Image Processing

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Weiqiang Wang

Homework 4

Chenkai GUO

2023.11.7

1. 对于公式

$$\hat{f}(x,y) = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}}$$

给出的逆谐波滤波回答下列问题:

(a) 解释为什么当 Q 是正值时滤波对去除“胡椒”噪声有效？

(b) 解释为什么当 Q 是负值时滤波对去除“盐”噪声有效？

由题可得:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x,y) &= \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}} = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)\cdot g(s,t)^{Q}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}} \\ &= \sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)\cdot \underbrace{\frac{g(s,t)^{Q}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}}}_{signal\ \ weight}\end{aligned}$$

因此，当 $Q>0$ 时，该点信号值越小，其在输出项信号权重越小，因此对于信号值为 0 的“胡椒”噪声，其在输出值的权重很小，因此能去除“胡椒”噪声；同理，当 $Q<0$ 时，该点信号值越大，其在输出项信号权重越小，因此对于信号值为 255 的“盐”噪声，其在输出值的权重很小，因此能去除“盐”噪声。

2. 复习理解课本中最佳陷波滤波器进行图像恢复的过程，请推导出 $\omega(x,y)$ 最优解的计算过程，即从公式 $\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial\omega(x,y)}=0$ 到 $\omega(x,y)=\frac{\overline{\eta(x,y)g(x,y)}-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\overline{\eta}^2(x,y)}$ 的推导过程。

由题可得:

$$\sigma^2(x,y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(\underbrace{[g(x+s,y+t)-w(x,y)\cdot\eta(x+s,y+t)]}_{A} - \underbrace{[\overline{g(x,y)}-w(x,y)\overline{\eta(x,y)}]}_{B})^2$$

当 $\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial\omega(x,y)}=0$，有：

$$\frac{\partial A^2}{\partial w(x,y)} = -2g(x+s,x+t)\cdot\eta(x+s,y+t)+2\eta^2(x+s,y+t)w(x,y)$$

$$-\frac{\partial 2AB}{\partial w(x,y)} = 2g(x+s,y+t)\cdot\overline{\eta(x,y)}+2\overline{g(x,y)}\cdot\eta(x+s,y+t)$$

$$-4\eta(x+s,y+t)\cdot\overline{\eta(x,y)}\cdot w(x,y)$$

$$\frac{\partial B^2}{\partial w(x,y)} = -2\overline{g(x,y)}\cdot\overline{y(x,y)}+2\overline{\eta(x,y)}^2 w(x,y)$$

因此可得：

$$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial w(x,y)} = \frac{\partial(A^2-2AB+B^2)}{\partial w(x,y)} = 0$$

$$\Longrightarrow -2\overline{g(x,y)\cdot\eta(x,y)}+2\overline{\eta^2(x,y)}\cdot w(x,y)+2\overline{g(x,y)}\cdot\overline{\eta(x,y)}+2\overline{g(x,y)}\cdot\overline{\eta(x,y)}$$

$$-4\overline{\eta(x,y)}^2\cdot w(x,y)-2\overline{g(x,y)}\cdot\overline{\eta(x,y)}+2\overline{\eta(x,y)}^2\cdot w(x,y)=0$$

$$\Longrightarrow (\overline{\eta^2(x,y)}-\overline{\eta(x,y)}^2)\cdot w(x,y) = \overline{g(x,y)\cdot\eta(x,y)}-\overline{g(x,y)}\cdot\overline{\eta(x,y)}$$

$$\Longrightarrow w(x,y) = \frac{\overline{\eta(x,y)g(x,y)}-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\overline{\eta}^2(x,y)}$$

证毕

3. 假设我们有一个 [0 1] 上的均匀分布随机数发生器 $U(0,1)$, 请基于它构造指数分布的随机数发生器，推导出随机数生成方程。若我们有一个标准正态分布的随机数发生器 $N(0,1)$，请推导出对数正态分布的随机数生成方程。

(*1*) 由题可得，令指数分布的分布函数 $F_{(x)}=1-e^{-\lambda x}=w$
解得 $x=-\frac{\ln(1-w)}{\lambda}, w\sim U(0,1)$

(*2*) 由题可得, 令标准正态分布为 $X\sim N(0,1)$ 对数正态分布 $\ln Y=Z\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则有 $Y=e^Z, Z=\sigma X+\mu$，故则有 $Y=e^{\sigma X+\mu}, X\sim N(0,1)$