Image Processing

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Weiqiang Wang

Homework 3

Chenkai GUO

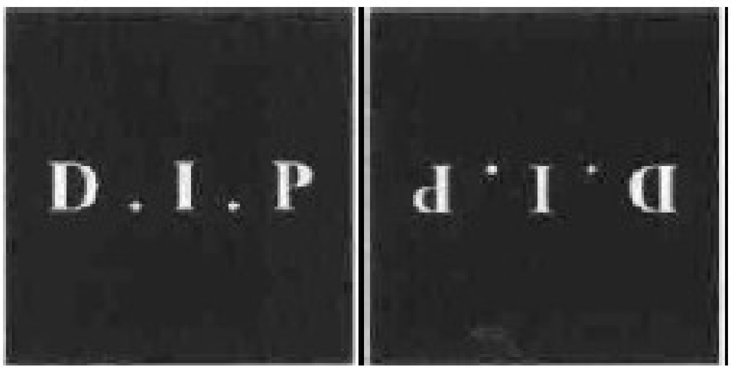
2023.11.1

1. 证明二阶傅立叶变换平移性质

   即求证 $F(u-u_0, v-v_0) \Leftrightarrow f(x,y) \cdot e^{j2\pi(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N})}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\cdot e^{j2\pi(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N})} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(\frac{(u-u_0)x}{M}+\frac{(v-v_0)y}{N})} \\
&= F(u-u_0, v-v_0)
\end{aligned}
$$

2. 观察如下所示图像。右边的图像这样得到：*(a)* 在原始图像左边乘以 $(-1)^{x+y}$；*(b)* 计算离散傅里叶变换 *(DFT); (c)* 对变换取复共轭*; (d)* 计算傅里叶反变换*; (d)* 结果的实部再乘以 $(-1)^{x+y}$。*(*用数学方法解释为什么会产生右图的效果。*)*



$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\xrightarrow{(a)} (-1)^{x+y} f(x,y) \\
&\xrightarrow{(b)} \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(-1)^{x+y} f(x,y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})} f(x,y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M}+\frac{(v-\frac{N}{2})y}{N})} \\
&= F(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}) \\
&\xrightarrow{(c)} F(\frac{M}{2}-u, \frac{N}{2}-v) \\
&\xrightarrow{(d)} \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(\frac{M}{2}-u, \frac{N}{2}-v) e^{j2\pi(\frac{(\frac{M}{2}-u)x}{M}+\frac{(\frac{N}{2}-v)y}{N})}(-1)^{x+y} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(\frac{M}{2}-u, \frac{N}{2}-v) e^{j2\pi(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})} e^{j2\pi(\frac{u(-x)}{M}+\frac{v(-y)}{N})}(-1)^{x+y} \\
&= \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(\frac{M}{2}-u, \frac{N}{2}-v) e^{j2\pi(\frac{u(-x)}{M}+\frac{v(-y)}{N})} \\
&= f(-x,-y)
\end{aligned}
$$

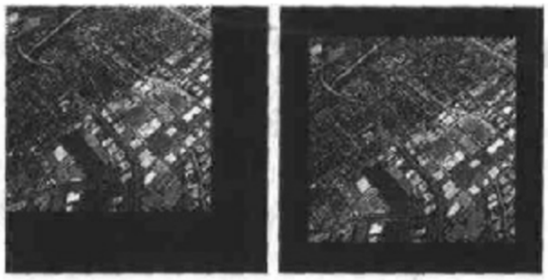
因此变换后 x, y 坐标取相反数，即为图中所显示的结果。

3. 高斯型低通滤波器在频域中的传递函数是 $\mathrm{H(u,v) = Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}}$，根据二维傅里叶性质，证明空间域的相应滤波器形式为 $\mathrm{h(x,y) = A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}}$，（这些闭合形式只适用于连续变量情况。）在证明中假设已经知道如下结论：函数 $\mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)}$ 的傅立叶变换为 $\mathrm{e}^{-\pi(u^2+v^2)}$

根据二维傅里叶的 *similarity* 性质 $\mathscr{F}(f(ax,by)) = \frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$ 得：
令 $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)}, F(u,v) = \mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)}$，故 $h(x,y) = A2\pi\sigma^2 f(\sqrt{2\pi}\sigma x, \sqrt{2\pi}\sigma y)$
$\mathscr{F}(h(x,y)) = \mathscr{F}(A2\pi\sigma^2 f(\sqrt{2\pi}\sigma x, \sqrt{2\pi}\sigma y)) = A\cdot 2\pi\sigma^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\cdot\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\mathrm{e}^{-\pi(u^2+v^2)} = A\mathrm{e}^{-\pi(u^2+v^2)} = H(u,v)$，证毕

4. 第四题

★4.21 在 4.6.3 节较详细地讨论了频率域过滤时需要的图像延拓。在该节中，说明了需要延拓的图像在图像中行和列的末尾要填充 0 值(见下面左图)。你认为如果我们把图像放在中心，四周填充 0 值(见下面右图)而不改变 0 值的总数，会有区别吗？请解释。



原图像由 NASA 提供

没区别，本质上都作了周期延拓，使得相邻两个周期的两个信号没有混叠，因此并没有实质上的区别，只有滤波后图像上的平移位置区别

5. 假设一个信号由低频与高频两部分的信号构成，我们可以通过两个滤波器与原信号进行卷积而分别获得它们。请证明在频域中这两个滤波器存在如下的关系 $H_{hp} = 1 - H_{lp}$

设任一信号 $f(x)$，两个滤波器在空域的形式为 H^S_{hp}, H^S_{lp}，由题可得:

$$
\begin{aligned}
& f(x) * H^S_{hp} + f(x) * H^S_{lp} = f(x) \\
& \Rightarrow \mathscr{F}(f(x) * H^S_{hp}) + \mathscr{F}(f(x) * H^S_{lp}) = \mathscr{F}(f(x)) \\
& \Rightarrow F(x) \cdot H_{hp} + F(x) \cdot H_{lp} = F(x) \\
& \Rightarrow F(x) \cdot (H_{hp} + H_{lp}) = F(x) \\
& \Rightarrow H_{hp} + H_{lp} = 1
\end{aligned}
$$

证毕