第 14 届“连山科技”程序设计大赛题目讲解

龙水彬

dragon60066@163.com

北京理工大学 ACM 俱乐部

2019 年 4 月 14 日

1. Easy
   - A - 两只脑斧
   - K - 多项式求导
   - H - 目标是成为数论大师
2. Medium I
   - C - 赛尔逵传说
   - F - 风王之瞳
   - E - 只有一端开口的瓶子
3. Medium II
   - L - 旅行的意义
   - G - 神圣的 F2 连接着我们
   - D - 碟中谍
4. Hard
   - J - 金色传说

A - 两只脑斧

Problem

给定 24 口琴的结构和每个孔的位置，求一段乐谱的吹法。

A - 两只脑斧

Problem

给定 24 口琴的结构和每个孔的位置，求一段乐谱的吹法。

Solution

模拟。预处理口琴每个音阶的吹法，读入乐谱后判断输出。

时间复杂度 $O(n)$。

1. Easy
   - A - 两只脑斧
   - K - 多项式求导
   - H - 目标是成为数论大师
2. Medium I
   - C - 赛尔逵传说
   - F - 风王之瞳
   - E - 只有一端开口的瓶子
3. Medium II
   - L - 旅行的意义
   - G - 神圣的 F2 连接着我们
   - D - 碟中谍
4. Hard
   - J - 金色传说

K - 多项式求导

Problem

给定形如 $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ 的多项式，求它的 k 阶导数，系数取模 2019。

- $0 \leq a_i \leq 100$
- $1 \leq n, k \leq 100$

K - 多项式求导

Problem

给定形如 $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ 的多项式，求它的 k 阶导数，系数取模 2019。

- $0 \leq a_i \leq 100$
- $1 \leq n, k \leq 100$

Solution

从左往右数，第 i 项为 $a_{n-i+1} \cdot x^{n-i+1}$，它的 k 阶导数为 $(n-i+1) \cdot (n-i) \cdots (n-i-k+2) \cdot x^{n-i-k+1}$ $(k \leq n-i+1)$。
当 $k > n-i+1$ 时，该项 x 指数为 0，此时结果也为 0。
输入规模很小，对于每个 $a_i \cdot x^i$ 暴力计算即可。
时间复杂度 $O(100 \cdot n)$。

1. Easy
   - A - 两只脑斧
   - K - 多项式求导
   - H - 目标是成为数论大师
2. Medium I
   - C - 赛尔逵传说
   - F - 风王之瞳
   - E - 只有一端开口的瓶子
3. Medium II
   - L - 旅行的意义
   - G - 神圣的 F2 连接着我们
   - D - 碟中谍
4. Hard
   - J - 金色传说

H - 目标是成为数论大师

Problem

函数 $f(x) = \sqrt{ax} + b$，给定 a 和 b，计算 $f(x) = x$ 的解。保证解存在，且均为整数。

- $-1000 \leq a, b \leq 1000$

H - 目标是成为数论大师

Problem

函数 $f(x)=\sqrt{ax}+b$，给定 a 和 b，计算 $f(x)=x$ 的解。保证解存在，且均为整数。

- $-1000 \le a, b \le 1000$

Solution

高中数学题。等式 $\sqrt{ax}+b=x$ 两边平方移项得 $(x-b)^2-ax=0 \Rightarrow x^2-(2b+a)x+b^2=0$。
它的整数解为 $x=\frac{2b+a\pm\sqrt{4ab+a^2}}{2}$。

H - 目标是成为数论大师

Solution

- 做完了?

H - 目标是成为数论大师

Solution

- 做完了?
- 提交! Wrong Answer

H - 目标是成为数论大师

Solution

- 做完了?
- 提交! Wrong Answer
- 注意到等式两边在平方的时候引入了增根，即 $(-\sqrt{ax})^2 = (x-b)^2$ 的情况，显然这是不合法的!

H - 目标是成为数论大师

Solution

- 做完了?
- 提交! Wrong Answer
- 注意到等式两边在平方的时候引入了增根，即 $(-\sqrt{ax})^2 = (x-b)^2$ 的情况，显然这是不合法的!
- 在计算完方程 $x^2-(2b+a)x+b^2=0$ 解之后回代验算即可。时间复杂度 $O(1)$。

C - 赛尔达传说

Problem

给定 n 只血量为 d_i，攻击力为 x_i 的怪兽，你攻击力为 k，按顺序轮流与 n 只怪兽进行回合制战斗，同时有 c 份增益物品，可以让本回合攻击力提升 k（可叠加），问最少消耗的血量。

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq k, c, d_i, x_i \leq 10^6$

C - 赛尔逵传说

Solution

- 第 i 只怪兽，它的血量为 d_i，正常情况下你需要攻击 $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ 次。除了最后一轮外，每轮将受到来自怪兽的 x_i 点攻击伤害。

C - 赛尔逵传说

Solution

- 第 i 只怪兽，它的血量为 d_i，正常情况下你需要攻击 $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ 次。除了最后一轮外，每轮将受到来自怪兽的 x_i 点攻击伤害。
- 考虑一份增益物品的作用——实质是减少一轮某怪兽对你的伤害。

C - 赛尔达传说

Solution

- 第 i 只怪兽，它的血量为 d_i，正常情况下你需要攻击 $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ 次。除了最后一轮外，每轮将受到来自怪兽的 x_i 点攻击伤害。
- 考虑一份增益物品的作用——实质是减少一轮某怪兽对你的伤害。
- 将怪兽按攻击力排序，预处理与每只怪兽战斗的轮数，从攻击力高的怪兽开始贪心地使用增益物品。

C - 赛尔逵传说

Solution

- 第 i 只怪兽，它的血量为 d_i，正常情况下你需要攻击 $\lceil \frac{d_i}{k} \rceil$ 次。除了最后一轮外，每轮将受到来自怪兽的 x_i 点攻击伤害。
- 考虑一份增益物品的作用——实质是减少一轮某怪兽对你的伤害。
- 将怪兽按攻击力排序，预处理与每只怪兽战斗的轮数，从攻击力高的怪兽开始贪心地使用增益物品。
- 注意，一轮就能杀死的怪兽，由于你是先手，因此你不会受到该怪兽的任何伤害，因此没必要在它身上使用增益物品。

时间复杂度 $O(n \cdot log(n))$。

1. Easy
   - A - 两只脑斧
   - K - 多项式求导
   - H - 目标是成为数论大师
2. Medium I
   - C - 赛尔逵传说
   - F - 风王之瞳
   - E - 只有一端开口的瓶子
3. Medium II
   - L - 旅行的意义
   - G - 神圣的 F2 连接着我们
   - D - 碟中谍
4. Hard
   - J - 金色传说

F - 风王之瞳

Problem

询问 $n \times m$ 的网格图中有多少个格点正方形。

- $1 \leq n, m \leq 1000$

F - 风王之瞳

Problem

询问 $n \times m$ 的网格图中有多少个格点正方形。

- $1 \leq n, m \leq 1000$

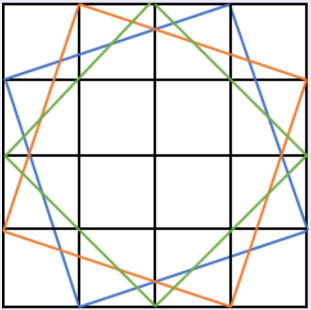
Solution

- 容易想到的是，任意横着或纵着取两个点 $C(n, 2)$、$C(m, 2)$ 都唯一确定一个正方形。

F - 风王之瞳

Solution

但是还有四条边都不与网格平行的正方形，如下图：



F - 风王之瞳

Solution

- 注意到这些彩色的正方形都被外面更大的黑色正方形框着。

F - 风王之瞳

Solution

- 注意到这些彩色的正方形都被外面更大的黑色正方形框着。
- 不妨考虑一个由黑色框住的正方形里面可以有多少个这样的彩色正方形——取决于黑色正方形的边长！

F - 风王之瞳

Solution

- 注意到这些彩色的正方形都被外面更大的黑色正方形框着。
- 不妨考虑一个由黑色框住的正方形里面可以有多少个这样的彩色正方形——取决于黑色正方形的边长!
- 不难得到边长为 i 的黑色正方形总共有 $i-1$ 个这样的彩色正方形。

F - 风王之瞳

Solution

- 注意到这些彩色的正方形都被外面更大的黑色正方形框着。
- 不妨考虑一个由黑色框住的正方形里面可以有多少个这样的彩色正方形——取决于黑色正方形的边长！
- 不难得到边长为 i 的黑色正方形总共有 $i-1$ 个这样的彩色正方形。
- 因此可以枚举黑色正方形长度，统计该正方形内的答案，即 $\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} i \cdot (n-i+1) \cdot (m-i+1)$。
- 时间复杂度 $O(n)$。

1. Easy
   - A - 两只脑斧
   - K - 多项式求导
   - H - 目标是成为数论大师
2. Medium I
   - C - 赛尔逵传说
   - F - 风王之瞳
   - E - 只有一端开口的瓶子
3. Medium II
   - L - 旅行的意义
   - G - 神圣的 F2 连接着我们
   - D - 碟中谍
4. Hard
   - J - 金色传说

E - 只有一端开口的瓶子

Problem

给出初始长度为 n 的全排列序列，询问至少需要使用几个栈才能将它重新排列成递增的新序列。

- $1 \leq n \leq 10^5$

E - 只有一端开口的瓶子

Problem

给出初始长度为 n 的全排列序列，询问至少需要使用几个栈才能将它重新排列成递增的新序列。

- $1 \leq n \leq 10^5$

Solution

解决此题的关键是想到一种 $k = 2$ 必定可行的操作策略：在第一个栈里维护当前序列中被加入的所有数的单调递减序列。每次新加一个数字，借由第二个栈就可以实现维护单调递减的性质。最后把所有原序列中的数都加入栈时，全部弹出即可有序。

E - 只有一端开口的瓶子

Solution

设想栈一中有 $\{5,4,2,1\}$，栈二为空。此时要从原序列中加入一个数字 3。由于栈一中的数单调递减，所有小于 3 的数都在栈顶。把它们依次移到栈二中，则栈一为 $\{5,4\}$，栈二为 $\{1,2\}$。这时候把 3 加入栈一，则栈一为 $\{5,4,3\}$，栈二为 $\{1,2\}$。栈二的所有元素再倒回来，就变成栈一为 $\{5,4,3,2,1\}$。

以此类推，栈一始终能维护成单调递减的序列。所以最多两个栈即可实现排序。

E - 只有一端开口的瓶子

Solution

问题转换为检测单个栈是否可行，注意到栈中小的数字一定不能被大的数字压在底下，因此贪心地维护一个单调栈，最后判断栈中是否包含所有元素即可。

时间复杂度 $O(n)$。

1. Easy
   - A - 两只脑斧
   - K - 多项式求导
   - H - 目标是成为数论大师
2. Medium I
   - C - 赛尔逵传说
   - F - 风王之瞳
   - E - 只有一端开口的瓶子
3. Medium II
   - L - 旅行的意义
   - G - 神圣的 F2 连接着我们
   - D - 碟中谍
4. Hard
   - J - 金色传说

L - 旅行的意义

Problem

给定 n 个节点 m 条边的 DAG，边权均为 1，初始你位于 1 号节点，接下来等可能地选择它的后继，也等可能地留在当前节点，但是最多在当前节点停留一次。问图上行走步数的期望值。

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $0 \leq m \leq 10^5$

L - 旅行的意义

Problem

给定 n 个节点 m 条边的 DAG，边权均为 1，初始你位于 1 号节点，接下来等可能地选择它的后继，也等可能地留在当前节点，但是最多在当前节点停留一次。问图上行走步数的期望值。

- $1 \le n \le 10^5$
- $0 \le m \le 10^5$

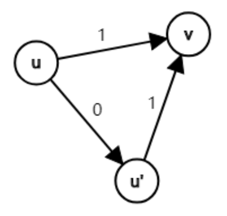
Solution

- 不妨先考虑不停留的情况，设 $f[u]$ 为从 u 节点出发行走步数的期望，那么有 $f[u] = 1 + \sum\limits_{\langle u,v\rangle \in E} \frac{f[v]}{sum_u}$，其中 sum_u 为节点 u 的直接后继个数。

L - 旅行的意义

Solution

- 对于停留情况，如下图，可以新加入一个节点 u'，连接 $\langle u, u' \rangle$。同时 u' 也依次连向 u 的所有直接后继，这样就转换成了不停留的问题，只需要一次树形 DP 即可。
- 时间复杂度 $O(n)$。



G - 神圣的 F2 连接着我们

Problem

给定 $2n$ 个节点的二分图，左边 X 部分有 n 个结点，编号 $1 \cdots n$，同时有 p 个起点，右边 Y 部分有 n 个结点，编号 $1 \cdots n$，同时有 q 个终点。开始各点均不联通，接着有 m 次加边操作，每次添加若干条边 $\langle u, v \rangle$ $(u \in [a, b]_X, v \in [c, d]_Y)$。询问这 p 个起点都走到某个终点的最短时间，无解输出 `boring game`。

- $1 \le n, m, p, q \le 10^5$

G - 神圣的 F2 连接着我们

Solution

- 加边的数量最坏将达到 n^2m 条，把所有的边都建出来是不太可行的。

G - 神圣的 F2 连接着我们

Solution

- 加边的数量最坏将达到 n^2m 条，把所有的边都建出来是不太可行的。
- 注意到每次连边都是区间里所有点都连边，因此可以考虑尝试增加一些临时点来表示区间，而临时点本身向原来的点连边权为 0 的边，这样只要向这些新点连边，就可以实现区间连边的效果。

G - 神圣的 F2 连接着我们

Solution

- 对于任意区间的情况，不难想到可以把这些临时点构造成线段树的结构，这样用 $log(n)$ 个新点即可表示一个区间，而空间复杂度是 $O(n)$。

G - 神圣的 F2 连接着我们

Solution

- 对于任意区间的情况，不难想到可以把这些临时点构造成线段树的结构，这样用 $log(n)$ 个新点即可表示一个区间，而空间复杂度是 $O(n)$。
- 为处理双向边，每个点拆成入点和出点，需要两颗线段树。入点线段树中从下往上连边权为 0 的单向边，出点线段树中从上往下连边权为 0 的单向边，入点线段树每个点向出点线段树中对应点连边权为 0 的单向边。

G - 神圣的 F2 连接着我们

Solution

- 新点之间两两连边，这样做的时间复杂度是 $O(log^2(n))$，在点数过多的时候也是不太可能接受的。不妨对于每个加边操作新建两个点，分别和两边的 $log(n)$ 个点连边权 0 的边，而两点之间连边权 w 的边。
- 最后问题就转化为了多个起点多终点的最短路问题，可以通过建虚拟结点解决。
- 时间复杂度 $O((n+m) \cdot log((n+m) \cdot log(n)))$。

D - 碟中谍

Problem

在宽度为 w 的走廊内，有若干圆形障碍物。询问从一端走到另一端的圆的最大半径。

- $1 \leq w \leq 10^5$
- $1 \leq n \leq 10^3$

D - 碟中谍

Problem

在宽度为 w 的走廊内，有若干圆形障碍物。询问从一端走到另一端的圆的最大半径。

- $1 \le w \le 10^5$
- $1 \le n \le 10^3$

Solution

- 最大半径能通过的圆也就是最小半径不能通过的圆。考虑什么情况下不能通过——存在某些传感器，覆盖范围叠起来把整个走廊切断了。

D - 碟中谍

D - 碟中谍

Solution

- 那么极限情况就是——恰好通过的最大半径的圆和那些该圆不能通过的传感器覆盖范围叠起来，可以把整个走廊切断！

D - 碟中谍

Solution

- 那么极限情况就是——恰好通过的最大半径的圆和那些该圆不能通过的传感器覆盖范围叠起来，可以把整个走廊切断！
- 以圆、两端墙壁为节点建完全图，边长是圆通过该侧可以取到的最大半径。设左侧墙壁为节点 0，右侧墙壁为节点 n+1。任何一条从 0 到 n+1 的路径就对应了一种截断整个走廊的方案。设集合 E 为所有 0 到 n+1 的路径，问题转化为求最大的半径 r，满足 $2r < \max\{E_i\}$。

D - 碟中谍

Solution

- 那么极限情况就是——恰好通过的最大半径的圆和那些该圆不能通过的传感器覆盖范围叠起来，可以把整个走廊切断！
- 以圆、两端墙壁为节点建完全图，边长是圆通过该侧可以取到的最大半径。设左侧墙壁为节点 0，右侧墙壁为节点 n+1。任何一条从 0 到 n+1 的路径就对应了一种截断整个走廊的方案。设集合 E 为所有 0 到 n+1 的路径，问题转化为求最大的半径 r，满足 $2r < \max\{E_i\}$。
- 这个问题的答案就是该完全图的最小生成树的最大边权。时间复杂度 $O(n^2 \cdot log(n))$。

J - 金色传说

Problem

给定长度为 n 的数位，每位可以填 $0 \cdots 9$ 还有 + 和-，问所有合法表达式结果之和取模 998244353 之后的答案。

- $1 \le n \le 5 \times 10^5$

J - 金色传说

Problem

给定长度为 n 的数位，每位可以填 $0 \cdots 9$ 还有 + 和-，问所有合法表达式结果之和取模 998244353 之后的答案。

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$

Solution

- 一个重要的结论是——对于统计答案，只有整个串中的第一个数字对答案是有贡献的。

J - 金色传说

Solution

- 一个重要的结论是——对于统计答案，只有整个串中的第一个数字对答案是有贡献的。
- 证明如下：
  - 任意只带一个运算符的串，不妨设为 a+b。其中 a、b 都是纯数字。那么存在一个 a-b 把 b 对答案的贡献抵消了。所以对答案有贡献的只有 a 部分。
  - 任意只带两个运算符的串，不妨设为 a+b+c。其中 a、b、c 都是纯数字。那么存在其他三个串 a+b-c，a-b+c，a-b-c，不难发现 b、c 各被加减两次，恰好对答案的贡献抵消了。所以对答案有贡献的还是只有 a 部分。
  - ……

J - 金色传说

Solution

- 知道了只有第一个出现的数对答案有贡献，那么可以枚举第一个出现运算符的位置。以这个运算符为界，前面是第一个出现的数字，后面是一个任意的算式，两者是相互独立的。

J - 金色传说

Solution

- 知道了只有第一个出现的数对答案有贡献，那么可以枚举第一个出现运算符的位置。以这个运算符为界，前面是第一个出现的数字，后面是一个任意的算式，两者是相互独立的。
- 记所有的 k 位数字的和为 $sum[k]$，记所有长度为 k 算式的个数为 $num[k]$，那么答案即为 $sum[n] + 2\sum_{i=2}^{n-1} sum[i-1] \cdot num[n-i]$。前项为不出现运算符的情况，后项为出现运算符时枚举第一个运算符的位置。

J - 金色传说

Solution

- 由等差数列求和可知 $sum[i] = \frac{(0+10^i-1)*10^i}{2}$。而 $num[k]$ 部分可以考虑同样的思路，即枚举第一个运算符位置，则 $num[k] = 2\sum_{i=2}^{k-1} 10^{i-1} \cdot num[k-i]$。
- $num[k+1] = 2\sum_{i=2}^{k} 10^{i-1} \cdot num[k+1-i]$。

J - 金色传说

Solution

- 由等差数列求和可知 $sum[i] = \frac{(0+10^i-1)*10^i}{2}$。而 $num[k]$ 部分可以考虑同样的思路，即枚举第一个运算符位置，则 $num[k] = 2\sum_{i=2}^{k-1} 10^{i-1} \cdot num[k-i]$。
- $num[k+1] = 2\sum_{i=2}^{k} 10^{i-1} \cdot num[k+1-i]$。
- 令 $j = i-1$ 则 $num[k+1] = 2\sum_{j=1}^{k-1} 10^{j} \cdot num[k-j]$，联立 $num[k] = 2\sum_{j=2}^{k-1} 10^{j-1} \cdot num[k-j]$。

J - 金色传说

Solution

- 不难发现只有 $j = 1$ 时需要特别计算，其他部分可以直接从 $num[k]$ 得到，即 $num[k+1] = 10 \cdot num[k] + 20 \cdot num[k-1]$，线性递推即可。
- 时间复杂度 $O(n)$。

1. Easy
   - A - 两只脑斧
   - K - 多项式求导
   - H - 目标是成为数论大师
2. Medium I
   - C - 赛尔逵传说
   - F - 风王之瞳
   - E - 只有一端开口的瓶子
3. Medium II
   - L - 旅行的意义
   - G - 神圣的 F2 连接着我们
   - D - 碟中谍
4. Hard
   - J - 金色传说

B - 炼金术

Problem

给出 m 个模式串，要求构造一个长度为 n 的字符串，满足它不包含这 m 个模式串中任意一个。

- $1 \le n \le 10^5$
- $1 \le m \le 10^4$

B - 炼金术

Problem

给出 m 个模式串，要求构造一个长度为 n 的字符串，满足它不包含这 m 个模式串中任意一个。

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq m \leq 10^4$

Solution

- 建出 AC 自动机，删去所有代表串末尾的节点建图。问题转化成要在这个有向图上走恰好 n 步。

B - 炼金术

Problem

给出 m 个模式串，要求构造一个长度为 n 的字符串，满足它不包含这 m 个模式串中任意一个。

- $1 \le n \le 10^5$
- $1 \le m \le 10^4$

Solution

- 建出 AC 自动机，删去所有代表串末尾的节点建图。问题转化成要在这个有向图上走恰好 n 步。
- 首先做有向图缩点找环。如果存在环，那么只要从起始点走进环里走满 n 步即可。如果不存在环，那么这就是个 DAG，拓扑排序后维护从起始节点开始的最长路径即可。

I - 出给 paul-lu 的数数题

Problem

定义 bi 点为棋盘中严格大于本行与本列的特征点。给定 $n \times n$ 的棋盘，其中每个格点可以填区间 $[1, k]$ 内的任意整数，设 B_i 为棋盘中恰好有 i 个 bi 点的方案数，求 $\sum_{i=0}^{n^2}(i^2 \cdot B_i)$。

- $1 \le n, k \le 200$

I - 出给 paul-lu 的数数题

Problem

定义 bi 点为棋盘中严格大于本行与本列的特征点。给定 $n \times n$ 的棋盘，其中每个格点可以填区间 $[1, k]$ 内的任意整数，设 B_i 为棋盘中恰好有 i 个 bi 点的方案数，求 $\sum_{i=0}^{n^2}(i^2 \cdot B_i)$。

- $1 \leq n, k \leq 200$

Solution

- 每次选取一个 bi 点，那么这该行与该列的数的选择就可以相应地确定。将网格交换行列可以使得 bi 点都移到对角线上，且随着对角线值逐渐增大。

I - 出给 paul-lu 的数数题

I - 出给 paul-lu 的数数题

Solution

- 设 $dp[i][j]$ 代表，已经决定了 i 个 bi 点的值，最大的 bi 点的值不超过 j 的方案数，转移方程是：
- $dp[i][j] = \sum_{k=0}^{i} dp[k][j-1] \cdot (j-1)^{\frac{(i-k)\cdot(2n-i+k-1)}{(i-k)!}}$
- 填入的 bi 点的数是 j，一次填 $i-k$ 个，$(j-1)^{\frac{(i-k)\cdot(2n-i+k-1)}{(i-k)!}}$ 代表其他数的决策方案，除 $(i-k)!$ 意思是因为填入的数可以任意放，最终要保证他们的无序性。

I - 出给 paul-lu 的数数题

Solution

- 接下来就是经典的容斥问题，设 $d[i]$ 代表至少有 i 个 bi 点的方案数，那么 $d[i] = A(n,i) \cdot A(n,i) \cdot dp[i][K] \cdot K^{(n-i)\cdot(n-i)}$。再设 $f[i]$ 代表正好有 i 个 bi 点的方案数，有 $f[i] = d[i] - \sum_{i<j} d[j] \cdot C(j,i)$。
  时间复杂度 $O(n^3)$。