Image Processing

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Weiqiang Wang

Homework 9

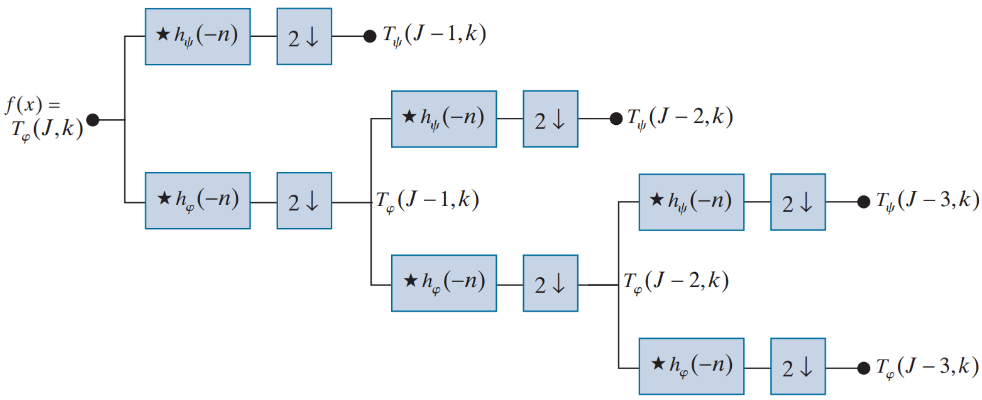
Chenkai GUO

2023.12.19

1. 现在假设我们有一个长度为 8 的信号 $f = [1, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 1]$，利用哈尔小波进行两层的快速小波变换分解，计算各层的滤波器输出，然后再进行完美重建，请利用与书中例子相同的框图进行计算。

由题可得：

（*1*）可根据下面的框图进行两级快速小波变换（*FWT*）分解



令 $W_\varphi(J, n) = f(n) = [1, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 1]$，利用哈尔尺度向量 $h_\varphi(-n) = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ 和小波向量 $h_\psi(-n) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ 对 $W_\varphi(J, n)$ 进行卷积和下采样操作得到 $W_\varphi(J-1, n)$ 和 $W_\psi(J-1, n)$，以此类推，对 $W_\varphi(J-1, n)$ 进行卷积和下采样操作得到 $W_\varphi(J-2, n)$ 和 $W_\psi(J-2, n)$：

$$W_\varphi(J, n) * h_\psi(-n) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$\xrightarrow{2\downarrow} W_\psi(J-1, n) = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

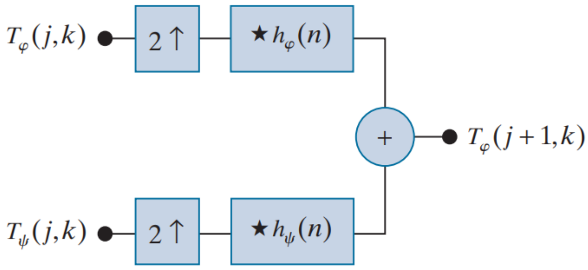
$$W_\varphi(J, n) * h_\psi(-n) = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, \frac{11}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$\xrightarrow{2\downarrow} W_\varphi(J-1, n) = [2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}]$$

$$W_\varphi(J-1,n)*h_\psi(-n)=[-2,-4,2.5,2]\xrightarrow{2\downarrow}W_\psi(J-2,n)=[-4,2]$$
$$W_\varphi(J-1,n)*h_\psi(-n)=[2,8,9.5,5]\xrightarrow{2\downarrow}W_\varphi(J-2,n)=[8,5]$$

因此信号 f 的 FWT 输出为 $[8,5,-4,2,-\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$

(2) 可根据下面的框图进行快速小波拟变换（*inverse-FWT*）分解



对输出 $[8,5,-4,2,-\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$ 进行重建，因为重建层级为 2 级，故令 $W_\varphi(Q,n)=[8,5],W_\psi(Q,n)=[-4,2],W_\psi(Q+1,n)=[-\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$，对 $W_\varphi(Q,n)$ 和 $W_\psi(Q,n)$ 进行上采样和哈尔尺度向量 $h_\varphi(n)=[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$、小波向量 $h_\psi(n)=[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]$ 进行卷积并进行直和操作（注意：直和操作后的向量长度需保证为输入信号长度的两倍，多余的需要进行舍弃操作）可以得到 $W_\varphi(Q+1,n)$，同理，对 $W_\varphi(Q+1,n)$ 和 $W_\psi(Q+1,n)$ 进行类似操作可以得到 $W_\varphi(Q+2,n)$，即为所需重构的原信号：

$$W_\varphi(Q,n)=[8,5]\xrightarrow{2\uparrow}[8,0,5,0]\xrightarrow{h_\varphi(n)}[4\sqrt{2},4\sqrt{2},\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}},0]$$
$$W_\psi(Q,n)=[-4,2]\xrightarrow{2\uparrow}[-4,0,2,0]\xrightarrow{h_\psi(n)}[-2\sqrt{2},2\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2},0]$$
$$\downarrow\oplus$$
$$W_\varphi(Q+1,n)=[2\sqrt{2},6\sqrt{2},\frac{7}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}]$$
$$W_\varphi(Q+1,n)=[2\sqrt{2},6\sqrt{2},\frac{7}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}]\xrightarrow{2\uparrow}[2\sqrt{2},0,6\sqrt{2},0,\frac{7}{\sqrt{2}},0,\frac{3}{\sqrt{2}},0]$$
$$\xrightarrow{h_\varphi(n)}[2,2,6,6,3.5,3.5,1.5,1.5,0]$$
$$W_\psi(Q+1,n)=[-\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]\xrightarrow{2\uparrow}[-\sqrt{2},0,-\sqrt{2},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0]$$
$$\xrightarrow{h_\psi(n)}[-1,1,-1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0]$$
$$\downarrow\oplus$$
$$[1,3,5,7,4,3,2,1]$$

即完美重构所得的原始信号为 $f(n)=[1,3,5,7,4,3,2,1]$

2. 小波包是一种可以根据需要对信号进行更多控制的时间/空间-频率分解的工具。它的一种应用是对图像信息的压缩。课本中给出了一个针对指纹图像进行压缩的实例，在该实例中一幅指纹图像可以被至多分解成深度为 4 的小波包分解树。请计算进行至多 4 级小波包分解共有多少分解方式？请形式化描述一个基于书中能量函数定义的最优小波包分解树的构建算法（给出计算的流程，假设至多分解深度为 N）。

由题可得：根据公式 $D(P+1)=[D(p)]^2+1$ 可得：

$$D(4)=D^2(3)+1=[D^2(2)+1]^2+1=[2^2+1]^2+1=26$$

故 4 级小波包分解共有 26 种分解方式

最优小波包分解树的构建算法：
输入：原始图像 $f(m,n)$，大小为 $W\times H$，分解层级 N
输出：分解树，分解后的图像
(*1*) 将初始节点放进待分解队列中
(*2*) 循环执行以下步骤，直至取出的节点元素满足 $width(A)<w_0=\frac{W}{2^N}$
① 取队头的节点元素
② 计算对应的小波包分解 A_a,A_H,A_V,A_D
③ 计算对应的能量函数值 $E(A),E(A_a),E(A_H),E(A_V),E(A_D)$，其中：

$$E(f)=\sum_{m,n}\mid f(m,n)\mid$$

④ 判断上一步计算的能量函数值大小：
若满足 $E(A)>E(A_a)+E(A_H)+E(A_V)+E(A_D)$，则将分解后的节点 A_a,A_H,A_V,A_D 放入分解队列中；反之，则将节点 A 放入分解树种作为叶子节点，结束本轮循环
(*3*) 输出最后得到的分解树和分解后的图像