Relazione 05:
Ricerca degli zeri

Cafasso Dario
De Maria Giuseppe
De Rosa Mino
Pellecchia Pietro

June 18, 2018

Assegnata una certa funzione y=f(x) definita in un intervallo [a,b], è possibile utilizzare metodi numerici per la ricerca dei punti di annullamento della funzione. I metodi utilizzati per la ricerca sono:

- Metodo di bisezione
  Utilizzando il metodo di bracketing si trova l'intervallo in cui ricercare lo zero, i cui estremi a e b rispettino la condizione $f(a) \cdot f(b) \prec 0$. Esso, partendo da un punto e da un passo scelti, considera l'intervallo centrato in quel punto e con semiampiezza il passo, per poi ampliarlo iterativamente finché i nuovi estremi a e b non rispettano la condizione suddetta. Quindi, trovato l'intervallo, il metodo di bisezione consiste nel dividerlo iterativamente in due parti e continuare la ricerca nell'intervallo i cui nuovi estremi sono quelli che continuano a rispettare la condizione sopra citata. Questa divisione continua finchè non si raggiunge l'errore richiesto sulle y ($|f(x_n)| \leq \epsilon_y$) mentre gli estremi dell'intervallo sono ad una distanza tale da poter essere considerati numericamente distinti ($|b_n - a_n| \leq \epsilon_x$).

- Metodo di Newton
  Dato un punto iniziale, questo metodo sfrutta il valore della derivata per avvicinarsi, tramite la tangente alla funzione in quel punto, allo zero della funzione; l'iterazione viene eseguita tramite la formula

  $$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \tag{1}$$

  L'iterazione continua finchè non si raggiunge l'errore richiesto sulle y mentre gli estremi dell'intervallo sono ad una distanza tale da poter essere considerati numericamente distinti.

- Metodo della secante
  Questo metodo deriva direttamente dal metodo di Newton tramite la sos-

tituzione della derivata reale con il valore del rapporto incrementale calcolato in due punti dati (x_{k-1}e x_{k-2}). L'iterazione viene fatta utilizzando la (1), dove

$$f'(x_{k-1}) \cong \frac{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})}{x_{k-2} - x_{k-1}}$$

L'iterazione continua finchè non si raggiunge l'errore richiesto sulle y mentre gli estremi dell'intervallo sono ad una distanza tale da poter essere considerati numericamente distinti.

Passiamo ora alla ricerca degli zeri di varie funzioni f(x).

Funzione f(x) = $cos(x) - x$

Vogliamo ricercare lo zero della funzione $cosx - x$, in 8B, usando i tre metodi sopra descritti, richiedendo un errore di 10^{-12} sull'asse delle ascisse e diverse precisioni sull'asse delle ordinate. Prima di utilizzare il metodo di bisezione, abbiamo utilizzato il metodo di bracketing passando P=2 come punto iniziale e 0.5 come passo iniziale; dopodichè con la bisezione, abbiamo ottenuto i diversi valori, al variare dell'errore, dello zero.

Abbiamo ottenuto i seguenti valori:

Errore ϵ_y	Bisezione
10^{-5}	0.73908996582031250 in 19 steps
10^{-7}	0.73908507823944092 in 26 steps
10^{-9}	0.73908513318747282 in 33 steps
10^{-12}	0.73908513321475766 in 42 steps
10^{-15}	0.73908513321521241 in 44 steps

Table 1: zero di $cosx - x$ al variare della precisione per il metodo della bizezione

Abbiamo poi utilizzanto il metodo di Newton, facendolo partire dal medisimo punto iniziale, fornendo anche la derivata della funzione. Abbiamo ottenuto i seguenti valori:

Errore ϵ_y	Newton
10^{-5}	0.73909089998938937 in 7 steps
10^{-7}	0.73908513322250358 in 8 steps
10^{-9}	0.73908513322250358 in 8 steps
10^{-12}	0.73908513321516067 in 9 steps
10^{-15}	0.73908513321516067 in 9 steps

Table 2: zero $cosx - x$ al variare della precisione per il metodo di Newton

Per il metodo della secante, come punti iniziali, abbiamo usato gli estremi dell'intervallo risultante dal metodo di bracketing ottenendo come risultati:

Errore ϵ_y	Secante
10^{-5}	0.73908691615124456 in 8 steps
10^{-7}	0.73908513298775180 in 9 steps
10^{-9}	0.73908513298775180 in 9 steps
10^{-12}	0.73908513321516056 in 10 steps
10^{-15}	0.73908513321516056 in 10 steps

Table 3: zero $cosx - x$ al variare della precisione per il metodo della secante

I dati trovati rispettano le previsioni teoriche; il metodo di bisezione nonostante trovi sempre lo zero è il metodo più lento poichè richiede il maggior numero di passi mentre, il metodo di Newton è quello più veloce seguito dal metodo della secante; in particolare, si nota, quanto questi metodi siano molto più precisi, fissando l'attenzione sul passaggio da una precisione richiesta di 10^{-7} a 10^{-9} , in cui i due metodi compiono lo stesso numero di passi per entrambe le precisioni; ciò significa che a 10^{-7} i due metodi avevano già raggiunto una precisione di almeno 10^{-9}. Lo stesso accade sul passaggio da 10^{-12} a 10^{-15}.

Funzione f(x) $= e^x ln(x) - x^2$

Vogliamo ora, ricercare lo zero della funzione $e^x lnx - x^2$, in 8B, utilizzando i medesimi metodi. Per il metodo di bisezione abbiamo utilizzato come punti iniziali gli estremi dell'intervallo trovato dal metodo di bracketing, che abbiamo fatto partire da un punto iniziale P=2 e un passo di 0.5; la precisione richiesta sull'asse delle ascisse è di 10^{-12}, mentre varia sull'asse delle ordinate. Abbiamo ottenuto i seguenti valori:

Errore ϵ_y	Bisezione
10^{-5}	1.6945991516113281 in 18 steps
10^{-7}	1.6946009397506714 in 23 steps
10^{-9}	1.6946009201928973 in 30 steps
10^{-12}	1.6946009205032624 in 42 steps
10^{-15}	1.6946009205036034 in 43 steps

Table 4: valori degli zeri di $e^x lnx - x^2$ per il metodo di bisezione

Usando poi lo stesso punto iniziale, fornendo anche la derivata, abbiamo utilizzato il metodo di Newton ottenendo:

Errore ϵ_y	Newton
10^{-5}	1.6946009207745252 in 7 steps
10^{-7}	1.6946009207745252 in 7 steps
10^{-9}	1.6946009207745252 in 7 steps
10^{-12}	1.6946009205035546 in 8 steps
10^{-15}	1.6946009205035546 in 8 steps

Table 5: valori degli zeri di $e^x lnx - x^2$ per il metodo di Newton

Abbiamo utilizzato successivamente il metodo della secante, fornendo come punti iniziali gli estremi dell' intervallo trovato dal bracketing, ottenendo come valori:

Errore ϵ_y	Secante
10^{-5}	1.6946009185382676 in 11 steps
10^{-7}	1.6946009185382676 in 11 steps
10^{-9}	1.6946009205035464 in 12 steps
10^{-12}	1.6946009205035464 in 12 steps
10^{-15}	1.6946009205035544 in 13 steps

Table 6: valori degli zeri di $e^x lnx - x^2$ per il metodo della secante

Da questi risultati si nota ancora che il metodo di bisezione è quello che richiede il maggior numero di passi; in particolare, questi dati mettono maggiormente in mostra la differenza tra la precisione del metodo di Newton e la precisione del metodo della secante, infatti, con soli 7 passi, il metodo di Newton è arrivato ad una precisione di 10^{-9}, per poi, con un solo passo raggiungere una precisione di 10^{-15}, invece, il metodo della secante ne richiede di più.

Minimo di: V (x) $= a\left[\frac{b}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right]$ con a=b=1

E' nostro interesse ricercare il punto di minimo di questo potenziale; sappiamo che si può ricondurre alla ricerca dello zero della sua derivata prima. La derivata prima del potenziale è f(x)=$6x^{-7} - 12x^{-13}$ e ricerchiamo lo zero di quest'ultima con i metodi sopra elencati a diverse precisioni sull'asse delle ordinate, fissando quella sull'asse delle ascisse a 10^{-12}. Per prima cosa, abbiamo trovato l'intervallo da usare nel metodo della bisezione con il metodo di bracketing fornendo come punto iniziale P=1 e un passo di 0.5, dopodichè il metodo di bisezione ha dato i seguenti risultati:

ϵ_y	Bisezione
10^{-5}	1.1224624633789060 in 17 steps
10^{-12}	1.1224620483091714 in 39 steps
10^{-15}	1.1224620483091714 in 39 steps

Table 7: punti di minimo del poteziale con il metodo di bisezione

Abbiamo utilizzato poi il metodo di Newton, facendolo partire dallo stesso punto P, fornendo anche la derivata seconda del potenziale:

ϵ_y	Newton
10^{-5}	1.1224620482960928 in 7 steps
10^{-12}	1.1224620483093730 in 8 steps
10^{-15}	1.1224620483093730 in 8 steps

Table 8: punti di minimo del poteziale con il metodo di Newton

Utilizzando poi il metodo della secante, fornendo come punti di partenza gli estremi dell'intervallo risultante dal bracketing otteniamo:

ϵ_y	Secante
10^{-5}	1.1224622231955650 in 10 steps
10^{-12}	1.1224620483093730 in 12 steps
10^{-15}	1.1224620483093730 in 12 steps

Table 9: punti di minimo del poteziale con il metodo della secante

Ancora una volta il metodo di Newton è quello più veloce, seguito dalla secante e poi dalla bisezione. Abbiamo notato poi che, per via dell'andamento della funzione, cambiando l'intervallo iniziale i risultati ottenuti possono essere sbagliati: ad esempio, fissando una precisione sugli assi a 10^{-12}e, fornendo un intervallo iniziale di estremi 1 e 3, si ottiene

- x_0 =1.1224620483094441 in 42 steps per il metodo di bisezione;
- x_0 =1.1224620483093730 in 8 steps per il metodo di Newton;
- x_0 =71.984850067052378 in 36 steps per il metodo della secante.

Come si può notare, il metodo della secante dà un valore del tutto errato, mentre iil metodo di Newton arriva al risultato in pochi passi, riuscendo a mantenere una certa stabilità. Il metodo di bisezione, anche, nonostante l'elevato numero di passi riesce ad arrivare al risultato.