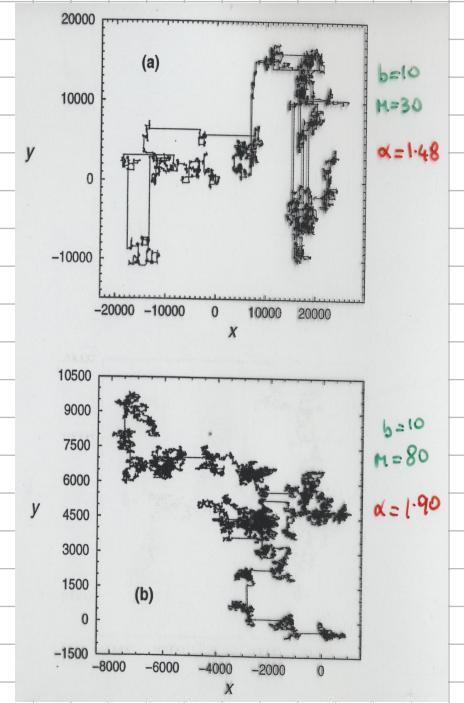
ponendo $P_0(Nk) \sim P_0(k)$. Scegliamo quindi $F(k) = Q(k)$ con $Q(k)$ periodica in $\ln k$ con periodo $\ln N$.

Ora siamo quindi: $P_0(k) = |\ln k|^\alpha Q(k)$ soddisfa l'equazione omogenea se $\alpha = \ln b / \ln N$

e dalla condizione $N^2 \geq b$ ottieniamo $\alpha \in (0; 2)$. La soluzione reale è quindi:

$$P_0(k) = |\ln k|^\alpha Q(k) \text{ con } Q(k) = \frac{b-1}{b \ln N} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(w_m) \cos(w_m \frac{k}{2}) \exp \left\{ \pm 2\pi m i \frac{\ln |ka|}{\ln N} \right\} \text{ e } w_m = \frac{2\pi i m}{\ln N} - \alpha$$

Per $k \rightarrow 0$ il termine leading è dato da $m=0$ ed è $P(k) = 1 - |\ln k|^\alpha c(\alpha)$ con $c(\alpha) = -Q(0)$



Immaginiamo di poterlo scrivere come $P(n) = \exp\{-|n\alpha|^{\alpha} C(\alpha)\}$, da cui risulta
 $\ln P(n) = -|n\alpha|^{\alpha} C(\alpha)$ da cui ricaviamo che $P(n) \sim L_{d,\alpha}(n)$ con $\alpha = \ln b / \ln N$.

Un calcolo esatto matematicamente può essere molto utile usando la trasformata di Mellin.

Questa è definita come $M\{f; s\} = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx$ con $\operatorname{Re} s > 0$. Un esempio interessante è la relazione con la Γ di Euler $M\{e^{-t/x}\} = x^s \Gamma(s)$. L'inversa è $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds x^{-s} M(s)$.

Nel nostro caso osserviamo che $M\{\cos(\alpha x)\} = \alpha^{-s} \Gamma(s) \cos(\pi s/2)$ con $\alpha > 0$ e $\operatorname{Re} s \in (0, 1)$.

$$P(n) = \frac{b-1}{b} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\cos(KN^j \alpha)}{b^j} \rightarrow P(n) = \frac{b-1}{2\pi i b} \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s) \cos(\pi s/2)}{N^{sj} (\alpha)^s b^j} = \frac{b-1}{2\pi i b} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s) \cos(\pi s/2)}{(\alpha)^s (1 - 1/N^s b)}$$

con $\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j = \frac{1}{1-\lambda}$ dove $\lambda = \frac{1}{N^s b} < 1$ ormai la serie deve convergere affinché $\int \leftrightarrow \sum$.

$|N^s b| > 1 \Rightarrow N^s > \frac{1}{b} \rightarrow s > -\frac{\ln b}{\ln N} = -\alpha$ e quindi l'integrale è ben posto per $c > -\alpha$.

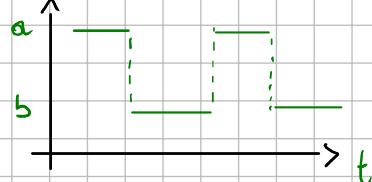
A questo punto si risolve l'integrale con il teorema dei residui e si ottiene $P(n)$.

Rombo del Telegraph

Sistema a due stati a e b in cui $P(a,t) + P(b,t) = 1 \quad \forall t$

$$\partial_t P(a,t|x,t_0) = \mu P(b,t|x,t_0) + \\ - \lambda P(a,t|x,t_0)$$

$$\partial_t P(b,t|x,t_0) = -\mu P(b,t|x,t_0) + \\ + \lambda P(a,t|x,t_0)$$



Usando la condizione $P(x',t|x,t) = \delta_{x'x}$ abbiamo per $t \approx t_0$

$$\partial_t P(a,t|x,t_0) = \mu - (\mu + \lambda) P(a,t|x,t_0) \quad \text{da cui} \quad [\text{not} \delta_{ax} + \delta_{bx} = 1]$$

$$P(a,t|x,t_0) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \exp\{-(\mu + \lambda)(t - t_0)\} (\delta_{ax} - \mu / \mu + \lambda)$$

$$\langle x'(t) | [x, t_0] \rangle = a P(a,t|x,t_0) + b P(b,t|x,t_0) = \\ = \frac{a\mu + b\lambda}{\mu + \lambda} (1 - e^{-(\mu + \lambda)(t - t_0)}) + (a\delta_{ax} + b\delta_{bx}) e^{-(\mu + \lambda)(t - t_0)}$$

$$\langle x'(t) x'(s) | [x, t_0] \rangle = \frac{(a-b)^2 \mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)(t - t_0)}$$

Notiamo che le correlazioni hanno la stessa struttura di OU e per questo a volte poniamo anche RT al suo posto per semplicità!

Integrali stocastici

L'equazione di Langevin in teoria non è definita se non ha come integratore il processo stocastico $\xi(t)$

$$\dot{X}(t) = a(X, t) + b(X, t)\xi(t) \rightarrow X(s) - X(0) = \int_0^s (a(X, t) + b(X, t)\xi(t)) dt$$

$$\text{Poniamo } \xi(t) dt = \omega(t+dt) - \omega(t) = dw(t)$$

Integrandi in una variabile stocastica che ad esempio rappresenta un processo di Wiener $dw(t)$, definiamo l'integrale di $R(s)$ come

$$\bullet \int_{t_0}^t R(s) dw(s) \equiv \underset{m \rightarrow +\infty}{\text{ms-lim}} S_m = \underset{m \rightarrow +\infty}{\text{ms-lim}} \sum_{i=1}^m R(\tau_i) dw(\tau_{i-1}) \quad \tau_i = t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1})$$

$\alpha = 0 \rightarrow$ Ito \rightarrow integrale non anticipante

$\alpha = 1/2 \rightarrow$ Stratonovich \rightarrow integrale anticipante

Prendiamo ad esempio $R(s) = \omega(s)$ e vediamo che

$$\text{Ito} \quad \left[\underset{m \rightarrow +\infty}{\text{ms-lim}} \sum_{i=1}^m \omega(\tau_{i-1}) dw(\tau_{i-1}) = I \right] \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle [S_m - I]^2 \rangle = 0$$

$$S_m = \sum_{i=1}^m \omega(\tau_{i-1}) dw(\tau_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[(\omega(\tau_{i-1}) + dw(\tau_{i-1}))^2 - \omega(\tau_{i-1})^2 - dw(\tau_{i-1})^2 \right] = \\ = \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{2} (\omega(\tau_i)^2 - \omega(\tau_{i-1})^2) - \frac{1}{2} dw(\tau_{i-1})^2 \right] = \frac{1}{2} (\omega(t)^2 - \omega(t_0)^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m dw(\tau_{i-1})^2$$

Il primo pezzo non dipende più da m e quindi poniamo il ms del secondo

$$I = \frac{1}{2} (\omega(t)^2 - \omega(t_0)^2) - \frac{1}{2} I' \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle [I' - \sum_{i=1}^m dw(\tau_{i-1})^2]^2 \rangle = 0 \quad \text{Verif.}$$

$$\text{per } I' = \langle \sum_{i=1}^m dw(\tau_{i-1})^2 \rangle = \sum_{i=1}^m \langle (\omega(\tau_i) - \omega(\tau_{i-1}))^2 \rangle = t - t_0.$$

$$I = \int_{t_0}^t \omega(t') dw(t') = \frac{1}{2} (\omega(t)^2 - \omega(t_0)^2 - (t - t_0)) \rightarrow \langle I \rangle = 0 \leftarrow \text{Nole} \quad \forall R(t) \quad \text{non anticipante}$$

$$\text{Str} \quad \left[\underset{m \rightarrow +\infty}{\text{ms-lim}} \sum_{i=1}^m \omega(\tau_i) dw(\tau_{i-1}) = I \right] \quad \omega(\tau_i) \simeq \frac{1}{2} (\omega(\tau_i) + \omega(\tau_{i-1}))$$

$$S_m = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} (\omega(\tau_i) + \omega(\tau_{i-1})) (\omega(\tau_i) - \omega(\tau_{i-1})) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\omega(\tau_i)^2 - \omega(\tau_{i-1})^2) = \frac{1}{2} (\omega(t)^2 - \omega(t_0)^2)$$

$$\text{da cui banalmente } I = S \int_{t_0}^t \omega(t') dw(t') = \frac{1}{2} (\omega(t)^2 - \omega(t_0)^2) \rightarrow \langle I \rangle = \frac{1}{2} (t - t_0)$$

L'integrale di Ito può essere nullo quando la $R(s)$ non dipende da come evolverà il processo stocastico, ovvia quando è statisticamente indipendente da $dw(s)$. In tal caso diremo che $R(s)$ è non anticipante. L'esempio più banale è $w(s)$

Dato che $\langle w(s) dw(s) \rangle = \langle w(s) (w(t) - w(s)) \rangle = \langle w(s) \rangle \langle (w(t) - w(s)) \rangle = 0$. Altre funzioni non anticipanti sono quelle tali che $R(s) = F(w(s))$.

- Osserviamo che $\int_{t_0}^t R(s) [dw(s)]^{2+N} = \begin{cases} \int_{t_0}^t R(t') dt' & N=0 \implies \underline{dw(t)^2} = \underline{dt} \\ 0 & N>0 \end{cases}$ dimostriamolo

$$\int_{t_0}^t R(s) [dw(s)]^2 = \underset{m \rightarrow +\infty}{\text{ms-lim}} \sum_i R_i dw_i^2 = \underset{m \rightarrow +\infty}{\text{ms-lim}} \sum_i R_i dt_i$$

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\sum_i R_i (dw_i^2 - dt_i) \right)^2 \right\rangle &= \sum_i \langle R_i^2 (dw_i^2 - dt_i)^2 \rangle + 2 \sum_{i < j} \langle R_i (dw_i^2 - dt_i) \times [j] \rangle = \\ &= \sum_i \langle R_i^2 \rangle \langle (dw_i^2 - dt_i)^2 \rangle = \sum_i \langle R_i^2 \rangle [\langle dw_i^4 \rangle - \langle dt_i^2 \rangle] = 2 \sum_i \langle R_i^2 \rangle dt_i^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \square \end{aligned}$$

- Un'altra proprietà interessante è $\langle \int_{t_0}^t G(s) dw(s) \int_{t_0}^t R(s) dw(s) \rangle = \int_{t_0}^t \langle G(s) R(s) \rangle ds$

- Tornando all'eq. di Longuenesse osserviamo che $\exists! X(t)$ non anticipante se i coefficienti a e b sono funzioni L-proiettività e dalla "creta limitata".

In tali ipotesi poniamo presso a integrale la traiettoria senza che questa esploda all'ordine più basso abbiano a e b costanti: $x_{i+1} = x_i + a(x_i) \Delta t + b(x_i) \Delta w$

$$\Delta w = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dw(t) = w(t_{i+1}) - w(t_i) = \text{variabile casuale } Z(\Delta t) \mid \begin{cases} \langle Z \rangle = 0 \\ \langle Z^2 \rangle = \Delta t \end{cases}$$

bastrà quindi generare una Y normale $\in \mathcal{G}(0, 1)$ e abbiano $Z(\Delta t) = \sqrt{\Delta t} Y$

Notiamo però che $Z \sim \sqrt{\Delta t}$ e quindi dobbiamo cercare ordini successivi:
 $SX_1 = \int_0^t (a_0 + \partial_x a_0 Sx_0) dt + \int_0^t (b_0 + \partial_x b_0 Sx_0) dw \approx a_0 \Delta t + b_0 Z + b_0' \int_0^t Sx_0 dw$

$$\int_0^t Sx_0 dw = \int_0^t b_0 \Delta w dw = b_0 \int_0^t w dw = \frac{1}{2} b_0 (\bar{Z}^2 - \Delta t)$$

$$SX_1 = (a_0 - \frac{1}{2} b_0 b_0') \Delta t + b_0 Z + \frac{1}{2} b_0 b_0' Z^2 \quad \text{da SDE } dx = adt + bdw \quad \text{It\^o}$$

Supponiamo di avere $dx = \alpha dt + \beta dw$ d: Stratonovich, allora la soluzione diventa

$$SX_1 = \alpha_0 \Delta t + \beta_0 Z + \frac{1}{2} \beta_0 \beta_0' Z^2 \quad \text{e ponendo } \alpha_0 = a_0 - \frac{1}{2} b_0 b_0', \beta_0 = b_0 \text{ otteniamo che}$$

$$\text{It\^o SDE } dx = adt + bdw \text{ è equivalente a Str SDE } dx = (a - \frac{1}{2} b b') dt + b dw$$

La scelta del parametro α o del tipo di SDE da usare dipende dal modello per descrivere il fenomeno! Esempi: biologia o economia \rightarrow It\^o / particelle \rightarrow Stratonovich.

Algoritmo casalingo per integrare Stratonovich con $z_1 = \sqrt{h} Y_1$ e $z_2 = \frac{1}{2} h^{3/2} [Y_1 + Y_2 / \sqrt{3}]$
 $x(h) = x(0) + \beta z_1 + \alpha h + \frac{1}{2} \beta' z_1^2 + (\alpha' \beta - \beta' \alpha) z_2 + \alpha \beta' h z_1 + \frac{1}{6} (\beta \beta'^2 + \beta^2 \beta'') z_1^3$

- Vediamo ora come funziona il combinazione di variabili con la formula di Ito

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)d\omega \quad \rightarrow \quad dx^2 = b(x,t)^2 d\omega^2$$

$$df(x) = \partial_x f(x) dx + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(x) dx^2 = (\underbrace{\partial_x f}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_x^2 f}_{\text{parte quadratica}}) dt + b \partial_x f d\omega$$

generalizzazione
bonale per il
caso multidimensionale.

- Dalla formula di Ito abbiamo anche una relazione con la Fokker-Planck

$$\langle df(x) \rangle = \langle \partial_x f + \frac{1}{2} \partial_x^2 f \rangle dt \quad e \quad \frac{d}{dt} \langle f(x) \rangle = \int dx f(x) \partial_t P(x,t|x_0,t_0)$$

unita con un integrale per partite: diamo l'equazione di Chapman-Kolmogorov corrispondente

$$\partial_t P(x,t|x_0,t_0) = -\partial_x a(x,t) P(x,t|x_0,t_0) + \frac{1}{2} \partial_x^2 b^2(x,t) P(x,t|x_0,t_0)$$

- Esempi:

\rightarrow Wiener process Ito SDE $\rightarrow dx = c x d\omega$

$$Y = \ln x \rightarrow dY = x^{-1} dx - \frac{1}{2} x^{-2} dx^2 = c d\omega - \frac{1}{2} c^2 dt \quad da cui integrando$$

$$\Delta Y = c \Delta \omega - \frac{1}{2} c^2 \Delta t \rightarrow X(t) = X_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} c^2 \Delta t + c \Delta \omega \right\} \rightarrow \langle X \rangle = \langle X_0 \rangle e^{-\frac{1}{2} c^2 \Delta t}; \sigma = c.$$

\rightarrow Oscillatore di Kondo Stoc. SDE $\rightarrow dz = i z (w dt + \sqrt{2\gamma} d\omega_t)$ ricaviamo Ito

$$dz = z(\gamma - i\omega) dt + i z \sqrt{2\gamma} d\omega_t \rightarrow \frac{d}{dt} \langle z \rangle = \langle z \rangle (\gamma - i\omega) \rightarrow \langle z \rangle = \langle z_0 \rangle e^{(\gamma - i\omega)t}$$

re vediamo com'è la combinazione variabile $y = \ln z \rightarrow dy = (\gamma - i\omega - \gamma e^{-\gamma t}) dt + i \sqrt{2\gamma} d\omega_t$

torneremo al Stochastic $\ln(z(t)/z(0)) = i(\omega t + \sqrt{2\gamma} \omega_t)$ e calcolando le correlazioni

$$\langle z(t) z^*(s) \rangle = \langle |z_0|^2 \rangle \langle \exp \{ i(\omega(t-s) + \sqrt{2\gamma}(w_t - w_s)) \} \rangle = \langle |z_0|^2 \rangle \exp \{ (i\omega - \gamma)|t-s| \}.$$

\rightarrow OU Ito SDE $\rightarrow dx = -\kappa x dt + \sqrt{D} d\omega \rightarrow$ FP associata $\partial_t P = \kappa \partial_x x P + \frac{D}{2} \partial_x^2 P$

Sappiamo che $b' = 0 \Rightarrow$ Ito SDE = Stochastic SDE \Rightarrow possiamo integrare con Stochastic!

$\langle x \rangle = \langle x_0 \rangle e^{-\kappa t}$ identificata la parte omogenea, facciamo un combino di variabili che involvi il processo autocorrelativo $x = y e^{-\kappa t} \rightarrow dy = \sqrt{D} e^{\kappa t} d\omega \rightarrow \Delta y = \sqrt{D} \int_0^t e^{\kappa s} d\omega_s$

$\Delta y = x(t) e^{-\kappa t} - x_0 \rightarrow x(t) = x_0 e^{-\kappa t} + \sqrt{D} \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} d\omega_s \rightarrow$ proviamo a ricavare la

$$\text{correlazione} \langle X(t), X(s) \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle e^{-2\kappa(t+s)} + e^{-\kappa(t+s)} \left\langle \int_0^t \sqrt{D} e^{\kappa t'} d\omega_{t'}, \int_0^s \sqrt{D} e^{\kappa t''} d\omega_{t''} \right\rangle =$$

$$= \sigma^2(x_0) e^{-2\kappa(t+s)} + D e^{-\kappa(t+s)} \int_0^{\min(s,t)} \langle e^{\kappa t'}, e^{\kappa t'} \rangle dt' = \sigma^2(x_0) e^{-2\kappa(t+s)} + \frac{D}{2\kappa} e^{-\kappa(t+s)} ($$

$$(1 - e^{2\kappa \min(s,t)}) = \sigma^2(x_0) e^{-2\kappa(t+s)} + \frac{D}{2\kappa} (e^{-\kappa|t-s|} - e^{-\kappa(t+s)}) \rightarrow$$

per x_0 dato notiamo anche la normalità già stabilita, mentre $t+s \rightarrow +\infty$ con $t_0 \rightarrow -\infty$ dà $\frac{D}{2\kappa} e^{-\kappa|t-s|}$.

\rightarrow OU dipendente dal tempo Ito SDE $\rightarrow dx = -\alpha(t)x dt + b(t)d\omega$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = -\langle \alpha(t)x \rangle \quad \langle X(t) \rangle = \langle x_0 \rangle \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(t') dt' \right\}$$

pongo $x = y f(t)$ da cui

$$dx = f(t)dy + f'(t)ydt = -\alpha(t)yf(t)dt + b(t)dw \rightarrow dy = b(t)f^{-1}(t)dw$$

$$f'(t) = -\alpha(t)f(t) \rightarrow f(t) = \exp\left\{-\int_0^t \alpha(s)ds\right\} \rightarrow \Delta Y = \int_0^t b(s)\exp\left\{\int_0^s \alpha(u)du\right\}dw$$

dove $x(t)f^{-1}(t) - x_0 = \Delta Y \rightarrow x(t) = \exp\left\{-\int_0^t \alpha(s)ds\right\}\left(x_0 + \int_0^t b(s)\exp\left\{\int_0^s \alpha(u)du\right\}dw\right)$

\rightarrow Esempio in più dimensioni $d\bar{x} = \bar{a}(x,t)dt + \hat{B}(x,t)d\bar{w}$ con $\bar{a} = \hat{A}\bar{x}$ per cui la matrice \hat{B} può sempre essere scritta in forma tridiagonale superiore se $d\bar{w}$ è un vettore di processi indipendenti. Possiamo a questo punto ricavare anche la FP come $\partial_t P = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{a}P) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_i \partial_j [(\hat{B} \hat{B}^\top)_{ij} P]$ in cui $\langle dx_i \rangle = \langle \alpha_i dt \rangle$ e $\langle x_i, x_j \rangle \sim \sum_k b_{ik} b_{jk}$.

\rightarrow Differenti processi stocastici:

Finora abbiamo considerato SDE del tipo $dx = dw$ in cui la sequenza delle x_i definisce una Martingala, ossia una successione di variabili stocastiche $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $E[|x_i|] < +\infty$ e per cui vale $\langle x_{i+1} | x_i \dots x_0 \rangle = x_i \quad \forall i$.

Possiamo generalizzare il concetto di SDE anche a distribuzioni meno "buone" come quelle di Levy ($dx = dL_{\alpha, \beta}$) assumendo che la generalizzazione della definizione di integrale stocastico è la stessa grazie alla proprietà Martingala di indipendenza degli incrementi. In particolare presso $\{\zeta_i \in L_{\alpha, \beta}(\zeta; \gamma = 2^{-\frac{\alpha}{2}}, \mu = 0)\}$ abbiamo $\int_{t_0}^t R(s) dL_{\alpha, \beta}(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{m-1} R(s_i) dL_{\alpha, \beta}(s_i)$ con $dL_{\alpha, \beta}(s_i) \approx \sqrt{\Delta s} \zeta_i$.

Fokker - Planck

Modernamente, integrazione numerica per quasi tutti i casi interessanti.

Utile però avere strumenti analitici. Alcuni casi particolari sono pure interessanti.

Poniamo da FP scritta come un'equazione di conservazione

$$\partial_t P = - \partial_{x_i} \left\{ [A_i(x, t) - \frac{1}{2} \partial_{x_j} B_{ij}] P \right\} \quad \partial_t P + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

integriamo sul volume questa da

$$\partial_t \int_V P dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = - \int_{\partial V} \vec{dS} \cdot \vec{J}$$

condizioni al contorno
danno info importanti

Distribuzione d'equilibrio

Supponiamo $\vec{J} = 0$ e che \hat{B}^{-1} sia ben definita, allora

$$\vec{J}_i = \left[A_i - \frac{1}{2} \partial_{x_j} B_{ij} \right] P = \left[A_i - \frac{1}{2} (\partial_{x_j} B_{ij}) \right] P - \frac{1}{2} B_{ij} \partial_{x_j} P = 0$$

$$\partial_{x_j} P = 2 B_{ij}^{-1} \left[A_i - \frac{1}{2} \partial_{x_k} B_{ik} \right] P \quad \text{da cui}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \ln P = B_{ij}^{-1} \left[2A_i - \partial_{x_k} B_{ik} \right] \Rightarrow \text{Condizione potenziale}$$

Definita $Z_j[A, B, \underline{x}] = B_{ij}^{-1} \left[2A_i - \partial_{x_k} B_{ik} \right]$ l'equazione su ci dice che $\vec{\nabla}_j \vec{\nabla} P = 0$ e quindi $\vec{\nabla}_j \vec{Z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} Z_j = \frac{\partial}{\partial x_j} Z_i$

Se è effettivamente così allora poniamo scrivere

$$P_{st}(\underline{x}) = \exp \int^x \vec{dS} \cdot \vec{Z}[A, B, \vec{S}]$$

Esempio 1

$$dx = -g dt + k d\omega \rightarrow \partial_t P = \partial_x g P + \frac{1}{2} \partial_x^2 k P$$

$$z = -2g/k \quad \text{e} \quad \phi = 2gx/k \rightarrow P(x) \sim \exp(-2gx/k)$$

Esempio 2

$$\begin{cases} dx = (f(x) + By) dt + dw_2 \\ dy = -\frac{1}{\tau} y dt + Bx dt + dw_1 \end{cases}$$

$$A_x = f + By \\ A_y = -\frac{1}{\tau} y + Bx$$

$$B_{xx} = 1 \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B_{yy} = 1$$

$$\vec{z}_x = 2(f + By) \quad \vec{z}_y = -\frac{2y}{\tau} + 2Bx \quad \text{rot } \vec{z} \Rightarrow \partial_y \vec{z}_x = 2B = \partial_x \vec{z}_y = 2B$$

$$\phi = - \int \vec{z} \cdot d\vec{s} = -2 \int (f + By) dx + \left(-\frac{y}{\tau} + Bx\right) dy = \left(-2 \int f dx\right) - 2Bxy + \frac{y^2}{\tau}$$

$$P_{st} \sim \exp - \phi$$

La condizione per cui $J=0$ ed esiste una Portionaria è tale da soddisfare il **Bilancio dettagliato!**

In finca poniamo di bilancio dettagliato per indicare che in un intervallo di tempo - e quindi con una distribuzione di probabilità Portionaria - la probabilità che una particella vada da $A \rightarrow B$ è uguale a quella inversa.

Poniamo di scrivere questa cosa in termini di time reversal cambiando opportunamente il segno delle quantità in gioco, tipo dato $(n, N, t) \rightarrow (n', N', t+\tau)$ sotto time reversal ottieniamo $(n', -N', t+\tau) \rightarrow (n, -N, t)$. S'intetizziamo quindi il concetto di bilancio dettagliato nell'espressione

$$P_s(A[\{Y\}, t] \rightarrow B[\{Y'\}, t']) = P_s(B[\{\varepsilon Y'\}, t] \rightarrow A[\{\varepsilon Y\}, t'])$$

Per un processo di Markov scriviamo direttamente

$$P(\{Y'\}, t | \{Y\}, 0) P_s(\{Y\}) = P(\{\varepsilon Y\}, t | \{\varepsilon Y'\}, 0) P_s(\{\varepsilon Y'\})$$

monotomando $t \rightarrow 0$ ottieniamo delle S e la relazione diventa semplicemente $P_s(\{Y\}) = P_s(\{\varepsilon Y'\})$ con una conseguenza importante sulle variabili con $\varepsilon = -1$, dato $\langle X \rangle_s = \varepsilon \langle X \rangle_s$.

Sì può dimostrare che le condizioni necessarie e sufficienti affinché il bilancio dettagliato sia realizzato sono

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \omega(x|x') P_s(x') = \omega(\varepsilon x'|\varepsilon x) P_s(\varepsilon x) \\ 2. \varepsilon_i A_i(\varepsilon x) P_s(x) = -A_i(x) P_s(x) + \partial_j B_{ij}(x) P_s(x) \\ 3. \varepsilon_i \varepsilon_j B_{ij}(\varepsilon x) = B_{ij}(x) \end{array} \right. \quad (\text{Von Kármán})$$

Possiamo introdurre il concetto di ponte reversibile o inverso del drift come

$$D_i^{\text{rev}} = \frac{1}{2} (A_i(x) - \varepsilon_i A_i(\varepsilon_i x)) \quad \text{e} \quad D_i^{\text{inv}} = \frac{1}{2} (A_i(x) + \varepsilon_i A_i(\varepsilon_i x))$$

che inserite nelle espressioni precedenti danno

$$D_i^{\text{inv}} - \frac{1}{2} \partial_j B_{ij} = -\frac{1}{2} B_{ij} \partial_j \phi \quad \text{e} \quad \partial_i D_i^{\text{rev}} = D_i^{\text{rev}} \partial_i \phi$$

Esempio

$$m dN = -(V'(x) + \gamma N) dt + \sqrt{2 \gamma k_b T} dw \quad \gamma = 6 \pi \eta R$$

$dX = N dt$ da cui la FP risulta essere

$$\partial_t P = \frac{1}{m} \partial_N (V'(x) + \gamma N) P - \partial_x V P + \partial_N^2 \frac{\gamma k_b T}{m^2} P$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ N \end{pmatrix} \quad \varepsilon \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ -N \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & N \\ -\frac{1}{m} (V'(x) + \gamma N) & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

Le condizioni 1 e 3 sono verificate. Verifichiamo la 2

$$\left(\frac{1}{m} (V'(x) - \gamma N) \right) P = \left(\frac{1}{m} (V'(x) + \gamma N) \right) P + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_N B_{22} \end{pmatrix} P$$

$$\Rightarrow -\frac{2\gamma N}{m} P = 2 \frac{\gamma k_b T}{m^2} \partial_N P \Rightarrow P_s(x, N) = f(x) \exp \left\{ -\beta \frac{1}{2} m N^2 \right\}$$

Ora questa è la forma che deve avere la $P_s(x, N)$ per soddisfare il bilancio dettagliato. Inserendola nella FP troviamo

$$f(x) = \alpha e^{-\beta V(x)} \rightarrow P_s(x, N) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\beta H(x, N) \right\} !$$

Come conseguenza del principio del bilancio dettagliato abbiamo le relazioni di Onsager e il teorema fluttuazione - dissipazione.

Per un sistema lineare si utilizza un processo di OU.

Di nuovo sono soddisfatte la 1 e la 3, mentre la 2 ci dà

$$\text{Per } A_{ij} = \alpha_{ij} x_j \text{ e } B_{ij} = b_{ij} \rightarrow [\varepsilon_i \varepsilon_j \alpha_{ij} x_j + \alpha_{ij} x_j = b_{ij} \delta_{ij} \ln P]$$

$$\text{La soluzione è del tipo } \ln P = \alpha - \frac{1}{2} x^T \Delta^{-1} x$$

Notiamo che Δ^{-1} è la matrice di corrispondenza ed è simmetrica

$$\text{Rimettendolo nella FP abbiamo } A\Delta + \Delta A^T = -B \text{ e ricavando}$$

tutto in termini matriciali: con $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$, da cui $\varepsilon^2 = I_d$

$$2 \rightarrow \varepsilon A \varepsilon + A = B \Delta^{-1} \quad 3 \rightarrow \varepsilon B \varepsilon = B \quad \varepsilon \Delta = \Delta \varepsilon \text{ e infine}$$

dopo diverse manipolazioni: $\varepsilon(A\Delta) = (A\Delta)^T \varepsilon$ relazioni Onsager!

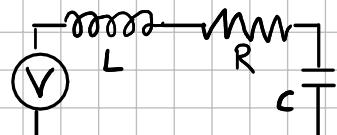
Esempio

Dato un circuito RLC abbiamo che la corrente può essere descritta da

$$\begin{cases} dI/dt = \frac{1}{L} \Delta V_L = \frac{1}{L} (-\alpha/C - RI - V_\varepsilon) \\ dQ/dt = (I - \gamma Q) + Q_\varepsilon \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} R_L & 1/LC \\ -1 & \gamma \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare Δ usiamo la meccanica statistica



V_ε e Q_ε
fluttuano

$$\text{Boltzmann} \rightarrow P(I, Q) = \alpha e^{-\beta H(I, Q)} \quad H(I, Q) = \frac{L}{2} I^2 + \frac{1}{2C} Q^2$$

$$\text{da cui } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \beta L & 0 \\ 0 & \beta/C \end{pmatrix} \text{ e troviamo } B \text{ da } A\Delta + \Delta A^T = -B$$

Nota: Verificare relazioni di Onsager \Rightarrow bilancio dettagliato!

$$B = 2k_b T \begin{pmatrix} R/L^2 & 0 \\ 0 & \gamma C \end{pmatrix} \text{ - coeff. di Wiener nelle SDE sono } \sqrt{b_{ii}}$$

ossia $Q_\varepsilon = \sqrt{2k_b T \gamma C} \xi_a$ e $V_\varepsilon = \sqrt{2k_b T R} \xi_v / L$. L'ampiezza delle fluttuazioni è determinata dai coefficienti dissipativi γ e R ,

detti dissipativi perché $\frac{d}{dt} \langle E \rangle = -R \langle I^2 \rangle - \gamma/C \langle Q^2 \rangle$.

Prima di concludere l'esempio osserviamo che

$$\langle V_\varepsilon(t) V_\varepsilon(0) \rangle = 2k_b T R \langle \{v(t)\} v(0) \rangle = 2k_b T R \delta(t)$$

e analogamente per \dot{Q}_ε . Tornando invece alle relazioni di Onsager, proviamo a darne un'interpretazione. Definiamo

$\bar{F}(x) = -\bar{\nabla} \phi = \bar{\nabla} \ln P = \Delta^{-1} \bar{x}$ e $L = A \Delta$, allora abbiamo

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{x} \rangle = A \langle \bar{x} \rangle = A \Delta \langle \bar{F}(x) \rangle = L \bar{F}(\langle x \rangle)$$

il flusso \bar{x} è una variabile o una forza fenomenologica. Notiamo che

$$\bar{F}(\langle \bar{x} \rangle) = \bar{\nabla} \langle \ln P(\bar{x}) \rangle = -\frac{1}{k_b} \bar{\nabla} S(\bar{x})$$

dai cui ad esempio se

$$\text{Onsager e: da } \varepsilon(A\Delta) = (A\Delta)^T \varepsilon \Rightarrow \varepsilon L \varepsilon = L^T$$

$\varepsilon := \varepsilon_3 \quad \forall_{ij} \Rightarrow L = L^T \Rightarrow A \text{ simile a simmetrica e può essere diagonalizzata.}$

Notiamo che la validità del principio del bilanciolettato ci assicura che i processi sono reversibili e che le traiettorie di fuga non si intersecano. Esso è anche legato al fatto che l'entropia aumenta.

• Condizioni al contorno

La condizione di potenziale appena discussa è una conseguenza delle varie condizioni al contorno che possiamo adottare per la soluzione della FP. In particolare, se il contenitore è confinato da delle barriere assorbenti o orientate che allora $\forall x \in \partial V$ abbiamo $P(x) = 0 \Rightarrow \bar{J}(x) = 0$. Se invece supponiamo di avere delle barriere riflettenti allora la corrente di probabilità è ortogonale al versore di ∂V , ossia $\hat{m} \cdot \hat{J} = 0$.

Con delle condizioni al contorno periodico richiediamo continuità di probabilità e corrente, mentre se A e B sono discontatti sul bordo basta la continuità di P e della componente uscente di J ($\hat{m} \cdot \hat{J}_{in} = \hat{m} \cdot \hat{J}_{out}$). Esistono poi condizioni al contorno legate all'omogeneità di A e B su ∂V . Se $B(\partial V) = 0$ si parla di bordo d'entrata/muta e se anche $A(\partial V) = 0$ allora abbiamo condizioni naturali, ossia giurate sul bordo e si ferma. Ad esempio prendiamo $dx = -xdt + xdw$ e vediamo subito che $\lim_{t \rightarrow 0} x = 0$ e si ferma con fluttuazioni sempre più piccole tanto più è vicino a zero, impedendo di andare dall'altro lato. La soluzione è infatti $x(t) = x_0 \exp(-\frac{3}{2}\Delta t + \Delta w)$.

• Metodi degli autovettori e backward FP

Introduciamo la backward Fokker-Planck e la sua soluzione $Q(x, t)$ a partire dalla soluzione stazionaria come $P(x, t) = P_s(x)Q(x, t)$ da cui tramite $\partial_t P(x, t)$ ottengo $\partial_t Q(x, t) = A(x) \partial_x Q(x, t) + \frac{1}{2} B(x) \partial_x^2 Q(x, t)$. Ricordiamo le FP come operatori \mathcal{L}_F e \mathcal{L}_B e supponiamo Q e P della forma $Q_\lambda e^{-\lambda t}$ e $P_\lambda e^{-\lambda t}$. Ottieniamo le relazioni $\partial_t Q(x, t) = \mathcal{L}_B Q(x, t) = -\lambda Q_\lambda(x) e^{-\lambda t}$ e $\partial_t P(x, t) = \mathcal{L}_F P(x, t) = -\lambda P_\lambda(x) e^{-\lambda t}$ $\int dx Q_\lambda'(x) \mathcal{L}_F P_\lambda(x) = -\lambda \int dx Q_\lambda'(x) P_\lambda(x)$ ma anche $\int dx \mathcal{L}_B Q_\lambda'(x) P_\lambda(x) = -\lambda' \int dx Q_\lambda'(x) P_\lambda(x)$ da cui, collegando le due espressioni tramite integrazione per parti abbiamo $(\lambda' - \lambda) \int dx Q_\lambda'(x) P_\lambda(x) = Q_\lambda \left[-AP_\lambda + \frac{1}{2} \partial_x BP_\lambda \right] \Big|_{\partial V} - \frac{1}{2} BP_\lambda \partial_x Q_\lambda \Big|_{\partial V} \stackrel{*}{=} 0$ (* ne bordi assorb.). Abbiamo quindi ottenuto un set di autofunzioni ortogonali: $\int dx Q_\lambda'(x) P_\lambda(x) = \delta_{\lambda\lambda'}$ che con $\lambda = \lambda' = 0$ dà $P_0(x) = P_s(x)$ e $Q_0(x) = 1$. E' quindi possibile scrivere $P(x, t) = \sum_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda(x) e^{-\lambda t}$, quindi: $\int dx Q_\lambda(x) P(x, t) \Big|_{t=0} = \sum_\lambda \alpha_\lambda \int dx Q_\lambda(x) P_\lambda(x) = \alpha_\lambda'$ e $P(x, 0) = \delta(x - x_0) \Rightarrow Q_\lambda(x_0) = \alpha_\lambda$ da cui $P(x, t|x_0, t_0) = \sum_\lambda Q_\lambda(x_0) P_\lambda(x) e^{-\lambda(t-t_0)}$ e $\sum_\lambda Q_\lambda(x_0) P_\lambda(x) = \delta(x - x_0)$.

• First passage time

Supponiamo di avere un bordo assorbente e di essere interessati al tempo che impiega la nostra variabile stocastica a raggiungerlo. La probabilità di essere ancora dentro è $\int_V dV P(\bar{x}, t | \bar{x}_0, 0) \equiv G(\bar{x}, t)$ e se T tempo necessario per uscire, allora $G(x_0, t) = P(T_{x_0} \geq t)$.

Ma essendo $P(\bar{x}, t | \bar{x}_0, 0) = P(\bar{x}, 0 | \bar{x}_0, -t)$ allora $G(\bar{x}, t)$ rispetta la backward FP.

$$\partial_t P(T_x \geq t) = A(x) \partial_x P(T_x \geq t) + \frac{1}{2} B(x) \partial_x^2 P(T_x \geq t) \quad \begin{cases} G(\bar{x}, 0) = 0 \quad \forall x \notin V \mid G(\bar{x}, 0) = 1 \quad \forall x \in V \\ \text{da } P(\bar{x}, 0 | \bar{x}_0, 0) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \\ \text{e } G(\partial V, t) = 0 \quad \text{da bordo assorbente} \end{cases}$$

$$P(T_x \geq t) - P(T_x \geq t - dt) = \int_t^{+\infty} P(T) dT - \int_{t-dt}^{+\infty} P(T) dT = - P(T_x \in [t, t-dt]) = \partial_t G(\bar{x}, t) dt$$

$$\langle f(T) \rangle = \int_0^{+\infty} f(T) P(T) dT \quad \text{e MFPT} \equiv T(x) = \langle T_x \rangle = - \int_0^{+\infty} t \partial_t G(\bar{x}, t) dt = \int_0^{+\infty} G(\bar{x}, t) dt \quad \begin{matrix} \text{(h.p. implicita)} \\ G(\bar{x}, +\infty) = 0 \end{matrix}$$

Notiamo $T''(x) = m \int_0^{+\infty} t^{m-1} G(\bar{x}, t) dt$ e che integrando in dt la BFP abbiamo un'equazione per

$$\frac{1}{2} B(x) T''(x) + A(x) T'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_t G(\bar{x}, t) dt = -G(\bar{x}, 0) = -1 \quad \text{e } T(\partial V) = 0 \quad \text{da } G(\partial V, t) = 0.$$

L'equazione si integra banalmente e per un bordo riflettente da un lato abbiamo

$$(a \text{ riflette; } b \text{ assorbe; } b > a) \rightarrow T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\varphi(y)} \int_a^y \frac{\varphi(z)}{B(z)} dz \quad \varphi(z) = \exp \left\{ \int_a^z 2A(x')/B(x') dx' \right\}$$

Nota che le condizioni al bordo entro in gioco solo per risolvere $\hat{T} = 0$.

Esempio

$$\partial_t P = \partial_x U'(x) P + \frac{1}{2} \partial_x^2 D P \rightarrow P_s(x) = \exp \left\{ -2U(x)/D \right\} \quad \text{con } \overset{U \uparrow}{\underset{a \leftarrow b \rightarrow x}{\text{f}} \underset{b}{\text{t}}} \quad \text{e } \overset{P_s \uparrow}{\underset{a \leftarrow b \rightarrow x}{\text{f}} \underset{b}{\text{t}}}$$

$$\partial_t Q = -U'(x) \partial_x Q + \frac{D}{2} \partial_x^2 Q \quad T(x) = \int_0^{+\infty} Q(x, t) dt \quad a \text{ riflettente} \Rightarrow \partial_x Q|_a = 0 \Rightarrow T'(a) = 0$$

$$b \text{ assorbente} \Rightarrow Q(b) = 0 \Rightarrow T(b) = 0 \quad \text{e l'eq diventa } T''(x) - \frac{2U'(x)}{D} T'(x) + \frac{2}{D} = 0$$

$$T'(a) = 0 \Rightarrow T'(x) = -\frac{2}{D} e^{2U(x)/D} \int_a^x e^{-2U(y)/D} dy \Rightarrow T(x) = \frac{2}{D} \int_x^b e^{2U(z)/D} \left(\int_a^z e^{-2U(y)/D} dy \right) dz$$

Unendo il fatto che gli integrali sono molto piccoli, possiamo supporre le U intorno ai picchi al

2° ordine e risolvere gli integrali, ottenendo $T(b) \sim 2 \exp \{2(U(b) - U(a))/D\}$. Per $D = 2k_b T \rightarrow$ Arrhenius.

Esempio

$$\text{Immaginiamo di poter scrivere } T(x) = \int_0^{+\infty} \sum_m a_m Q_{\lambda_m}(x) e^{-\lambda_m t} dt = \sum_m \frac{a_m}{\lambda_m} Q_{\lambda_m}(x) \quad \text{e ponendo}$$

$$\text{nella BFP abbiamo } -1 = [A: \partial_t + \frac{1}{2} B_{ij} \partial_i \partial_j] \sum_m \frac{a_m}{\lambda_m} Q_{\lambda_m}(x) = -\sum_m a_m Q_{\lambda_m}(x) \quad \text{da cui troviamo}$$

$$\sum_m a_m Q_{\lambda_m}(x) = 1 = \int dy P(y) = \int dy \sum_{\lambda} Q_{\lambda}(x) P_{\lambda}(y) \Rightarrow a_m = \int dy P_{\lambda}(y) \Rightarrow T(x) = \sum_{\lambda} \lambda^{-1} \int dy P_{\lambda}(y) Q_{\lambda}(x)$$

Infine, osserviamo che se λ_1 passa rispetto agli altri $\Rightarrow L_B Q_{\lambda_1}(x) \approx 0 \Rightarrow Q_{\lambda_1}(x) \approx a \cdot Q_0$

ossia linea costante; $\langle Q_{\lambda_1}, P_{\lambda_1} \rangle = 1 \Rightarrow a \cdot Q_0 \int dy P_{\lambda_1}(y) = 1 \quad \text{e } T(x) \sim \frac{1}{\lambda_1}$.

• Relazione con MQ e Poth-integral

Le equazioni d'FP hanno la stessa struttura dell'equazione d' Schrödinger solente che cambia \hat{H} con \hat{H}_B . Possiamo costruire uno spazio vettoriale sul quale studiare l'applicazione dell'operatore \hat{H} . Vediamo $\hat{H}P_m = \lambda_m P_m \rightarrow \hat{H}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \Rightarrow P_m(x) = \langle x | m \rangle$ con $\hat{H}|0\rangle = 0$, $\langle f, g \rangle = \int dx f(x)g(x)$, $\hat{L}_B \equiv \hat{L}_F^+$ da $\langle L_B f, g \rangle = \langle f, L_F g \rangle$ e quindi $\hat{H}_B Q_m = \lambda_m Q_m \rightarrow \langle \lambda | \hat{H} = \lambda \langle \lambda | \Rightarrow Q_m(x) = \langle m | x \rangle$ con $\langle 0 | \hat{H} = 0$. Ricordiamo infatti $Q_0 = 1$ e $P_0 = P_S$ e abbiamo $\langle 0 | 0 \rangle = 1$, $\langle m | m \rangle = \delta_{mm}$ e $\langle f, g \rangle = \langle f | I_S | g \rangle$.

Definiamo il propagatore temporale $\hat{P}(t, t_0) \equiv e^{-(t-t_0)\hat{H}}$ e vediamo che si può scrivere $P(x, t | x_0, t_0) \equiv \langle x | P(t, t_0) | x_0 \rangle = \sum_\lambda \langle x | e^{-(t-t_0)\hat{H}} | \lambda \rangle \langle \lambda | x_0 \rangle = \sum_\lambda \langle x | \lambda \rangle e^{-(t-t_0)\lambda} \langle \lambda | x_0 \rangle = \sum_\lambda Q_\lambda(x_0) P_\lambda(x) e^{-(t-t_0)\lambda}$! come se $P(x, t | x_0, t_0) = \langle x, t | x_0, t_0 \rangle$ con $|x, t\rangle = e^{t\hat{H}}|x\rangle$.

Si può dimostrare che \hat{H} è una forma semidefinita positiva e se non c'è un ground-state $|0\rangle$, allora tutti gli autostati sono delle funzioni con $\text{Re}\{\lambda\} > 0$ e quindi che vanno come $e^{-\lambda t}$, ovvero hanno un tempo di rilassamento e quindi il sistema tenderà al fondo o a uscire dal volume considerato.

Dalla struttura appena costruita possiamo immaginare di prendere N time-slice e di innanzire dei proiettori I_x . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} P(x, t | x_0, t_0) &\equiv \langle x | P(t, t_0) | x_0 \rangle = \int \prod_{m=1}^{N-1} dx_m \langle x | P(t, t_{N-1}) | x_{N-1} \rangle \dots \langle x_1 | P(t_1, t_0) | x_0 \rangle = \\ &= \int_{x(t_0)}^{x(t)} Dx \prod_{i=1}^N \langle x_i | P(t_i, t_{i-1}) | x_{i-1} \rangle = \int_{x(t_0)}^{x(t)} Dx \prod_{i=1}^N \langle x_i | \exp \{-\Delta t \hat{H}\} | x_{i-1} \rangle = \\ &= \int Dx [x, p] \prod_{i=1}^N \langle x_i | p_i \rangle \langle p_i | \exp \{-\Delta t \hat{H}\} | x_{i-1} \rangle = \int Dx [x, p] \prod_{i=1}^N \exp \{ip(x_i - x_{i-1}) - \Delta t H(p_i, x_{i-1})\} \end{aligned}$$

Supponiamo $\partial_t P = -\partial_x [A(x) - \frac{1}{2} \partial_x B(x)] P$ da una SDE $dx = A(x) dt + \sqrt{B(x)} dw$

$$\text{con } H = \partial_x A(x) - \frac{1}{2} \partial_x^2 B(x) \rightarrow = \int Dx [x, p] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} p_i^2 B(x_{i-1}) \Delta t - ip_i (\Delta x_i - \Delta t A(x_{i-1})) \right] \right\} =$$

Supponiamo per semplicità $B(x) \equiv \sigma^2$. Ridisegniamo $Dx = \prod_{m=1}^{N-1} dx_m \rightarrow \prod_{m=1}^{N-1} (dx_m / \sqrt{2\pi\Delta t}\sigma)$

$$P(x, t | x_0, t_0) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} Dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}\sigma} \exp \left\{ - \frac{S[x]}{\sigma^2} \right\} \text{ con } S[x] = \Delta t \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(x_i - x_{i-1})}{\Delta t} - A(x_{i-1}) \right)^2 \right]$$

$$S[x] = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \right)^2 + A(x_i)^2 \right] - \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_i A(x_i) \text{ e se } A(x) = -\nabla V(x) \text{ l'ultimo punto diventa } \Delta V = V(x_N) - V(x_0), \text{ da cui } P(x, t | x_0, t_0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{S[x]}{\sigma^2}} \int Dx \exp \left\{ - \frac{x^2 S^2}{\sigma^2 \Delta t^2} \Big|_{x=0} \right\}.$$

Notiamo che il prefattore è a $e^{-\Delta V/\sigma^2}$ e definisce quindi una sorta di energia di stato fondamentale, mentre l'integrale successivo non dipende più dai dati delle fluttuazioni, dato che $Dx = Dx / \sqrt{\Delta t}$ e che quindi basta una sorta di transizione.

Questa ottimizzazione è importante perché ci permette di valutare l'effetto della C sul MFPT. Ad esempio, nel problema di eliminazione con U cubico, abbiamo che ovviamente c'è $\frac{1}{2}$ la probabilità di uscire o di restare, da cui $(MFPT)^{-1} \propto \frac{1}{2} P(b, t_f | a, t_0)$ ossia $MFPT \propto 2 e^{\Delta U / \sigma^2}$, ottenendo Arrhenius.

Nel limite del continuo $S[x] = \int dt L(x, \dot{x})$ con $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} (\dot{x} - A(x))^2$

Prendendo la trasformata di Legendre di $L(x, \dot{x})$ ottieniamo $H(x, p)$ e osserviamo che p è rappresentato proprio le fluttuazioni! Più quindi essere usato per trovare il cammino ottimale per andare da x_0 a x in t fisso. Vediamo infatti che

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - A(x) \quad H(x, p) = \frac{1}{2} p^2 + p A(x) \rightarrow \dot{x} = \partial_p H = p + A(x), \quad \dot{p} = -\partial_x H = -p A'(x)$$

da risolvere con le condizioni al contorno desiderate. Notiamo $p_i = \sigma w_i / \Delta t$.

Infine, vediamo le implicazioni di questo formalismo sulle funzioni di correlazione:

$$\begin{aligned} \langle X(t) | X_0, t_0 \rangle_w &= \int dx \times P(x, t | X_0, t_0) = \int dx \langle 0 | x \rangle \times \langle x | P(t, t_0) | X_0 \rangle = \langle 0 | \hat{x} e^{-t \hat{H}} e^{t_0 \hat{H}} | X_0 \rangle = \\ &= \langle 0 | e^{t \hat{H}} \hat{x} e^{-t \hat{H}} e^{t_0 \hat{H}} | X_0 \rangle = \langle 0 | \hat{x}(t) e^{t_0 \hat{H}} | X_0 \rangle \xrightarrow{t_0 \rightarrow -\infty} \langle 0 | \hat{x}(t) | 0 \rangle \text{ ossia una media sul } U-S. \end{aligned}$$

Da cui viene spontanea generalizzazione come $\langle T_{t_m} X(t_m) \rangle = \frac{\delta^{(m)} \langle x_{f,t_f} | X_0, t_0 \rangle_j}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_m)}$ definendo quindi $\langle x_{f,t_f} | X_0, t_0 \rangle_j \equiv \int_{x_0}^{x_f} dx e^{-\frac{S[x]}{\sigma^2} + j x}$ dove integrando sugli stati iniziali e finali. Osserviamo $Z[J] \equiv \langle 0 | 0 \rangle_j = \int dx_f dx_0 \langle 0 | x_f, t_f \rangle \langle x_f, t_f | X_0, t_0 \rangle_j \langle X_0, t_0 | 0 \rangle = \int dx_f dx_0 \langle x_f, t_f | X_0, t_0 \rangle_j P(x_0)$.

Ancora, per ogni osservabile $O(x(t))$ trovo il valore medio e altro banalmente come $\langle O(x(t)) \rangle_w = \langle 0 | \hat{O}(x(t)) | X_0, t_0 \rangle ; \frac{d}{dt} \hat{O}(x(t)) = [\hat{H}, \hat{O}(x(t))] ; \langle \dot{O} \rangle_w = [\bar{A}(x) \partial_x + \frac{1}{2} \bar{B}(x) \partial_x^2] \langle O \rangle_w$

Azione dinamica? per \mathcal{L}

Una maniera alternativa di procedere verso il path-integral sarebbe quella di scrivere il propagatore infinitesimo come $P(x, \varepsilon | X_0, 0) = \langle \delta(x - X(\varepsilon)) \rangle_w$ con $X(\varepsilon)$ preso dall'integrazione della SDE. $P(x, \varepsilon | X_0, 0) = \int \delta(x - x_0 + A(x_0) \Delta t + \sqrt{D} \Delta w) e^{-\frac{\Delta w^2}{2 \Delta t}} d\Delta w$.

e perturbazioni/adiabatica

• Monter equazioni

Riprendiamo l'eq. di CK e poniamo $A=B=0$. Il risultato è la M. eq.

$$\partial_t P(\bar{z}, t' | \bar{x}, t) = \int d\gamma [w(\bar{z}|\bar{\gamma}) P(\bar{\gamma}, t' | \bar{x}, t) - w(\bar{\gamma}|\bar{z}) P(\bar{z}, t' | \bar{x}, t)]$$

Prendiamo ad esempio la probabilità di avere x indirizzi al tempo t e che questi possano aumentare (mancare) o diminuire (mancare). Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \partial_t P(m, t | m_0, t_0) &= w(m|m-1) P(m-1, t | m_0, t_0) + w(m|m+1) P(m+1, t | m_0, t_0) + \\ &\quad - (\omega(m+1|m) + \omega(m-1|m)) P(m, t | m_0, t_0) \end{aligned}$$

Chiamiamo $\lambda_+(m-1) \equiv \omega(m|m-1)$ e $\lambda_-(m+1) \equiv \omega(m|m+1)$ e vediamo che succede con $\partial_t P(m, t | m_0, t_0) = 0$.

$$0 = \lambda_+(m-1) P_s(m-1) + \lambda_-(m+1) P_s(m+1) - \lambda_+(m) P_s(m) - \lambda_-(m) P_s(m) = J(m+1) - J(m)$$

$$\text{con } J(m) = \lambda_-(m) P_s(m) - \lambda_+(m-1) P_s(m-1) = m \rightarrow m-1 - m \leftarrow m-1$$

Imponendo come condizione al bordo che $\lambda_-(0) = 0$ e $P_s(x) = 0 \forall x < 0$ abbiamo $J(0) = 0$ e $0 = \sum_{m=0}^N J(m+1) - J(m) = J(N) \forall N \Leftrightarrow$ bilancio dettagliato!

Infatti per $J(m) = 0 \approx$ ha $\lambda_-(m) P_s(m) = \lambda_+(m-1) P_s(m-1)$

Un altro esempio è quelli delle concentrazioni chimiche a contatto con un reagente fisso. Vogliamo $P(x=[X])$ in $X \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} A$ con $[A] = a$.

Le esequazioni sono completamente analoghe al caso precedente con $x = m / \text{Volume}$

$\lambda_+(m) = k_1 a$ e $\lambda_-(m) = k_2 m$. Introduciamo la funzione generatrice e poniamo

$$\begin{aligned} \partial_t G(s, t) &= k_1 a s G(s, t) - k_2 a G(s, t) + k_2 \sum_m s^m (m+1) P(m+1, t) - m P(m, t) = \\ &= k_1 a (s-1) G(s, t) - k_2 (s-1) \partial_s G(s, t) \end{aligned}$$

La parte razionale della $G(s, t)$ risulta $\exp\{k_2 a s / k_1\}$, da cui po-

niamo $G(s, t) = \phi(s, t) \exp\{k_2 a s / k_1\}$ ottenendo per ϕ l'equazione

$$\partial_t \phi(s, t) = -k_2 (s-1) \partial_s \phi(s, t) \xrightarrow{s=\frac{1+e^z}{e^z}} \partial_z \phi(z, t) = -k_2 \partial_z \phi(z, t) \text{ da cui} \\ \phi(z, t) = f(z - k_2 t) \text{ e } \phi(s, t) = f(\ln(s-1) - k_2 t) = g((s-1)e^{-k_2 t}) \text{ da cui}$$

$$G(s, t) = g((s-1)e^{-k_2 t}) \exp\{k_2 a(s-1)/k_1\} / g(0) \quad \text{t.c. } G(0, t) = 1$$

Per trovare la forma di g poniamo che $P(m, 0 | m_0, 0) = \delta_{mm}$ e quindi

$$G(s, o) = \sum_m s^m S_{m, m_0} = S^{m_0} = g((s-1))/g(o) \exp\{k_1 a(s-1)/k_2\}$$

$$g(x) = g(o) \exp\{-k_1 a x / k_2\} (x+1) \text{ e sostituendo abbiamo}$$

$$G(s, t) = \exp\{k_1 a (s-1)[1 - e^{-k_2 t}] / k_2\} ((s-1)e^{-k_2 t} + 1)^{m_0}$$

il risultato è un po' incerto, ma otteniamo comunque informazioni

$$\langle m \rangle = \partial_s G(s, t)|_{s=1} = \frac{k_1 a}{k_2} (1 - e^{-k_2 t}) + m_0 e^{-k_2 t} \text{ e } \langle m^2 \rangle = \langle m \rangle^2 - m_0 e^{-2k_2 t}$$

$$\langle \dot{m} \rangle = k_1 a - k_2 \langle m \rangle \text{ ponente di } dm = (k_1 a - k_2 m) dt + \sqrt{\langle m^2 \rangle} dw$$

Infine, introduciamo la rappresentazione di Poisson come una $P(m, o)$ scritta nella forma $P(m, o) = e^{-\lambda} \lambda^m / m!$. La funzione costitutiva è quindi:

$$G(s, o) = \sum_m s^m P(m, o) = \sum_m (s \lambda)^m e^{-\lambda} / m! = \exp\{\lambda(s-1)\}.$$

$$G(s, t) = \exp\left\{\left[\frac{k_1 a}{k_2} [1 - e^{-k_2 t}] (s-1) + m_0 \ln((s-1)e^{-k_2 t} + 1)\right]\right\} \text{ e per}$$

$$s-1 \text{ piccolo abbiamo } G(s, t) = \exp\left\{\left[\frac{k_1 a}{k_2} [1 - e^{-k_2 t}] + m_0 e^{-k_2 t}\right](s-1)\right\} \text{ e}$$

$$P(m, t) = \frac{1}{m!} \lambda(t)^m e^{-\lambda(t)} \text{ con } \lambda(t) = \frac{k_1 a}{k_2} [1 - e^{-k_2 t}] + m_0 e^{-k_2 t} \text{ e } \lambda(o) = m_0.$$

Da Master equation a Fokker-Planck

Sotto opportune ipotesi esiste una corrispondenza tra M. e FP. Vediamo che

$$\int dy [w(z|y) P(y, t'|x, t) - w(y|z) P(z, t'|x, t)] \rightarrow -\partial_z Q_1(z) P(z, t'|x, t) + \frac{1}{2} \partial_z^2 Q_2(z) P(z, t'|x, t)$$

$$\text{con } w(z|y) = f((z - y - A(y)\delta)/\sqrt{s}, y) \delta^{-D/2} \text{ e } f \text{ molto piccola definiamo}$$

$$Q = \int dz f(z, y); Q_0 = \int dz w(z|y) = Q/\delta^D; Q_1 = \int dz (z - y) w(z|y) \equiv A(y) Q;$$

$$Q_2 = \int dz (z - y)^2 w(z|y) = \int dz z^2 f(z, y)$$

Applichiamo al random walk abbiamo con $z = ml$, $w(z|x) = J(\delta_{z,x+1} + \delta_{z,x-1})$

$$Q_0 = 2J; Q_1 = 0; Q_2 = 2l^2 J \text{ e assumendo } l^2 \rightarrow 0 \text{ come } \delta \text{ e } J \rightarrow +\infty \text{ come } 1/s$$

abbiamo che nel limite del continuo $D \equiv l^2 J$ è definito e $\partial_t P = D \partial_x^2 P$.

Applichiamo a Poisson invece $Jd \text{ finito} \Rightarrow l^2 J \rightarrow 0$ e \nexists FP.

Equazione Kramers-Moyal

$$\text{Con } y = z - \kappa \quad P(y, t'|x, t) = \sum_{m=0} \frac{1}{m!} (-\kappa)^m \partial_z^m P(z, t'|x, t) \text{ da cui ottieniamo}$$

$$\int dy w(z|y) P(y, t'|x, t) = - \int d\kappa w(z|z - \kappa) \sum_m \frac{1}{m!} (-\kappa)^m \partial_z^m P(z, t'|x, t) =$$

$$= \sum_m \frac{1}{m!} (-1)^m \partial_z^m \left[\int d\kappa \omega(z|z-\kappa) \kappa^m \right] P(z, t'|x, t)$$

Il termine ordine $m=0$ si semplifica con il II° nella ME e il risultato è

$$\partial_t P(z, t'|x, t) = \sum_{m=1} \frac{1}{m!} (-1)^m \partial_z^m A_m(z) P(z, t'|x, t) \rightarrow \text{FP per } m=1, 2$$

Nota che qui stiamo assumendo che $S = z - y$ (solto) $\rightarrow 0$ e quindi è sufficiente troncare al II° ordine.

Derivazione di Van Kampen

Se siamo interessati allo studio delle variazioni intorno definiamo

$$x = \frac{\alpha(b)}{\sqrt{S}} \text{ con } \alpha(t) = S \varphi(t) + \sqrt{S} z \text{ e sostituiamo in } \partial_t P(\alpha, t).$$

$w(a|b) = w(a, \Delta a) = S f(x, \Delta x)$ che inserito in KM e sviluppando in serie di $1/\sqrt{S}$ ottieniamo

$$\partial_t P(z, t'|x, t) = \sum_{m=2} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{\sqrt{S}} \right)^{m-2} \sum_{n=1}^m \frac{m!}{n!(m-n)!} A_n^{(m-n)} [\varphi(t)] (-\partial_z^n) P(z, t'|x, t)$$

Nota che qui stiamo assumendo che S (volume) $\rightarrow \infty$ e quindi è sufficiente troncare al II° ordine. Inoltre, in questo caso l'equazione è lineare nelle derivate di P !