Задание 1 (Задания ФИПИ)**.** Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта – по 30 руб., третьего сорта – по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Решение. Пусть x кг – масса яблок 1-го сорта, y кг – масса яблок 2-го сорта, оставшиеся $91 - (x + y)$ кг – масса яблок 3-го сорта. Для величины выручки имеем:

$$40x + 30y + 20 \cdot (91 - x - y) = 2170 \Leftrightarrow 2x + y = 35,$$

откуда $y = 35 - 2x$ (*).

Поскольку масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта имеем:

$\frac{x}{y} = \frac{y}{91-(x+y)}$

Подставим условие (*) в полученную пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{35-2x} = \frac{35-2x}{x+56} \underset{0<x<17,5}{\Longleftrightarrow} x(x+56) = (35-2x)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 196x + 1225 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 7, \\ x = \frac{175}{3} \underset{x<17,5}{\Longleftrightarrow} x = 7 \end{array}\right]$$

Тем самым, садовод продал 7 кг яблок первого сорта и, следовательно, $35 - 14 = 21$ кг яблок второго сорта.

Ответ. 21 кг.

Задание 2 (Задания ФИПИ)**.** В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте работают 20 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте работают 100 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой шахте x шахтеров, а во второй шахте y шахтеров заняты на добыче алюминия. Составим таблицу 2.1 по данным задачи.

Таблица 2.1

	Алюминий		Никель	
	Количество шахтеров, чел	Количество металла за смену, кг	Количество шахтеров, чел	Количество металла за смену, кг
Шахта 1	X	$5x$	$20-x$	$10(20-x)$

Шахта 2	*Y*	*10y*	*100-y*	*5(100-y)*
Всего		*5x+10y*		*700-10x-5y*

Поскольку алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, имеем:

$5x + 10y = 2(700 - 10x - 5y) \Leftrightarrow 25x = 1400 - 20y \Leftrightarrow 5x = 280 - 4y.\ (*)$

Пусть s — масса сплава, она втрое больше массы добытого никеля:

$s = 3(700\ - 10x - 5y)$. Найдем наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s = 3(700\ - 10x\ - 5\ y)$$
$$= \ 3(700\ -\ 2(280 -\ 4y\ ) - 5y\ )$$
$$= 3(140\ +\ 3y)$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение y. Из (*) ясно, что наибольшее возможное y равно 70, при этом x = 0,

$s = 3(140 + 3\ 70) = 1050$. Это означает, что 70 шахтеров второй шахты должны быть заняты на добыче алюминия, а оставшиеся 30 шахтеров второй шахты и все 20 шахтеров первой шахты должны быть заняты на добыче никеля. При этом они добудут 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса сплава будет равна 1050 кг.

Задание 3 (Задания ФИПИ)**.** В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, и необходимо произвести наибольшее количество металла, все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0{,}3 = 240$ кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают x рабочих, а никель – 160□ x рабочих. Тогда за сутки они добудут $5x$ кг алюминия и 5(160 □ x) кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{5x} + \sqrt{800 - 5x}$ для натуральных x, не больших 160. Имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x}} - \frac{5}{2\sqrt{800 - 5x}} = \frac{5}{2}\frac{\sqrt{800 - 5x} - \sqrt{5x}}{\sqrt{5x} \cdot \sqrt{800 - 5x}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800 - 5x} = \sqrt{5x} \underset{x \in \mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} 800 - 5x = 5x \Leftrightarrow x = 80.$$

При x меньших 80 производная положительна, а при x больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 – на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.

Ответ. 280 кг.

Задание 4 (Задания ФИПИ)**.** В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой области x рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-x$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, один рабочий добывает 1 кг алюминия или 1 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут x кг алюминия и $(20-x)$ кг никеля.

Пусть во второй области y рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-y$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, n рабочих добывают $\sqrt{10\cdot n}$ кг любого из металлов, поэтому вместе бригады добудут $\sqrt{10y}$ кг алюминия и $\sqrt{10(20-y)}$ кг никеля.

Всего будет произведено $x+\sqrt{10y}$ кг алюминия (1) и $20-x+\sqrt{200-10y}$ кг никеля (2). Поскольку алюминия необходимо добывать втрое больше никеля, имеем:

$$x+\sqrt{10y}=3\left(20-x+\sqrt{200-10y}\right)\Leftrightarrow 4x$$
$$=60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}\quad (*)$$

Количеству никеля $s=20-x+\sqrt{200-10y}$ соответствует количество сплава $4s$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$4s=80-4x+4\sqrt{200-10y}$$
$$=80-\left(60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}\right)$$
$$+4\sqrt{200-10y=}$$
$$=20+\sqrt{10y}+\sqrt{200-10y}$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение функции $f(y)=\sqrt{10y}+\sqrt{200-10y}$ при натуральных y не больших 20.

Имеем:

$$f'(y)=\frac{5}{\sqrt{10y}}-\frac{5}{\sqrt{200-10y}}$$
$$=5\cdot\frac{\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}}{\sqrt{200-10y}\cdot\sqrt{10y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{200-10y}=\sqrt{10y}\underset{y\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow}200-10y=10y\Leftrightarrow y=10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

Далее имеем: $f(10)=20,\ 4s=120,\ s=30,$ из $(*)$ $x=20$. Это озна чает, что все рабочие первой области должны быть заняты на производстве алюминия, за сутки они произведут его 20 кг, а рабочие второй области бригадами по 10 и 10 человек должны быть заняты на добыче алюминия и никеля, они добудут их по 10 кг. Всего будет добыто 30 кг алюминия и 10 кг никеля, из них будет произведено 40 кг сплава.

Задание 5. Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице 2.2 приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Таблица 2.2

Вид начинки	**Себестоимость (за 1 тонну)**	**Отпускная цена (за 1 тонну)**	**Производственные возможности**
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики реализуется без остатка, найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

Решение. Пусть x – доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y – доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом блинчиков с ягодной начинкой производится *90x* тонн, а с творожной начинкой – *75y* тонн. Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x \geq 15$, откуда $x \geq \frac{1}{6}$, а $75y \geq 15$, откуда $y \geq \frac{1}{5}$. Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна 30 тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна 35 тыс. руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $30 \cdot 90x + 35 \cdot 75y = 2700x + 2625y = 75 \cdot (36x + 35y)$. Таким образом, необходимо найти наибольшее значение выражения $75 \cdot (36x + 35y)$ при выполнении условий:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6}, \;\; y \geq \frac{1}{5}, \end{cases}$$

откуда $y = 1 - x$, $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ $\quad (*)$.

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $36x + 35y$ получаем: $36x + 35(1 - x) = x + 35$. Наибольшее значение этого выражения при условии $\frac{1}{6} \le x \le \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда из (*) находим $y = \frac{1}{5}$.

Поэтому искомая максимально возможная прибыль завода за месяц равна: $75 \cdot \left(36 \cdot \frac{4}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5}\right) = 75 \cdot \frac{179}{5} = 2685$ руб.

при этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

Ответ. 2685 тыс. руб.