

Image Processing

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Weiqiang Wang

Homework 10

Chenkai GUO

2023.12.27

1. 考虑以下一组灰度值及其在图像中出现的频率：

Grayscale Value	Frequency
0	45
1	35
2	20
3	15
4	15
5	10
6	5
7	5

- (1) 使用霍夫曼编码为这些灰度值构造一棵最优二叉树，写出每个灰度值的霍夫曼编码，并计算使用这种编码方案对应的平均码长。
- (2) 假设原始图像使用固定长度编码，每个灰度值使用 3 位二进制数表示，请计算使用霍夫曼编码相比固定长度编码在存储空间上节省了多少比例。
- (3) 简要讨论霍夫曼编码在数字图像压缩中的优势与局限性。

由题可得：

- (1) 使用霍夫曼编码（二元）的编码方案为：

Grayscale Value	Coding Scheme	Probability
0	00	0.300
1	10	0.233
2	010	0.133
3	110	0.100
4	111	0.100
5	0110	0.067
6	01110	0.033
7	01111	0.033

平均码长为: $\bar{L} = 0.3 \times 2 + 0.233 \times 2 + 0.133 \times 3 + 0.100 \times 3 + 0.100 \times 3 + 0.067 \times 4 + 0.033 \times 5 + 0.033 \times 5 = 2.663$

$$(2) \frac{3-2.663}{3} \times 100\% = 11.23\%$$

(3) 优点:

①压缩率高: *Huffman* 编码可以在保证编码和解码的正确性的同时, 提供较高的压缩率。

②解码速度快: *Huffman* 编码的解码过程相对简单, 解码速度快。

③适用于各种数据: *Huffman* 编码适用于各种类型的数据, 包括文本、图像、音频等。

缺点:

①压缩和解压缩需要较多的时间: *Huffman* 编码的压缩和解压缩过程相对复杂, 需要较多的时间。

②不适用于实时数据传输: 由于 *Huffman* 编码压缩和解压缩的时间较长, 不适用于实时数据传输。

③不适用于小文件: *Huffman* 编码的压缩效果并不明显, 当文件较小时, 压缩后的文件可能比原文件还大。

2. 算术解码过程是编码过程的逆过程。对给出的编码模型信息 0.23355 进行解码。

Symbol	Probability
a	0.2
e	0.3
i	0.1
o	0.2
u	0.1
!	0.1

由题可得:因为 $0.2 < 0.23355 < 0.5$, 因此第一个码字为 e ; 又因为 $0.20 < 0.23355 < 0.26$, 因此第二个码字为 a ; 又因为 $0.230 < 0.23355 < 0.236$, 因此第三个码字为 i ; 又因为 $0.2330 < 0.23355 < 0.2336$, 因此第四个码字为 i ; 又因为 $0.23354 < 0.23355 < 0.23360$, 因此第五个码字为 $!$; 因此解码得到的码字为 $eaii!$

3. 名词解释

(1) 信源编码与解码器; (2) 信道编码与解码器; (3) 信息量/自信息; (4) 熵; (5) 条件熵; (6) 互信息; (7) 信道容量。

(1) 信源编码与解码器: 信源编码器的任务是为了减少或消除输入图像的像素间冗余、心理视觉冗余和编码冗余, 分别由转换器 (*Mapper*)、量化器 (*Quantizer*) 和符号编码器 (*Symbol encoder*) 进行去除; 信源解码器对信源编码器编码后的信息进行解码, 由符号解码器 (*Symbol decoder*)、反向量化器 (*Inverse Quantizer*) 和反向转换器 (*Inverse Mapper*) 组成。

(2) 信道编码与解码器: 信道编码与解码器通过向信源编码数据中插入预制的冗余数据来减少信道噪声的影响, 降低对噪声的敏感性。

(3) 信息量/自信息: 信息量是对事件的不确定性的度量。

$$I(E) = \log \frac{1}{P(E)} = -\log P(E)$$

(4) 熵: 熵是对随机变量不确定性的度量, 是随机变量所有可能事件信息量的期望。

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x)$$

(5) 条件熵: 条件熵是已知随机变量 X 的条件下随机变量 Y 的不确定性。

$$H(Y|X) = - \sum_{x \in X} p(x, y) \log_2 p(y|x)$$

(6) 互信息: 互信息表示信宿收到一个符号时, 平均能够获得的信源的信息量。

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y)$$

(7) 信道容量: 信道能传输信息的最大能力。

$$C = \max I(X; Y)$$

4. 海明码 (7 4) 是一种有名的信道纠错码。请解释说明该编码方案的编码与解码的计算方法。

$Ham(7, 4)$ 通过将 3 位冗余码加到 4 为码字中, 是的任意两个有效码字距离为 3,

从而保证 1 位码字错误校正, $Ham(7, 4)$ 的码字 $h_1h_2 \cdots h_5h_6h_7$ 规则如下:

$$\begin{aligned}h_1 &= b_3 \oplus b_2 \oplus b_0 & h_3 &= b_3 \\h_2 &= b_3 \oplus b_1 \oplus b_0 & h_5 &= b_2 \\h_4 &= b_2 \oplus b_1 \oplus b_0 & h_6 &= b_1 \\& & h_7 &= b_0\end{aligned}$$

其中, \oplus 表示异或运算, 错误由一个非零奇偶校验字 $c_4c_2c_1$ 给出:

$$\begin{aligned}c_1 &= h_1 \oplus h_3 \oplus h_5 \oplus h_7 \\c_2 &= h_2 \oplus h_3 \oplus h_6 \oplus h_7 \\c_4 &= h_4 \oplus h_5 \oplus h_6 \oplus h_7\end{aligned}$$

若找到一个非零值, 则解码器只需简单的在校验字指出的位置补充码字比特, 解码的二进制值 $h_3h_5h_6h_7$ 就从纠正后的码字中提取出来。