Университет ИТМО

Физико-технический мегафакультет

Физический факультет

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Группа М3304 К работе допущен

Студент Васильков Д.А, Лавренов Д.А. Работа выполнена

Преподаватель Шоев В.И. Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №5.IBM2

1) Цель работы

1. Самостоятельное создание квантовых схем с применением управляемых двух- и трёхкубитных гейтов и разработка квантовых алгоритмов на их основе.

2) Задачи, решаемые при выполнении работы

1. Построить многокубитные квантовые цепи;
2. Зафиксировать результаты симуляции цепей;
3. Сопоставить результаты симуляции с теоретическими распределениями.

3) Объект исследования

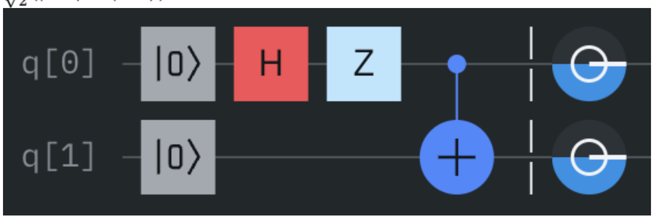
Квантовый компьютер, распределение вероятности многокубитных цепей.

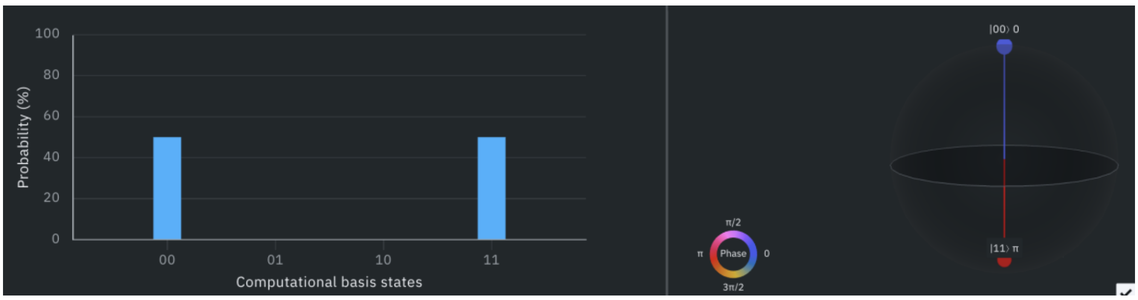
4) Метод экспериментального исследования

Внедрение вентилей в построение схем, проведение моделирований

5) Упражнение №3

5.1 Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

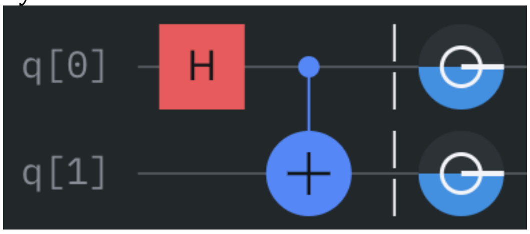


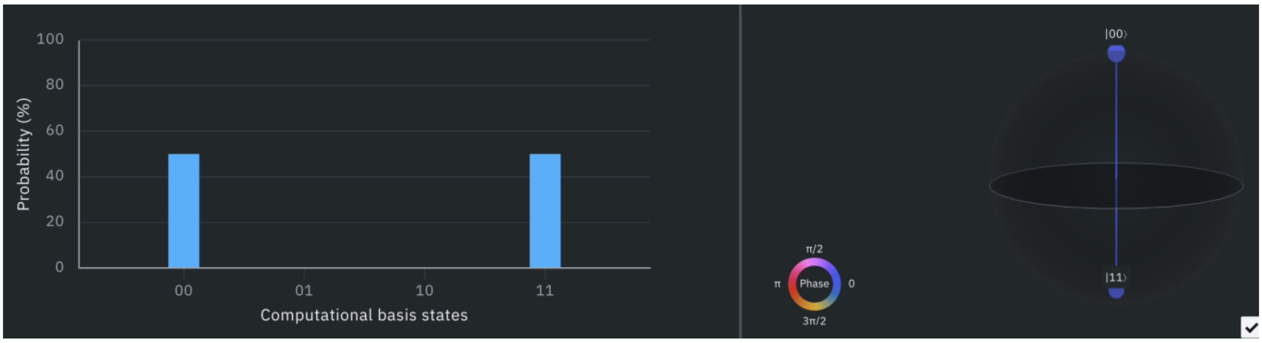


Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
1024.0	502.0	0.0	0.0	522.0	0.490234375	0.0	0.0	0.509765625

1) $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

5.2 Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\rangle + |\,11\rangle)$





Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
1024.0	482.0	0.0	0.0	542.0	0.470703125	0.0	0.0	0.529296875

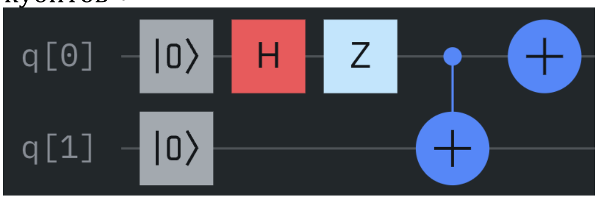
H переводит кубит в суперпозицию:

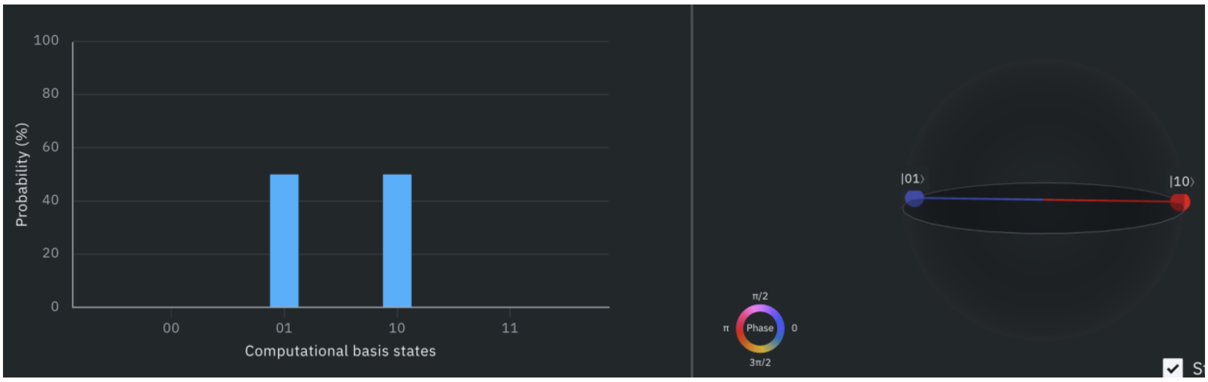
$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

X меняет состояние:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

5.3 Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\rangle - |\,10\rangle)$

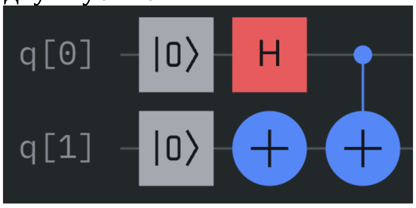


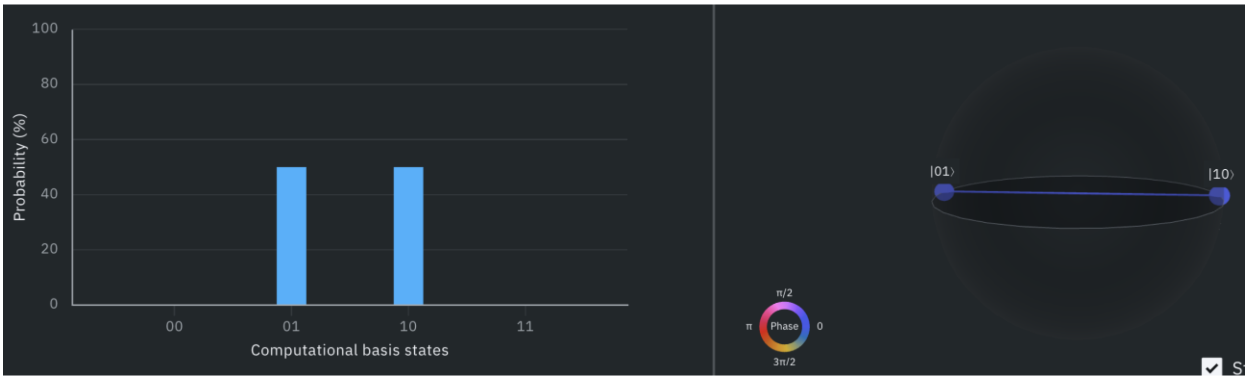


Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
1024.0	0.0	543.0	481.0	0.0	0.0	0.5302734375	0.4697265625	0.0

1) H: $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
2) Z: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
3) CX: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$
4) X: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

5.4 Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из кубитов двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\rangle + |\,10\rangle)$



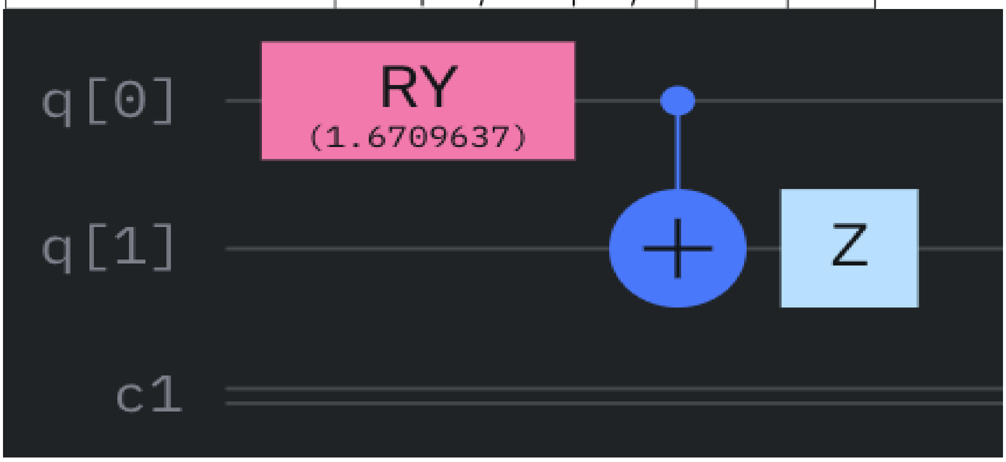


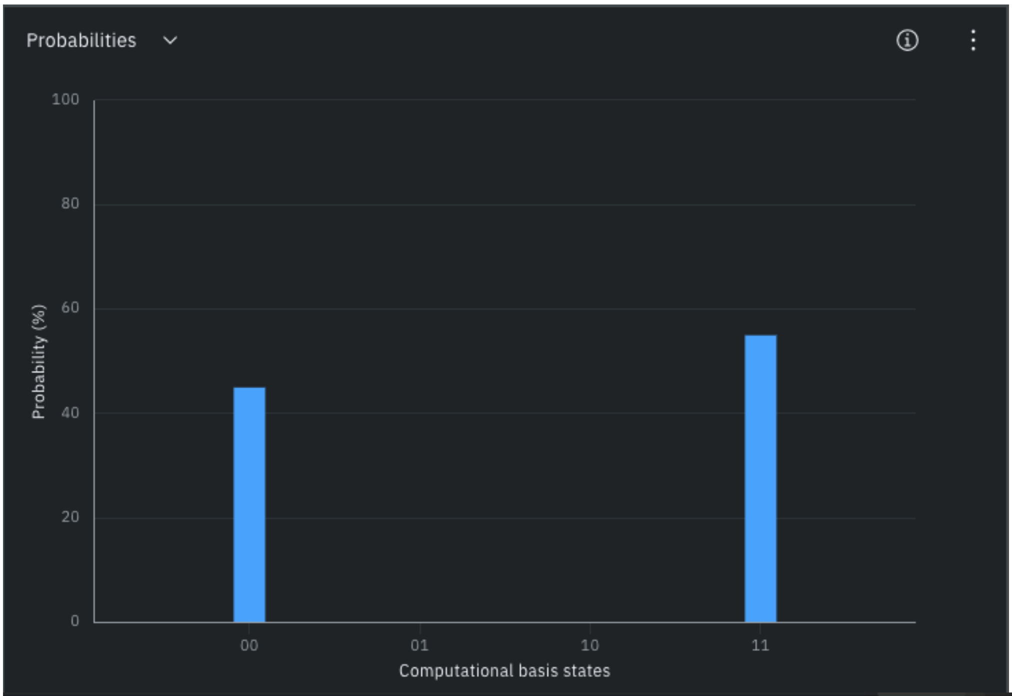
Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
1024.0	0.0	508.0	516.0	0.0	0.0	0.49609375	0.50390625	0.0

1) H: $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle$
2) CX: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle$

5.5 Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов в соответствии с вариантами задания приведенными в таблице 2.

Вариант задания	Состояние кубитов	$\lvert a\rvert^2$	$\lvert b\rvert^2$
5	$a\,|\,00\rangle - b\,|\,11\rangle$	45	55





1 row 1 rows × 10 cols

	Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
0	1024.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Применение $R_y(\theta)$ на q_0:

Оператор $R_y(\theta)$ вращает кубит q_0 вокруг оси y *на угол θ.*

Матрица $R_y(\theta)$ имеет вид:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Применяя $R_y(1.6709637)$ к состоянию $|0\rangle$:

$$|q_0\rangle = \cos(1.6709637/2)|0\rangle + \sin(1.6709637/2)|1\rangle$$

Пусть: $\cos(1.6709637/2) = a, \quad \sin(1.6709637/2) = b$

Тогда: $|q_0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

Применение $CX(q_0, q_1)$

изменяет q_1 только если $q_0 = |1\rangle$

$$CX(|00\rangle) = |00\rangle, \quad CX(|10\rangle) = |11\rangle$$

После применения CX система становится

$$a|00\rangle + b|11\rangle$$

Применение Z *на* q_1

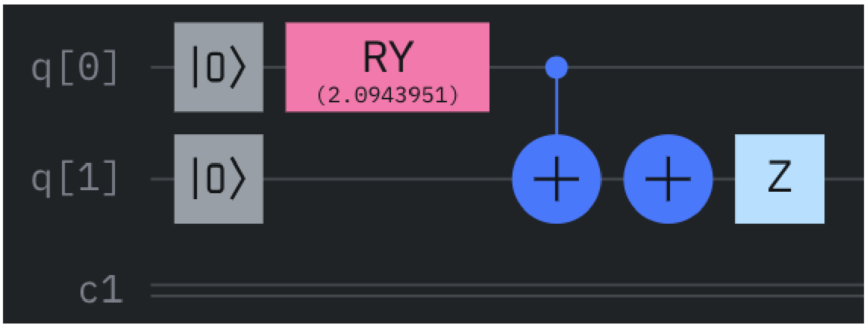
Оператор Z инвертирует знак амплитуды состояния $|1\rangle$, оставляя $|0\rangle$ неизменным

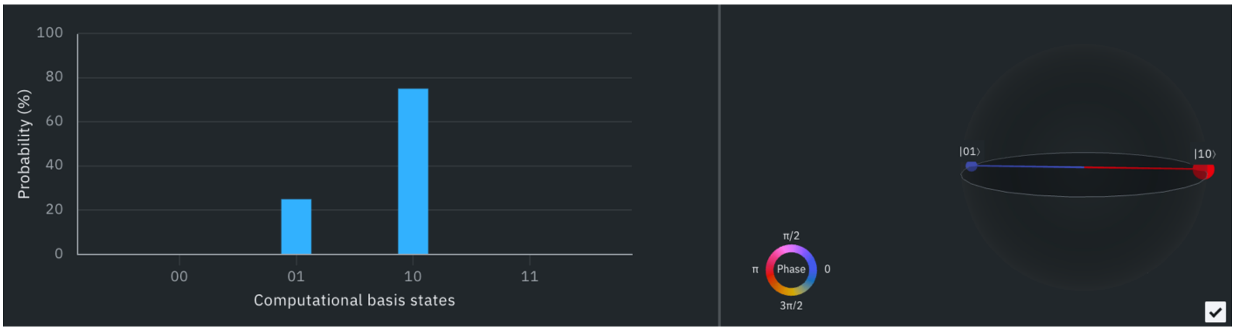
$$Z(|0\rangle) = |0\rangle, \quad Z(|1\rangle) = -|1\rangle$$

Применяя Z к q_1, получаем

$$a|00\rangle - b|11\rangle$$

Вариант задания	Состояние кубитов	$\lvert a\rvert^2$	$\lvert b\rvert^2$
13	$a \mid 01\rangle - b \mid 10\rangle$	25	75





Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
1024.0	0.0	262.0	762.0	0.0	0.0	0.255859375	0.744140625	0.0

Применение $R_y(\theta)$ на q_0:

Оператор $R_y(\theta)$ вращает кубит вокруг оси y на угол θ.

Матрица $R_y(\theta)$ имеет вид:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Применяя $R_y(2.0943951)$ к состоянию $|q_0\rangle = |0\rangle$, получаем:

$$|q_0\rangle = \cos(2.0943951/2)|0\rangle + \sin(2.0943951/2)|1\rangle$$

Пусть:

$$\cos(2.0943951/2) = a, \quad \sin(2.0943951/2) = b$$

Тогда состояние после операции R_y:

$$|q_0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

Общее состояние системы (так как $q_1 = |0\rangle$) становится:

$$a|00\rangle + b|10\rangle$$

Применение $CX(q_0, q_1)$
Контрольный оператор CX (CNOT) использует q_0 как управляющий кубит q_1 как целевой кубит. Он изменяет q_1, если $q_0 = |1\rangle$:

$$CX(|00\rangle) = |00\rangle, \quad CX(|10\rangle) = |11\rangle$$

Применяя CX, получаем:

$$a|00\rangle + b|11\rangle$$

Применение X на q_1

Оператор X (NOT) меняет состояния $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$:

$$X(|0\rangle) = |1\rangle, \quad X(|1\rangle) = |0\rangle$$

Применяя X на q_1, получаем:

$$a|01\rangle + b|10\rangle$$

Применение Z на q_1:

Оператор Z меняет знак амплитуды состояния $|1\rangle$, оставляя $|0\rangle$ неизменным:

$$Z(|0\rangle) = |0\rangle, \quad Z(|1\rangle) = -|1\rangle$$

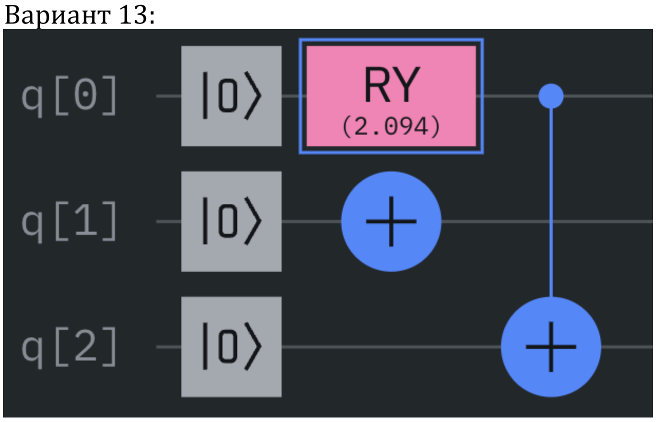
Применяя Z на q_1, получаем:

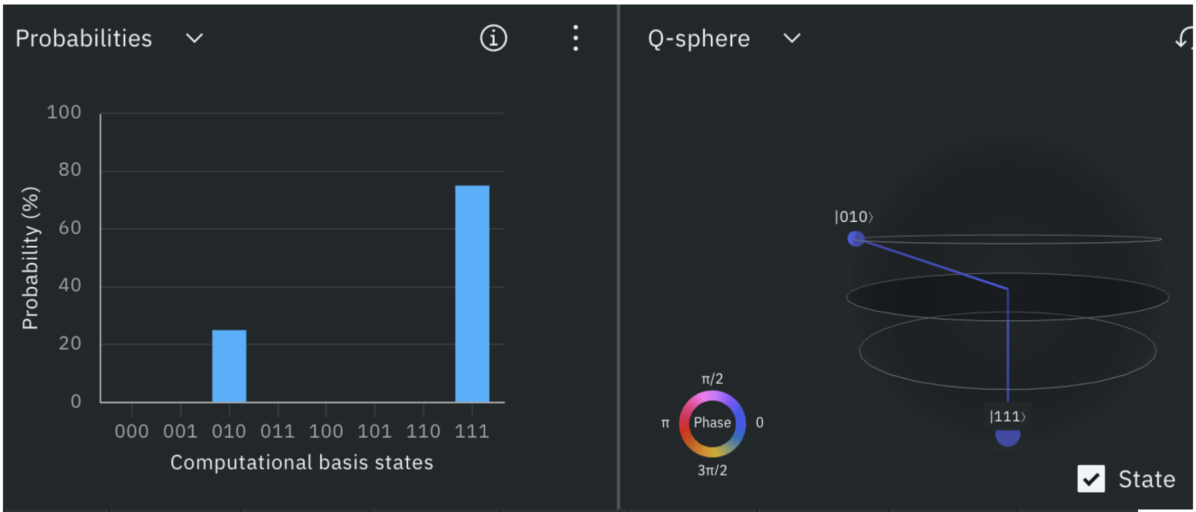
$$a|01\rangle - b|10\rangle$$

5.6 Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из трех кубитов $a|010> + b|111>$

Вариант 13:
$\theta = 2\cos^{-1}\sqrt{0.25} = 2.094$
Вариант 5:
$\theta = 2\cos^{-1}\sqrt{0.45} = 1.67$

Вариант 13:

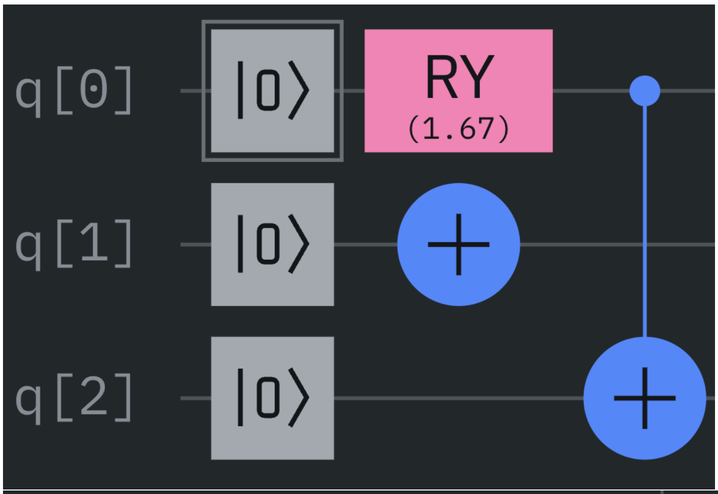


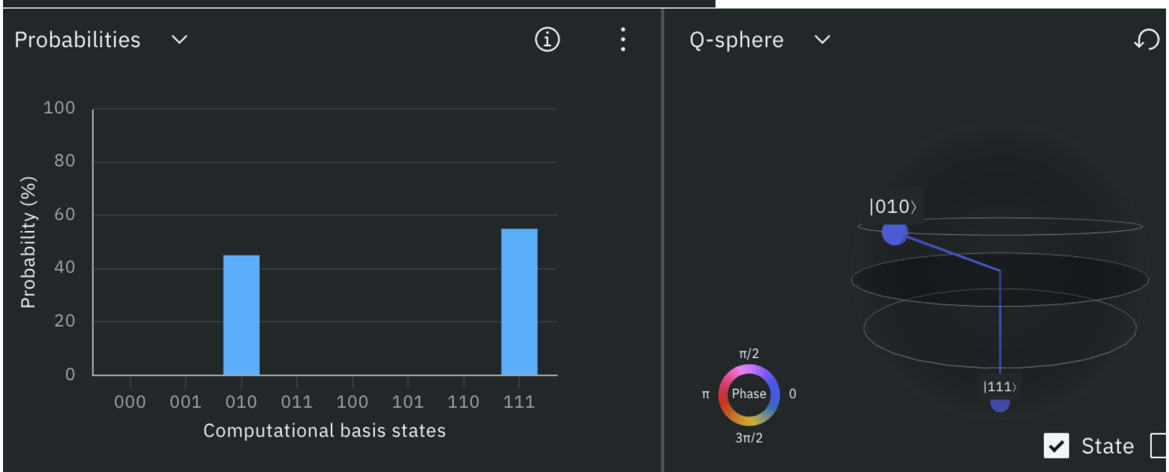


Shots	000 (Q)	001 (Q)	010 (Q)	011 (Q)	100 (Q)	101 (Q)	110 (Q)	111 (Q)
1024.0	0.0	0.0	276.0	0.0	0.0	0.0	0.0	748.0

000 (F)	001 (F)	010 (F)	011 (F)	100 (F)	101 (F)	110 (F)	111 (F)
0.0	0.0	0.26953125	0.0	0.0	0.0	0.0	0.73046875

Вариант 5:





Shots	000 (Q)	001 (Q)	010 (Q)	011 (Q)	100 (Q)	101 (Q)	110 (Q)	111 (Q)
1024.0	0.0	0.0	448.0	0.0	0.0	0.0	0.0	576.0

000 (F)	001 (F)	010 (F)	011 (F)	100 (F)	101 (F)	110 (F)	111 (F)
0.0	0.0	0.4375	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5625

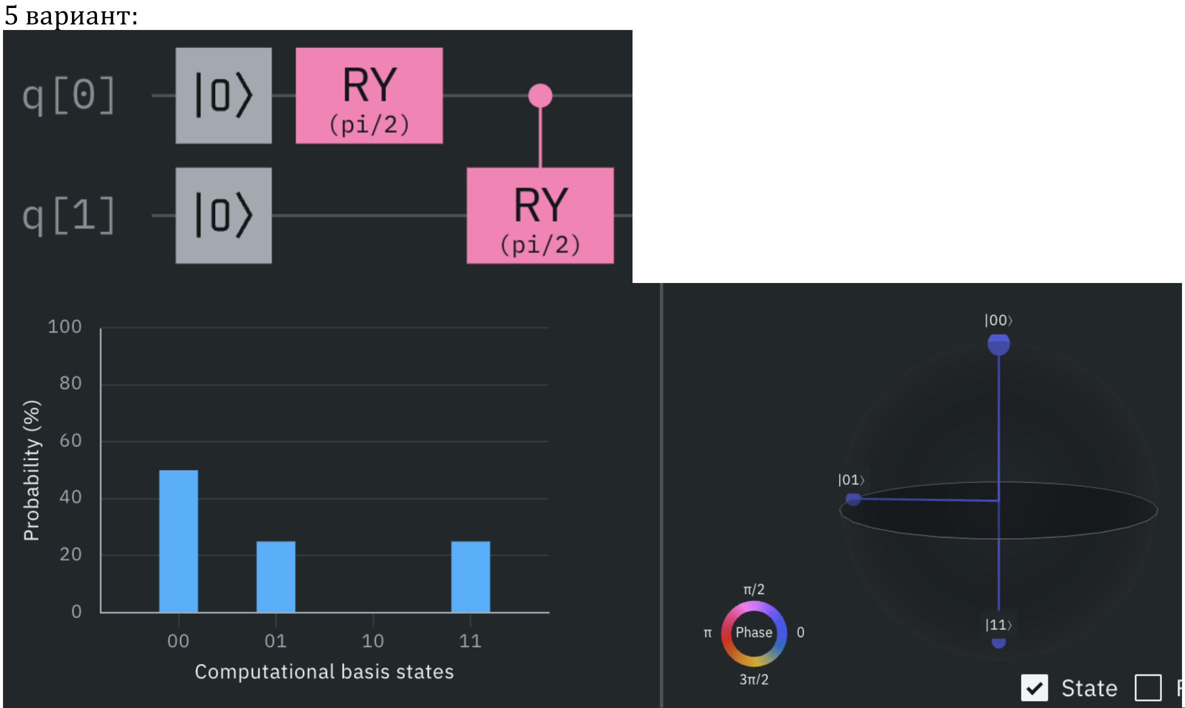
1) RY: $|0\rangle \to \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$
2) X ко второму кубиту: $X|0\rangle \to |1\rangle$
3) CNOT для 1-го и 3-го: $\cos\frac{\theta}{2}|00\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|11\rangle$
4) При том, что второй равен $|1\rangle$: $\cos\frac{\theta}{2}|010\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|111\rangle$

5.7 Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\alpha|00> +\beta|01> +\gamma|11>$

Вариант задания	$\|\alpha\|^2$	$\|\beta\|^2$	$\|\gamma\|^2$
5	50	25	25
13	20	30	50

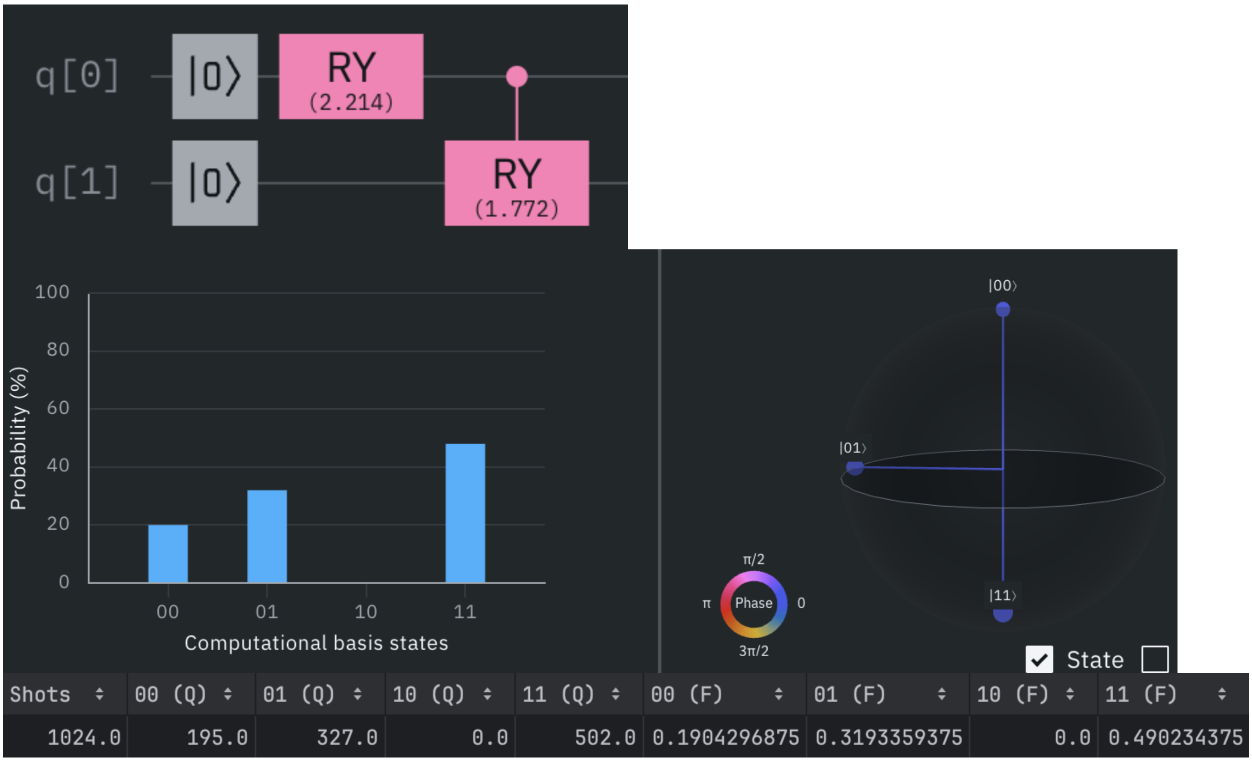
$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 100$
$\cos^2\frac{\theta}{2} = 0.5 \to \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 0.5 = 0.5$
5 вариант:
$\theta_1 = 2\cos^{-1}\sqrt{0.5} = \frac{\pi}{2}$
$\theta_2 = 2\cos^{-1}\sqrt{0.5} = \frac{\pi}{2}$
13 вариант:
$\theta_1 = 2\cos^{-1}\sqrt{0.2} = 2.214$
$\theta_2 = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{0.3}{0.5}} = 1.772$

5 вариант:



Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
1024.0	493.0	246.0	0.0	285.0	0.4814453125	0.240234375	0.0	0.2783203125

13 вариант:



Shots	00 (Q)	01 (Q)	10 (Q)	11 (Q)	00 (F)	01 (F)	10 (F)	11 (F)
1024.0	195.0	327.0	0.0	502.0	0.1904296875	0.3193359375	0.0	0.490234375

$|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2=100$

$\cos^2\frac{\theta}{2}=0.5\rightarrow\sin^2\frac{\theta}{2}=1-0.5=0.5$

5 вариант:

$\theta_1=2\cos^{-1}\sqrt{0.5}=\frac{\pi}{2}$

$\theta_2=2\cos^{-1}\sqrt{0.5}=\frac{\pi}{2}$

13 вариант:

$\theta_1=2\cos^{-1}\sqrt{0.2}=2.214$

$\theta_2=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{0.3}{0.5}}=1.772$

Система после применения RY:

$\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

Применяем управляющий RY и раскладываем функцию на 2 случая:

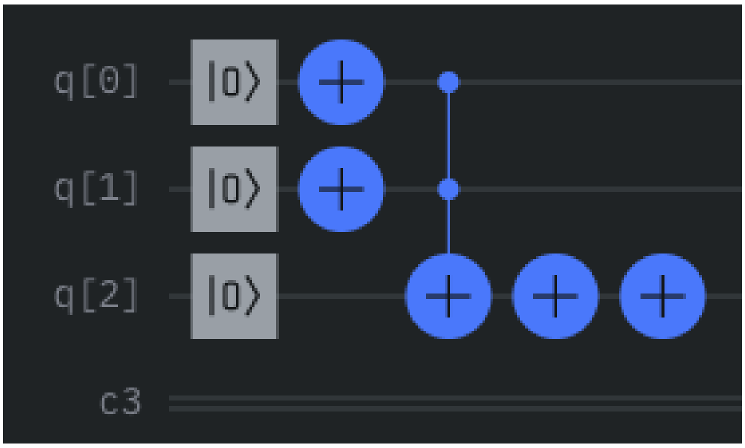
$\cos\frac{\theta}{2}|00\rangle+\sin\frac{\theta}{2}\cdot(\cos\frac{\theta}{2};\sin\frac{\theta}{2})|1\rangle\rightarrow\cos\frac{\theta}{2}|00\rangle+\sin\frac{\theta}{2}\cdot(\cos\frac{\theta_1}{2}|01\rangle+\sin\frac{\theta_1}{2}|11\rangle)$

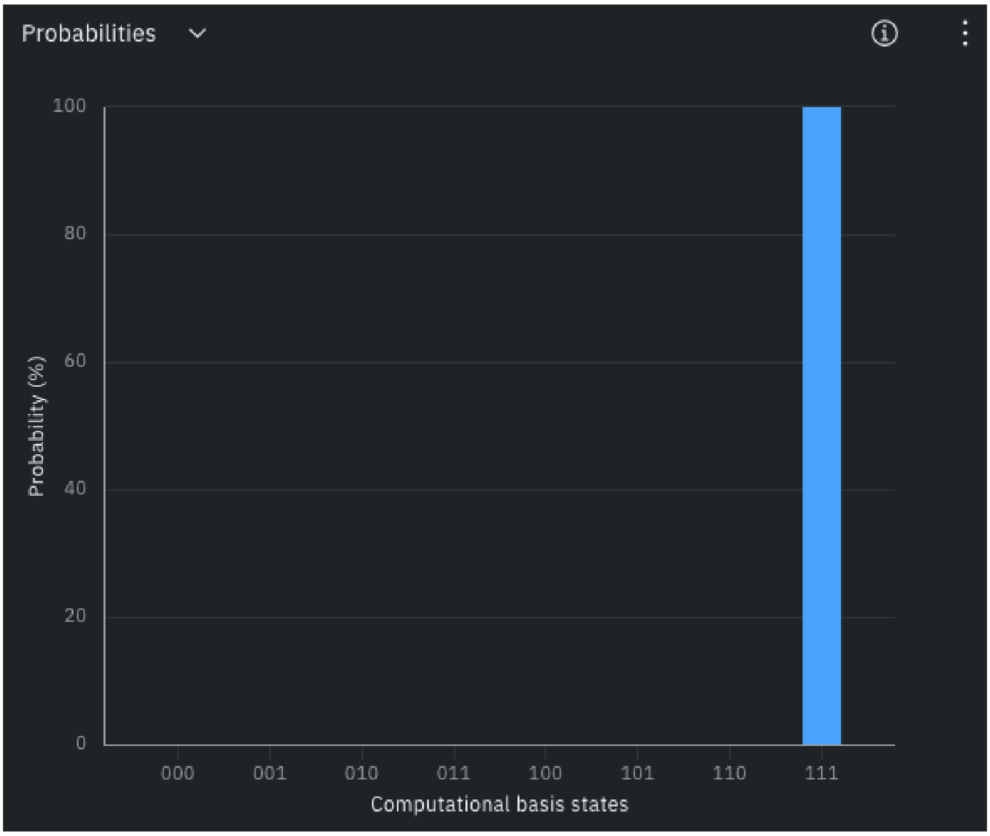
$\rightarrow\cos\frac{\theta}{2}|00\rangle+\sin\frac{\theta}{2}\cdot(\cos\frac{\theta_1}{2}|01\rangle+\sin\frac{\theta_1}{2}|11\rangle)$

6) Упражнение №4

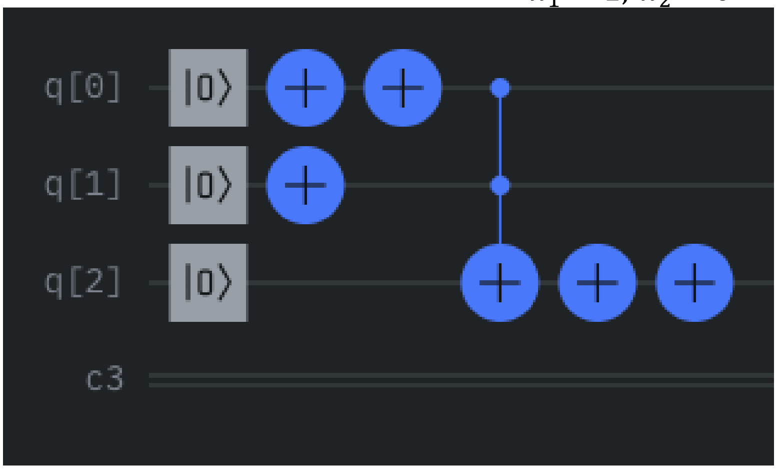
6.5. Реализуйте функцию $f(x1,x2)=\mathrm{NOT}(\,x1\ \mathrm{OR}\ x2)$. Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата.

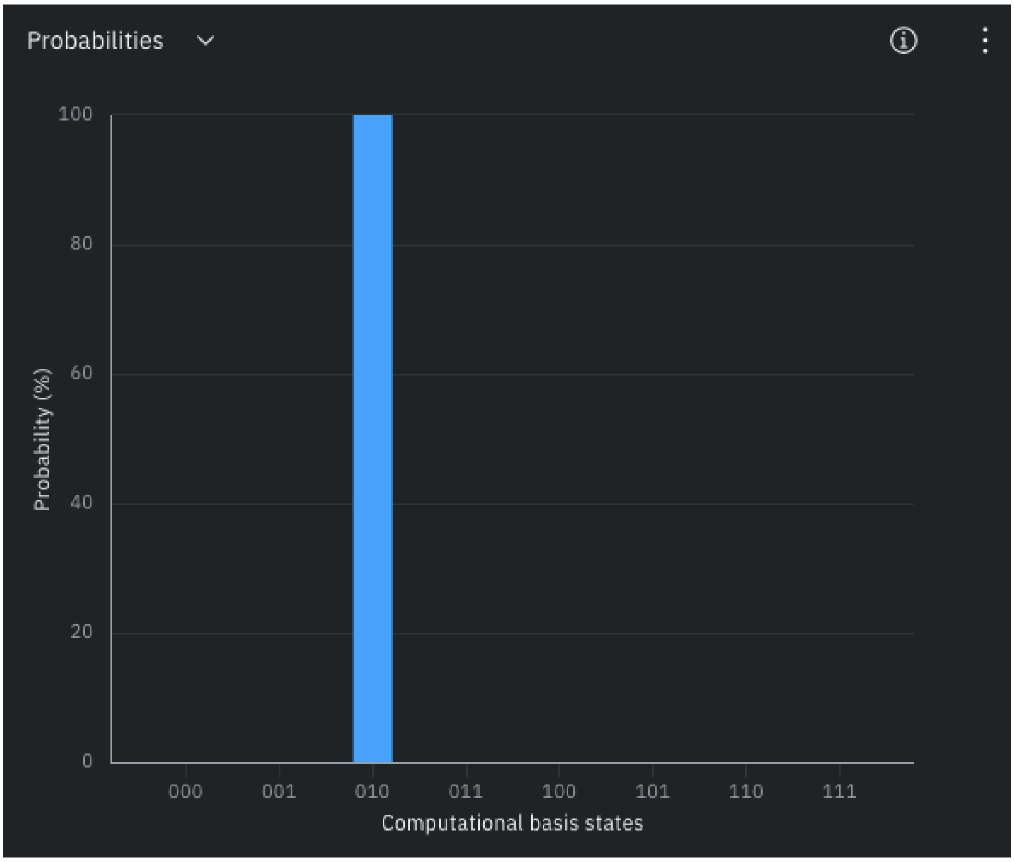
$$x_1=0;\ x_2=0$$


q[0]
q[1]
q[2]
c3

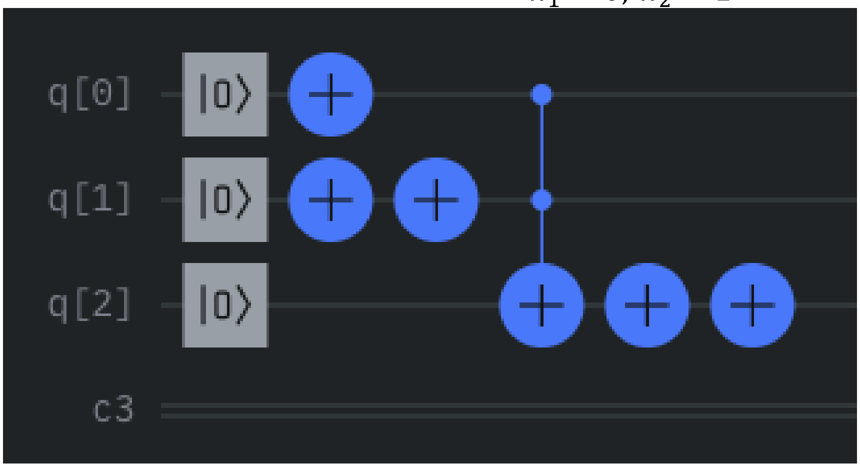

Probabilities
Probability (%)
100
80
60
40
20
0
000
001
010
011
100
101
110
111
Computational basis states

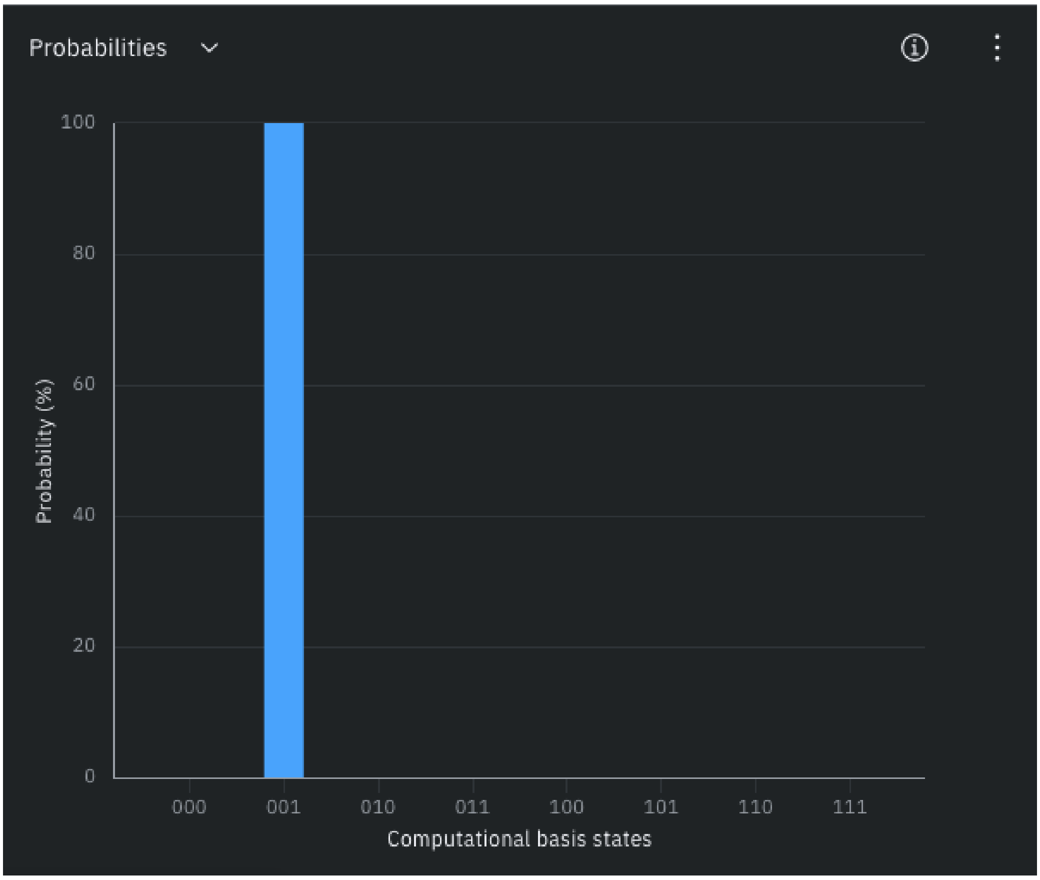
$x_1 = 1; \ x_2 = 0$


q[0]
q[1]
q[2]
c3

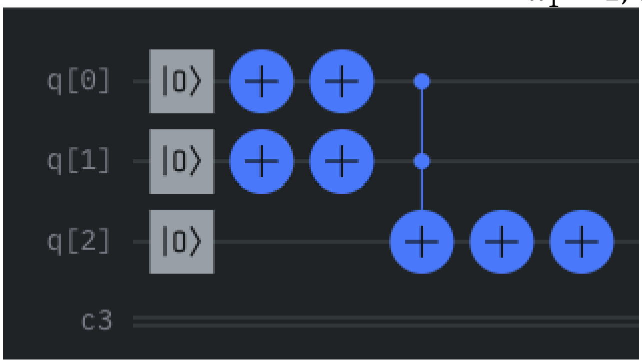

Probabilities
100
80
60
40
20
0
Probability (%)
000
001
010
011
100
101
110
111
Computational basis states

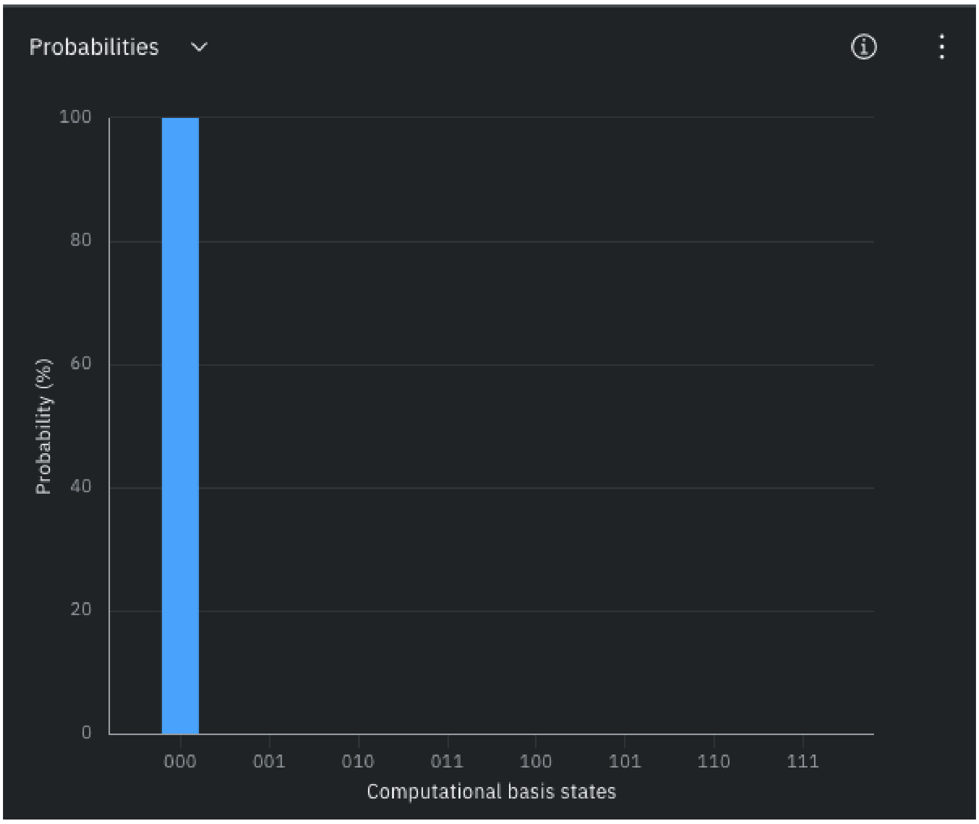
$x_1 = 0;\ x_2 = 1$


q[0]
q[1]
q[2]
c3


Probabilities
100
80
60
40
20
0
Probability (%)
000
001
010
011
100
101
110
111
Computational basis states

$x_1 = 1; x_2 = 1$


q[0]
q[1]
q[2]
c3



Кубиты q_0, q_1 и q_2 инициализируются так, что:

$$q_0 = x_1, \quad q_1 = x_2, \quad q_2 = 0.$$

q_0 и q_1 - входные параметры, q_2 - результат

Применяем вентиль X (который аналогичен классической операции NOT) к кубитам

q_0 и q_1. Вентиль X меняет значение кубита на противоположное:

$$Xq_0 \implies q_0 = \mathrm{NOT}(x_1), \quad Xq_1 \implies q_1 = \mathrm{NOT}(x_2).$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

Для реализации операции AND применяем вентиль Toffoli (CCX) к кубитам q_0, q_1 и q_2

Он имеет два управляющих кубита и один целевой кубит. Если оба управляющих кубита находятся в состоянии $|1\rangle$, то целевой кубит инвертируется, иначе он остаётся неизменным.

$$CCX(q_0, q_1, q_2) \implies q_2 = \text{AND}(\text{NOT}(x_1), \text{NOT}(x_2))$$

$$CCX = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

где I_4 — это единичная матрица размером 4×4, а X — это матрица 2×2

Далее, применяем вентиль X к кубиту q_2 для инвертирования результата операции AND:

$$Xq_2 \implies q_2 = \text{NOT}(\text{AND}(\text{NOT}(x_1), \text{NOT}(x_2)))$$

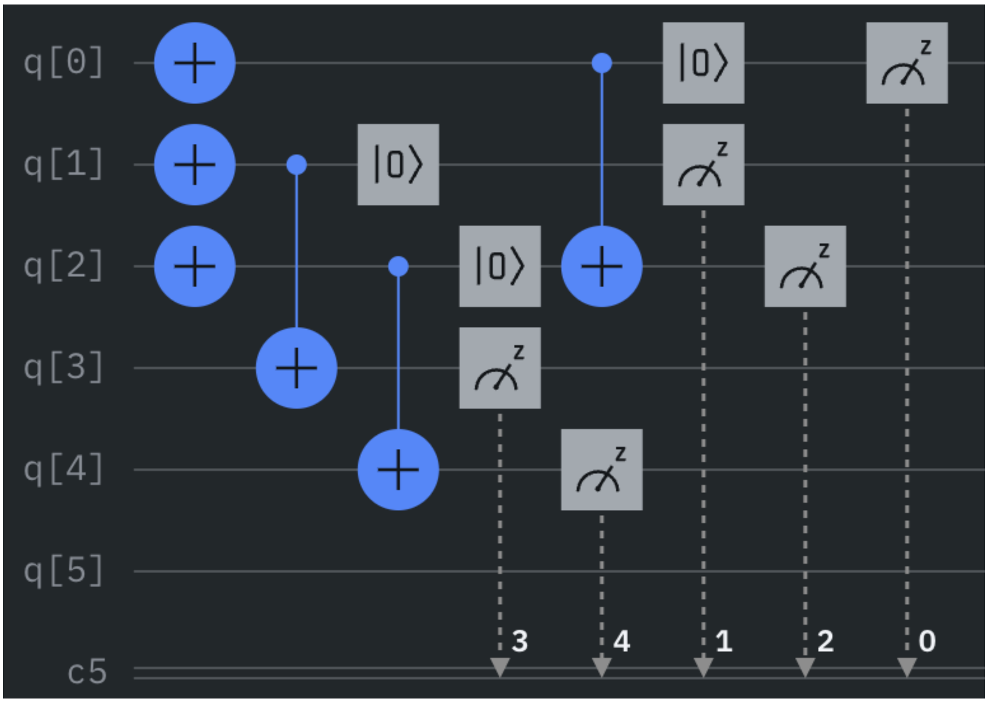
По закону Де Моргана:

$$\text{NOT}(\text{AND}(\text{NOT}(x_1), \text{NOT}(x_2))) = x_1 \lor x_2$$

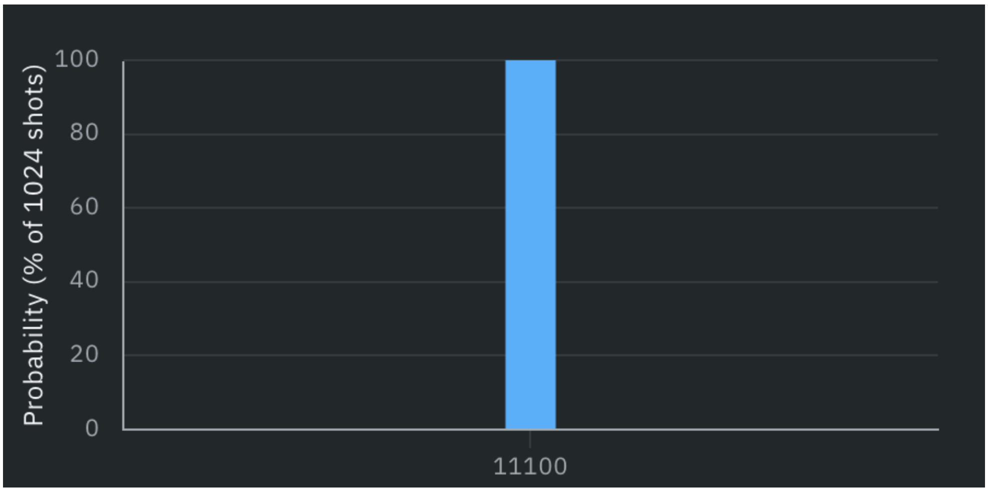
Финальная инверсия

$$Xq_2 \implies q_2 = \text{NOT}(x_1 \lor x_2)$$

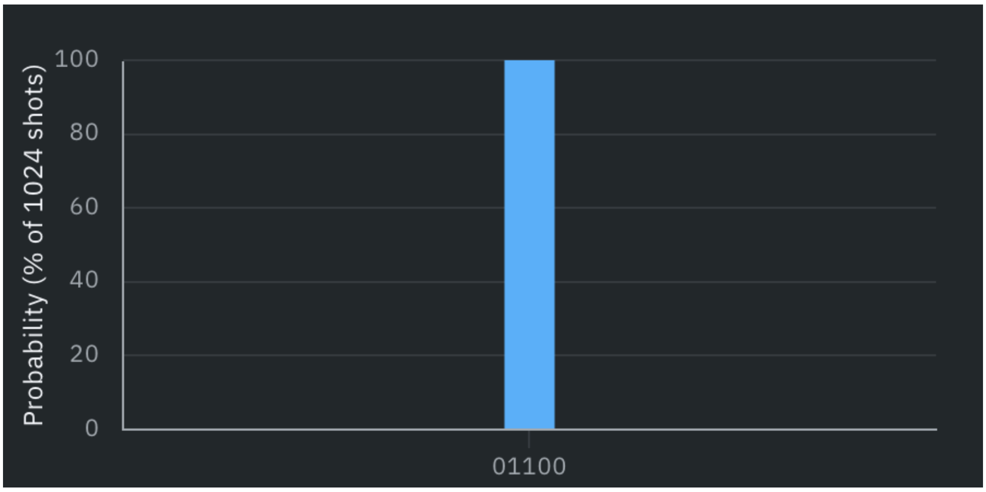
6.13. Реализуйте алгоритм умножения на 4. Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата



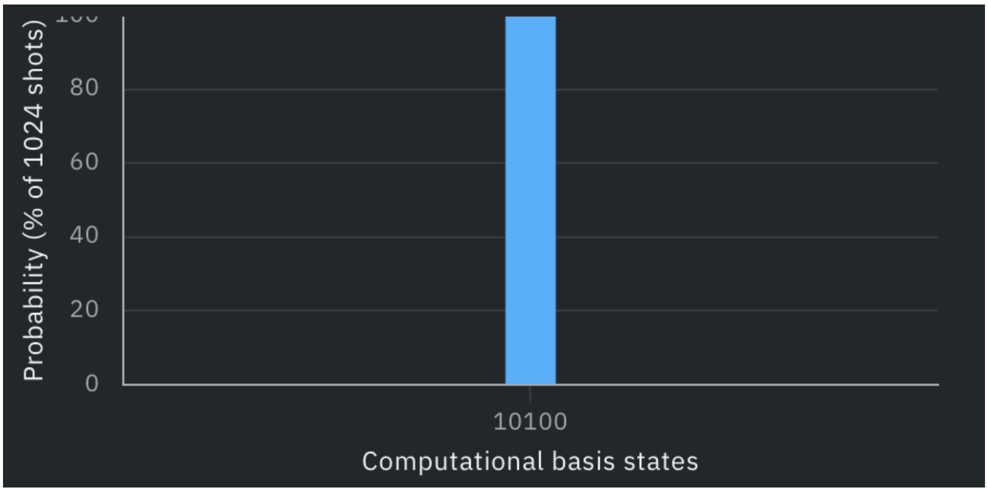
Умножение 7 на 4



Умножение 7 на 3



При умножении 5 на 4



Изначально три кубита инициализируются в состояние единицы:

$|q\rangle = |q[2], q[1], q[0]\rangle = |1, 1, 1\rangle$

В десятичной системе это число N = 7

$N = 2^2 \cdot q[2] + 2^1 \cdot q[1] + 2^0 \cdot q[0] = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 7$

Умножение на 4 эквивалентно сдвигу числа влево на два разряда.

1) Перенос значения q[1] в q[3]:

   $CX(q[1], q[3])$

   Если q[1]=1, то q[3]=1

   Это соответствует следующему сдвигу разряда

   $q[3] = q[1] \cdot 2^2$

   Затем:

   $reset(q[1]) \to q[1] = 0$

2) Перенос значения q[2] в q[4]**:**

   $CX(q[2], q[4])$

   Если q[2]=1, то q[4]=1

   Это соответствует следующему сдвигу разряда

   $q[4] = q[2] \cdot 2^3$

   Затем:

   $reset(q[2]) \to q[2] = 0$

3) Перенос младшего разряда q[0] в q[2]:

   $CX(q[0], q[2])$

   Если q[0]=1, то q[2]=1.

   Затем:

   $reset(q[0]) \to q[0] = 0$

После выполнения всех операций, состояние кубитов изменяется следующим образом

1. q[0]=0: сброшен.
2. q[1]=0: сброшен.
3. q[2]: содержит новый младший разряд после сдвига.
4. q[3]: содержит второй разряд после умножения на 4.
5. q[4]: содержит третий разряд после умножения на 4.

Конечное состояние кубитов:

$|q\rangle = |q[4], q[3], q[2], q[1], q[0]\rangle$

Новое число выражается через конечное состояние кубитов:

$N_{\text{new}} = 2^3 \cdot q[4] + 2^2 \cdot q[3] + 2^1 \cdot q[2]$

Если изначальное число N выражалось как:

$$N = 2^2 \cdot q[2] + 2^1 \cdot q[1] + 2^0 \cdot q[0],$$

то после сдвига

$$N_{\text{new}} = 4 \cdot N = 2^2 \cdot \left(2^2 \cdot q[2] + 2^1 \cdot q[1] + 2^0 \cdot q[0]\right)$$

На примере:
Изначально N=7

$$N = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

После выполнения алгоритма:

$$N_{\text{new}} = 4 \cdot 7 = 28$$

Двоичное представление числа 28=11100, что соответствует состоянию кубитов q[4],q[3],q[2].

Вывод

В ходе данной работы мы приобрели навыки использования управляемых 2-х, 3-х и 5-ти кубитных вентилей, а также научились разрабатывать квантовые схемы на основе этих вентилей. Кроме того, мы освоили написание квантовых функций, применяя полученные знания для создания эффективных квантовых алгоритмов.