



הנדסת תוכנה

Software Engineering

תרגיל 1 להגשה בתכנון וניתוח אלגוריתמים (קורס מס' 10120)

מרצים: ד"ר ראובן חוטובלי ד"ר מריה ארטישצ'ב

תאריך הגשה: 10.4.2021 עד השעה 23:00. העבודה בזוגות.

עליכם להגיש את פתרון התרגיל כקובץ word ו/או כמצגת, הכולל גם את האיורים.

שאלה 1 נתונה בעיית תכנון לינארי הבאה:

$$\text{Maximize } Z = 2.5X_1 + X_2$$

Subject to:

- 1) $3X_1 + 5X_2 \leq 15$
- 2) $5X_1 + 2X_2 \leq 10$
- 3) $X_1 \geq 0$
- 4) $X_2 \geq 0$

- א. צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים ומצא בשיטה גרפית את הפתרון האופטימלי.
- ב. פתור את הבעיה הנתונה בשיטת הסימפלכס. בכל שלב הראה באיזו קדקוד של תחום הפתרונות האפשריים נמצאים באיור.
- ג. מהן המטרices B ו- B^{-1} כך ש: $\underline{x}_B = B^{-1} \cdot b$.
- ד. נסח את הבעיה הדואלית.
- ה. בהמשך לסעיף א' **בלבד**, השתמש בפתרון הבעיה הפרימלית שקיבלת בסעיף א', וביחסים בין שתי הבעיות- פרימלית ודואלית, על מנת למצוא את פתרון של הבעיה הדואלית (בלי לפתור את הבעיה הדואלית).

שאלה 2 נתונה בעיית תכנון לינארי הבאה:

$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 2X_2$$

Subject to:

- 1) $X_1 + X_2 \leq 10$
- 2) $X_1 = 5$
- 3) $X_1 \geq 0$
- 4) $X_2 \geq 0$

- א. צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים ומצא את הפתרון האופטימלי.
 - ב. פתור את הבעיה בשיטת הסימפלכס והעזר בשיטת ה-M הגדול. בכל שלב הראה באיזו קדקוד של תחום הפתרונות האפשריים נמצאים באיור.
 - ג. נסח את הבעיה הדואלית.
 - ד. פתור את הבעיה הדואלית של הבעיה הפרימלית הנתונה
1. בשיטה גרפית
 2. באמצעות שיטת סימפלכס והעזר בשיטת ה-M הגדול.



Maximize $Z = 2X_1 + 2X_2$

Subject to:

- 1) $-X_1 + X_2 \leq 1$
- 2) $-X_1 + 2X_2 \leq 4$
- 3) $X_1 \geq 0$
- 4) $X_2 \geq 0$

- א. צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים וקבע אם קיים פתרון יחיד/מרובה/לא חסום/אין פתרון אופטימלי .
- ב. פתור את הבעיה הנתונה בשיטת הסימפלכס.
- ג. נסח את הבעיה הדואלית.
- ד. בהמשך לסעיף א' **בלבד** , קבע בעבור הבעיה הדואלית אם קיים פתרון יחיד/מרובה/לא חסום/אין פתרון אופטימלי (בלי לפתור את הבעיה הדואלית).

Maximize $Z = 3X_1 - 2X_2$

Subject to:

- 1) $X_1 + X_2 \leq 1$
- 2) $X_1 + X_2 \geq 2$
- 3) $X_1 \geq 0$
- 4) $X_2 \geq 0$

- א. צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים וקבע אם קיים פתרון יחיד/מרובה/לא חסום/אין פתרון אופטימלי .
- ב. פתור את הבעיה בשיטת הסימפלכס והעזר בשיטת ה-M הגדול. בכל שלב הראה באיזו נקודה בציור של חלק א' את/ה נמצא/ת.
- ג. נסח את הבעיה הדואלית.
- ד. פתור את הבעיה הדואלית של הבעיה הפרימלית הנתונה בדרך הנוחה לך.
- ה. מהי מסקנתך מהסעיפים ב' – ד' ?



שאלה 5

לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי :

$$\max \{Z = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\}$$

בכפוף לאילוצים האלה :

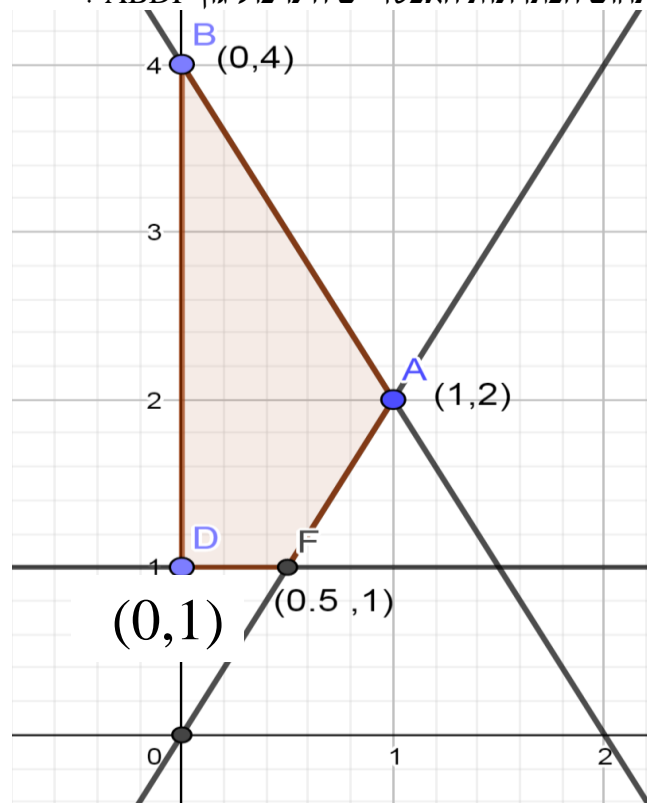
$$(1) \quad 2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$(2) \quad -2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$(3) \quad x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

תחום הפתרונות האפשריים הינו פוליגון ABDF :



שאלה 5א'

בעבור אילו ערכים של α הקדקוד (1,2) יהיה פתרון אופטימלי יחיד לבעיה הנתונה?

א. $\frac{2}{3} < \alpha < 2$

ב. $\alpha > 2$

ג. $\alpha < \frac{2}{3}$

ד. לא קיימים ערכים כאלו



שאלה 5'

בעבור אילו ערכים של α הקדקוד $(1, 0.5)$ יהיה פתרון אופטימלי יחיד לבעיה הנתונה?

א. $\frac{2}{3} < \alpha < 2$

ב. $\alpha > 2$

ג. $\alpha < \frac{2}{3}$

ד. לא קיימים ערכים כאלו

שאלה 6 נתונה בעיית תכנון לינארי הבאה:

$$\max \{z = -X_1 + 4X_2 + X_3\}$$

Subject to:

$$-2X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 12$$

$$-X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 3$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 1$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

טבלה ב' שלפניך היא הטבלה המתארת את הפתרון האופטימלי בעבור הבעיה הנתונה. טבלה זו התקבלה לאחר כמה צעדים בשיטת הסימפלקס.

		משתנים						
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	אגף ימין
	Z	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
בסיס	x_1	1	0	a_8	1	a_{11}	3	15
		0	1	a_9	0.5	a_{12}	1	7
		0	0	a_{10}	0	a_{13}	1	4

כאשר המשתנה s_i הוא משתנה החוסר המתאים לאילוץ ה- i .

- מצאו מהו הבסיס האופטימלי.
- בטבלה ב' חסרים 13 ערכים המסומנים באותיות a_1 עד a_{13} . עליך לחשב ערכים אלה בלי להפעיל את שיטת הסימפלקס.
- על גבי גיליון התשובות רשמו את האותיות a_1 עד a_{13} וליד כל אות רשום את הערך שצריך להופיע בטבלה במקום האות.



שאלה 7 נתונה בעיית תכנון לינארי הבאה :

- ◆ Maximize $Z = -2X_1 - X_2 + 3X_3 - 2X_4$
 ◆ Subject to:
 ◆ 1) $X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 \leq 7$
 ◆ 2) $-X_1 - 2X_2 + 4X_3 \leq 12$
 ◆ 3) $-X_1 - 4X_2 + 3X_3 + 8X_4 \leq 10$
 ◆ 4) $X_1 \geq 0$ 5) $X_2 \geq 0$
 ◆ 6) $X_3 \geq 0$ 7) $X_4 \geq 0$

בהוספת משתני חוסר x_5, x_6, x_7 , באיטרציה האחרונה של הסימפלקס, התקבל :

$$\begin{aligned} z + \frac{7}{5}x_1 + \frac{12}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{4}{5}x_6 &= 11 \\ \frac{3}{10}x_1 + 1x_2 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{10}x_6 &= 4 \\ -\frac{1}{10}x_1 + 1x_3 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{10}x_6 &= 5 \\ \frac{1}{2}x_1 + 10x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 1x_7 &= 11 \end{aligned}$$

- א. מהו ערכי X_j האופטימליים וערך פונקציית המטרה האופטימלי?
 ב. האם הפתרון בסעיף א' הוא פתרון יחיד?
 ג. מהי הבעיה הדואלית ומה פתרונה? בסס את תשובתך על הטבלה הנתונה בלבד.

שאלה 8

לפניך שישה סעיפים שאינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף, בחר את התשובה הנכונה וסמן את התשובות הנכונות על גבי טופס התשובות על ידי סימון X במשבצת המתאימה .

לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי : $\max \{z = 24x_1 + 23x_2 + 32x_3 + 20x_4\}$
 בכפוף לאילוצים האלה :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\leq 90 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 &\leq 65 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 &\leq 85 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

הפתרון האופטימלי הפרימלי היחיד הוא : $x_1 = 7, x_2 = 0, x_3 = 19, x_4 = 0$

הפתרון האופטימלי הדואלי היחיד הוא : $y_1 = 5.6, y_2 = 0, y_3 = 3.2$

כאשר y_i הוא המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ פרימלי i , עבור $i = 1, 2, 3$.

א. בטבלת הסימפלקס הסופית עבור המודל הנתון, מספר המקדמים השונים מאפס,

בשורת ה- z , הוא :

5 (1)

3 (2)

4 (3)

4 אי-אפשר לדעת (4)



ב. איזה מההיגדים הבאים נכון עבור הפתרון האופטימלי הפרימלי,

(1) משתני הסרק של אילוצים 1 ו-3 הם משתנים בסיסיים.

(2) משתני הסרק של כל האילוצים הם משתנים בסיסיים.

(3) משתנה הסרק של אילוץ 2 הוא משתנה בסיסי.

(4) משתנה הסרק של אילוץ 1 הוא בסיסי.

ג. במודל המקורי חל שינוי במקדמים של x_2 , המודל המעודכן הוא:

$$\text{Maximize } 24x_1 + 20x_2 + 32x_3 + 20x_4$$

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 90$$

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 65$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 85$$

הפתרון הדואלי החדש הוא:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 3.5, \quad y_3 = 5.2 \quad (1)$$

$$y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2 \quad (2)$$

$$y_1 = 4.3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 7.2 \quad (3)$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 10 \quad (4)$$

ד. למודל המקורי הוסיפו משתנה אי שלילי חדש x_{new} , המודל המעודכן הוא:

$$\text{Maximize } 24x_1 + 20x_2 + 32x_3 + 20x_4 + 25x_{new}$$

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 6x_{new} \leq 90$$

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 5x_{new} \leq 65$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 9x_{new} \leq 85$$

הפתרון האופטימלי החדש הוא:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0 \quad (1)$$

$$y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2 \quad (2)$$

$$y_1 = 4.3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 7.2 \quad (3)$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 10 \quad (4)$$

ה. לבעיה הפרימלית המקורית הוסיפו את האילוץ: $3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 35$,

הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית יחד עם האילוץ החדש יהיה כעת:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 6.7 \quad (1)$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 19, \quad x_4 = 0 \quad (2)$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2.8, \quad x_4 = 1.7 \quad (3)$$

$$(4) \text{ אף אחת מהתשובות הנתונות אינה נכונה.}$$

ו. חל שינוי באגף ימין של אילוץ 2 בבעיה הפרימלית. אגף ימין חדש הוא 60 במקום 65.

איזה מההיגדים הבאים נכון:

(1) הפתרון הפרימלי הנתון הופך להיות בלתי אפשרי.

(2) הפתרון הפרימלי הנתון נשאר אפשרי אך איננו אופטימלי.

(3) אילוץ 2 הופך להיות אילוץ שמתקיים כשוויון (כלומר הופך להיות אילוץ פעיל).

(4) הפתרון הפרימלי הנתון נשאר אפשרי ואופטימלי.



שאלה 9

לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי:

$$\max \{Z = x_1 + 2x_2 + x_3\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$(1) \quad x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$(2) \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0$$

$$-\infty \leq x_3 \leq \infty$$

א. נסחו את הבעיה הדואלית.

ב. הראו כי $(0,1,0)$ הוא פתרון אפשרי לבעיה הדואלית שבסעיף א'.

ג. נסמן ב- Z^* את הערך האופטימלי של הבעיה הפרימלית הנתונה. בלי לפתור את הבעיה

הפרימלית והדואלית הוכיחו כי $Z^* \leq 1$.

ד. בלי לפתור את הבעיה הפרימלית והדואלית קבעו האם $(1,0,0)$ הוא פתרון אופטימלי של

הבעיה הפרימלית הנתונה? נמקו!

שאלה 10

"איגוד יצרני הממתקים" מאגד שלושה מפעלים המייצרים מידי חודש ממתקים בכמויות

האלה:

מפעל 1 מייצר 140 טונות, מפעל 2 מייצר 100 טונות ומפעל 3 מייצר 80 טונות.

האיגוד משווק את הממתקים באמצעות שלושה מרכזי שיווק.

הטבלה שלהלן מתארת את המרחקים בין מפעלי האיגוד למרכזי השיווק (בקילומטרים), את

הביקושים החודשיים לממתקים בכל מרכז שיווק ואת היצעי הממתקים.

מרכזי שיווק מפעלים	A	B	C	היצע	
1	40	30	24	140	
2	28	40	32	100	
3	20	24	28	80	
ביקוש	105	135	80		

הובלת טונה אחת של ממתקים עולה 1 ₪ לקילומטר.

א. חשב כמה טונות של ממתקים יש להוביל מידי חודש מכל מפעל לכל מרכז שיווק, כדי

שהעלות הכוללת של התובלה תהיה מזערית.

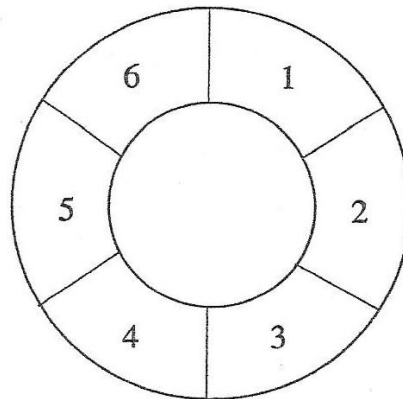


- ב. חשב את עלות התובלה הכוללת המזערית לחודש.
ג. אם הובלת טונה אחת של ממתקים הייתה עולה 50 אגורות לקילומטר במקום 1 ₪ לקילומטר) אז :

1. כיצד תראה טבלה התחלתית בלבד של היצע וביקוש ?
2. האם פתרון אופטימלי ישתנה?

שאלה 11

מפעל מייצר 6 מוצרים באמצעות 6 מכונות. המכונות מסודרות במעגל באולם הייצור, כמתואר באיור שלפניך.



המפעל מעסיק שלושה עובדים המפעילים את המכונות. כל אחד מהעובדים הוכשר להפעיל את כל שש המכונות, ומסוגל להפעיל שתי מכונות סמוכות בו זמנית. הטבלה שלפניך מתארת את רווחי המפעל (בעשרות שקלים) לשעת עבודה, כאשר עובד מס' i מפעיל את המכונה מס' j ($j=1,2,3,4,5,6$; $i=1,2,3$).

מס' מכונה מס' עובד	1	2	3	4	5	6
1	3	4	2	5	6	8
2	5	4	8	5	2	7
3	6	3	2	8	6	8

משיקולים של הנדסת אנוש הוחלט שכל עובד יפעיל שתי מכונות הסמוכות זו לזו. איזה מכונות יפעיל כל עובד, כדי שהרווח הכולל של המפעל לשעת עבודה יהיה מקסימלי? מה יהיה הרווח המקסימלי לשעת עבודה?
הערה: תנו דעתכם שניתן לשבץ את העובדים לעבודה במכונות 1 ו-2, 3 ו-4, 5 ו-6, אך גם במכונות 2 ו-3, 3 ו-4, 4 ו-5, 5 ו-6, 6 ו-1 וכ"ו.

עבודה נעימה!!!