Image Processing

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Weiqiang Wang

Homework 7

Chenkai GUO

2023.12.5

1. r, g, b 是 RGB 彩色空间沿 R, G, B 轴的单位向量，定义向量 $\mathrm{u} = \frac{\partial R}{\partial x}r + \frac{\partial G}{\partial x}g + \frac{\partial B}{\partial x}b$ 和 $\mathrm{v} = \frac{\partial R}{\partial y}r + \frac{\partial G}{\partial y}g + \frac{\partial B}{\partial y}b$，此外，$g_{xx}, g_{yy}, g_{xy}$ 定义为这些向量的点乘：

$$g_{xx} = \mathrm{u}\cdot\mathrm{u} = \mathrm{u}^T\mathrm{u} = \left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial B}{\partial x}\right|^2$$
$$g_{yy} = \mathrm{v}\cdot\mathrm{v} = \mathrm{v}^T\mathrm{v} = \left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial B}{\partial y}\right|^2$$
$$g_{xy} = \mathrm{u}\cdot\mathrm{v} = \mathrm{u}^T\mathrm{v} = \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\cdot\frac{\partial B}{\partial y}$$

试推导出最大变换率方向 θ 和 (x, y) 点在方向 θ 上变化率的值 $F(\theta)$

由题可得,梯度所在的方向即为变化率最大的方向,即求最大化 $||(u,v)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)||$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}||(u,v)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)|| &= \frac{\partial}{\partial\theta}(u^2\cos^2\theta + 2u\cdot v\sin\theta\cos\theta + v^2\sin^2\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{1}{2}g_{xx}(1+\cos 2\theta) + g_{xy}\sin 2\theta + \frac{1}{2}g_{yy}(1-\cos 2\theta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{1}{2}\big(g_{xx}+g_{yy}\big) + \frac{1}{2}\big(g_{xx}-g_{yy}\big)\cos 2\theta + g_{xy}\sin 2\theta] \\ &= -(g_{xx}-g_{yy})\sin 2\theta + 2g_{xy}\cos 2\theta = 0\end{aligned}$$

解得:$\theta_{\max} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2g_{xy}}{g_{xx}-g_{yy}}$,其方向上的最大变化率值 $F(\theta) = \frac{1}{2}g_{xx}(1+\cos 2\theta_{\max}) + g_{xy}\sin 2\theta_{\max} + \frac{1}{2}g_{yy}(1-\cos 2\theta_{\max})$

2. 请根据课本中 Z 变换的定义，证明如下结论。
(1) 若 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$，则 $(-1)^n x(n)$ 的 Z 变换为 $X(-z)$
(2) 若 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$，$x(-n)$ 的 Z 变换 $X(\frac{1}{z})$
(3) 若 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$，课本 *280* 页公式 *7.1.2*，即 $x_{\mathrm{down}}(n) = x(2n) \iff X_{\mathrm{down}}(z) = \frac{1}{2}[X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})]$

由题可得：$x(n)$ 的 Z 变换为：$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

(*1*) $(-1)^n x(n)$ 的 Z 变换为：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x(n)z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)(-z)^{-n} = X(-z)$$

证毕

(*2*) $x(-n)$ 的 Z 变换为：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(-n)(\frac{1}{z})^{n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(m)(\frac{1}{z})^{-m} = X(\frac{1}{z})$$

其中，令 $m = -n$；证毕

(*3*) 对左式：$x_{\text{down}}(n) = x(2n)$ 为只取 n 为偶数位置像素的下采样；
对右式：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})] &= \frac{1}{2}[\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-\frac{n}{2}} + \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)(-z)^{-\frac{n}{2}}] \\
&= \frac{1}{2}[\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-\frac{n}{2}} + \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-\frac{n}{2}}(-1)^{-\frac{n}{2}}] \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-\frac{n}{2}} \ (n \ is \ even) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} x(2m)z^{m} \ (Let \ m = \frac{1}{2}n, m \in \mathbf{Z}) = X_{down}(z)
\end{aligned}$$

*最后一个等式成立是由于去掉了奇数位置，因此 Z^m 需修正；
证毕

3. 对于一幅给定的大小为 $N \times N, N = 2^n, n \in Z^+$ 的图像 $f(x, y)$，请描述如何建立该图像的高斯金字塔与拉普拉斯金字塔。

高斯金字塔的建立：

(*1*) 将 $N \times N$ 原始图像作为高斯金字塔的第 1 层（*level* 1，即最底层），记为 G_1
(*2*) 给定参数 σ 和卷积核大小（一般为 5×5），设计高斯卷积核 $G(x, y)$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}}$$

(*3*) 利用高斯卷积核对 G_{n-1} 进行卷积，计算 $G_{n-1} * G(x, y)$，对计算后的图像进行下采样（去除偶数行和偶数列），得到第 n 层图像 G_n
(*4*) 反复进行步骤 *2-3*，直到计算得到所需层数的高斯金字塔。

拉普拉斯金字塔的建立：
(*1*) 拉普拉斯金字塔建立在高斯金字塔的基础上，对高斯金字塔的第 $n-1$ 层图像 G_{n-1}，计算其上采样后的图像 $Up\left(G_{i-1}\right)$
(*2*) 对上采样后的图像 $Up\left(G_{i-1}\right)$ 进行高斯核卷积，得到 $Up\left(G_{i-1}\right)*G(x,y)$
(*3*) 利用其下一层图像，即第 n 层图像 G_n 减去（*2*）中结果，即可得到拉普拉斯金字塔的第 $n-1$ 层结果，计算公式如下：

$$L_{i-1}=G_i-Up\left(G_{i-1}\right)*G(x,y)$$

4. 完美重建滤波器的双正交性的数学定义是什么？请证明其中的第二个式子与课本中第四个式子

完美重建滤波器是一种将一个信号分解为两个或多个子带信号，然后再通过合成滤波器重建出原始信号的方法。双正交性是指分解滤波器和合成滤波器之间满足两个正交条件：
①第一个条件是分解滤波器之间的正交性，即不同子带信号之间没有相互干扰：

$$\langle g_0(k),h_0(2n-k)\rangle=\delta(n)$$
$$\langle g_1(k),h_1(2n-k)\rangle=\delta(n)$$

②第二个条件是合成滤波器之间的正交性，即不同子带信号经过合成滤波器后能够完全重建出原始信号：

$$\langle g_0(k),h_1(2n-k)\rangle=0$$
$$\langle g_1(k),h_0(2n-k)\rangle=0$$

完美重建（零错误重建）的限制条件如下：

$$H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)=2$$
$$H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)=0$$
$$H_0(z)G_0(z)+H_0(-z)G_0(-z)=2$$

交叉调制矩阵为：

$$H_m(z)=\begin{bmatrix}H_0(z) & H_0(-z)\\ H_1(z) & H_1(-z)\end{bmatrix}$$

用调制矩阵的行列式表示可得下式：

$$G_0(z)=\frac{2}{\det(H_m(z))}H_1(-z)$$
$$G_1(z)=-\frac{2}{\det(H_m(z))}H_0(-z)$$

(*1*) 证明 $\langle g_1(k), h_1(2n-k)\rangle = \delta(n)$:
令 $P(z) = G_1(z)H_1(z)$, 得

$$P(z) = G_1(z)H_1(z) = \frac{-2}{\det\left(H_m(z)\right)}H_0(-z)H_1(z)$$

又 $\because det(H_m(-z)) = -det(H_m(z))$，可得:

$$G_1(-z)H_1(-z) = P(-z) = \frac{2}{\det(H_m(z))}H_0(z)H_1(-z) = G_0(z)H_0(z)$$

所以，带入完美重建限制条件第 1 条可得:

$$G_1(z)H_1(z) + G_1(-z)H_1(-z) = 2$$

对上式作反 Z 变换得:

$$\sum_k g_1\left(k\right)h_1(n-k) + (-1)^n\sum_k g_1\left(k\right)h_1(n-k) = 2\delta(n)$$

由于上式在 n 为奇数时等于 0，因此替换 n 为偶数（即 $2n$），得到:

$$2\sum_k g_1\left(k\right)h_1(2n-k) = 2\delta(n)$$
$$\Rightarrow \sum_k g_1\left(k\right)h_1(2n-k) = \langle g_1(k), h_1(2n-k)\rangle = \delta(n)$$

证毕

(*2*) 证明：由（*1*）以及完美重建限制条件第 2 条可得:

$$P(z) = -P(-z) \Longleftrightarrow H_1(-z) = -\frac{H_0(-z)G_0(z)}{G_1(z)}$$
$$H_1(-z)G_1(-z) - H_0(z)G_0(z) = 0$$

合并上式可得:

$$H_0(-z)G_0(z)G_1(-z) + H_0(z)G_0(z)G_1(z) = 0$$
$$\Rightarrow H_0(-z)G_1(-z) + H_0(z)G_1(z) = 0$$

对上式作反 Z 变换得:

$$\sum_k g_1\left(k\right)h_0(n-k) + (-1)^n\sum_k g_1\left(k\right)h_0(n-k) = 0$$

由于上式在 n 为奇数时等于 0，因此替换 n 为偶数（即 $2n$），得到：

$$\sum_k g_1(k)\,h_0(2n-k) = \langle g_1(k), h_0(2n-k)\rangle = 0$$

证毕

5. 若 $\mathrm{G_1(z) = -\ z^{-2k+1}G_0(-z^{-1})}$ 成立，请证明 $\mathrm{g_1(n) = (-1)^n g_0(2k-1-n)}$

由题可得：$g_0(n) \Rightarrow G_0(z), g_1(n) \Rightarrow G_1(z)$，根据第二题（*1*）（*2*）性质可得：

$$\begin{aligned} g_0(n) &\Rightarrow G_0(z) \\ g_0(n-2k+1) &\Rightarrow z^{-2k+1}G_0(z) \\ g_0(2k-1-n) &\Rightarrow z^{2k-1}G_0(z^{-1}) \\ (-1)^n g_0(2k-1-n) &\Rightarrow (-z)^{2k-1}G_0((-z)^{-1}) = G_1(z) \end{aligned}$$

故 $\mathrm{g_1(n) = (-1)^n g_0(2k-1-n)}$；证毕

6. 假设课本中给出完美重建滤波器的正交族对应的三个滤波器间的关系式是正确的，并以此为基础，推导 h_0, h_1 的关系。

分为两种情况：
①关系式为：$g_0(n) = (-1)^{n+1}h_1(n), g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$,
$g_1(n) = (-1)^{n+1}g_0(2K-1-n)$。
将前两个公式带入第三个公式可得：

$$\begin{aligned} (-1)^n h_0(n) &= (-1)^{n+1}(-1)^{2K-1-n+1}h_1(2K-1-n) \\ h_0(n) &= (-1)^{2K-n+1}h_1(2K-1-n) \\ h_0(n) &= (-1)^{n+1}h_1(2K-1-n) \end{aligned}$$

②关系式为：$g_0(n) = (-1)^n h_1(n), g_1(n) = (-1)^{n+1}h_0(n)$,
$g_1(n) = (-1)^{n+1}g_0(2K-1-n)$。
将前两个公式带入第三个公式可得：

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1}h_0(n) &= (-1)^{n+1}(-1)^{2K-1-n}h_1(2K-1-n) \\ h_0(n) &= (-1)^{2K-1-n}h_1(2K-1-n) \\ h_0(n) &= (-1)^{n+1}h_1(2K-1-n) \end{aligned}$$

7. 哈尔变换可以用矩阵的形式表示为：

$$\mathrm{T = HFH^T}$$

其中，$\mathbf{F}$ 是一个 $N \times N$ 的图像矩阵，$\mathbf{H}$ 是 $N \times N$ 变换矩阵，$\mathbf{T}$ 是 $N \times N$ 变换结果。对于哈尔变换，变换矩阵 $\mathbf{H}$ 包含基函数 $h_k(z)$，它们定义在连续闭区间 $z \in [0,1], k = 0,1,2,\cdots,N-1$，其中 $N = 2^n$。为了生成矩阵，定义整数 k，即 $k = 2^p + q - 1$（这里 $0 \le p \le n-1$，当 $p = 0$ 时 $q = 0$，或 1；当 $p \neq 0$ 时，$1 \le q \le 2^p$）。可得哈尔基函数为：

$$\mathrm{h_0(z) = h_{00}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}, \mathrm{z} \in [0,1]$$

$$\mathrm{h_k(z) = h_{pq}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}} \begin{cases} 2^{\frac{p}{2}}, (q-1)/2^p \le z < (q-0.5)/2^p \\ -2^{\frac{p}{2}}, (q-0.5)/2^p \le z < q/2^p \\ 0, \textit{otherwise, z[0,1]} \end{cases}$$

$N \times N$ 哈尔变换矩阵的第 i 行包含了元素 $h_i(z)$，其中 $z = \frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{N-1}{N}$。计算当 $N = 16$ 时的 H_{16} 矩阵。

$N = 16$ 时的 H_{16} 矩阵为：

$$H_{16} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\
2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\
2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}
\end{pmatrix}_{16 \times 16}$$