FUNZIONI CONTINUE

$$f(x)\begin{cases} -\sqrt{2x-3} & x \geq \frac{3}{2} \to \text{è continua} \\ -x^2+ax+b & -1 \leq x < \frac{3}{2} \to \text{è continua} \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x) & x < -1 \to \text{è continua} \end{cases}$$

- Singolarmente sono tutte continue, ma quando si incontrano?

1) $x = -1$

$\lim_{x \to -1^-} \log_{\frac{1}{2}}(-x) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$ → limite sinistro di -1

$\lim_{x \to -1^+} -x^2+ax+b = -1-a+b$ → limite destro di -1

1° CONDIZIONE → $-1-a+b=0$

2) $x = \frac{3}{2}$

$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} -x^2+ax+b = -\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b$ → limite sinistro di $\frac{3}{2}$

$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} -\sqrt{2x-3} = -\sqrt{0} = 0$ → limite destro di $\frac{3}{2}$

2° CONDIZIONE → $-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b=0$

$$\begin{cases} -1-a+b=0 \\ -\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b=0 \end{cases} \to \begin{cases} b=a+1 \\ -\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+a+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=a+1 \\ 2a-1=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$$ → ora sostituiamo

$$f(x)\begin{cases} -\sqrt{2x-3} & x \geq \frac{3}{2} \\ -x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & -1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} & x < -1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 = f(-1)$ $\boxed{\text{Continua in } x=-1}$ ✓

$\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = 0 = f(\frac{3}{2})$ $\boxed{\text{Continua in } x=\frac{3}{2}}$ ✓

$f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$
Quando $a=\frac{1}{2}$
$b=\frac{3}{2}$

PUNTI DI SINGOLARITÀ

Se c un punto di accomulazione del dominio D di una funzione f(x) è continua in c se si verificano le condizioni seguenti:

- Il punto c appartiene al dominio di f(x)
- Esiste ed è finito il limite l di f(x) per $x \to c$
- Il valore di f(x) in c coincide con il limite, ossia $\lim_{x \to c} f(x) = l$

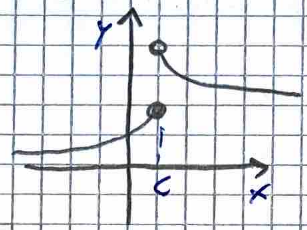
Se c appartiene al dominio della funzione, si dice che c è un punto di discontinuità di f(x)

Ci sono 3 tipi di singolarità:

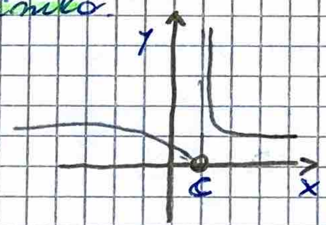
- 1° SPECIE
- 2° SPECIE
- 3° SPECIE

1° SPECIE: Il punto c è una singolarità di prima specie di f(x) se esistono finiti, ma diversi tra loro, i limiti da destra e da sinistra per $x \to c$

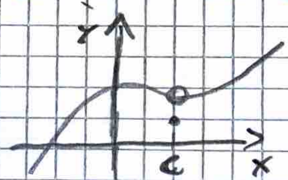
$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$



2° SPECIE: Il punto c è una singolarità di seconda specie per f(x) se almeno uno dei due limiti o non esiste o è infinito.



3° SPECIE: Il punto c è una singolarità di 3° specie o eliminabile, quando esiste finito il limite per $x \to c$ di f(x) ma f(c) o non esiste o è diverso dal valore del limite.



UNA FUNZIONE PER ESSERE DERIVABILE, DEVE ESSERE CONTINUA

Se una funzione è derivabile in un punto allora in quel punto essa è continua.

Definizione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Dimostrazione:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h)$$

$\varepsilon(h)$ → infinitesimo: numero molto piccolo

$$f(x_0+h)-f(x_0) = h \cdot [f(x_0)+\varepsilon(h)]$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,[f(x_0)+\varepsilon(h)]$$

Riscrivo utilizzando

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} \{ f(x_0) + h \cdot [f(x_0)+\varepsilon(h)] \}$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + \lim_{h \to 0} h\,[f'(x_0)+\varepsilon(h)]$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \longrightarrow \text{utilizzando } x = x_0+h$$

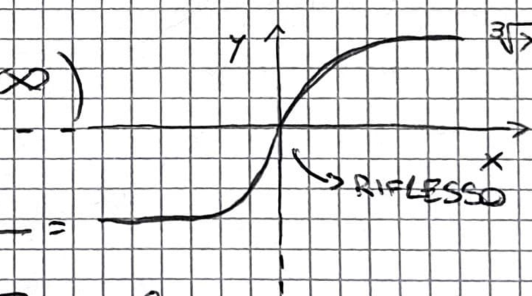
$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ipotesi:

Se una funzione non è continua in un punto, allora non è derivabile in quel punto.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad x_0 = 0$ $\quad D = (-\infty, +\infty)$



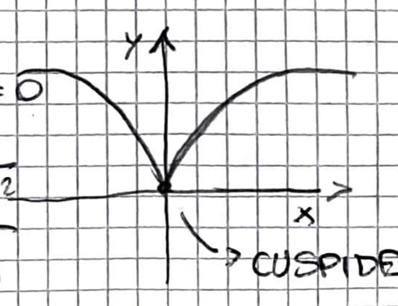
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Una funzione per essere derivabile il limite $h \to 0$ del rapporto incrementale deve essere finito, il limite destro e il limite sinistro devono coincidere.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad D = (-\infty, +\infty)$ $\quad x = 0$



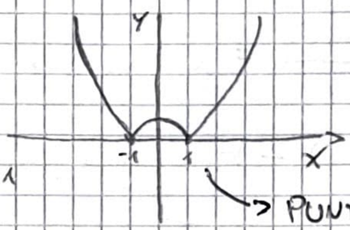
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to0} h^{\frac{2}{3}-1} = \lim_{h\to0} h^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \begin{cases} \to \lim_{h\to0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{0^-}} = -\infty \\ \to \lim_{h\to0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{0^+}} = +\infty \end{cases}$$

$f(x) = |x^2 - 1|$

$x^2 - 1 > 0 \longrightarrow (x-1)(x+1)$



→ PUNTI ANGOLOSI

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ o } x \geq +1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & x \leq -1 \text{ o } x \geq +1 & \text{(A)} \\ \dfrac{f(x_0+h - f(x_0)}{h} & -1 < x < 1 & \text{(B)} \end{cases}$$

$x_0 = +1$ (A) destro

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 1 + 2h - 1}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = h + 2$$

$$\lim_{h\to0} h + 2 = +2 = f'_d(1)$$

(B) sinistro

$$\frac{-(1+h)^2 + 1}{h} = \frac{-\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} \longrightarrow \lim_{h\to0} -h-2 = -2 = f'_s(1)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 2(x-1) \begin{cases} \to y = 2x - 2 & \text{destro} \\ \to y = -2x + 2 & \text{sinistro} \end{cases}$$

DERIVATE → non esistono se non esiste il limite.

INTRODUZIONE:

$t \to s(t)$

$t + \Delta t \qquad S(t+\Delta t)$

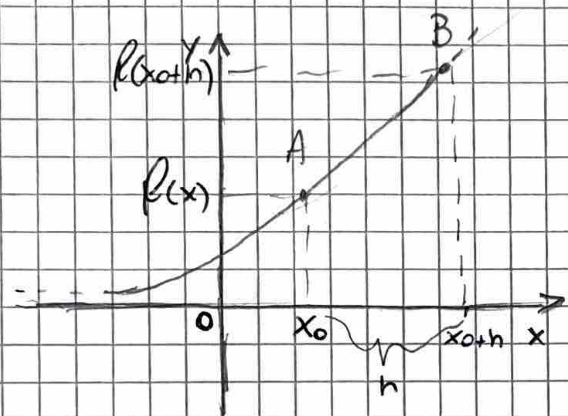
$\underbrace{t \qquad t+\Delta t}_{\Delta t}$

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\cancel{t} + \Delta t - \cancel{t}} = v_m$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = v_i$$

→ velocità istantanea

data una funzione definita su un certo insieme, prendo un punto che appartiene al dominio



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}}$$

↓

Rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0 e all'incremento h.

$$\lim_{x \to h} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Significato geometrico.

$Y - Y_0 = m(x - x_0)$

EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE

$$\boxed{Y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

es: $f(x) = 2 - 3x^2 \qquad x_0 = 3 \;;\; h = 2$

1) Rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{2-3(3+2)^2 - (2-3(3)^2)}{2} =$$

$$= \frac{2-3\cdot(25) - (2-3\cdot(9))}{2} = -24$$

È il coefficiente angolare della retta secante $f(x) = 2-3x^2$ nei punti $A(3,-25)$; $B(5,-73)$

2) Eq. della Retta secante:

$y + 25 = -24(x-3)$

Es: $f(x) = 2 - 3x^2 \qquad x_0 = 3$; h generico.

1) Rapporto incrementale di $f(x)$ in $x_0 = 3$

$f(x_0) = f(3) = 2 - 3(3)^2 = -25$

$f(x_0+h) = f(3+h) = 2 - 3(3+h)^2 =$
$= 2 - 3(9 + h^2 + 6h) = 2 - 27 - 3h^2 - 18h =$
$= -25 - 3h^2 - 18h$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\cancel{-25} - 3h^2 - 18h \cancel{+25}}{h} = \frac{\cancel{h}(-3h - 18)}{\cancel{h}}$$

2) Valore della derivata $f(x) = 2 - 3x^2$ in $x_0 = 3$

$$\lim_{h \to 0} (-3h - 18) = -18 = f'(3)$$

$\longrightarrow$ coefficiente angolare della retta tangente.

Eq nel punto $x_0 = 3$:

$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3)$
$y - 25 = -18 \cdot (x - 3)$
$y = -18x + 54 - 25$
$y = -18x + 29 \longrightarrow$ Equazione della retta tangente.

[illegible]

$Y = x^2$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - (x_0)^2}{h} = \frac{\cancel{x_0^2} + h^2 + 2x_0 h - \cancel{x_0^2}}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{h}(h + 2x_0)}{\cancel{h}} \longrightarrow \lim_{h \to 0} (h + 2x_0) = 2x_0 = f'(x_0)$$

FUNZIONI → RISPETTIVE DERIVATE

$f(x)$ → funzioni	$f'(x)$ → rispettive derivate
c (costante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$