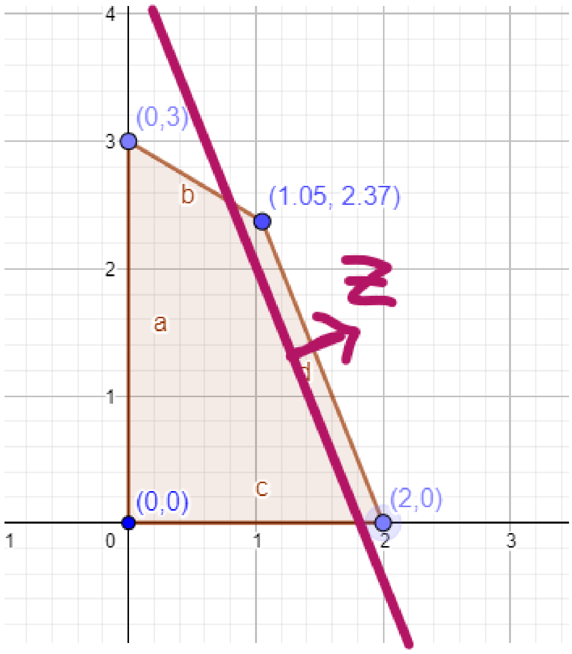
תכנון וניתוח אלגוריתמים תרגיל 1

מגישים: אלעזר פיין , מאור אופק

שאלה 1

א.



לפי כך שZ גדל בכיוון ימין למעלה (שני המשתנים חיוביים), והשיפוע שלו שווה בערכו החיובי לשיפוע של האילוץ השני (2.5) מסיקים שיש **אינסוף פתרונות אופטימליים**.

בנוסף, לפי ערכי Z בקודקודים:

Z	X2	X1
0	0	0
3	3	0
5	45/19	20/19
5	0	2

קיבלנו פעמיים ערך מקסימלי (2 פתרונות אופטימליים), מכך נובע אינסוף פתרונות.

ב.

2 אילוצים לכן 2 משתני חוסר:

MAX Z - 2.5X1 - X2 = 0

3X1 + 5X2 + X3 = 15

5X1 + 2X2 +X4 = 10

Xi >=0

נמלא בטבלה:

	X1	X2	X3	X4	b	מבחן המנה
X3	3	5	1	0	15	15/3
X4	5	2	0	1	10	10/5
CJ	-2.5	-1	0	0	0	

לפי ה b הנמוך ביותר ולפי ה CJ הנמוך ביותר נקבל את הפיווט שלנו (5) .

בגלל שישנם מספרים שליליים הפתרון אינו אופטימלי.

X1 משתנה נכנס
X4 משתנה יוצא

	X1	X2	X3	X4	b	מבחן המנה
X3	0	19/5	1	-0.6	9	
X1	1	2.5	0	0.2	2	
CJ	0	0	0	0.5	5	

קיבלנו פתרון אופטימלי אבל נשארנו עם משתנה X3 שמיוחס לו ערך 0 בשורת ה-Z ולכן יש אינסוף פתרונות

ג.

$$B = \begin{array}{cc} X3 & X1 \\ \end{array}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} X3 & X2 \\ \end{array}$$
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_B = \{X_1, X_3\}^p = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ד.

MIN Z= 15Y1 + 10Y2

3y1 + 5y2 >= 2.5

5y1 + 2y2 >= 1

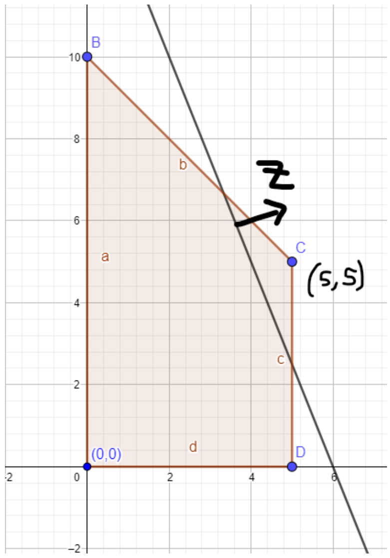
Yi >= 0

ה.

המשוואות של הבעיה הפרימלית לא השתנו לכן נקודה מינימלית (0,0).

שאלה 2

א.



לפי כך שZ גדל בכיוון ימין למעלה (שני המשתנים חיוביים), הקודקוד האחרון שהוא פוגש לפני שיוצא מהתחום הינו 5,5 לפי כן שם הפתרון האופטימלי. Z(5,5) = 35

בנוסף, לפי ערכי Z:

X1	X2	Z
0	0	0
0	10	20
5	0	25
5	5	35

ב.

MAX: Z - 5X1 - 2X2 + My1

X1 + X2 + X3 = 10

X1 + y1 = 5

Xi >= 0

מבחן המנה	b	y1	X3	X2	X1	
10/1	10	0	1	1	1	X3
5/1	5	1	0	0	1	y1
-	0	M	0	-2	-5	Cj

לפי ה b הנמוך ביותר ולפי ה CJ הנמוך ביותר נקבל את הפיווט שלנו (1) .

בגלל שישננם מספרים שליליים הפתרון אינו אופטימלי.

X1 משתנה נכנס
y1 משתנה יוצא

מבחן המנה	b	y1	X3	X2	X1	
5/1	5	-1	1	1	0	X2
אינסוף	5	1	0	0	1	y1
-	25	M+5	0	-2	0	Cj

בגלל שישננם מספרים שליליים הפתרון אינו אופטימלי.

X2 משתנה נכנס
X3 משתנה יוצא

מבחן המנה	b	y1	X3	X2	X1	
-	5	-1	1	1	0	X2
-	5	1	0	0	1	y1
-	35	M+3	2	0	2	Cj

פתרון אופטימלי

Z = 35

ג.

MIN: Z = 10y1 + 5y2

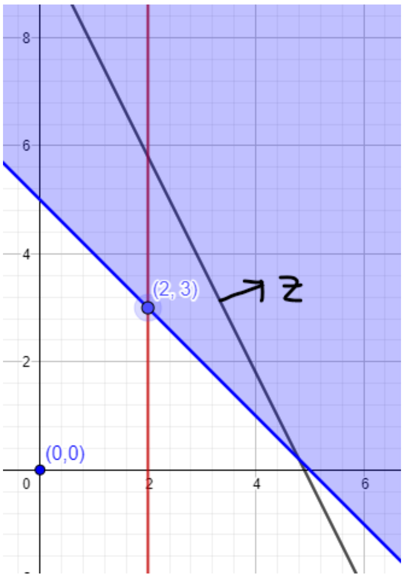
y1 + y2 >= 5

y1 = 2

yi >= 0

ד.

1.



ניתן לראות כי התחום שוכן בקו y1=2 עבור y2>=3. Z גדל בכיוון ימין למעלה, מכאן ערך Z מינימלי בנקודה 2,3.

Z(2,3)=35

ב.

MIN: Z - 10y1 - 5y2 + Mx1 + Mx2 = 0

y1 + y2 -y3 + x1 = 5

y1 - y4 + x2 = 2

yi >= 0

מבחן המנה	b	X2	X1	Y4	Y3	Y2	Y1	
5/1	5	0	1	0	-1	1	1	X1
2/1	2	1	0	-1	0	0	1	X2
--	0	M	M	0	0	-5	-10	Cj

לפי ה b הנמוך ביותר ולפי ה CJ הנמוך ביותר נקבל את הפיווט שלנו (1) .

בגלל שישנם מספרים שליליים הפתרון אינו אופטימלי.

X1 משתנה יוצא
y1 משתנה נכנס

מבחן המנה	b	X2	X1	Y4	Y3	Y2	Y1	
3/1	3	-1	1	1	-1	1	0	X1
אינסוף	2	1	0	-1	0	0	1	X2
-	0	10-M	-M	-10	0	-5	0	Cj

בגלל שישנם מספרים שליליים הפתרון אינו אופטימלי.

y2 משתנה נכנס
X1 משתנה יוצא

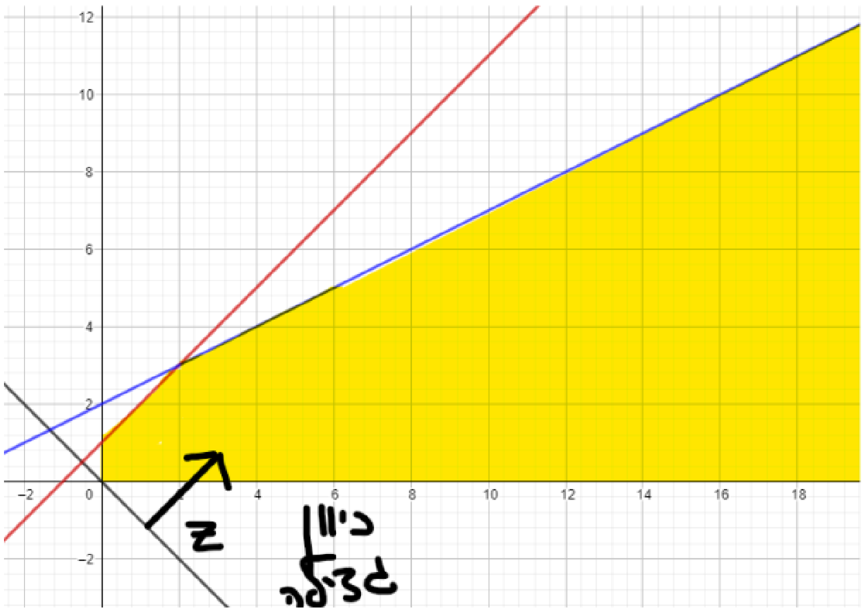
מבחן המנה	b	X2	X1	Y4	Y3	Y2	Y1	
-	3	-1	1	1	-1	1	0	X1
-	2	1	0	-1	0	0	1	X2
-	35	5-M	5-M	-5	-5	0	0	Cj

משתני בסיס לא שלילים לכן פתרון אופטימלי

Z = 35

.3

.א



ניתן לראות כי התחום אינו חסום – לפיכך אינסוף פתרונות.

ב.

MAX: $Z = 2X1 + 2X2$

$-X1 + X2 + X3 = 1$

$-X1 + 2X2 + X4 = 4$

$X1 >= 0$

$X2 >= 0$

	X1	X2	X3	X4	b	מבחן המנה
X3	-1	1	1	0	1	אינסוף
X4	-1	2	0	1	4	אינסוף
Cj	-2	-2	0	0	0	

פתרון לא אופטימלי , לא נוכל לבחור משתנה יוצא, משמע למערכת יש פתרון לא חסום

(למשתנים בשורת ה Z יש ערך 0) - אין סוף פתרונות.

ג.

MIN $Z = y1 +4\ y2$

$- y1 - y2 <= 2$

$y1 +2y2 <= 2$

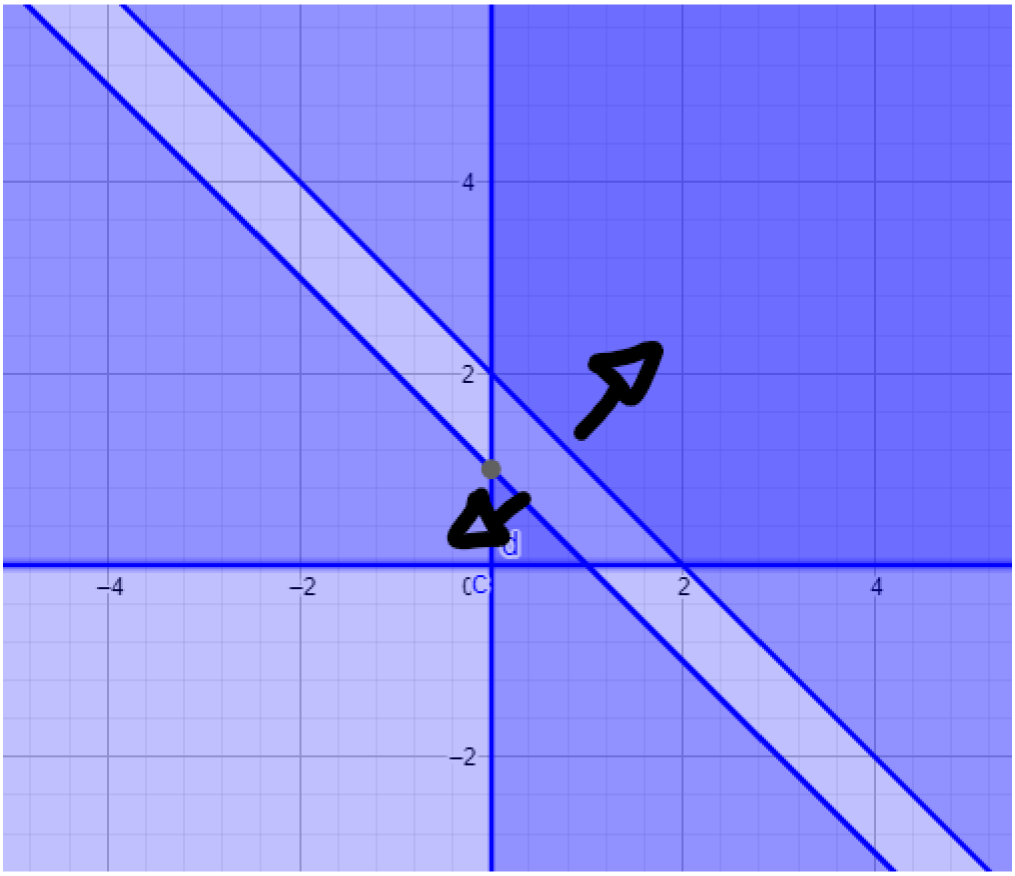
$yi >= 0$

ד.

לא קיים פתרון אופטימלי לבעיה הדואלית משום שאם לאחת הבעיות קיים פתרון לא חסום אז לבעיה המשלימה גם לא קיים פתרון

.4

.א



ניתן לראות כי אין תחום חופף שעונה על כל האילוצים ולפיכך אין פתרון אופטימלי.

.ב

MAX Z - 3X1 + 2X2 - My3

X1 + X2 + X3 = 1

X1 + X2 -X4 +y1 =2

X1 >= 0
X2 >= 0

	X1	X2	X3	X4	y1	b	מבחן המנה
y1	1	1	1	0	0	1	1
y2	1	1	0	-1	1	2	2
cj	-3-M	2-M	0	M	0	-2M	

משתנה יוצא y2

משתנה נכנס X1

מבחן המנה	b	y1	X4	X3	X2	X1	
	1	0	0	1	1	1	y1
	1	1	-1	1-	0	0	y2
	3-M	0	M	3+M	5	0	cj

הגענו לפתרון אופטימלי (אין מספר שלילי במספרי בסיס (ב CJ)) אבל נשאר משתנה חוסר בבסיס, מכאן אין פתרון למערכת.

ג.

MIN $Z = y1 + y2$

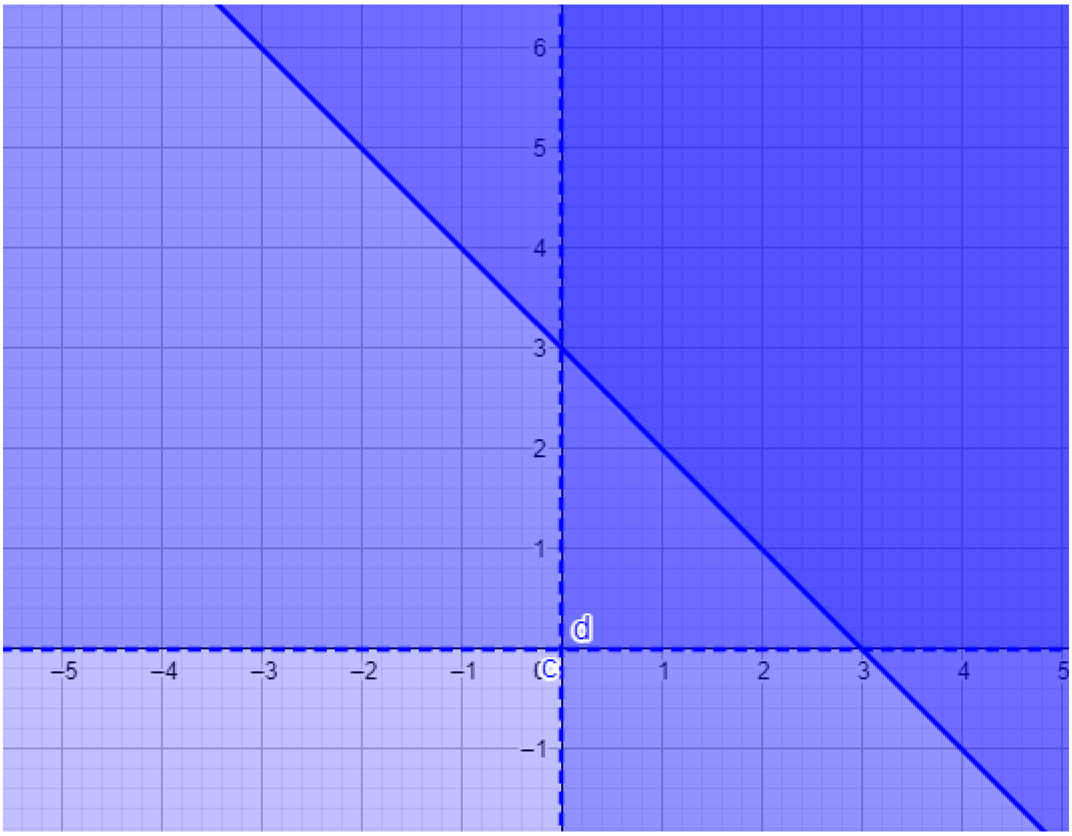
$Y1 + y2 >= 3$

$Y1 + y2 >= -2$

$Y1 >= 0$

$Y2 > 0$

ד.



תחום לא חסום לכן נעזר בשיטה שלמדנו (קווי גובה)

Z מקבל ערך אינסופי, לכן פתרון לא סופי.

ה.

אם לאחת הבעיות(פרימלית או דואלית) פתרון לא חסום זה גורר שאין פתרון אפשרי

.5

א.

קודקוד	(0,4)	(0,1)	(0.5, 1)	(1,2)
ערך Z	4-4a	1-a	1-a/2	2-a

נדרוש:

2-a > 1-a/2 -> **a < 2**
2-a > 1-a -> 2 > 1
2-a > 4-4a -> **a > 2/3**
=> <u>2/3 < a < 2</u>

(אפשרות א' היא הנכונה)

ב.

קודקוד	(0,4)	(0,1)	(0.5, 1)	(1,2)
ערך Z	4-4a	1-a	1-a/2	2-a

נדרוש:

1-a/2 > 2-a -> **a > 2**
1-a/2 > 1-a -> **a > 0**
1-a/2 > 4-4a -> **a > 7/6**
=> <u>a > 2</u>

(אפשרות ב' היא הנכונה)

.6

$$X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & 3 \\ 1/2 & a_{12} & 1 \\ 0 & a_{13} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$12 + 3a_{11} + 3 = 15 \rightarrow a_{11} = 0$$

$$6 + 3a_{12} + 1 = 7 \rightarrow a_{12} = 0$$

$$0 + 3a_{13} + 1 = 4 \rightarrow a_{13} = 1$$

מקבלים מכך:

משתני בסיס הם X1, X2, S2.

.a7 = 4*7 – 15 = 13

.a1 = a2 = a5 = 0

בנוסף:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & a_8 \\ * & * & a_9 \\ * & * & a_{10} \end{pmatrix}$$

$$c^T = (-1, 4, 1) \qquad c^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_6 \\ a_{11} \\ a_3 \end{pmatrix}$$

לסיכום:

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13
0	0	2	1	0	1	13	5	2	2	0	0	1

Z(15, 7, 0, 0, 4, 0) = 13

.7

א. Z(0, 4, 5, 0, 0, 0, 11) = 11

ב. יש משתנה חוסר בבסיס כלומר יש אינסוף פתרונות.

ג.

Min { 7y1 + 12y2 + 10y3 }

-y1 + y2 + y3 <= 2

-3y1 + 2y2 + 4y3 <= 1

-y1 + 4y2 +3y3 >= 3

-2y1 – 8y3 <= 2

y1, y2, y3 >= 0

לבעיה הפרימאלית הנתונה יש אינסוף פתרונות אופטימליים לפיכך לבעיה הדואלית אין פתרון אופטימלי.

.8

א – 3.
ב – 3.
ג – 2.
ד – 2.
ה – 2.
ו – 4.

.9

א.

$$\text{Min } \{ V = 2y1+y2+2y3 \}$$
$$y1+y2+2y3 >= 1$$
$$y1-y2+y3 <= 2$$
$$-y1+y2+y3 <= 1$$
$$y1, y2, y3 >= 0$$

ב.

$$V = 1$$
$$1 >= 1$$
$$-1 <= 2$$
$$1 <= 1$$
$$0,1,0 => 0$$

כל האילוצים מתקיימים.

ג. ערכי פתרון אופטימלי של הבעיות הפרימאלית והדואלית זהים ולכן אם בדואלית בבעיית המינימום הערך המינימלי הוא 1 (לפי סעיף ב') בהקשר ישיר הערך המקסימלי של *Z בבעיה הפרימאלית הוא גם 1. קיבלנו Z*<=1. Min(z) = Max(Z*).

ד. נציב ונקבל Z=1 ידוע לנו שזה בדיוק הערך של הפתרון האופטימלי המתבקש לבעיה (לפי סעיף ג'), ונראה שאכן האילוצים מתקיימים ולכן (1,0,0) זהו פתרון אופטימלי של הבעיה הפרימאלית.

10. א.

	A		B		C		היצע
1	40		30		24		140
2	28		40		32		100
3	20		24		28		80
ביקוש	105		135		80		

נעבור לטבלה חדשה לפי שיטת הפינה הצפון מערבית וחישוב ערכים:

	A v1 = 40		B v2 = 30		C v3 = 22		היצע
1	40	-	30	+	24		140
u1 = 0	105		35				
2	28		40	-	32	+	100
u2 = 10			100		0		
3	20	+	24		28	-	80
u3 = 6					80		
ביקוש	105		135		80		

מצב חדש לאחר חישוב ערכים:

	A v1 = 40		B v2 = 30		C v3 = 30		היצע
1	40	-	30	+	24	2	140
u1 = 0	25		115				
2	28	-22	40	-	32		100
u2 = 10	+		20		80		
3	20		24	14	28	26	80
u3 = -20	80						
ביקוש	105		135		80		

	A v1 = 40		B v2 = 30		C v3 = 44		היצע
1	40	-	30		24	-20	140
u1 = 0	5		135		+		
2	28	+	40	22	32	-	100
u2 = -12	20				80		
3	20		24	14	28	4	80
u3 = -20	80						
ביקוש	105		135		80		

	A v1 = 20		B v2 = 30		C v3 = 24		היצע
1 u1 = 0	40	20	30	-	24	+	140
			135		5		
2 u2 = 8	28	+	40	2	32	-	100
	25				75		
3 u3 = 8	20	-	24	-6	28	4	80
	80						
ביקוש	105		135		80		

טבלה סופית:

	A		B		C		היצע
1	40		30		24		140
			60		80		
2	28		40		32		100
	100						
3	20		24		28		80
	5		75				
ביקוש	105		135		80		

ב. 28 * 100 + 20 * 5 + 24 * 75 + 30 * 60 + 24 *80 = 8420

ג.

	A		B		C		היצע
1	20		15		12		140
	105		35				
2	14		20	22	16		100
			100		0		
3	10		12		14		80
					80		
ביקוש	105		135		80		

הפתרון האופטימלי הוא הפתרון מהסעיף הקודם אך חלקי 2 -> 4210

11. נבדוק צמדים עבור כל עובד.

אפשרות א': 1+2, 3+4, 5+6

מס' מכונה / מס' עובד	**1+2**	**3+4**	**5+6**
1	-7	-7	-14
2	-9	-13	-9
3	-9	-10	-14

נחסר איברים מינימליים בכל שורה.

מס' מכונה / מס' עובד	**1+2**	**3+4**	**5+6**
1	7	7	0
2	4	0	4
3	5	4	0

נחסר איברים מינימליים בכל עמודה.

מס' מכונה / מס' עובד	**1+2**	**3+4**	**5+6**
1	3	7	0
2	0	0	4
3	1	4	0

ניתן לכסות בפחות מ3
קווים את האפסים, נחסר איבר מינימלי ונוסיף להצטלבות:

מס' מכונה / מס' עובד	**1+2**	**3+4**	**5+6**
1	2	6	0
2	0	0	5
3	0	3	0

הגענו לפתרון מקסימלי עבור אפשרות א' והוא:
עובד 3 מפעיל את מכונות 1,2
עובד 2 מפעיל את מכונות 3,4
עובד 1 מפעיל את מכונות 5,6
והרווח הוא:
$(9 + 13 + 14) * 10 = 360$

אופציה ב': 1+6,5+4,2+3

מס' מכונה / מס' עובד	1+6	5+4	2+3
1	-11	-11	-6
2	-12	-7	-12
3	-14	-14	-5

חיסור איבר מינימלי בכל שורה.

מס' מכונה / מס' עובד	1+6	5+4	2+3
1	0	0	5
2	0	5	0
3	0	0	9

הגענו לפתרון מקסימלי עבור אפשרות ב' והוא:

עובד 3 מפעיל את מכונות 1,6
עובד 2 מפעיל את מכונות 5,4
עובד 1 מפעיל את מכונות 2,3

והרווח הוא:
$(14 + 11 + 12) * 10 = 370$

פתרון סופי: Max(360, 370) = 370
כלומר נשבץ את העובדים לפי אופציה ב'