Assignment1 - Proof

Dorin Keshales - 313298424

הפונקציה היוריסטית שבה השתמשתי משתייכת למשפחה של Diagonal distance. כלומר, כאשר מתאפשר לנו מעבר על האלכסון מנקודה לנקודה (ממצב אחד למצב אחר) בגריד.

הנוסחא הכללית של Diagonal distance היא:

$$D * (dx + dy) + (D2 - 2 * D) * min(dx, dy)$$

כאשר $dx = |P_x - G_x|$ ו- $dy = |P_y - G_y|$

עבור $P = current\ node$ ו- $G = goal\ state$.

אם נציב $\boldsymbol{D = 1},\ \boldsymbol{D2 = 1}$ נקבל את Chebyshev distance:

$$1 * (dx + dy) + (1 - 2 * 1) * min(dx, dy)$$

$$= (dx + dy) + (-1) * min(dx, dy)$$

$$= (dx + dy) - min(dx, dy)$$

$$if\ dx > dy: \quad dx + dy - dy = dx$$

$$if\ dy > dx: \quad dx + dy - dx = dy$$

$$= \max(dx, dy)$$

$$= \max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|)$$

Chebyshev Distance הוא ההפרש המקסימלי המתקבל בין הקואורדינטות של המצב הנוכחי לבין מצב ה-goal.

הוכחה שיוריסטיקת Chebyshev distance היא אופטימאלית:

** ההנחה היא שפונקציית מחיר הקשתות חסומה מלמטה ע"י $\delta > 0$. ובפרט על פי סעיף 5 בפוסט ההבהרות ב- Google Class מחיר המעבר בין הצמתים הוא לפחות 1.

1. Admissible (קבילות):

על פי ההנחה שניתנה לנו שמחיר המעבר בין הצמתים הוא לפחות 1, נניח כרגע שמחיר מעבר בין כל צומת לצומת הוא 1 ובהמשך אכליל זאת לכל מחיר מעבר ≥ 1.

אז אם אנחנו מסתכלים על היוריסטיקה על פי Chebyshev distance, קל לראות שחישוב הערך היוריסטי לא מתייחס כלל לעלות המעבר בין הצמתים, אלא רק למיקום של המצב הנוכחי (זה שהיא מקבלת בקלט) ומצב המטרה (goal). ז"א אומרת שכדי להגיע למשל ממצב (x_0, y_0) למצב ה- goal שנניח והוא (x_n, y_n), אז למעשה קל לחשב שהערך היוריסטי שנקבל מ- Chebyshev distance הוא n. כלומר, עלות המסלול עד ל-goal לפי היוריסטיקה היא n. ונניח שהמסלול עם העלות הנמוכה ביותר עובר כולו באלכסון (הגדרת הבעיה מאפשרת לנו לזוז על האלכסון). כלומר, היוריסטיקה המושלמת הייתה מביאה לנו את העלות n גם היא, כי לפי ההנחה עלות המעבר בין כל צומת לצומת הוא 1 אז כשאנחנו רוצים להגיע ממצב (x_0, y_0) למצב ה- goal (x_n, y_n) אנחנו צריכים רק n צעדים שעלותם הכוללת היא n. במצב זה אנחנו אכן מקבלים $\mathrm{h(P)} = \max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|) \leq h^*(P)$, כאשר $P = (x_0, y_0)$ ו- $G = (x_n, y_n)$. כלומר, על פי מקרה ניתן להראות שתכונת הקבילות מתקיימת.

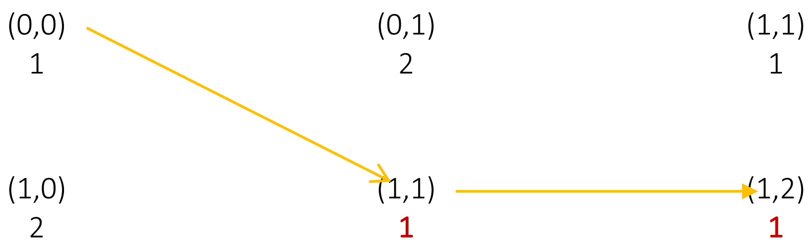
כעת, אם המסלול בעל העלות הנמוכה ביותר אינו נמצא כולו על האלכסון או שאינו עובר בכלל באלכסון, אז למעשה נקבל מהיוריסטיקה המושלמת שהעלות של המסלול האופטימאלי היא m כאשר m>n, שכן כאשר המסלול אינו עובר דרך האלכסון נצטרך לפחות n צעדים כדי להגיע ל-Goal,שכפי שציינתי עלות כל אחד מהם היא 1. ואכן, גם במקרה זה תכונת הקבילות נשמרת שכן הדרישה היא $h(P) \leq h^*(P)$. כלומר, גם במקרה והמסלול האופטימאלי אינו עובר כולו באלכסון אם בכלל, אז תכונת הקבילות נשמרת.

נתקדם הלאה ונמשיך להכליל – כעת נחזור להנחה המקורית שאומרת שמחיר המעבר בין הצמתים הוא לפחות 1 (ולא בדיוק 1). המקרה הזה הוא למעשה שקול למקרה האחרון שהצגתי, שכן כמו שציינתי כבר הפונקציה היוריסטית שלי לא לוקחת בחשבון את עלות המעבר בין הצמתים ולכן הערך היוריסטי נשאר n גם אם מחיר המעבר בין הצמתים הוא לפחות 1 או גדול מ-1, אבל בין אם המסלול האופטימאלי עובר באלכסון או אינו עובר באלכסון (בעת זה לא משנה) ועלות המעבר בין הצמתים היא לפחות 1 אז העלות של המסלול האופטימאלי על פי היוריסטיקה המושלמת תישאר לפחות n, כי אם במקרה הפשוט בו כל מעבר בין צומת לצומת היה בעלות 1 והיוריסטיקה המושלמת החזירה n או m>n (ובקיצור לפחות עלות של n) אז גם כאשר העלות המעבר בין כל צומת לצומת אינה אחידה ולפחות 1 אז היוריסטיקה המושלמת תחזיר לנו לפחות n בעלות המסלול האופטימאלי. כך שהתנאי $h(P) \leq h^*(P)$ ממשיך להתקיים גם כשאנחנו מכלילים לעלות מעבר של לפחות 1.

למשל :

<u>עבור $P=(0,0)$ ו- $G=(1,2)$:</u>

$$\mathrm{h(P)}=\max(|P_x-G_x|,|P_y-G_y|)=\max(|0-1|,|0-2|)=\max(1,2)=2$$



קל לראות ש- $h^*(P)$ (היוריסטיקה המושלמת) תחזיר עלות של 2 גם היא בעבור P. כלומר, נקבל $h(P)=h^*(P)=2$ שעומד בקריטריון $h(P)\le h^*(P)$.

בדומה להסבר בעמוד הקודם, גם אם העלויות של $(1,1),(1,2)$ היו שווה ל-1.5 אז $h^*(P)=3$ כך ש- $2=h(P)\le h^*(P)=3$. כלומר, ללא קשר לעלויות המעבר בין צמתים אנחנו עדיין מקיימים את התנאי $h(P)\le h^*(P)$.

<u>כמובן שהיוריסטיקה מקיימת עבור מצב ה-goal ש- $h(G)=0$:</u>

$$\mathrm{h(G)}=\max(|G_x-G_x|,|G_y-G_y|)=\max(|0-0|,|0-0|)=\max(0)=0$$

$$=>0\le \mathrm{h}(G)\le h^*(G)=0$$

לכן, סה"כ יוריסטיקת Chebyshev distance היא קבילה תחת הגדרת הבעיה שלנו.

2. Consistent (עקביות/מונוטוניות)

עבור הדוגמא מעלה ניתן לראות שיוריסטיקת Chebyshev distance קונסיסטנטית, שכן לכל n ולכל עוקב שלו m, מתקיים אי שוויון המשולש - $h(n)\le c(n,m)+h(m)$, כאשר $c(n,m)$ הוא עלות המסלול האופטימאלי (המסלול בעל העלות הנמוכה ביותר) מ-n ל-m. כלומר, לא יכול להיות ש- $c(n,m)+h(m)$ יותר קטן מ-$h(n)$.
אם נעביר אגפים נקבל ש- $h(n)-h(m)\le c(n,m))$ וזה אומר שההפרש בין היוריסטיקות של כל שני מצבים עוקבים קטנה או שווה לעלות המעבר ממצב אחד לשני. כלומר, האופטימיות לא קיימת רק בין כל צומת לצומת המטרה אלא בין כל שני צמתים. במילים אחרות, השינוי ביוריסטיקה בין כל שני צמתים עוקבים קטן או שווה למרחק האמיתי ביניהן.

פורמאלית:
הוכחנו כי היוריסטיקה על פי Chebyshev distance היא קבילה.
לכן, לכל מצב s מתקיים $h(s)\le h^*(s)$.
בנוסף על פי ההגדרה של consistency מתקיים ש- $c(n,m)$ הוא עלות המסלול האופטימאלי (המסלול בעל העלות הנמוכה ביותר) מ-n ל-m.

אם כך קל לראות שמתקיים ש- $h^*(n) = c(n,m) + h^*(m)$ שכן מדובר בעלויות אופטימאליות.
עבור מצב n מתקיים $h(n) \le h^*(n)$ ולכן בהתאמה זה אומר ש- $h(n) \le c(n,m) + h^*(m)$.
עבור מצב m גם כן מתקיים $h(m) \le h^*(m)$.
לכן, נקבל $h(n) \le c(n,m) + h(m) \le c(n,m) + h^*(m)$.
ובסה"כ קיבלנו ש- $h(n) \le c(n,m) + h(m)$.
כלומר, סה"כ הוכחנו שהיוריסטיקה על פי Chebyshev distance היא קונסיסטנטית.

למשל:

<u>עבור (0,0) והעוקב שלו (1,1):</u>

$$\mathrm{h}((0,0)) = \max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|) = \max(|0-1|, |0-2|) = 2$$

$$c((0,0),(1,1)) = 1$$

$$\mathrm{h}((1,1)) = \max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|) = \max(|1-1|, |1-2|) = 1$$

$$c((0,0),(1,1)) + h(1,1) = 1 + 1 = 2$$

$$\mathrm{h}((0,0)) = \mathbf{2 \le 2} = c((0,0),(1,1)) + h((1,1))$$

<u>עבור (0,0) והעוקב שלו (1,0):</u>

$$h((0,0)) = max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|) = max(|0-1|, |0-2|) = 2$$

$$c((0,0),(1,0)) = 2$$

$$\mathrm{h}((1,0)) = \max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|) = \max(|1-1|, |0-2|) = 2$$

$$c((0,0),(1,0)) + h(1,0) = 2 + 2 = 4$$

$$\mathrm{h}((0,0)) = \mathbf{2 \le 4} = c((0,0),(1,0)) + h((1,0))$$

<u>עבור (0,0) והעוקב שלו (0,1):</u>

$$\mathrm{h}((0,0)) = \max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|) = \max(|0-1|, |0-2|) = 2$$

$$c((0,0),(0,1)) = 2$$

$$\mathrm{h}((0,1)) = \max(|P_x - G_x|, |P_y - G_y|) = \max(|0-1|, |1-2|) = 1$$

$$c((0,0),(0,1)) + h(0,1) = 2 + 1 = 3$$

$$\mathrm{h}((0,0)) = \mathbf{2 \le 3} = c((0,0),(0,1)) + h((0,1))$$