הנדסת תוכנה

Software Engineering

פתרון תרגיל 2 להגשה בתכנון וניתוח אלגוריתמים (קורס מס׳ 10120)

מרצים : **ד״ר ראובן חוטובלי ד״ר מריה ארטישצ׳ב**

שאלה 1

א. הריצו את האלגוריתם למציאת תמ״א על המחרוזות $X = \langle 1100101 \rangle$ ו-$Y = \langle 101101110 \rangle$.
רשמו את הטבלה המתקבלת ובנו 2 תמ״א **שונות** ע״ס הטבלה.

פתרון :

נמלא את הטבלה לפי האלגוריתם :

1	7	0	1	2	3	4	4	5	5	5	5
0	6	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5
1	5	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4
0	4	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4
0	3	0	1	2	2	2	3	3	3	3	3
1	2	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		Y	1	0	1	1	0	1	1	1	0

תהליך איתור תמ״א מופיע בטבלה הנ״ל. במסלול הירוק מתקבלת תמ״א 11010. ובמסלול הורוד נקבל 10101. (קיימות אפשרויות נוספות)

ב. רשמו אלגוריתם חמדני אשר בהנתן שתי מחרוזות X, Y ו-Z בודק האם Z היא תת-מחרוזת משותפת של X ו-Y.

פתרון :

להלן האלגוריתם לבדיקה האם Z היא תת-מחרוזת של X :

```
def isSubString(X,Z):
    if len(X) < len(Z): return False     # תת-מחרוזת לא תהיה ארוכה מהמחרוזת X
    i = 0
    for c in Z:     # עוברים על התווים של Z
        while i < len(X) and X[i] != c:     # מחפשים את התו של Z בתוך X
            i = i + 1
        if i >= len(X): return False     # אם X מסתיימת לפני שזיהינו בה את כל התווים של Z
        i = i + 1
    return True
```

יש להריץ isSubString(X,Z) וגם isSubString(Y,Z), ואם בשני המקרים התשובה חיובית, אז Z היא תת-מחרוזת משותפת של X ו-Y.

על שתי סדרות X ו-Y הורץ האלגוריתם שנלמד בכיתה למציאת תת-סדרה משותפת ארוכה ביותר – תמ״א. עקב תקלה, הסדרה X אבדה. אך למזלנו נשמרה הסדרה השניה $Y = \langle 11220101220200 \rangle$ וגם הטבלה C המופיעה להלן:

10	0	1	2	3	4	4	5	5	5	6	7	7	7	7	7
9	0	1	2	3	4	4	4	4	5	6	7	7	7	7	7
8	0	1	2	3	3	3	4	4	5	6	6	6	6	6	6
7	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	5	5	5	5
6	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5
5	0	1	1	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5
4	0	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4
3	0	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
2	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ג. האם ניתן לקבוע את תמ״א ע״ס הנתונים הנ״ל? אם כן – רשמו את תמ״א המתקבלת. אחרת, הסבירו מדוע אי אפשר. אם הדבר אפשרי רק חלקית, רשמו את החלק שניתן והסבירו מה חסר ומדוע.

פתרון:

ניתן להפעיל את אותה השיטה כמו במקרה הרגיל, אבל מאחר ואי אפשר להשוות את התווים של X ו-Y, אז יש לאתר תאים בטבלה בהם התוצאה **בוודאות** נובעת משוויון – תאים C(i,j) כאלה ש- C(i-1,j)<C(i,j) **וגם** C(i,j-1)<C(i,j). מסלול איתור תמ״א מסומן בטבלה לעיל בירוק. התמ״א היא 1221122. (קיימות אפשרויות נוספות)

ד. האם ניתן לשחזר את X ע״ס הנתונים הנ״ל? אם כן – רשמו את הסדרה X. אחרת, הסבירו מדוע אי אפשר. אם הדבר אפשרי רק חלקית, רשמו את החלק שניתן והסבירו מה חסר ומדוע.

פתרון:

גם כאן, לכל $1 \le i \le 10$ אם נצליח למצוא C(i,j) כך ש-C(i-1,j)<C(i,j) **וגם** C(i,j-1)<C(i,j), אז נוכל לשחזר את התו x_i. תאים אלו מסומנים בטבלה בוורוד. והסדרה X היא 2120211221.

שאלה 2

השאלה עוסקת באלגוריתם למציאת סדר אופטימלי לכפל סדרת מטריצות (כאשר נתונות N מטריצות $M_1, M_2, \ldots, M_N$, ולכל $1 \le i \le N$ הגודל של המטריצה M_i הוא $d_{i-1} \times d_i$).

<u>הערה:</u> טבלה m מסומנת בשאלה זו כטבלה T, והטבלה s מסומנת כטבלה R).

סדרה $\langle p_0, p_1, \ldots, p_n \rangle$ (סדרה של ממדי המטריצות)מסומנת כ- $\langle d_0, d_1, \ldots, d_n \rangle$.

האלגוריתם הורץ עבור וקטור נתונים $(8, d_0, d_1, d_2, d_3, \cdots, d_8)$, ולהלן טבלת T שהתקבלה כתוצאה:

	1	2	3	4	5	6	7	8
8								0
7							0	72000
6						0	63000	68040
5					0	21000	81900	69720
4				0	420	1820	19820	21260
3			0	4800	1540	17820	34220	22540
2		0	480	660	942	2900	20840	21788
1	0	1440	516	876	1020	3536	21416	21872

אולם טבלת R נעלמה – ידוע רק ש- $R(1,8) = 3$, וגם מווקטור הנתונים נותרו רק שני ערכים: $d_0 = 6, d_4 = 30$

א. האם ניתן לקבוע את סדר הכפל האופטימלי של המטריצות ע״ס הנתונים הנ״ל? אם כן – רשמו את הסדר המתקבל (כלומר, ביטוי עם סוגריים). אחרת, הסבירו מדוע אי אפשר. אם הדבר אפשרי רק חלקית, רשמו את החלק שניתן והסבירו מה חסר ומדוע.

פתרון:

נקודת הפיצול הראשונה (האחרונה בביצוע) היא $R(1,8) = 3$. כלומר, כך נראה התרגיל לפני פעולת הכפל האחרונה: $(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3)(M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7 \cdot M_8)$. כעת, יש לבדוק היכן מתפצלות הסדרות 1,3 ו-4,8. ע״ס החישוב שמבצע האלגוריתם, עבור הסדרה 1,3, למשל, ישנן שתי אפשרויות:

$T(1,3) = \min\{T(1,1) + T(2,3) + d_0 d_1 d_3, T(1,2) + T(3,3) + d_0 d_2 d_3\}$. אבל מתוך הטבלה ניתן לראות כי $T(1,3) < T(1,2)$. לכן האפשרות השניה היא למעשה בלתי אפשרית, והתשובה היחידה הנכונה היא $R(1,3) = 1$. כך נקבל את הפיצול של הסדרה הראשונה $(M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3))$. דבר דומה ניתן לבצע גם עם הסדרה השניה: הזמן האופטימלי התקבל לפי

$$T(4,8) = min\{T(5,8) + \cdots, T(6,8) + \cdots, T(7,8) + \cdots, T(4,7) + \cdots\}$$

אבל $T(4,8) < T(5,8), T(6,8), T(7,8)$, לכן $T(4,8) = T(4,7) + T(8,8) + d_3 d_7 d_8$, מכאן $R(4,8) = 7$. כעת, יש למצוא את $R(4,7)$. שוב נשים לב כי $T(4,7) < T(5,7), T(6,7)$. מכאן, $R(4,7) = 6$. ואז נותר רק לחשב את $R(4,6)$. מאחר ו-$T(4,6) < T(5,6)$, אז $R(4,6) = 5$. מכאן, הצבת הסוגריים בביטוי כולו היא:

$$(M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)) \cdot \left(\left(\left((M_4 \cdot M_5) \cdot M_6\right) \cdot M_7\right) \cdot M_8\right)$$

ב. האם ניתן לשחזר את ווקטור הנתונים ע"ס הנתונים הקיימים? אם כן – רשמו את הערכים החסרים $(d_1, d_2, d_3, d_5, d_6, d_7, d_8)$. אחרת, הסבירו מדוע אי אפשר. אם הדבר אפשרי רק חלקית, רשמו את החלק שניתן והסבירו מה חסר ומדוע.

פתרון:

הפעם, נתייחס לעובדה כי $T(2,3) = d_1d_2d_3 = 480$, $T(1,2) = d_0d_1d_2 = 1440$. מאחר ו- $d_0 = 6$ (נתון בשאלה), אז $d_1d_2 = \frac{1440}{6} = 240$, ולכן $d_3 = \frac{480}{240} = 2$. חילוץ שאר הערכים נעשה באופן דומה:

$$T(3,4) = d_2d_3d_4 = 4800, d_3 = 2, d_4 = 30 \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{4800}{2 \cdot 30} = 80$$

$$d_1d_2 = 240, d_2 = 80 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{240}{80} = 3$$

$$T(4,5) = d_3d_4d_5 = 420, d_3 = 2, d_4 = 30 \quad \Longrightarrow \quad d_5 = \frac{420}{2 \cdot 30} = 7$$

$$T(5,6) = d_4d_5d_6 = 21000, d_4 = 30, d_5 = 7 \quad \Longrightarrow \quad d_6 = \frac{21000}{30 \cdot 7} = 100$$

$$T(6,7) = d_5d_6d_7 = 63000, d_5 = 7, d_6 = 100 \quad \Longrightarrow \quad d_7 = \frac{63000}{7 \cdot 100} = 90$$

$$T(7,8) = d_6d_7d_8 = 72000, d_6 = 100, d_7 = 90 \quad \Longrightarrow \quad d_8 = \frac{72000}{100 \cdot 90} = 8$$

שאלה 3

נתונה בעיית המטען עם פרמטרים הבאים: קיבולת האוניה $W = 5.5$ ונתוני הפריטים מרוכזים בטבלה:

Items	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Weight	0.5	2	2.5	1	2
Value	8	16	28	14	15

א. מצאו פתרון אופטימלי עבור הבעיה הנתונה (כאשר קיים פריט אחד מכל סוג). תארו את כל שלבי הפתרון ורשמו בבירור את התוצאה.

ב. כיצד ישתנה הפתרון מסעיף א', אם $W = 8$? נמקו.

ג. פתרו את הבעיה של סעיף א' כאשר יש אינסוף פריטים מכל סוג.

רמז: הפעילו את השיטה בדומה לסעיף א', אלא שהפעם לכל a_i יוגדר גם x_i שזאת כמות הפריטים מהסוג ה-i-י. לכן כדאי גם להגדיר שתי טבלאות: בנוסף לטבלה הבסיסית – טבלת הרווחים – נשמור בטבלה המקבילה את ערכו של x_i עבורו קיבלנו מקסימום.

ד. כתבו תכנית מודולרית בשפת C המטפלת בבעיית התרמיל (כאשר קיים פריט אחד מכל סוג) תוך שימוש בתכנות דינמי.

<u>קלט התכנית:</u>

- מספר הפריטים (n) שהוא משתנה.
- סדרה של n ערכים –"רווחים" (שימו לב שווקטור זה יהיה מיוצג באמצעות מערך דינאמי).
- סדרה של n משקלים שלמים(שימו לב שווקטור זה יהיה מיוצג באמצעות מערך דינאמי).
- מספר שהוא משקל התרמיל

<u>פלט נאה של התכנית:</u>

- טבלה T
- טבלה S
- פתרון.

ה. כתבו תכנית מודולרית בשפת C המטפלת בבעיית התרמיל (כאשר יש אינסוף פריטים מכל סוג) תוך שימוש בתכנות דינמי.

<u>קלט התכנית:</u>

- מספר הפריטים (n) שהוא משתנה.
- סדרה של n ערכים –"רווחים" (שימו לב שווקטור זה יהיה מיוצג באמצעות מערך דינאמי).
- סדרה של n משקלים שלמים(שימו לב שווקטור זה יהיה מיוצג באמצעות מערך דינאמי).
- מספר שהוא משקל התרמיל

<u>פלט נאה של התכנית:</u>

- טבלה T
- טבלה S
- טבלה X , טבלה בה שומרים לכל i את ערכו של x_i עבורו קיבלנו מקסימום.
- פתרון.

א. מצאו פתרון אופטימלי עבור הבעיה הנתונה (כאשר קיים פריט אחד מכל סוג). תארו את כל שלבי הפתרון ורשמו בבירור את התוצאה.

פתרון:

נפתור את השאלה בשיטת תכנות דינמי לפי האלגוריתם הנלמד בכיתה: נבנה טבלה T בה כל שורה i מכילה רווחים של פתרונות עבור תת-בעיה המוגדרת על הפריטים $a_1, a_2, \cdots, a_i$, וכל עמודה j מתייחסת לאוניה בגודל j (אך הפעם מספרי העמודות לא תמיד יהיו שלמים אלא יופיעו גם חצאים).

	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	8	8	8	16	24	24	24	24	24	24	24
3	0	8	8	8	16	28	36	36	36	44	52	52
4	0	8	14	22	22	28	36	42	50	50	52	58
5	0	8	14	22	22	28	36	42	50	50	52	58

נחלץ את הפתרון מהטבלה: מהשוויון $T[5,5.5]=T[4,5.5]$ נובע כי קיים פתרון אופטימלי ללא פריט a_5.
אולם, $T[4,5.5]\neq T[3,5.5]$, לכן a_4 כן בפתרון. נחסיר את משקלו של a_4 מ- W ונמשיך בעמודה 4.5.
מאחר וגם $T[3,4.5]\neq T[2,4.5]$, אז גם a_3 נמצא בפתרון. מסיבה דומה ($T[2,2]\neq T[1,2]$) גם a_2 נבחר. מכאן, הפתרון הוא $\{a_2, a_3, a_4\}$ והרווח שלו 58.

ב. כיצד ישתנה הפתרון מסעיף א', אם $W=8$? נמקו.

פתרון:

אם $W=8$, <u>כל</u> הפריטים נכנסים והרווח הוא 81.

ג. פתרו את הבעיה של סעיף א' כאשר יש אינסוף פריטים מכל סוג.

פתרון:

נפעיל את השיטה בדומה לסעיף א', אלא שהפעם לכל a_i יוגדר גם x_i שזאת כמות הפריטים מהסוג ה-i-י. לכן כדאי גם להגדיר שתי טבלאות: בנוסף לטבלה הבסיסית – טבלת הרווחים – נשמור בטבלה המקבילה את

ערכו של x_i עבורו קיבלנו מקסימום.

טבלת הרווחים												
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
2	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
3	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
4	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
5	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88

טבלת הכמויות												
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

כעת, נחלץ את קבוצת הפריטים מטבלת הכמויות (נקרא לה X) : $X(5,5.5) = 0$ פרושו שהפריט a_5 לא נמצא בפתרון. אז נבדוק את התא שמעל: $X(4,5.5) = 0$ לכן גם פריטים מסוג a_4 לא נמצאים בפתרון. וכך גם לגבי a_3 ו-a_2. $X(1,5.5) = 11$ לכן בפתרון יופיעו 11 פריטים מסוג a_1. והרווח המירבי הוא 88.

ד' + ה' תכנות

שאלה 4

התבקשתם למצוא את השימוש הטוב ביותר בשטח קרקע. על השטח ניתן להקים עד חמישה מבנים. מבנה יכול לשמש לאחד מארבעת השימושים הבאים: מגורים, מסחר, משרדים, מלונאות.
הטבלה הבאה מתארת את הרווח הצפוי (בהתאם למספר המבנים מאותו הסוג):

מספר מבנים	מגורים	מסחר	משרדים	מלונאות
0	0	0	0	0
1	2	6	1	8
2	4	9	1	12
3	6	9	2	20
4	8	10	3	16
5	10	11	15	12

<u>לדוגמה</u>: אם בשטח יהיו 3 מבנים מסוג מגורים, אז ניתן לקבל מזה רווח 6 (משלושתם יחד).

א. הציעו ורשמו אלגוריתם יעיל לפתרון הבעיה הנ"ל במקרה הכללי עבור N מבנים ו-M שימושים אפשריים שונים (על התאור להיות <u>כללי וברור</u>).

פתרון:

האלגוריתם:

נמספר את סוגי המבנים: 1 – מגורים, 2 – מסחר, 3 – משרדים, 4 – מלונאות. נקרא לטבלת המחירים לעיל C, כלומר, $C(i,j)$ הינו רווח מבניית i מבנים מסוג j. לדוגמא, $C(4,2)=10$.

נסמן ע"י $p(i,j)$ את הרווח המקסימלי מבניית i מבנים מסוגים $1,2,\dots,j$. אזי ניתן להגדיר את הפתרון ע"י נוסחת הנסיגה: $p(i,j)=\max_{0\le k\le j}\{C(k,j)+p(i-k,j-1)\}$ כאשר תנאי השפה הוא $p(i,1)=C(i,1)$.

נגדיר טבלה P בגודל (N+1)×M ונמלא אותה בסדר הגדלת הערכים של i,j. הרווח המקסימלי יתקבל בתא $P(5,4)$. כדי לקבל גם את הרכב הפתרון – כמה מבנים מכל סוג – כדאי לשמור גם עבור איזה ערך של k התקבל כל ערך בטבלה.

ב. הריצו את האלגוריתם המוצע על הנתונים הספציפיים מהטבלה הנ"ל. פרטו את שלבי ההרצה ורשמו בבירור את התוצאה הסופית – חלוקת המבנים האופטימלית לפי השימושים השונים.

פתרון:

נמלא את הטבלה P להלן לפי הנוסחה מהסעיף הקודם. בכל תא נציין בסוגריים עבור איזה k התקבל הערך.

	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	2	6 (1)	6 (0)	8 (1)
2	4	9 (2)	9 (0)	14 (1)
3	6	11 (2)	11 (0)	20 (3)
4	8	13 (2)	13 (0)	26 (3)
5	10	15 (2)	15 (5)	29 (3)

מהטבלה נובע כי הרווח המירבי הוא 29, וניתן לקבלו כאשר 3 מבנים יהיו מסוג מלונאות ועוד 2 מסחריים.

שאלה 5

למכונה לארגון קופסאות Small-Box מגיעה קבוצה של N קופסאות. לכל קופסה b_i ($1 \le i \le N$) ידועים גובה h_i, אורך d_i ורוחב w_i. ולכל קופסה מתקיים $h_i \le w_i \le d_i$. מטרת המכונה לארגן את הקופסאות ע"י הכנסת קופסה לתוך קופסה אחרת כדי שיישארו מינימום קופסאות חיצוניות (כלומר, שאר הקופסאות יהיו בפנים).

אולם, המכונה לא יודעת לסובב קופסאות, לכן היא תכניס קופסה b_i לתוך קופסה b_j רק כאשר מתקיים כי $d_i \le h_j$ (אחרת, אפילו לא תנסה). כמו כן, המכונה לא יכולה להכניס שתי קופסאות לתוך שלישית בזו לצד זו, אלא רק קופסה אחת בלבד לתוך קופסה אחרת (כאשר בתוך הקופסה הקטנה יותר כן ייתכנו קופסאות פנימיות נוספות).

ברצוננו לקבוע עבור המכונה את סדרת ההכנסות כך מספר הקופסאות (החיצוניות) שיישארו יהיה מינימלי האפשרי.

א. הציעו אלגוריתם חמדני יעיל ככל הניתן לפתרון הבעיה. פרטו את האלגוריתם (על התיאור להיות כללי וברור).

פתרון:

נבצע רדוקציה לבעיית תזמון משימות שהוצגה בכיתה:

לכל קופסה b_i נתייחס כאל משימה אשר h_i הוא זמן התחלתה, ו- d_i – זמן סיומה (לרוחב אין חשיבות כלל). ואז אוסף קופסאות הניתנות להכנסה זו בזו (בצורת מטריושקה) שקול לאוסף המשימות שניתן לבצע על מכונה אחת. נקרא לאוסף קופסאות כזה "שרשרת".

האלגוריתם (כמו שהופיע בכיתה):

נמיין את הקופסאות לפי סדר עולה של h_i.

לכל קופסה לפי הסדר: נגדיר אותה כחיצונית, ואז אם בין הקופסאות שכבר טופלו קיימת קופסה חיצונית שניתן להכניס לקופסה הנוכחית, אז נכניסה. אז הקופסה שהוכנסה מפסיקה להיות חיצונית.

ב. נתחו את הסיבוכיות של האלגוריתם המוצע.

פתרון:

ניתוח סיבוכיות:

מיון ייקח O(NlogN). אז נשמור עבור כל שרשרת הקופסאות את אורכה של החיצונית, ואת הערכים האלה נשים בערימת מינימום. בכל דיון בקופסה חדשה, נשלוף מהערימה את האורך המינימלי של אחת הקופסאות החיצוניות שנגישות באותו רגע. אם זה לא יתאים, אז כבר אין טעם לבדוק את השאר. בצורה כזו, גם את החלק השני של האלגוריתם ניתן לבצע ב-O(NlogN).

סה"כ הסיבוכיות O(NlogN).

ג. הוכיחו את נכונות האלגוריתם המוצע.

פתרון:

הוכחת נכונות:

נוכיח באינדוקציה: ההנחה היא שעד k הקופסאות הראשונות הפתרון היה אופטימלי. כעת, אם הקופסה k+1 מצטרפת לאחת השרשראות הקיימות, אז הפתרון עדיין אופטימלי. ואם אף אחת מהקופסאות החיצוניות לא נכנסת לקופסה k+1, אז הקבוצה הזו יוצרת צוואר הבקבוק החדש שגודלו קובע את החסם התחתון למספר מינימלי של שרשראות אפשריות.

ד. הריצו את האלגוריתם שהצעתם על הנתונים המרוכזים בטבלה להלן:

i	1	2	3	4	5
d_i	12	7	17	20	15
w_i	12	3	10	5	15
h_i	8	1	9	5	12

רשמו שלבים עיקריים של ההרצה.

כתוצאה הסופית של ההרצה, ציינו עבור כל קופסא לאיזו קופסא אחרת יש להכניסה (אם בכלל).

פתרון:

הרצת הדוגמא:

נמיין את הקופסאות לפי הגובה:

i	2	4	1	3	5
d_i	7	20	12	17	15
w_i	3	5	12	10	15
h_i	1	5	8	9	12

שלבי ההרצה:

1. קופסא b_2 מסומנת חיצונית.
2. קופסא b_4 מסומנת חיצונית. נבדוק האם b_2 נכנסת ל-b_4, כלומר, האם $d_2 \leq h_4$.
   זה לא מתקיים, לכן b_2 נשארת חיצונית.
3. קופסא b_1 מסומנת חיצונית. קופסא חיצונית עם אורך מינימלי היא b_2, לכן נבדוק האם b_2 נכנסת ל-b_1, כלומר, האם $d_2 \leq h_1$.
   זה כן מתקיים, לכן b_2 מפסיקה להיות חיצונית ומוכנסת ל-b_1. כלומר, $b_2 \rightarrow b_1$.
4. קופסא b_3 מסומנת חיצונית. קופסא חיצונית עם אורך מינימלי היא b_1, לכן נבדוק האם b_1 נכנסת ל-b_3.
   זה לא מתקיים, לכן b_1 נשארת חיצונית. (אין טעם לבדוק את b_4, כי אורכה עוד יותר גדול.)
5. קופסא b_5 מסומנת חיצונית. קופסא חיצונית עם אורך מינימלי היא b_1, לכן נבדוק האם b_1 נכנסת ל-b_5.
   זה כן מתקיים, לכן b_1 מפסיקה להיות חיצונית ומוכנסת ל-b_5. כלומר, $b_1 \rightarrow b_5$.

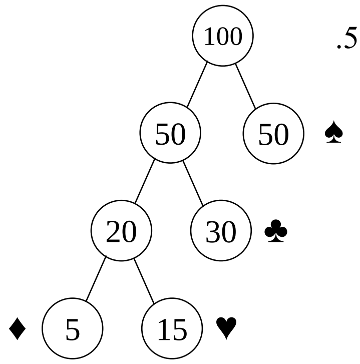
נסכם:

מספר הקופסא המוכנסת	1	2	3	4	5
מספר הקופסא אליה מכניסים	5	1	-	-	-

כלומר, בחוץ יישארו קופסאות 3, 4, 5, כאשר בתוך קופסה 5 יישבו 1 ו-2.

שאלה 6

נתון טקסט המכיל רק 4 תווים שונים בשכיחויות הבאות: ♠ - 50, ♣ - 30, ♥ - 15, ♦ - 5.



א. רוצים לקודד את הטקסט עם קוד Huffman. בנו עץ הקידוד המתאים.

פתרון:

ב. מהו אורכו (בסיביות) של הטקסט המקודד (לפי העץ שבניתם)?

פתרון:

$$50 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 170$$

ג. רשמו קידוד אפשרי (עקבי) לכל תווי הטקסט.

פתרון:

♠ - 0, ♣ - 10, ♥ - 110, ♦ - 111.

מכשיר חכם לפענוח טקסטים מקודדים פועל באופן הבא: מזינים אליו את טבלת ההתאמה בין תווי הטקסט המקורי לבין מילות הקוד המתאימות, לאחר מכן המכשיר קולט את הטקסט המקודד (סדרה בינרית), מפענח אותו ומדפיס את הטקסט המקורי. לצורך האצת התהליך, המכשיר קולט את סיביות הסדרה <u>בזוגות</u> (במקום סיבית-סיבית).
עקב תקלה מכנית, המכשיר התחיל להסתבך: אם מילת קוד מסויימת הינה באורך <u>אי זוגי</u>, אז המכשיר אמנם קולט ומפענח אותה בהצלחה, אבל הסיבית האחרונה שנקלטה (שהיא כבר שייכת למילת קוד הבאה) לא נשמרת להמשך הפעולה, ולכן פענוח של שאר הטקסט משתבש.

ד. הציעו תיקון לקידוד שפיתחתם בסעיפים הקודמים שיאפשר שימוש במכשיר החכם למרות התקלה בו. כיצד ישתנה האורך הכולל של הטקסט המקודד בקוד המתוקן?

פתרון:

יש לדאוג שכל מילת קוד תהיה באורך זוגי. לשם כך נשרשר לכל מילת קוד באורך אי זוגי סיבית נוספת (למשל, 0) בסוף המילה. כך בעת הפענוח, המכשיר יתעלם ממנה, אבל מילת קוד הבאה בטקסט לא תיפגע מהתקלה שבמכשיר.

לדוגמא בקוד לעיל יהיו המלים הבאות: 00, 10, 1100, 1110.

האורך הכולל של הטקסט כעת הוא:

$$80 \cdot 2 + 20 \cdot 4 = 240$$

ה. האם קיימת אפשרות לבנות קוד אחר (לאו דווקא מבוסס על Huffman) אשר בנסיבות הללו יניב אורך הטקסט המקודד קצר יותר? אם כן, תנו את הקידוד. אם לא, הסבירו מדוע.

פתרון:

כן, ניתן להגדיר קוד באורך קבוע 2: 00, 01, 10, 11. אז האורך הכולל הוא $100 \cdot 2 = 200 < 240$.