Information and Coding Theory
University of Chinese Academy of Sciences
Fall 2023
Kewei Lv, Liping Wang

Homework 1

Chenkai GUO

2023.9.26

1. 假定有 32 枚硬币，存在一枚假币，且假币的重量轻于其他硬币. 但不确定假币是哪一个，用天平来称重. 问测量所需要的最小次数是多少？

   由题可得：设存在一枚假币事件为 W，则 $P(W)=\frac{1}{32}$，可知该事件的不确定性，即自信息量为 $I(W)=-logP(w)=5$；每次用天平称量的结果只有左轻和右轻，概率各为 $\frac{1}{2}$，因此每次称量可以减少的不确定性为 $I=-log\frac{1}{2}=1$，因此所需测量的最小次数为 $\frac{5}{1}=5$ 次

2. 假定有 n 枚硬币，存在一枚假币，且假币的重量与其他硬币不同。用天平来称重。如果称重 $k=2021$ 次就能发现假币，试通过信息熵计算硬币数 n 的上界

   由题可得：设存在一枚假币事件为 W，则存在两种可能性，即 n 枚硬币中存在一枚较重的假币和 n 枚硬币中存在一枚较轻的假币，一共有 $n+n=2n$ 个事件，因此 $P(W)=\frac{1}{2n}$，可知该事件的不确定性为 $I(W)=-logP(w)=log2n$；每次用天平称量的结果左轻、相等和右轻，概率各为 $\frac{1}{3}$，因此每次称量可以减少的不确定性为 $I=-log\frac{1}{3}=log3$，因此所需测量的最小次数为 $\lceil\frac{log2n}{log3}\rceil\leq k=2021$ 次，由此可得 $n\leq\frac{3^{2021}}{2}, n\in N^+$，由此可得，硬币数上界 $n=\frac{3^{2021}-1}{2}$

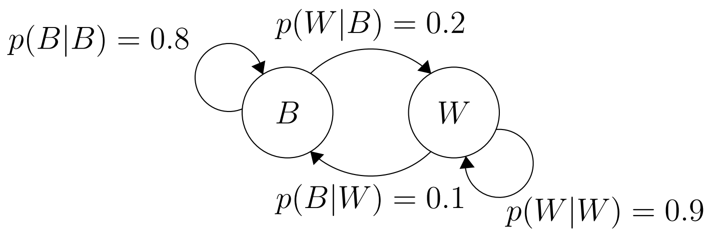
3. 黑白气象传真图的消息只有黑白两种颜色，求：

   (1) 黑色出现的概率为 0.3，白色出现的概率为 0.7，假设图上的黑白消息前后出现并没有关联，给出只有这两种颜色的信源 X 的数学模型，并求 $H(X)$.

   (2) 假设黑白消息出现前后有关联，即关系为 $P(\text{白}\mid\text{白})=0.9$, $P(\text{黑}\mid\text{白})=0.1$, $P(\text{白}\mid\text{黑})=0.2$, $P(\text{黑}\mid\text{黑})=0.8$. 求其熵 $H_2(X)$.

   (1) 记出现黑色事件为 B，出现白色事件为 W，则只有这两种颜色的信源 X 的数学模型为：$\begin{pmatrix} X \\ P(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & W \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$，此时熵 $H(X)=\sum_x -p(x)logp(x)=-0.3log0.3-0.7log0.7=0.881\ bits/symbol$

   (2) 由题可得下述马尔科夫链：



则可得

$$\begin{cases} p(B) = p(B|B)p(B) + p(B|W)p(W) \\ p(W) = p(W|B)p(B) + p(W|W)p(W) \\ p(B) + p(W) = 1 \end{cases}$$

解得：$P(W) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$
因此：$H_2(X) = -\sum p(x)p(y|x)logp(y|x) = -\frac{1}{3} \times 0.2log0.2 - \frac{1}{3} \times 0.8log0.8 - \frac{2}{3} \times 0.1log0.1 - \frac{2}{3} \times 0.9log0.9 = 0.166$

4. 给定一枚硬币，每次抛一次，出现正面的概率均为 p，出现反面的概率为 $q = 1-p$。我们抛该硬币直到出现正面为止，设该抛硬币的次数为 X。计算 $H(X)$。
由题可得：

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^{X} p(1-p)^{i-1} logp(1-p)^{i-1} \\ &= -p\sum_{i=1}^{X}(1-p)^{i-1}(logp + log(1-p)^{i-1}) \\ &= -plogp\sum_{i=1}^{X}(1-p)^{i-1} - p\sum_{i=1}^{X}(1-p)^{i-1}log(1-p)^{i-1} \\ &= -plogp\sum_{i=1}^{X}(1-p)^{i-1} - plog(1-p)\sum_{i=1}^{X}(i-1)(1-p)^{i-1} \\ &= -plogp\underbrace{\sum_{i=0}^{X}(1-p)^{i}}_{Eq.1} - plog(1-p)\underbrace{\sum_{i=0}^{X}i(1-p)^{i}}_{Eq.2} \end{aligned}$$

$$Eq.1 = \sum_{i=0}^{X}(1-p)^i = \frac{1\cdot(1-(1-p)^x)}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}(1-(1-p)^x)$$

$$whenx \to \infty, Eq.1 = \frac{1}{p}$$

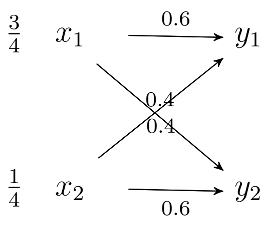
$$\begin{aligned} Eq.2 = \sum_{i=0}^{X} i(1-p)^i &= \sum_{i=1}^{X}(1-p)^i + \sum_{i=2}^{X}(1-p)^i + \cdots \\ &= \frac{1}{p}[(1-p) + (1-p)^2 + \cdots] \\ &= \frac{1}{p}(\frac{1-p}{p}) = \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

代入原式可得：

$$H(X) = -logp - \frac{1-p}{p}log(1-p)$$

5. 已知 X 为信源的随机变量，f 是一个映射，试讨论：
   (a) $H(f(X))$ 与 $H(X)$ 的关系，并确定二者何时相等；
   (b) 当 $Y = g^X, g > 0$ 时，$H(X)$ 与 $H(Y)$ 的关系；
   (c) 当 $Y = 5 \cdot cos(X)$ 时，$H(X)$ 与 $H(Y)$ 的关系。
   (a) 由题可得：设信源 X 的数学模型为 $\begin{pmatrix} X \\ P(x) \end{pmatrix}$
   则信源 $f(X)$ 的数学模型为 $\begin{pmatrix} f(X) \\ \sum\limits_{\{i,j;f(i)=f(j)\}} P(x_i) \end{pmatrix}$
   由熵的拓展性可得：$H(f(X)) \geq H(X)$，当 f 是单射或信源 X 比信源 $f(X)$ 多出的事件为小概率事件 $(p \to 0)$ 时，$H(f(X)) = H(X)$
   (b) 由 (a) 可得：$f: X \to g^X (g > 0)$ 为一个单射，因此此时 $H(f(X)) = H(X)$
   (c) 由 (a) 可得：当且仅当信源 X 出现的状态在一个周期 (2π) 内时，$H(f(X)) = H(X)$，其余情况均为 $H(f(X)) > H(X)$

6. 二元通信系统，转移矩阵为 $2, X = \{x_1 = 0, x_2 = 1\}, Y = \{y_1 = 0, y_2 = 1\}, p(x_1) = \frac{3}{4}, p(x_2) = \frac{1}{4}$



   (1) 已知发出 $x_1 = 0$，求收到符号后得到的信息量 $H(Y|x_1)$；
   (2) 已知发出 $x_2 = 0$，求收到符号后得到的信息量 $H(Y|x_2)$；
   (3) 已知有符号发出，求收到符号后得到的信息量 $H(Y|X)$；
   (4) 已知发出和收到符号，求能得到的信息量 $H(XY)$；
   (5) 已知收到了符号，求能得到的信息量 $H(X|Y)$。

(1) 由题可得:

$$H(Y|x_1) = -0.6 \times log0.6 - 0.4 \times log0.4 = 0.292$$

(2) 由题可得:

$$H(Y|x_2) = -0.4 \times log0.4 - 0.6 \times log0.6 = 0.292$$

(3) 由题可得:

$$H(Y|X) = -\frac{3}{4}\times 0.6\times log0.6-\frac{3}{4}\times 0.4\times log0.4-\frac{1}{4}\times 0.6\times log0.6-\frac{1}{4}\times 0.4\times log0.4 = 0.292$$

(4) 由题可得:

$$H(X) = -\frac{3}{4}log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}log\frac{1}{4} = 0.244$$

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X) = 0.292 + 0.244 = 0.536$$

(5) 由题可得:

$$P(y_1) = P(y_1|x_1)P(x_1) + P(y_1|x_2)P(x_2) = \frac{3}{4} \times 0.6 + -\frac{1}{4} \times 0.4 = 0.55$$

$$P(y_2) = P(y_2|x_1)P(x_1) + P(y_2|x_2)P(x_2) = \frac{3}{4} \times 0.4 + -\frac{1}{4} \times 0.6 = 0.45$$

$$H(Y) = -0.55log0.55 - 0.45log0.45 = 0.298$$

$$H(X|Y) = H(XY) - H(Y) = 0.536 - 0.298 = 0.238$$