

Группа М3215

К работе допущен _____

Студент Лавренов Д.А, Васильков Д.А.

Работа выполнена _____

Преподаватель Тимофеева Э.О.

Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.04

Исследование равноускоренного вращательного движения (маятник Обербека)

1. Цель работы.

- 1) Проверка основного закона динамики вращения.
- 2) Проверка зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

- 1) Измерение времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине.
- 2) Расчёт ускорения груза, углового ускорения крестовины и момента силы натяжения нити.
- 3) Расчёт момента инерции крестовины с утяжелителями и момента силы трения.
- 4) Исследование зависимости момента силы натяжения нити от углового ускорения. Проверка основного закона динамики вращения.
- 5) Исследование зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения. Проверка теоремы Штейнера.

3. Объект исследования.

Равноускоренное вращательное движение маятника Обербека.

4. Метод экспериментального исследования.

Лабораторный эксперимент, состоящий из измерения времени, которое требуется каретке с грузами, чтобы пройти расстояние в 70 см при различных положениях утяжелителей на крестовине, с помощью цифрового секундомера. Далее проводится анализ полученных результатов измерений.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

1) Второй закон Ньютона (без учета сопротивления воздуха):

$$ma = mg - T,$$

где T – сила натяжения нити.

2) Ускорение:

$$a = \frac{2h}{t^2},$$

Где h – расстояние, пройденное грузом за время t – от начала движения.

$$h = 0,7 \text{ м}$$

3) Угловое ускорение ε :

$$\varepsilon = \frac{2a}{d},$$

Где d – диаметр ступицы.

$$d = 0,046 \text{ м}$$

4) Сила натяжения нити T :

$$T = m(g - a).$$

5) Момент силы натяжения нити:

$$M = \frac{md}{2}(g - a).$$

6) Основной закон динамики для вращения для крестовины:

$$I_\varepsilon = M - M_{\text{тр}},$$

где I – момент инерции крестовины с утяжелителями.

7) Момент инерции крестовины (по теореме Штейнера):

$$I = I_0 + 4m_{\text{ут}}R^2,$$

Где I_0 – сумма моментов инерции стержней крестовины, момента инерции ступицы и собственных центральных центральных моментов инерции утяжелителей.

8) Уравнение теоретической связи между моментом силы натяжения нити и угловым ускорением крестовины:

$$M = M_{\text{тр}} + I_\varepsilon.$$

9) Расстояние между осью O вращения и центром C утяжелителя:

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b,$$

Где l_1 – расстояние от оси вращения до первой риски; n – номер риски, на которой установлены утяжелители; l_0 – расстояние между соседними рисками; b – размер утяжелителя вдоль спицы.

$$l_1 = (0,057 \pm 0,0005) \text{ м}$$

$$l_0 = (0,025 \pm 0,0005) \text{ м}$$

$$b = (0,04 \pm 0,0005) \text{ м}$$

10) Абсолютная погрешность прямого измерения:

$$\Delta \langle t \rangle_{\text{сл}} = t_s(a_{\text{дов}}, N) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_{1i} - \langle t_1 \rangle)^2}{N(N-1)}}$$

11) Погрешность среднего значения времени:

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta \langle t \rangle_{\text{сл}})^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta t_{\text{пр}}\right)^2}$$

12) Погрешности углового ускорения крестовины:

$$\Delta \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2}$$

13) Погрешность ускорения груза:

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cdot \Delta t\right)^2}$$

14) Погрешность момента силы натяжения нити:

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2}$$

15) Среднее арифметическое:

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$$

16) Абсолютная погрешность косвенного измерения:

$$\Delta_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}$$

17) Угловой коэффициент линейной зависимости $y(x) = a + bx$:

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

18) Свободный член линейной зависимости $y(x) = a + bx$:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

19) Погрешность углового коэффициента:

$$\begin{aligned} d_i &= y_i - (a + bx_i) \\ D &= \sum (x_i - \bar{x})^2 \\ \Delta b &= t_{a,N} \cdot \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{D(n-2)}} \end{aligned}$$

20) Погрешность свободного члена:

$$\Delta a = t_{a,N} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right) \frac{\Sigma d_i^2}{n-2}}$$

21) Среднеквадратическое отклонение $S_{m_{yt}}$:

$$S_{m_{yt}} = \sqrt{\frac{1}{D} \cdot \frac{\Sigma M_i - (M_{tp} + I_0 \cdot R_i^2)}{n-2}}$$

22) Среднеквадратическое отклонение S_{i_0} :

$$S_{i_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{Rcp^2}{D}\right) \cdot \frac{\Sigma d_i^2}{n-2}}$$

23) Диаметр ступицы: $d = (46.0 \pm 0.5)\text{мм}$

24) Высота сброса груза: $h = (700 \pm 0.5)\text{мм}$

25) Коэффициент Стьюдента для $\alpha = 0.95, N = 3: t_{0.95,3} = 4.3$

26) Ускорение свободного падения в Санкт-Петербурге: $g = 9.82\text{м/с}^2$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Секундомер	электронный	0-60 с	0.01 с
2	Линейка	аналоговый	0-80 см	0.5 мм

7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).

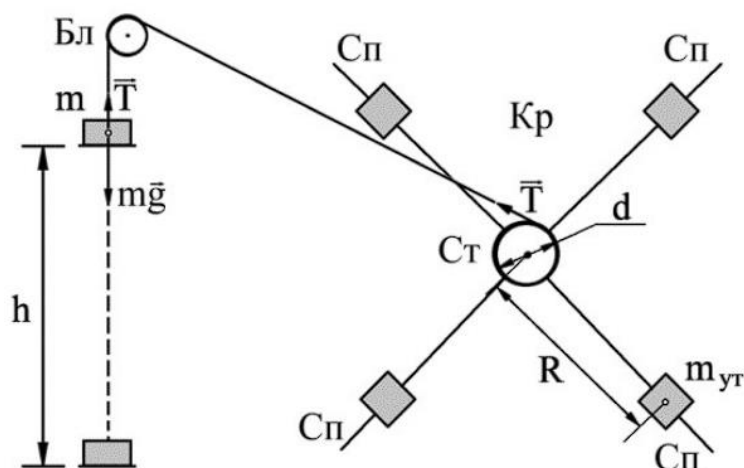


Рисунок 1. Схема измерительного стенда.

1) m – груз

2) Ст – ступица

3) Бл – блок

- 4) Кр – крестовина
- 5) Сп – спицы
- 6) $m_{\text{ут}}$ – груз-утяжелитель
- 7) R – расстояние утяжелителей от оси вращения крестовины
- 8) $m\vec{p}$ – векторная сумма силы тяжести
- 9) \vec{T} – сила натяжения нити
- 10) h – расстояние, пройденное грузом за время t от начала движения
- 11) d – диаметр ступицы

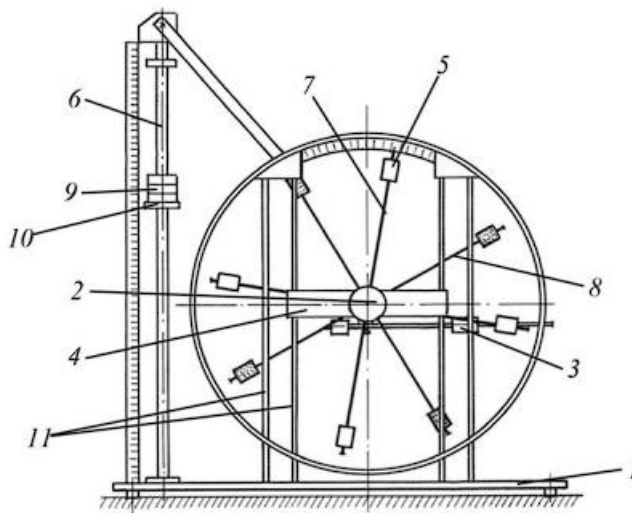


Рисунок 2. Стенд лаборатории механики.

- 1) Основание
- 2) Рукоятка сцепления крестовин
- 3) Устройства принудительного трения
- 4) Поперечина
- 5) Груз крестовины
- 6) Трубчатая направляющая
- 7) Передняя крестовина
- 8) Задняя крестовина
- 9) Шайбы каретки
- 10) Каретка
- 11) Система передних стоек

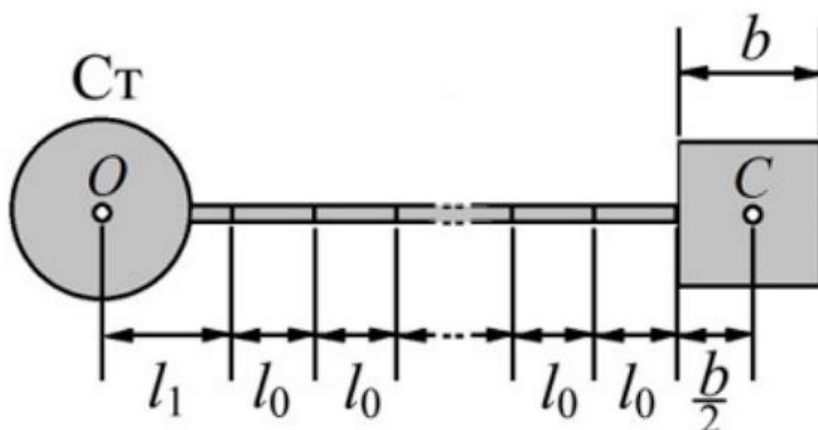


Рисунок 3. Определение расстояние от центра груза-утяжелителя до оси вращения.

- 1) O – ось вращения
- 2) C – центр утяжелителя
- 3) l_1 – расстояние от оси вращения до первой риски
- 4) l_0 – расстояние между соседними рисками
- 5) b – размер утяжелителя вдоль спицы

8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы, примеры расчетов).

Таблица 1: Протокол измерений времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине (измерения также представлены в приложении).

Масса груза, г	Положение утяжелителей						
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска	
m_1	4,99	5,21	6,20	7,39	4,86	8,91	t_1
	4,74	5,45	6,45	7,28	8,03	9,05	t_2
	4,86	5,74	6,10	7,25	7,93	8,77	t_3
	4,86	5,47	6,25	7,31	6,94	8,91	t_{cp}
m_2	3,22	4,04	4,41	5,26	5,92	6,57	t_1
	3,29	3,91	4,53	5,31	5,90	6,77	t_2
	3,23	3,92	4,64	5,36	5,90	6,65	t_3
	3,25	3,96	4,53	5,31	5,91	6,66	t_{cp}
m_3	2,75	3,16	3,89	4,49	4,96	5,78	t_1
	2,83	3,18	3,81	4,35	5,15	5,74	t_2
	2,80	3,15	3,85	4,40	4,96	5,59	t_3
	2,79	3,16	3,85	4,41	5,02	5,70	t_{cp}
m_4	2,39	2,80	3,29	3,59	4,43	4,78	t_1
	2,65	2,78	3,42	3,89	4,32	4,88	t_2
	2,43	2,79	3,29	3,80	4,28	4,79	t_3
	2,49	2,79	3,33	3,76	4,34	4,82	t_{cp}

$$m_1 = 0,267 \text{ кг}$$

$$m_2 = 0,487 \text{ кг}$$

$$m_3 = 0,707 \text{ кг}$$

$$m_4 = 0,927 \text{ кг}$$

$$\text{Пример расчета среднего времени: } t_{m1 \text{ ср. 1р.}} = \frac{4,99+4,74+4,86}{3} = 4,8 \text{ с.}$$

9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

Таблица 2: ускорение груза a м/с².

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
m_1	0,059	0,047	0,036	0,026	0,029	0,018
m_2	0,133	0,089	0,068	0,05	0,04	0,032
m_3	0,179	0,14	0,094	0,072	0,055	0,043
m_4	0,226	0,18	0,126	0,099	0,074	0,06

Пример расчета ускорения груза a м/с²:

$$a_1 = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 0,7}{4,86^2} = \frac{3500}{59049} = 0,059 \text{ м/с}^2$$

Таблица 3: угловое ускорение крестовины ε рад/с².

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
m_1	2,574	2,037	1,558	1,14	1,263	0,767
m_2	5,775	3,888	2,971	2,159	1,745	1,371
m_3	7,801	6,083	4,107	3,125	2,412	1,871
m_4	9,818	7,82	5,478	4,306	3,227	2,624

Пример расчета углового ускорения крестовины ε рад/с²:

$$\varepsilon_1 = \frac{2a}{d} = \frac{2 \cdot 0,059}{0,046} = \frac{59}{23} = 2,574 \text{ рад/с}^2$$

Таблица 4: момент силы натяжения нити M Нм.

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
m_1	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
m_2	0,109	0,109	0,109	0,109	0,11	0,11
m_3	0,157	0,157	0,158	0,158	0,159	0,159
m_4	0,205	0,206	0,207	0,207	0,208	0,208

Пример расчета момента силы натяжения нити M Нм:

$$M = \frac{md}{2}(g - a) = \frac{0,267 \cdot 0,046}{2}(9,82 - 0,059) = \frac{6141}{1000000} \cdot \frac{9761}{1000} = 0,06 \text{ Нм}$$

Таблица 5: данные для нахождения зависимостей $M(\varepsilon)$ и $I(R^2)$.

	Риска 1	Риска 2	Риска 3	Риска 4	Риска 5	Риска 6	Среднее
R м	0,077	0,102	0,127	0,152	0,177	0,202	0,14
R^2 м ²	0,006	0,01	0,016	0,023	0,031	0,041	0,021
$M_{тр}$ Нм	0,003	0,102	0	0,008	-0,026	0	0,015
I кг · м ²	0,02	0,025	0,038	0,047	0,074	0,081	0,044

Примеры расчетов:

$$I_1 = \frac{\Sigma(\varepsilon_i - \varepsilon_{cp}) \cdot (M_i - M_{cp})}{\Sigma(\varepsilon_i - \varepsilon_{cp})^2} = \frac{0,573}{28,642} = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$M_{тр1} = M_{cp} - I \cdot \varepsilon_{cp} = 0,132 - 0,02 \cdot 6,492 = 0,003 \text{ Нм}$$

$$R_1 = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b = 0,057 + (1 - 1) \cdot 0,025 + 0,02 = 0,077 \text{ м}$$

$$R_2^2 = 0,077^2 = 0,006 \text{ м}^2$$

Подсчет значений I_0 и m_{yt} с помощью теоремы Штейнера:

$$m_{yt} = \frac{\Sigma(R_i^2 - R_{cp}^2) \cdot (I_i - I_{cp})}{\Sigma(R_i^2 - R_{cp}^2)} = \frac{0,001}{0,0046} = 0,461 \text{ кг}$$

$$I_0 = I_{cp} - 4m_{yt} \cdot R_{cp}^2 = 0,047 + 4 \cdot 1,843 \cdot 0,21 = 0,008 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Абсолютная погрешность прямого измерения и погрешность среднего значения времени для первого значения t_{cp} :

$$\begin{aligned}\Delta\langle t\rangle_{cl} &= t_s(a_{дов}, N) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_{1i} - \langle t_1 \rangle)^2}{N(N-1)}} \\ &= 4,302 \sqrt{\frac{(4,99 - 4,86)^2 + (4,74 - 4,86)^2 + (4,86 - 4,86)^2}{3(3-1)}} \\ &= 4,302 \sqrt{\frac{0,13^2 + (-0,12)^2}{6}} = \frac{2151}{500} \cdot \sqrt{\frac{313}{60000}} = \frac{2151\sqrt{313}}{50000\sqrt{6}} = \frac{717\sqrt{1678}}{100000} = 0,31 \text{ с}\end{aligned}$$

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta\langle t\rangle_{cl})^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta t_{np}\right)^2} = \sqrt{0,31^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 0,01\right)^2} = \sqrt{\frac{8653}{90000}} = \frac{\sqrt{8653}}{300} = 0,31 \text{ с}$$

Погрешность ускорения груза для первого значения a :

$$\begin{aligned}\Delta_a &= \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial h} \cdot \Delta_h\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cdot \Delta_t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \cdot \Delta_h\right)^2 + \left(-\frac{4h}{t^3} \cdot \Delta_t\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{4,86^2} \cdot 0,0005\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 0,7}{4,86^3} \cdot 0,31\right)^2} = 0,008 \text{ м/с}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon &= \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} \cdot \Delta_a\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial d} \cdot \Delta_d\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{d} \cdot \Delta_a\right)^2 + \left(-\frac{2a}{d^2} \cdot \Delta_d\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{0,046} \cdot 0,008\right)^2 + \left(-\frac{2 \cdot 0,059}{0,046^2} \cdot 0,0005\right)^2} = 0,33 \text{ рад/с}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_M &= \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial m} \cdot \Delta_m\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial d} \cdot \Delta_d\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial a} \cdot \Delta_a\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{d(g-a)}{2} \cdot \Delta_m\right)^2 + \left(\frac{m(g-a)}{2} \cdot \Delta_d\right)^2 + \left(-\frac{md}{2} \cdot \Delta_a\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,046(9,82 - 0,059)}{2} \cdot 0,0005\right)^2 + \left(\frac{0,267(9,82 - 0,059)}{2} \cdot 0,0005\right)^2 + \left(-\frac{0,267 \cdot 0,046}{2} \cdot 0,008\right)^2} \\ &= 0,001 \text{ Нм}\end{aligned}$$

Таблица 6: значения погрешностей для первых значений a, ε, M .

Погрешности	
a	0,008 м/с ²
ε	0,33 рад/с ²
M	0,001 Нм

Погрешность углового коэффициента:

$$D = \Sigma(R_i^2 - R_{cp}^2) = -0,014 - 0,009 - 0,003 + 0,004 + 0,012 + 0,021 = 0,011$$

Среднеквадратическое отклонение $S_{m_{yt}}$ и S_{i_0} :

$$S_{m_{yt}} = \sqrt{\frac{1}{D} \cdot \frac{\Sigma M_i - (M_{тр} + I_0 \cdot R_i^2)}{n - 2}} = \sqrt{91,429 \cdot 0,00002} = \sqrt{0,002} = 0,047 \text{ кг}$$

$$S_{i_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{R_{cp}^2}{D}\right) \cdot \frac{\Sigma d_i^2}{n - 2}} = \sqrt{1,946 \cdot 0,00002} = \sqrt{0,00004} = 0,007 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешности массы утяжелителя и сумма моментов инерции стрелной крестовины Δm_{yt} и ΔI_0 соответственно:

$$\Delta m_{yt} = 2 \cdot S_{m_{yt}} = 2 \cdot 0,047 = 0,094 \text{ кг}$$

$$\Delta I_0 = 2 \cdot S_{i_0} = 0,014 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

11. Графики.

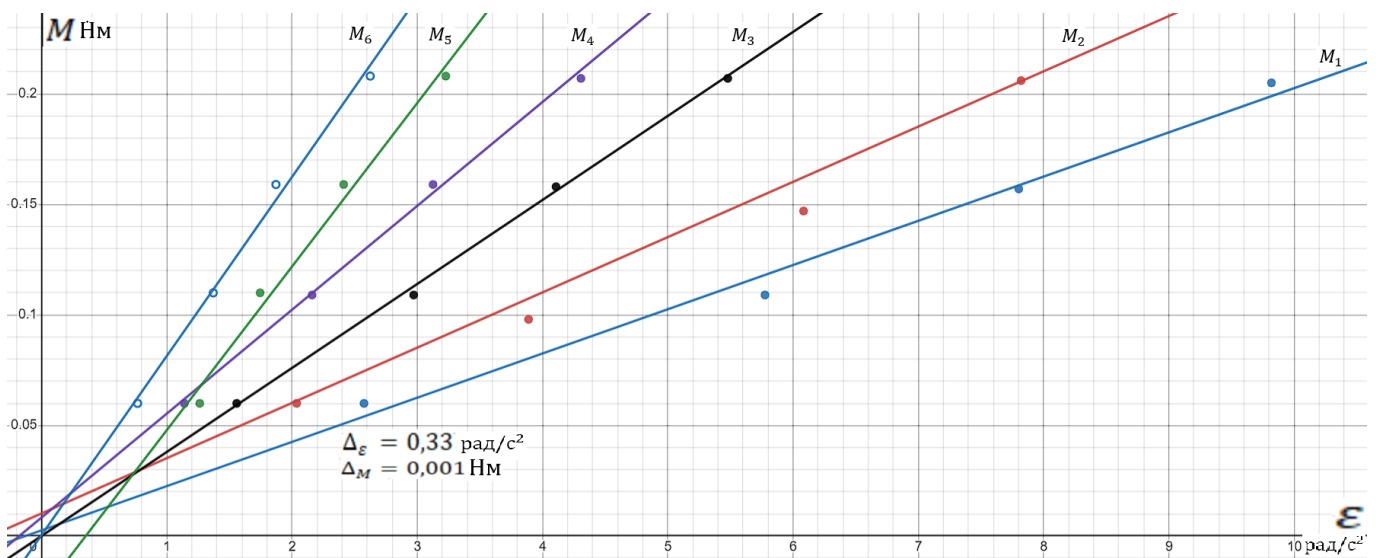


График 1: точки зависимости $M(\varepsilon)$ и графики аппроксимации $M = M_{тр} + I\varepsilon$.

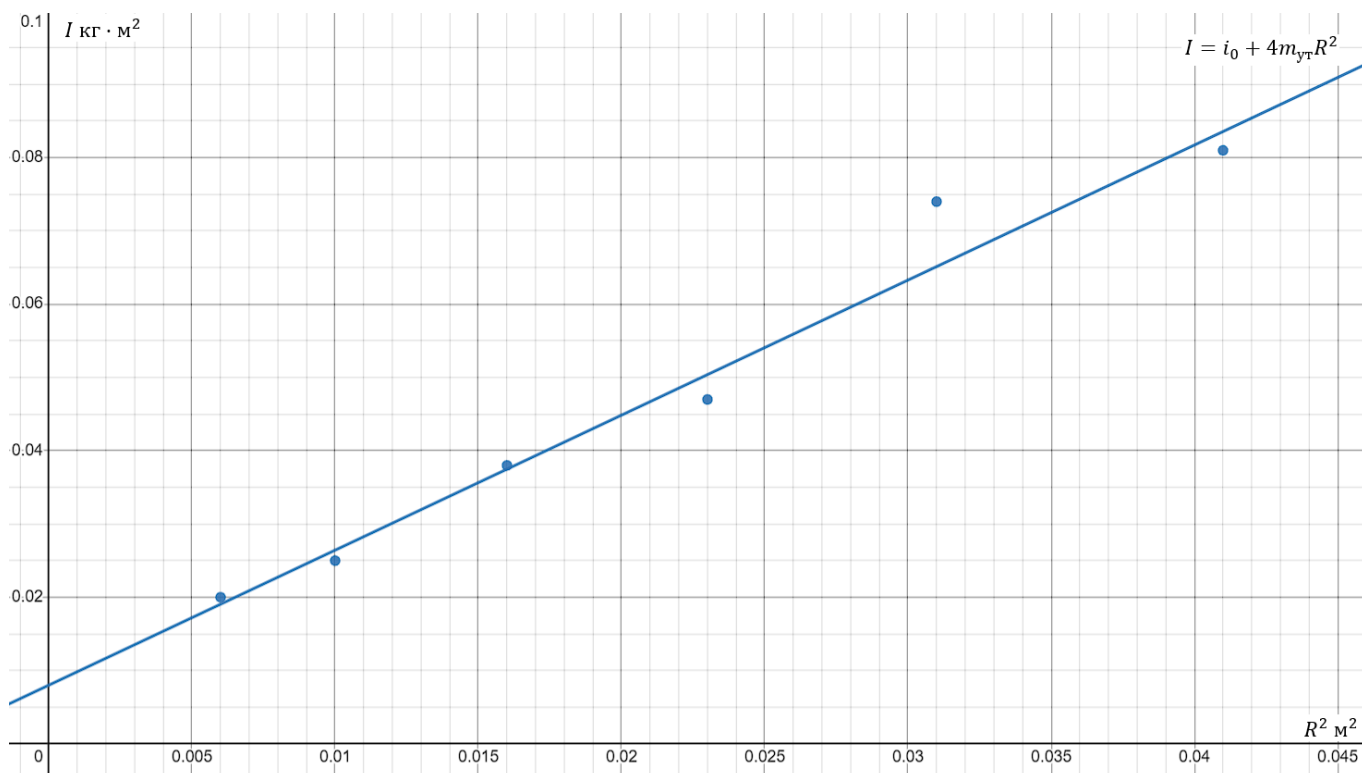


График 2: точки зависимости $I(R^2)$ и график аппроксимации $I = i_0 + 4m_{yt}R^2$.

12. Окончательные результаты.

Зависимость $M(\varepsilon)$ является линейной. Коэффициенты представлены в таблице 5 и изображены на первом графике (для каждого положения утяжелителей).

Зависимость $I(R^2)$ также является линейной (в пределах погрешностей).

$$\Delta I_0 = 0,008 \pm 0,014 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$m_{yt} = 0,0461 \pm 0,094 \text{ кг}$$

13. Выводы и анализ результатов работы.

С использованием маятника Обербека было установлено, что существует линейная зависимость между моментом вращения и угловым ускорением. Второй график подтвердил эту линейную зависимость, показав, что момент инерции тела зависит от расстояния утяжелителей до оси вращения, причем угловой коэффициент этого графика соответствует массе тела. Погрешности в измерениях в основном связаны с человеческим фактором и точностью секундомера.

14. Замечания преподавателя (*исправления, вызванные замечаниями преподавателя, также помещают в этот пункт*).

Вашильков Дмитрий
Ладышев Дмитрий M3215

08.09.2023

104
Дима

Физический факультет ФТМФ ИТМО

Приложение

Таблица 1: Протокол измерений времени падения груза при разной массе груза и разным положением утяжелителей на крестовине

Масса груза, г	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
m_1	t_1 4.59	5.21	6.20	7.39	7.86	4.74
	t_2 4.74	5.45	6.45	7.28	8.35	5.0
	t_3 4.86	5.74	6.10	7.25	7.93	8.74
	t_{cp}					
m_2	t_1 3.22	4.04	4.41	5.26	5.92	6.54
	t_2 3.29	3.91	4.53	5.31	5.90	6.77
	t_3 3.23	3.92	4.69	5.36	5.90	6.65
	t_{cp}					
m_3	t_1 2.75	3.16	3.89	4.49	4.96	5.44
	t_2 2.83	3.18	3.81	4.35	5.15	5.34
	t_3 2.80	3.15	3.85	4.40	4.96	5.59
	t_{cp}					
m_4	t_1 2.39	2.80	3.20	3.71*	4.43	4.74
	t_2 2.65	2.78	3.42	3.89	4.32	5.02
	t_3 2.43	2.79	3.29	3.80	4.28	4.99
	t_{cp}					

* 3.59

~ 8.03

✓ 4.89