Image Processing

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Weiqiang Wang

Homework 8

Chenkai GUO

2023.12.13

1. 以下列基本要素计算二元组 $[3,2]^T$ 的拓展系数并写出相应的拓展：

   (*1*) 以二元实数集合 $\mathbb{R}^2$ 为基础的 $\varphi_0=[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ 和 $\varphi_1=[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$

   (*2*) 以二元实数集合 $\mathbb{R}^2$ 为基础的 $\varphi_0=[1,0]^T,\varphi_1=[1,1]^T$ 和它的对偶 $\tilde{\varphi_0}=[1,-1]^T,\tilde{\varphi}_1=[0,1]^T$

   (*3*) 以二元实数集合 $\mathbb{R}^2$ 为基础的 $\varphi_0=[1,0]^T,\varphi_1=[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]^T$ 和 $\varphi_2=[-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}]^T$，以及对于 $i=\{0,1,2\}$，它们的对偶 $\tilde{\varphi}_i=\frac{2\varphi_i}{3}$

   提示：必须使用向量内积代替 *7.2.1* 节中的整数内积

   (*1*) 由题可得：

$$\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})=0$$
$$\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$
$$\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+(-\frac{1}{\sqrt{2}})\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})=1$$

   因此 φ_0 和 φ_1 构成一组 $\mathbb{R}^2$ 上的标准正交基，符合第一种情况，故：

$$\alpha_0=\langle\varphi_0,f(x)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 3+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha_1=\langle\varphi_1,f(x)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 3+(-\frac{1}{\sqrt{2}})\times 2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   由此：$[3,2]^T=\alpha_0\varphi_0+\alpha_1\varphi_1=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]^T+\frac{\sqrt{2}}{2}\times[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$

   (*2*) 由题可得：

$$\langle\varphi_0,\tilde{\varphi_1}\rangle=1\times 0+0\times 1=0$$
$$\langle\varphi_1,\tilde{\varphi_0}\rangle=1\times 1+1\times(-1)=0$$
$$\langle\varphi_0,\tilde{\varphi_0}\rangle=1\times 1+0\times(-1)=1$$

$$\langle \varphi_1, \tilde{\varphi_1} \rangle = 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1$$

因此 (φ_0, φ_1) 和 $(\tilde{\varphi_0}, \tilde{\varphi_1})$ 双正交，符合第二种情况，故：

$$\alpha_0 = \langle \tilde{\varphi_0}, f(x) \rangle = 1 \times 3 + (-1) \times 2 = 1$$
$$\alpha_1 = \langle \tilde{\varphi_1}, f(x) \rangle = 0 \times 3 + 1 \times 2 = 2$$

由此：$[3,2]^T = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 = 1 \times [1,0]^T + 2 \times [1,1]^T$

(3) 由题可得，$\tilde{\varphi_0} = [\frac{2}{3}, 0]^T, \varphi_1 = [-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]^T, \varphi_2 = [-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}]^T$
且对 $i, j \in \{0,1,2\}$，有：

$$\langle \varphi_i, \tilde{\varphi_j} \rangle = 1 \times 1 + 0 \times (-1) \neq 0$$
$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) \neq 0$$
$$\langle \tilde{\varphi_i}, \tilde{\varphi_j} \rangle = 1 \times 1 + 0 \times (-1) \neq 0$$

因此 $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ 和 $(\tilde{\varphi_0}, \tilde{\varphi_1}, \tilde{\varphi_2})$ 过完备，符合第三种情况，故：

$$\alpha_0 = \langle \tilde{\varphi_0}, f(x) \rangle = \frac{2}{3} \times 3 + 0 \times 2 = 2$$
$$\alpha_1 = \langle \tilde{\varphi_1}, f(x) \rangle = -\frac{1}{3} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$$
$$\alpha_2 = \langle \tilde{\varphi_2}, f(x) \rangle = -\frac{1}{3} \times 3 + (-\frac{\sqrt{3}}{3}) \times 2 = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore [3,2]^T = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 = 2 \times [1,0]^T + \frac{-3+2\sqrt{3}}{3} \times [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]^T + \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \times [-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]^T$

2. 下式中的 DWT 是起始尺度 j_0 的函数。

$$W_\varphi(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(n)\varphi_{j_0,k}(x)$$
$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(n)\psi_{j,k}(x)$$

(1) 令 $j_0 = 1$（而不是 0），重新计算例 *7.8* 中函数 $f(n) = \{1, 4, -3, 0\}$ 在区间 $0 \leq n \leq 3$ 内的一维 DWT。
(2) 使用（*1*）的结果根据变换值计算 $f(1)$

(1) 由题可得：当 $j_0 = 1$ 时

$$\varphi_{1,0}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq x < 0.5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

因此：

$$
\begin{aligned}
W_{\varphi}(1,0) &= \frac{1}{2}\times\left(1\times\sqrt{2}+4\times\sqrt{2}+(-3)\times 0+0\times 0\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}\\
W_{\varphi}(1,1) &= \frac{1}{2}\times\left(1\times 0+4\times 0+(-3)\times\sqrt{2}+0\times\sqrt{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\
W_{\psi}(1,0) &= \frac{1}{2}\times\left(1\times\sqrt{2}+4\times(-\sqrt{2})+(-3)\times 0+0\times 0\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\
W_{\psi}(1,1) &= \frac{1}{2}\times\left(1\times 0+4\times 0+(-3)\times\sqrt{2}+0\times(-\sqrt{2})\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

因此 $f(n)$ 的一维 DWT 展开系数为 $\{\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\}$，即：

$$
f(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(5\varphi_{1,0}(x)-3\varphi_{1,1}(x)-3\psi_{1,0}(x)-3\psi_{1,1}(x)\right)
$$

（*2*）由（*1*）可得：

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(5\varphi_{1,0}(1)-3\varphi_{1,1}(1)-3\psi_{1,0}(1)-3\psi_{1,1}(1)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(5\times\sqrt{2}-3\times 0-3\times(-\sqrt{2})-3\times 0\right)=4
\end{aligned}
$$

3. 请描述有关多分辨率分析中的有关尺度函数的四个基本要求，并说明尺度函数

$$
\varphi(x)=\begin{cases}1 & 0.25\le x<0.75\\ 0 & otherwise\end{cases}
$$

并未满足多分辨率分析的第二个要求。

分辨率分析中尺度函数的四个基本要求：

① 尺度函数相对于其整数平移是正交的

② 尺度函数以低尺度张成的函数空间嵌套在以高尺度张成的函数空间中，即：

$$
V_{-\infty}\subset\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_{\infty}
$$

式中，$\subset$ 表示"……的子空间"。

尺度函数满足直觉条件：若 $f(x)\in V_j$，则 $f(2x)\in V_{j+1}$

③ 在每个尺度上唯一可表示的函数是 $f(x)=0$，$V_{-\infty}=\{f(x)=0\}$

④ 所有可度量的、平方可积的函数都可以表示为尺度函数在 $j\to\infty$ 时的线性组合，即：

$$
V_{\infty}=L^2(\mathbf{R})
$$

式中，$L^2(\mathbf{R})$ 是可度量的、平方可积的一维函数集合

因此，根据尺度函数的定义：

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$$

可得：

$$\varphi_{1,0}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0.125 \leq x < 0.375 \\ 0 & otherwise \end{cases}, \varphi_{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0.625 \leq x < 0.875 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

由于 $\varphi_{1,0}(x)$ 和 $\varphi_{1,1}(x)$ 无法通过线性组合表示 $\varphi_{0,0}(x)$，因此 $V_0 \not\subset V_1$，违背多分辨率分析的基本要求②