Задание 1. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение. Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна

$(2k+5)\cdot 1{,}1^{20-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k = (2k+5)\cdot(1{,}1)^{30-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$\begin{aligned} b_k = a_k - a_{k-1} \\ &= (1{,}1)^{30-k}\big(2k+5-1{,}1\cdot(2(k-1)+5)\big) \\ &= (1{,}1)^{30-k}(1{,}7-0{,}2k). \end{aligned}$$

Отсюда $b_k > 0$ при $k \le 8$ и $b_k < 0$ при $k > 8$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k = 8$. Продать бумагу следует в течение восьмого года.

Задание 2. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, суточная зарплата которых составит $4x^2$ у. е. Тогда на второй объект будет направлено $(24 - x)$ рабочих, их суточная заработная плата $(24 - x)^2 = (576 - 48x + x^2)$ (у. е.). В день начальник будет должен платить рабочим $(5x^2 - 48x + 576)$ у. е.

Рассмотрим функцию $f(x) = 5x^2 - 48x + 576$, причем $0 < x < 24$,

$x \in \mathbb{N}$ функция квадратичная, старший коэффициент положителен, следовательно, она имеет наименьшее значение при $x_0 = 4{,}8$. Заметим, что точка минимума не является натуральным числом, поэтому исследуемая функция достигает наименьшего значения в точке 4 или в точке 5. Найдем и сравним эти значения:

$$f(4) = 5 \cdot 16 - 48 \cdot 4 + 57 = 16(5 - 12 + 36)$$
$$= 16 \cdot 29 = 16 \cdot 30 - 16 = 464$$
$$f(5) = 125 - 240 + 57 = 461.$$

Тем самым, на множестве натуральных значений аргумента наименьшее значение функции достигается в точке 5. Поэтому необходимо направить 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих — на второй объект. Зарплата рабочих составит 461 у. е.

Задание 3. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн руб. Он может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого Вася может снимать квартиру (стоимость аренды — 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц после уплаты арендной платы сумму, которая останется от его возможного платежа банку по первой схеме. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Решение. Сумма, которую необходимо будет выплатить банку при покупке квартиры в кредит, на 180% превышает исходные 3 млн руб., поэтому она равна $3 \cdot 2{,}8 = 8{,}4$ млн руб. Кредит должен быть погашен за 20 лет, то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Поэтому величина ежемесячного платежа равна 35 тыс. руб.

Если Вася будет снимать квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 20 тыс. руб., чтобы их накопить 3 млн понадобится 150 месяцев или 12,5 лет.

Задание 4 (Задания ФИПИ [14])**.** Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение. Пусть в отеле будет x номеров площадью 27 кв. м и y номеров площадью 45 кв. м. Тогда $27x + 45y \leq 981$ или $3x + 5y \leq 109$ (*). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $2000x + 4000y$ или $2000(x + 2y)$.

Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $x + 2y$. Пусть $s = x + 2y$, тогда $x = s - 2y$, откуда, подставляя в (*), получаем:

$$3(s - 2y) + 5y \leq 109 \Leftrightarrow 3s \leq y + 109.$$

В случае равенства $3s = y + 109$ наибольшему значению суммы s соответствовало бы наибольшее значение величины y. В случае неравенства необходимо найти наибольшее возможное значение y и проверить меньшие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

Наибольшее возможное значение y равно 21. Поскольку $981 = 45 \cdot 21 + 36$, в гостинице можно открыть 21 номер люкс и 1 стандартный номер, которые будут приносить предпринимателю доход $2000(1 + 2 \cdot 21) = 86\,000$ руб. в сутки. При этом останется 9 кв. м. незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество люксов. Если в гостинице 40 люксов и 3 стандартных номера, незанятого пространства не остается: $981 = 27 \cdot 3 + 45 \cdot 20$. В этом случае доход тот же $2000 \cdot 3 + 4000 \cdot 20 = 86\,000$ руб. Дальнейшее уменьшение количества люксов в пользу стандартных номеров приведет к уменьшению прибыли.

Ответ: 86 000 руб.