הנדסת תוכנה

Software Engineering

<u>תרגיל 1 להגשה בתכנון וניתוח אלגוריתמים (קורס מס' 10120)</u>

מרצים : **ד"ר ראובן חוטובלי ד"ר מריה ארטישצ'ב**

תאריך הגשה : 10.4.2021 עד השעה 23:00. **<u>העבודה בזוגות</u>**.

עליכם להגיש את פתרון התרגיל כקובץ word ו/או כמצגת, הכולל גם את האיורים.

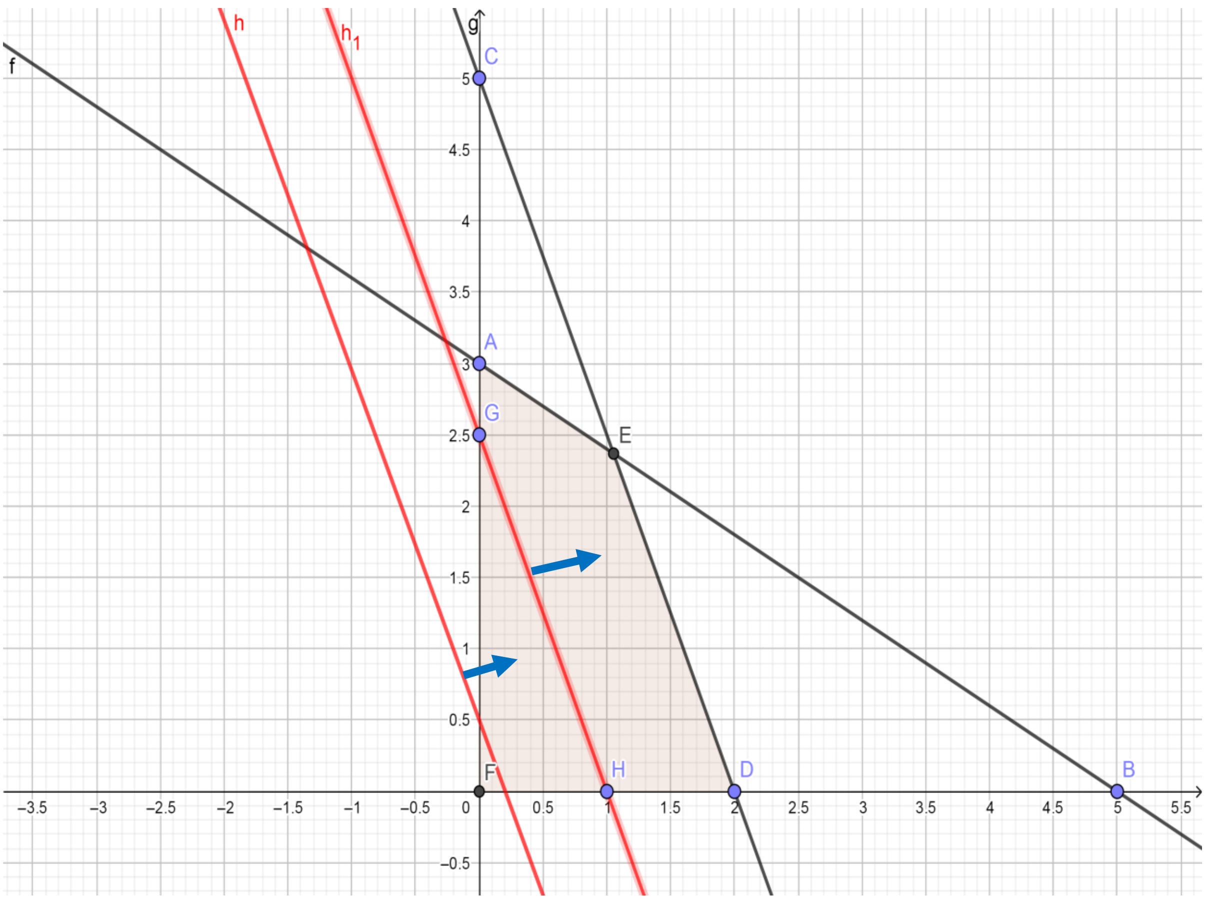
<u>שאלה 1</u>   נתונה בעיית תכנון ליניארי הבאה :

Maximize $Z = 2.5X_1 + X_2$

Subject to:

1) $3X_1 + 5X_2 \le 15$
2) $5X_1 + 2X_2 \le 10$
3) $X_1 \ge 0$
4) $X_2 \ge 0$

א.   צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים ומצא בשיטה גרפית את הפתרון האופטימלי.



X1	X2	Z = 2.5X1+X2
0	0	0
0	3	3
2	0	5
$\frac{20}{19}$	$\frac{45}{19}$	5

שני ערכים זהים מקסימליים ל - z בקדקודים סמוכים.
לכן מדובר ב∞ פתרונות וערך פונקציית המטרה 5.

ב. פתור את הבעיה הנתונה בשיטת הסימפלכס. בכל שלב הראה באיזו קדקוד של תחום הפתרונות האפשריים נמצאים באיור.

		1	2	3	4	5	6	7	8		
	מחירים	2.5	1								
	בסיס	מטריצת המקדמיםA								b	b_i / a_{ik}
1	X3	3	5	1	0					15	5
2	X4	5	2	0	1					10	2
	C'$_j$	-2.5	-1	0	0					0	= Z

בהתחלה נמצאים בקדקוד (0,0) .

		1	2	3	4	5	6	7	8		
	מחירים	2.5	1								
	בסיס	מטריצת המקדמיםA								b	b_i / a_{ik}
1	X3	0	**19/5**	1	-3/5					9	45/19
2	X1	<u>1</u>	**2/5**	0	1/5					2	5
	C'$_j$	0	**0**	0	1/2					5	= Z

- בהתחלה נמצאים בקדקוד (2,0) .

האופטימליות - כל המחירים הנוכחיים בשורת ה- Z אי שליליים, אך נשים לב שהמקדם של X_2 שאינו משתנה בסיסי שווה לאפס.
לכן ישנם ∞ פתרונות. במקרה זה, נעצרנו בקדקוד (2,0) וערך המטרה 5.

ג. מהן המטריצות B ו- B^{-1} כך ש: $\underline{x}_B = B^{-1}\cdot b$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$x_B = B^{-1}\cdot b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ד. נסח את הבעיה הדואלית.

פרימאלית-

$$maximize\ \ Z = 2.5x_1 + x_2$$

Subject to:

1. $3x_1 + 5x_2 \le 15$
2. $5x_1 + 2x_2 \le 10$
3. $x_i \ge 0$

דואלית-

$$min\{V = 15y_1 + 10y_2\}$$

Subject to:

$$3y_1 + 5y_2 \ge 2.5$$
$$5y_1 + 2y_2 \ge 1$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

ה. בהמשך לסעיף א' **בלבד** , השתמש בפתרון הבעיה הפרימלית שקיבלת בסעיף א', וביחסים בין שתי הבעיות- פרימלית ודואלית, על מנת למצוא את פתרון של הבעיה הדואלית (בלי לפתור את הבעיה הדואלית).

נעזר בחוק המשלים.

קיבלנו: $Z = 5$, $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$. כלומר, x_1, x_2 נמצאים בבסיס, ושני האילוצים של הבעיה הפרימלית מתקיימים כשוויון.

מכאן לפי משפט תנאי השלמת העודפים נובע ש: y_2, y_1 יהיו בבסיס הפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית כי הם המשתנים המתאימים לאילוצים של הבעיה הפרימלית שמתקיימים כשוויוניים.

מאחר ש: y_2, y_1 יהיו בבסיס של הבעיה הדואלית, כלומר יקבלו ערכים חיוביים, מכאן לפי משפט תנאי השלמת העודפים נובע ש: האילוץ הראשון והשני של הבעיה הדואלית יתקיימו כשוויון מאחר ש ולפי משפט תנאי השלמת העודפים, המשתנים אינם מתאפסים ולכן האילוצים המתאימים להם חייבים להתקיים כשוויוניים.

$$\begin{array}{l} 3y_1 + 5y_2 = 2.5 \\ 5y_1 + 2y_2 = 1 \end{array} \rightarrow 3y_1 = -5y_2 + 2.5 \rightarrow y_1 = -\frac{5}{3}y_2 + \frac{5}{6}$$

$$\rightarrow 5\left(-\frac{5}{3}y_2 + \frac{5}{6}\right) + 2y_2 = 1$$

$$\rightarrow -\frac{25}{3}y_2 + \frac{25}{6} + 2y_2 = 1 \rightarrow y_2 = \frac{1}{2}, y_1 = 0$$

ולכן, פתרון עבור הבעיה הדואלית הינו $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

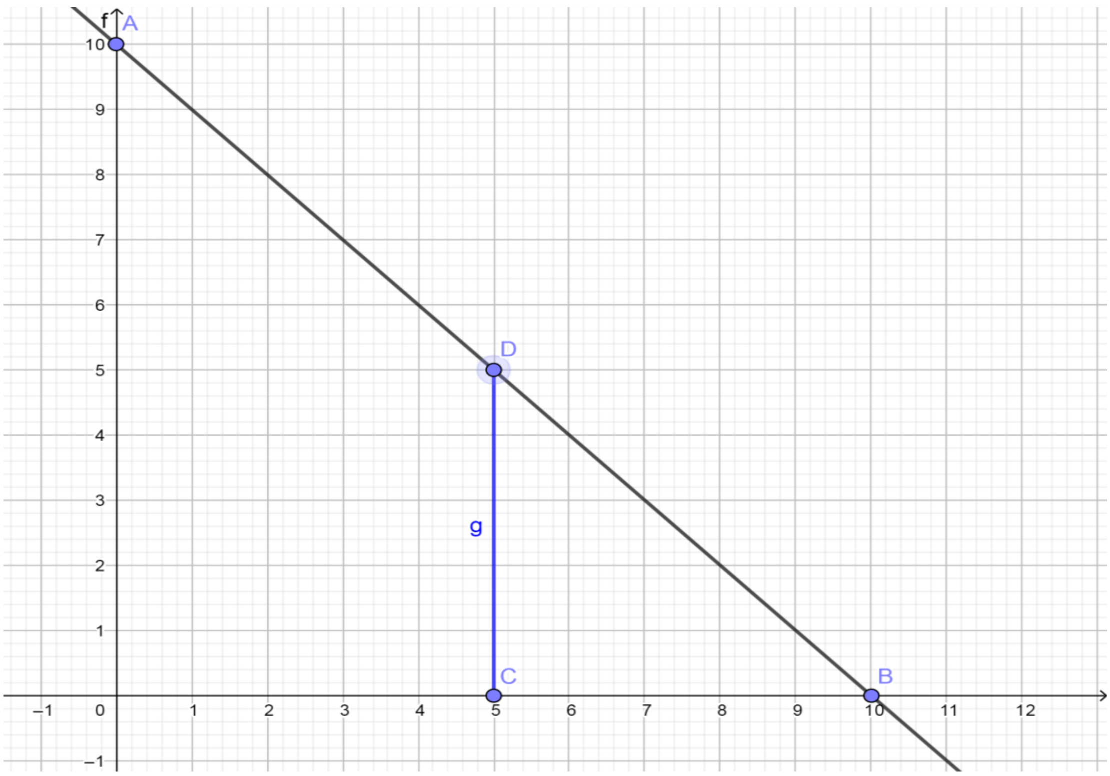
<u>שאלה 2</u> נתונה בעיית תכנון ליניארי הבאה:

Maximize $Z = 5X_1 + 2X_2$

Subject to:

1) $X_1 + X_2 \le 10$
2) $X_1 \quad = 5$
3) $X_1 \ge 0$
4) $X_2 \ge 0$

א. צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים ומצא את הפתרון האופטימלי.



התחום הוא קטע.

הקדקוד הראשון הוא: (5,0) .

הקדקוד השני הוא נקודת החיתוך בין שני אילוצים, והוא:

$x_1 + x_2 = 10\,, x_1 = 5 \rightarrow x_2 = 5$

הפתרון האופטימלי מתקבל באחד הקצוות של הקטע.

x_1	x_2	z
5	0	25
5	5	35

זוהי בעיית מקסימום ולכן ערך מקסימלי ל- z מתקבל בקדקוד (5,5) והערך של Z – הוא 35.

ב. פתור את הבעיה בשיטת הסימפלכס והעזר בשיטת ה- M הגדול. בכל שלב הראה באיזו קדקוד של תחום הפתרונות האפשריים נמצאים באיור.

נהפוך את האילוצים (אי השוויוניים) לשוויוניים ע"י הוספת משתנה חוסר לאי שוויון והוספת משתנה מלאכותי לשוויון.

משתנים אלו $0 \le$.

$maximize\ \ Z = 5x_1 + 2x_2 - My_1$

Subject to:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
2) $x_1 + y_1 = 5$
3) $x_i, y_1 \ge 0$

בניית טבלה בעבור הפתרון הבסיסי: קודקוד (0,0)

	X_1	X_2	X_3	Y_1		
מחירים מקוריים	5	2	0	-M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A				פתרון נוכחי b	מבחן המנה b_i/a_{ik}
X_3	1	1	1	0	10	
Y_1	1	0	0	1	5	
מחירים נוכחים	-M-5	-2	0	0	Z=-5M	

כעת נבחר משתנה נכנס ומשתנה יוצא על ידי מבחן המנה:

	X_1	X_2	X_3	Y_1		
מחירים מקוריים	5	2	0	-M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A				פתרון נוכחי b	מבחן המנה b_i/a_{ik}
X_3	1	1	1	0	10	10
Y_1	1	0	0	1	5	5
מחירים נוכחים	-M-5	-2	0	0	Z=-5M	

המשתנה הנכנס הוא X_1 והמשתנה היוצא מן הבסיס הוא Y_1 :

נכתוב טבלה חדשה, בהתאם לחוקי הסימפלקס :

	X_1	X_2	X_3	Y_1		
מחירים מקוריים	5	2	0	-M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A				פתרון נוכחי b	מבחן המנה b_i/a_{ik}
X_3	0	1	1	-1	5	
X_1	1	0	0	1	5	
מחירים נוכחים	0	-2	0	M+5	Z=25	

✓ מבחן האופטימליות נכשל כי קיים מחיר נוכחי שלילי.

✓ עתה נמצאים בקדקוד (5,0).

	X_1	X_2	X_3	Y_1		
מחירים מקוריים	5	2	0	-M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A				פתרון נוכחי b	מבחן המנה b_i/a_{ik}
X_3	0	1	1	-1	5	5
X_1	1	0	0	1	5	∞
מחירים נוכחים	0	-2	0	M+5	Z=25	

המשתנה הנכנס הוא X_2 והמשתנה היוצא מן הבסיס הוא X_3:

נכתוב טבלה חדשה, בהתאם לחוקי הסימפלקס :

	X_1	X_2	X_3	Y_1		
מחירים מקוריים	5	2	0	-M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A				פתרון נוכחי b	מבחן המנה b_i/a_{ik}
X_2	0	1	1	-1	5	
X_1	1	0	0	1	5	
מחירים נוכחים	0	0	2	M+3	Z=35	

כל המחירים הנוכחיים בשורת ה- Z אי שליליים , ולכן יש פתרון אופטימלי והוא יחיד. במקרה זה, נעצרנו בקדקוד (5,5) וערך פונקציית המטרה הוא 35.

ג. נסח את הבעיה הדואלית.

פרימאלית-

$maximize\ Z = 5x_1 + 2x_2$

Subject to:

1) $x_1 + x_2 \leq 10$

2) $x_1 = 5$

3) $x_i \geq 0$

דואלית-

$Min\{V = 10y_1 + 5y_2\}$

Subject to:

$y_1 + y_2 \geq 5$

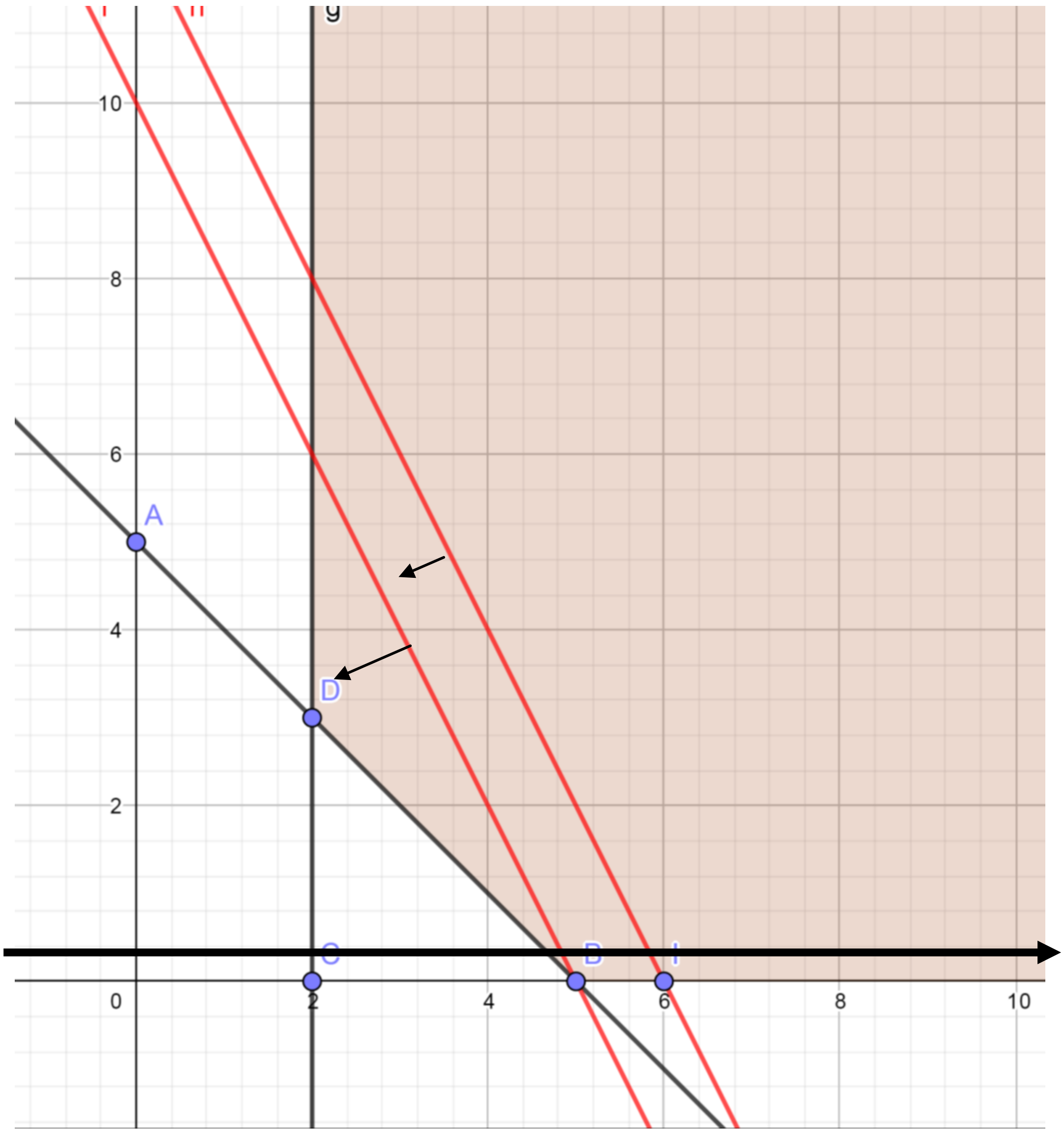
$y_1 \geq 2$

$y_1 \geq 0$

$y_2\ is\ free$

ד. פתור את הבעיה הדואלית של הבעיה הפרימלית הנתונה

1. בשיטה גרפית
2. באמצעות שיטת סימלכס והעזר בשיטת ה- M הגדול.



הפתרון האופטימלי נמצא בקדקוד (2,3): וערך פונקציית המטרה הוא V=35.

ערך זה של פונקציית המטרה היה צפוי לפי משפט הדואליות החזק שלפיו : $c^T x = b^T y$

פתרון בשיטת הסימלכס .

עבור המשתנה החופשי נציב $y_2 = y'_2 - y''_2$

נהפוך את האילוצים (אי השוויוניים) לשוויוניים ע"י הוספת משתני חוסר והוספת משתנים מלאכותים. משתנים אלו ≥ 0.

$$Min\{V = 10y_1 + 5y_2 + Mx_1 + Mx_2\}$$

Subject to:

$$y_1 + y_2' - y_2'' - y_3 + x_1 = 5$$
$$y_1 - y_4 + x_2 = 2$$
$$y_2 = y_2' - y_2''$$
$$y_1, y_2', y_2'' \geq 0$$

בניית טבלה בעבור הפתרון הבסיסי: קודקוד (0,0) . נבחר משתנה נכנס ומשתנה יוצא על ידי מבחן המנה:

	Y_1	Y'_2	Y''_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2		
מחירים מקוריים	10	5	-5	0	0	M	M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A							פתרון נוכחי c	מבחן המנה c_i/a_{ik}
X_1	1	1	-1	-1	0	1	0	5	5
X_2	1	0	0	0	-1	0	1	2	2
מחירים נוכחים	2M-10	M-5	5-M	-M	-M	0	0	V=7M	

המשתנה הנכנס הוא Y_1 והמשתנה היוצא מן הבסיס הוא X_2:

נכתוב טבלה חדשה, בהתאם לחוקי הסימפלקס:

	Y_1	Y'_2	Y''_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2		
מחירים מקוריים	10	5	-5	0	0	M	M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A							פתרון נוכחי c	מבחן המנה c_i/a_{ik}
X_1	0	1	-1	-1	1	1	-1	3	3
Y_1	1	0	0	0	-1	0	1	2	∞
מחירים נוכחים	0	M-5	5-M	-M	M-10	0	5-M	V=3M+20	

המשתנה הנכנס הוא Y'_2 והמשתנה היוצא מן הבסיס הוא X_1:

נכתוב טבלה חדשה, בהתאם לחוקי הסימפלקס:

	Y_1	Y'_2	Y''_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2		
מחירים מקוריים	10	5	-5	0	0	M	M		
משתני הבסיס	מטריצת המקדמים A							פתרון נוכחי c	מבחן המנה c_i/a_{ik}
Y'_2	0	1	-1	-1	1	1	-1	3	
Y_1	1	0	0	0	-1	0	1	2	
מחירים נוכחים	0	0	0	-5	-5	5-M	10-2M	V=35	

✓ והגענו לפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית בשיטת M הגדול.
כפי שצפינו מסעיף א, מדובר בקדקוד (2,3).
וערך הפונקציה המתקבלת V=35.

<u>שאלה 3</u> **נתונה בעיית תכנון לינארי הבאה:**

Maximize $Z = 2X_1 + 2X_2$

Subject to:

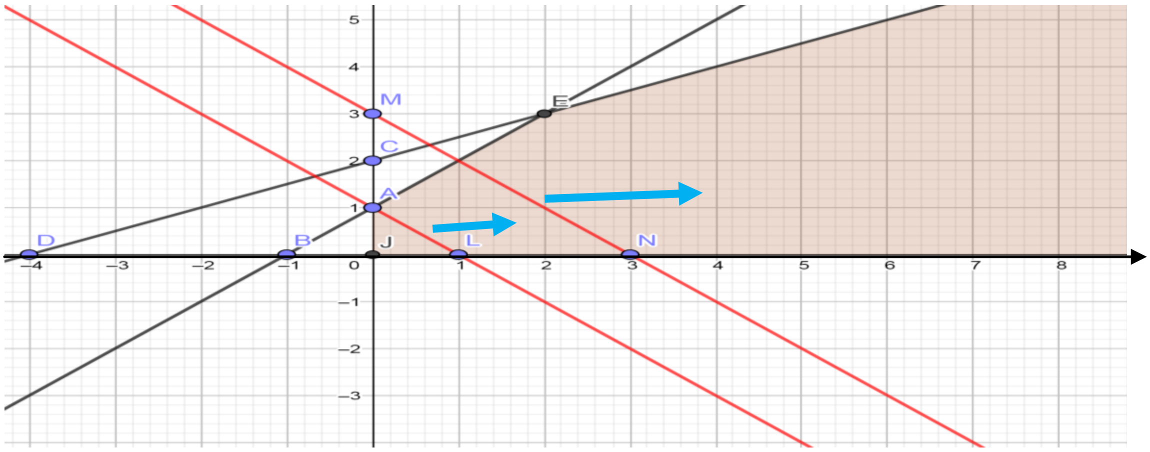
1) $-X_1 + X_2 \leq 1$

2) $-X_1 + 2X_2 \leq 4$

3) $X_1 \geq 0$

4) $X_2 \geq 0$

א. צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים וקבע אם קיים פתרון יחיד/מרובה/לא חסום/אין פתרון אופטימלי .



קווים אדומים הם קווי גובה והחיצים מתארים את כיוון היכן ש- Z גדלה.
תחום הפתרונות לא חסום ולפי החיצים ניתן לראות שהפתרון לא חסום.

ב. פתור את הבעיה הנתונה בשיטת הסימפלכס.

		1	2	3	4	5	6	7	8		
	מחירים	2	2								
	בסיס	Aמטריצת המקדמים								b	b_i / a_{ik}
1	X3	-1	1	1	0					1	1
2	X4	-1	2	0	1					4	2
	C'_j	-2	-2	0	0					0	= Z

		1	2	3	4	5	6	7	8		
	מחירים	2	2								
	בסיס	Aמטריצת המקדמים								b	b_i / a_{ik}
1	X2	-1	1	1	0					1	-
2	X4	1	0	-2	1					2	2
	C'_j	-4	0	2	0					2	= Z

		1	2	3	4	5	6	7	8		
	מחירים	2	2								
	בסיס	Aמטריצת המקדמים								b	b_i / a_{ik}
1	X2	0	1	-1	1					3	-
2	X1	1	0	-2	1					2	-
	C'_j	0	0	-6	4					10	= Z

- נרצה להכניס את x_3 לבסיס אך אין משתנה יוצא עקב מבחן המנה, לכן נובע כי הפתרון לא חסום. נעצרנו בקדקוד (2,3). פתרון לא חסום

ג. הבעיה הדואלית הינה :

פרימאלית-

$maximize\ \ Z = 2x_1 + 2x_2$

Subject to:

1) $-x_1 + x_2 \le 1$

2) $-x_1 + 2x_2 \le 4$

3) $x_i \ge 0$

דואלית-

$Min\{V = y_1 + 4y_2\}$

Subject to:

$-y_1 - y_2 \ge 2$

$y_1 + 2y_2 \ge 2$

$y_i \ge 0$

ד. לבעיה הדואלית אין פתרון אופטימלי, כיוון שלבעיה הפרימלית הפתרון לא חסום.

שאלה 4 נתונה בעיית תכנון ליניארי הבאה :

$$\text{Maximize } \{Z = 3X_1 - 2X_2\}$$

Subject to:

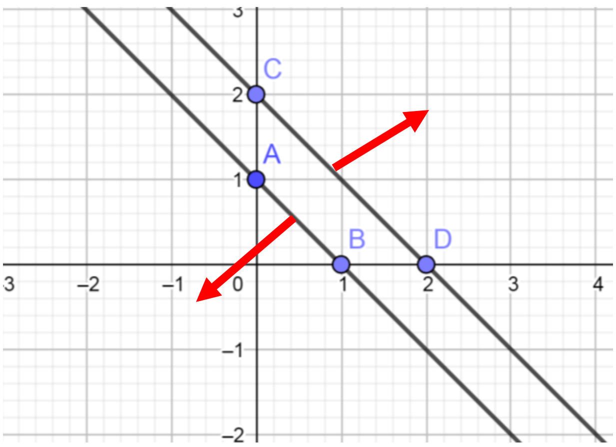
1) $X_1 + X_2 \le 1$

2) $X_1 + X_2 \ge 2$

3) $X_1 \ge 0$

4) $X_2 \ge 0$

א. צייר במישור את תחום הפתרונות האפשריים וקבע אם קיים פתרון יחיד/מרובה/לא חסום/אין פתרון אופטימלי .



תחום הפתרונות האפשריים הוא תחום ריק ולכן אין פתרון אופטימלי.

ב. פתור את הבעיה בשיטת הסימפלכס והעזר בשיטת ה- M הגדול. בכל שלב הראה באיזו

נקודה בציור של חלק א' את/ה נמצא/ת.

הבעיה היא :

$$Max\{Z = 3X_1 - 2X_2 - M \cdot Y_1\}$$

Subject to:

1) $X_1 + X_2 + X_3 = 1$

2) $X_1 + X_2 - X_4 + Y_1 = 2$

3) $X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0 \quad X_4 \geq 0 \quad Y_1 \geq 0$

		X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	6	7	8		
	מחירים	3	-2	0	0	-M					
	בסיס	מטריצת המקדמים A								b	b_i / a_{ik}
1	X3	1	1	1	0	0				1	1
2	Y1	1	1	0	-1	1				2	2
	C'_j	-M-3	-M+2	0	M	0				0	= Z

- נמצאים בקדקוד (0,0)
- המשתנה הנכנס לבסיס - X_1
- המשתנה היוצא מן הבסיס - X_3

		X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	6	7	8		
	מחירים	3	-2	0	0	-M					
	בסיס	מטריצת המקדמים A								b	b_i / a_{ik}
1	X1	1	1	1	0	0				1	
2	Y1	0	0	-1	-1	1				2	
	C'_j	0	5	M+3	M	0				M+3	= Z

- אמנם כל המחירים בשורת Z אי שליליים , אבל המשתנה המלאכותי Y_1 עדיין בבסיס. לכן, לבעיה אין פתרון אופטימלי.

ג. נסח את הבעיה הדואלית.

פרימאלית-

$maximize\ \ Z = 3x_1 - 2x_2$

Subject to:

1) $x_1 + x_2 \leq 1$

2) $x_1 + x_2 \geq 2$

3) $x_i \geq 0$

דואלית-

$Min\{V = y_1 + 2y_2\}$

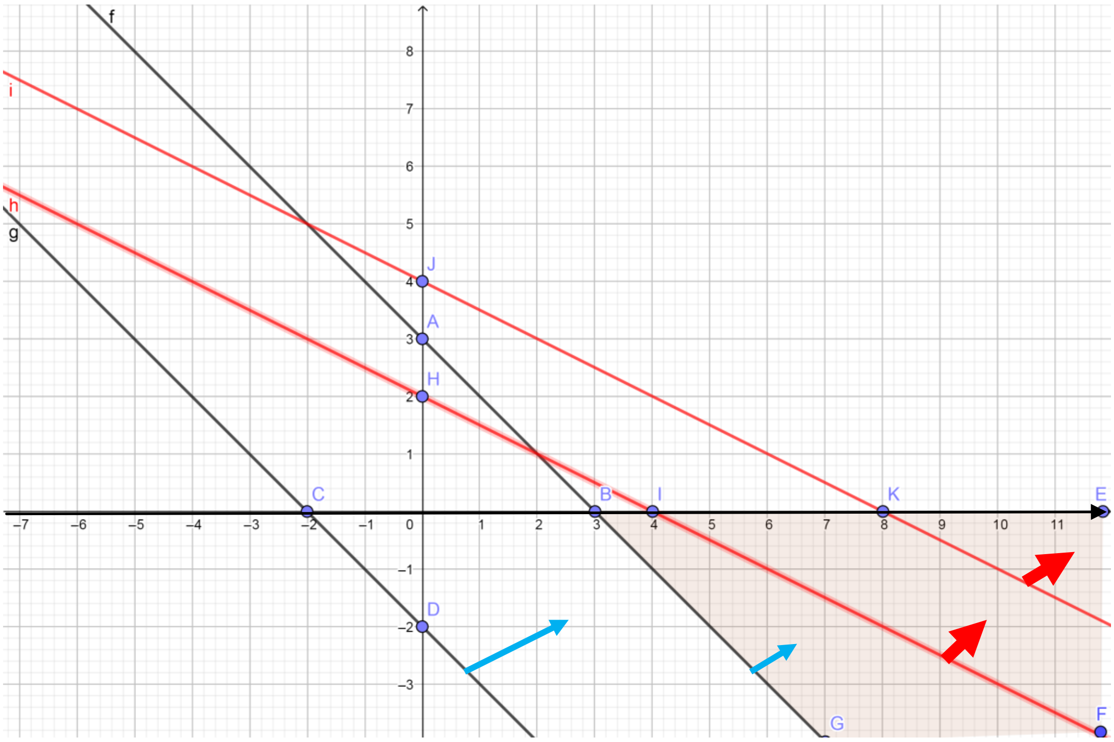
Subject to:

$y_1 + y_2 \geq 3$

$y_1 + y_2 \geq -2$

$y_1 \geq 0\ , y_2 \leq 0$

ד. פתרון בעיה הדואלית:



התחום שנוצר הוא פתוח ברביע הרביעי.

הקווים בצבע אדום הם קווי גובה והחיצים האדומים מראים את הכיוון היכן ש-Z גדלה.

לכן רואים שהפתרון לא חסום!

ה. מסקנה בעבור הבעיה הנתונה:

אם לבעיה הפרימלית אין פתרון אזי פתרון הבעיה הדואלית לא חסום.

באופן כללי: אם לבעיה הפרימלית אין פתרון אזי פתרון הבעיה הדואלית לא חסום או שגם לבעיה הדואלית אין פתרון.

שאלה 5

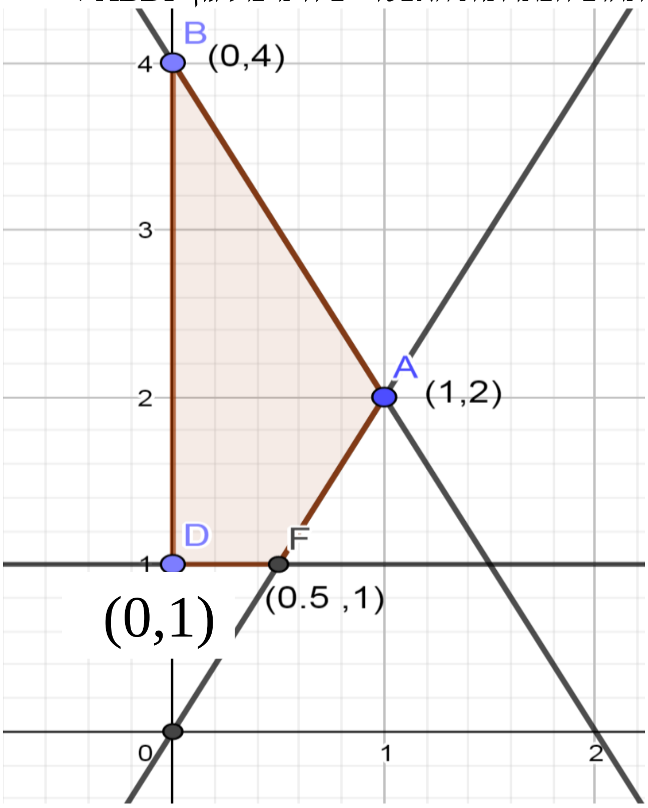
לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי:

$$\max\left\{Z=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$(1)\qquad 2x_1+x_2\le 4$$
$$(2)\qquad -2x_1+x_2\ge 0$$
$$(3)\qquad x_2\ge 1$$
$$x_1\ge 0$$

תחום הפתרונות האפשריים הינו פוליגון ABDF :



שאלה 5א'

בעבור אילו ערכים של α הקדקוד (1,2) יהיה פתרון אופטימלי יחיד לבעיה הנתונה?

א. $\frac{2}{3}<\alpha<2$

ב. $\alpha>2$

ג. $\alpha<\frac{2}{3}$

ד. לא קיימים ערכים כאלו

שאלה 5ב'

בעבור אילו ערכים של α הקדקוד $(0.5\ ,\ 1)$ יהיה פתרון אופטימלי יחיד לבעיה הנתונה?

א. $\frac{2}{3}<\alpha<2$

ב. $\alpha>2$

ג. $\alpha<\frac{2}{3}$

ד. לא קיימים ערכים כאלו

פתרון

שאלה 5	א	ב	ג	ד
א	X			
ב		X		

שאלה 6

נתונה בעיית תכנון ליניארי הבאה:

$$\max\left\{z=-X_1+4X_2+X_3\right\}$$

Subject to:

$$\begin{array}{llllll} -2X_1 & +6X_2 & +2X_3 & & \le & 12 \\ -X_1 & +2X_2 & +X_3 & & \le & 3 \\ X_1 & -2X_2 & +X_3 & & \le & 1 \\ X_1, & X_2, & X_3 & \ge & 0 & \end{array}$$

טבלה ב' שלפניך היא **הטבלה המתארת את הפתרון האופטימלי** בעבור הבעיה הנתונה.
טבלה זו התקבלה לאחר כמה צעדים בשיטת הסימפלקס.

		משתנים						
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	אגף ימין
	Z	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
בסיס	X_1	1	0	a_8	1	a_{11}	3	15
		0	1	a_9	0.5	a_{12}	1	7
		0	0	a_{10}	0	a_{13}	1	4

כאשר המשתנה s_i הוא משתנה החוסר המתאים לאילוץ ה- i.

א. מצאו מהו הבסיס האופטימלי.

ב. בטבלה ב' חסרים 13 ערכים המסומנים באותיות a_1 עד a_{13}. עליך לחשב ערכים אלה בלי להפעיל את שיטת הסימפלכס.

על גבי גיליון התשובות רשמו את האותיות a_1 עד a_{13} וליד כל אות רשום את הערך שצריך להופיע בטבלה במקום האות.

פתרון

לפי הטבלה ברור כי הבסיס האופטימלי הוא: x_1, x_2, s_2, כלא יכול להיות ש- x_3 יהיה בבסיס מדוע? כי אם x_3 היה בבסיס אז היינו מקבלים: $x_1 = 15, x_2 = 7, x_3 = 4$ וזה לא אפשרי כי פתרון זה לא מקיים את האילוץ השלישי.

מכאן נובע:

$$\begin{pmatrix} a_5 \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a_7 = Z^* = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot b = c_B^T \cdot x_B = (-1, 4, 0) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 13$$

ערך פונק' המטרה		ערכי מקדמי c
$C_B^T B^{-1} b$	$C_B^T B^{-1}$	$-C^T + C_B^T B^{-1} A$

לכן שורת ה-z טבלת הסימפלכס האחרונה תראה כך:

$$c_B^T \cdot B^{-1} = (-1,4,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,1)$$

אלה המקדמים בשורת z בעבור S_1, S_2, S_3 בהתאמה

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T \cdot B^{-1} \cdot A = (-1,4,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1,4,3)$$

$$-c^T + c_B^T \cdot B^{-1} \cdot A = (1,-4,-1) + (-1,4,3) = (0,0,2)$$

מכאן נובע :

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 2$$

$$\begin{pmatrix} a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

סופית :

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
Z	$a_1 = 0$	$a_2 = 0$	$a_3 = 2$	$a_4 = 1$	$a_5 = 0$	$a_6 = 1$	$a_7 = 13$
x_1	1	0	$a_8 = 5$	1	$a_{11} = 0$	3	15
x_2	0	1	$a_9 = 2$	0.5	$a_{12} = 0$	1	7
s_2	0	0	$a_{10} = 2$	0	$a_{13} = 1$	1	4

שאלה 7 נתונה בעיית תכנון ליניארי הבאה :

- **Maximize $Z = -2X_1 - X_2 + 3X_3 - 2X_4$**
- **Subject to:**
- **1) $X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 \le 7$**
- **2) $-X_1 - 2X_2 + 4X_3 \le 12$**
- **3) $-X_1 - 4X_2 + 3X_3 + 8X_4 \le 10$**
- **4) $X_1 \ge 0$ 5) $X_2 \ge 0$**
- **6) $X_3 \ge 0$ 7) $X_4 \ge 0$**

בהוספת משתני חוסר x_5, x_6, x_7 , באיטרציה האחרונה של הסימפלקס, התקבל :

$$z + \frac{7}{5}x_1 + \frac{12}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{4}{5}x_6 = 11$$

$$\frac{3}{10}x_1 + 1x_2 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{10}x_6 = 4$$

$$-\frac{1}{10}x_1 + 1x_3 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{10}x_6 = 5$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 10x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 1x_7 = 11$$

א. מהו ערכי Xj האופטימליים וערך פונקציית המטרה האופטימלי?
ב. האם הפתרון בסעיף א' הוא פתרון יחיד?
ג. מהי הבעיה הדואלית ומה פתרונה? בסס את תשובתך על הטבלה הנתונה בלבד.

פתרון

א. המשתנים הנמצאים בבסיס הם X_2, X_3 ו- X_7.

ערכם הוא: $X_2 = 4$, $X_3 = 5$ ו- $X_7 = 11$.
ערכם של שאר המשתנים הוא 0 מכיוון שאינם בבסיס: $X_1 = X_4 = X_5 = X_6 = 0$.
ערכה של פונקציית המטרה הוא: $Z = 11$.

ב. הפתרון הוא פתרון יחיד מאחר ואם היה מדובר בפתרונות מרובים המקדם של משתנה לא בסיסי מסוים בפונקציה הסופית יהיה 0 , כלומר מצב בו הכנסת פתרון לא ישנה את הערך של פונקציית המטרה.

*במקרה שלנו מצב כזה לא מתקיים ולכן חייב להיות פתרון יחיד.
*וכמובן שגם אין מצב של אין פתרון, כי רואים שקיים פתרון אופטימלי.

ג. הבעיה הפרימלית היא:

$$\mathbf{Max}\,\{Z = -2X_1 - X_2 + 3X_3 - 2X_4\}$$
$$Y_1:\ X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 \le 7$$
$$Y_2:\ -X_1 - 2X_2 + 4X_3 \le 12$$
$$Y_3:\ -X_1 - 4X_2 + 3X_3 + 8X_4 \le 10$$
$$\forall j \mid X_j \ge 0$$

הבעיה הדואלית המתאימה:

$$\mathbf{Min}\,\{V = 7Y_1 + 12Y_2 + 10Y_3\}$$
$$Y_1 - Y_2 - Y_3 \ge -2$$
$$3Y_1 - 2Y_2 - 4Y_3 \ge -1$$
$$-Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3 \ge 3$$
$$2Y_1 + 8Y_3 \ge -2$$
$$\forall j \mid Y_j \ge 0$$

פתרונה (בהתבסס על המקדמים של X_5, X_6 ו- X_7 בטבלה הסופית):
כלומר $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ $Y_1 = \frac{1}{5}$, $Y_2 = \frac{4}{5}$ ו- $Y_3 = 0$. וערך פונקציית המטרה: $V = 11$.

<u>בדרך אחרת:</u>

נרשום את כל המשוואות שלנו:

1. $x_1(y_1 - y_2 - y_3 + 2) = 0$
2. $x_2(3y_1 - 2y_2 - 4y_3 + 1) = 0$
3. $x_3(-y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 3) = 0$
4. $x_4(2y_1 + 8y_3 + 2) = 0$
5. $y_1(x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 7) = 0$
6. $y_2(-x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 12) = 0$
7. $y_3(-x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 10) = 0$

נציב את האקסים שקיבלנו בסעיף א' במשוואות 5-7 ונראה שרק המשוואה השביעית אינה מתאפסת ולכן : $y_3 = 0$

עכשיו נמצא את שני ה-Y ים הנותרים באמצעות המשוואות 2, 3:

$$3y_1 - 2y_2 = -1$$

$$-y_1 + 4y_2 = 3$$

ולכן לפני שני המשוואות:

$$y_1 = 0.2$$

$y_2 = 0.8$

$y_3 = 0$

$V = 11$

שאלה 8

לפניך שישה סעיפים שאינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף, בחר את התשובה הנכונה וסמן את התשובות הנכונות על גבי טופס התשובות על ידי סימון X במשבצת המתאימה .

לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי:

$$\max \quad \{z = 24x_1 + 23x_2 + 32x_3 + 20x_4\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 \le 90$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 65$$
$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 85$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0$$

הפתרון האופטימלי הפרימלי **היחיד** הוא: $x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 19, \quad x_4 = 0$

הפתרון האופטימלי הדואלי **היחיד** הוא: $y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$

כאשר y_i הוא המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ פרימלי i, עבור $i = 1,2,3$.

א. בטבלת הסימפלקס הסופית עבור המודל הנתון, מספר המקדמים השונים מאפס, בשורת ה- z, הוא:

1) 5
2) 3
3) 4
4) אי-אפשר לדעת

ב. איזה מההיגדים הבאים נכון עבור הפתרון האופטימלי הפרימלי,

1) משתני הסרק של אילוצים 1 ו- 3 הם משתנים בסיסיים.
2) משתני הסרק של כל האילוצים הם משתנים בסיסיים.
3) משתנה הסרק של אילוץ 2 הוא משתנה בסיסי.
4) משתנה הסרק של אילוץ 1 הוא בסיסי.

ג. במודל המקורי חל שינוי במקדמים של x_2, המודל המעודכן הוא:

$$Maximize\; 24x_1 + \mathbf{20}x_2 + 32x_3 + 20x_4$$
$$2x_1 \; + \mathbf{8}x_2 \; + 4x_3 \; + 7x_4 \; \le 90$$
$$2x_1 \; + \mathbf{6}x_2 \; + 2x_3 \; + 8x_4 \; \le 65$$
$$4x_1 \; + \mathbf{4}x_2 \; + 3x_3 \; + 3x_4 \; \le 85$$

הפתרון הדואלי החדש הוא:

1) $y_1 = 0, \quad y_2 = 3.5, \quad y_3 = 5.2$

2) $y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$

3) $y_1 = 4.3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 7.2$

4) $y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 10$

ד. למודל המקורי הוסיפו משתנה אי שלילי חדש x_{new}, המודל המעודכן הוא:

$$\begin{aligned} &Maximize\ 24x_1 + 20x_2 + 32x_3 + 20x_4 + 25x_{new} \\ &2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 6x_{new} \le 90 \\ &2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 5x_{new} \le 65 \\ &4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 9x_{new} \le 85 \end{aligned}$$

הפתרון האופטימלי הדואלי החדש הוא:

1) $y_1 = 0, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0$

2) $y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$

3) $y_1 = 4.3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 7.2$

4) $y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 10$

ה. לבעיה הפרימלית המקורית הוסיפו את האילוץ: $3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 35$,
הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית יחד עם האילוץ החדש יהיה כעת:

1) $x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 6.7$

2) $x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 19, \quad x_4 = 0$

3) $x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2.8, \quad x_4 = 1.7$

4) אף אחת מהתשובות הנתונות אינה נכונה.

ו. חל שינוי באגף ימין של אילוץ 2 בבעיה הפרימלית. אגף ימין חדש הוא 60 במקום 65.
איזה מההיגדים הבאים נכון:
1) הפתרון הפרימלי הנתון הופך להיות בלתי אפשרי.
2) הפתרון הפרימלי הנתון נשאר אפשרי אך איננו אופטימלי.
3) אילוץ 2 הופך להיות אילוץ שמתקיים כשוויון (כלומר הופך להיות אילוץ פעיל).
4) הפתרון הפרימלי הנתון נשאר אפשרי ואופטימלי.

<u>פתרון</u>

שאלה/תשובה	1	2	3	4
א			x	
ב			x	
ג		x		
ד		x		
ה		x		
ו				x

<u>שאלה 9</u>

לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי :

$$\max\{Z = x_1 + 2x_2 + x_3\}$$

בכפוף לאילוצים האלה :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\
&(2) \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
&(3) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\
&x_1 \ge 0 \quad x_2 \le 0 \\
&-\infty \le x_3 \le \infty
\end{aligned}$$

א. נסחו את הבעיה הדואלית.

ב. הראו כי (0,1,0) הוא פתרון אפשרי לבעיה הדואלית שבסעיף א'.

ג. נסמן ב- Z^* את הערך האופטימלי של הבעיה הפרימלית הנתונה. בלי לפתור את הבעיה הפרימלית והדואלית הוכיחו כי $Z^*<=1$.

ד. בלי לפתור את הבעיה הפרימלית והדואלית קבעו האם (1,0,0) הוא פתרון אופטימלי של הבעיה הפרימלית הנתונה? נמקו!

פתרון

<u>הבעיה הדואלית המתאימה:</u>

$$\begin{aligned}
&Min\{V = 2y_1 + y_2 + 2y_3\} \\
&1) \quad y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1 \\
&2) \quad y_1 - y_2 + y_3 \le 2 \\
&3) \quad -y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
&y_1 \ge 0\ ;\ y_2\ is\ free\ ;\ y_3 \le 0
\end{aligned}$$

ב. נציב באילוצים את הנקודה (0,1,0) ונראה כי כל האילוצים אכן מתקיימים:

$$\begin{aligned}
&1)\ 0 + 1 + 2 * 0 = 1 \ge 1 \\
&2)\ 0 - 1 + 0 = -1 \le 2 \\
&3)\ 0 + 1 + 0 = 1 \\
&y_1 \ge 0\ ;\ y_2\ is\ free\ ;\ y_3 \le 0
\end{aligned}$$

בגלל שהנקודה מקיימת את כל האילוצים, זהו פתרון אפשרי של הבעיה הדואלית.

ג.

לפי המשפט הדואלית החלש :

לכל פתרון אפשרי X של הבעיה הפרימאלית ולכל פתרון אפשרי Y של הבעיה הדואלית מתקיים: $c^t x \le b^t y$

עפ"י סעיף ב' ידוע לנו כי (0,1,0) הוא פתרון אפשרי לבעיה הדואלית.

הערך של פונקציית המטרה של הבעיה הדואלית (בעיית המינימום) בנקודה (0,1,0) הוא 1. עפ"י משפט הדואליות החלש ידוע לנו כי כל פתרון אפשרי לבעיית מינימום, משרה חסם עליון לבעיית המקסימום. ולכן $Z^* \leq 1$.

ד. האילוצים של הבעיה הפרימאלית מתקיימים בנקודה (1,0,0) ולכן הפתרון אפשרי.
ערך פונקציית המטרה של הבעיה הפרימאלית הנתונה בנקודה (1,0,0) הוא 1.
הוכחנו בסעיף ב' כי (0,1,0) הוא פתרון אפשרי לבעיה הדואלית. ערך פונקציית המטרה של הבעיה הדואלית בנקודה (0,1,0) הוא 1.
עפ"י משפט הדואליות החזק עבור פתרונות אפשריים לבעיה הדואלית והפרימאלית, אם הערכים בפונקציות המטרה של הבעיה הדואלית והפרימאלית שווים, אז הפתרונות הללו אופטימליים לבעיותיהם.
בנוסף הוכחנו בסעיף ג' שהערך האופטימלי של הבעיה הפרימאלית הוא לכל היותר 1.
לכן, (1,0,0) הוא פתרון אופטימלי לבעיה הפרימאלית הנתונה.

שאלה 10

"איגוד יצרני הממתקים" מאגד שלושה מפעלים המייצרים **מידי חודש** ממתקים בכמויות האלה:
מפעל 1 מייצר 140 טונות, מפעל 2 מייצר 100 טונות ומפעל 3 מייצר 80 טונות.
האיגוד משווק את הממתקים באמצעות שלושה מרכזי שיווק.
הטבלה שלהלן מתארת את המרחקים בין מפעלי האיגוד למרכזי השיווק (בקילומטרים), את הביקושים החודשיים לממתקים בכל מרכז שיווק ואת היצעי הממתקים.

מרכזי שיווק / מפעלים	A	B	C	היצע	
1	40	30	24	140	
2	28	40	32	100	
3	20	24	28	80	
ביקוש	105	135	80		

הובלת טונה אחת של ממתקים עולה 1 ₪ לקילומטר.

א. חשב כמה טונות של ממתקים יש להוביל מידי חודש מכל מפעל לכל מרכז שיווק, כדי שהעלות הכוללת של התובלה תהיה מזערית.

ב. חשב את עלות התובלה הכוללת המזערית לחודש.

ג. אם הובלת טונה אחת של ממתקים הייתה עולה 50 אגורות לקילומטר במקום 1 ₪ לקילומטר) אז :

1. כיצד תראה טבלה התחלתית בלבל של היצע וביקוש ?
2. האם פתרון אופטימלי ישתנה?

פתרון

צעד 1:

מרכזי שיווק / מפעלים	A	B	C	היצע	u_i
1	40 / - 105	30 / + 35	24 / -10	140	0
2	28 / -22 / +	40 / - 100	32 / -12	100	10
3	20 / -14	24 / 0	28 / 80	80	-6
ביקוש	105	135	80		
v_j	40	30	34		

בצבע אדום= מחירים חדשים של התאים שלא נמצאים בבסיס.

צעד 2:

מרכזי שיווק / מפעלים	A	B	C	היצע	u_i
1	40 / - 5	30 / + 135	24 / -10	140	0
2	28 / 100	40 / 22	32 / 10	100	-12
3	20 / -14 / +	24 / - 0	28 / 80	80	-6
ביקוש	105	135	80		
v_j	40	30	34		

צעד 3:

מרכזי שיווק / מפעלים	A	B	C	היצע	u_i
1	40 / - 5	30 / 135	24 / -24 / +	140	40
2	28 / 100	40 / 22	32 / -4	100	28
3	20 / + 0	24 / 14	28 / - 80	80	20
ביקוש	105	135	80		
v_j	0	-10	8		

צעד 4:

מרכזי שיווק / מפעלים	A	B	C	היצע	u_i
1	40 **24**	30 - 135	24 + 5	140	0
2	28 100	40 **-2**	32 **-4**	100	12
3	20 5	24 **-10** +	28 - 75	80	4
ביקוש	105	135	80		
v_j	16	30	24		

צעד 5:

מרכזי שיווק / מפעלים	A	B	C	היצע	u_i
1	40 **14**	30 60	24 80	140	0
2	28 100	40 **8**	32 **6**	100	2
3	20 5	24 75	28 **10**	80	-6
ביקוש	105	135	80		
v_j	26	30	24		

פתרון זה אופטימלי.

ב. עלות התובלה הכוללת המינימלית החודשית היא:

$$\min Z = 60\cdot 30 + 80\cdot 24 + 100\cdot 28 + 5\cdot 20 + 75\cdot 24 = 8420$$

ג.

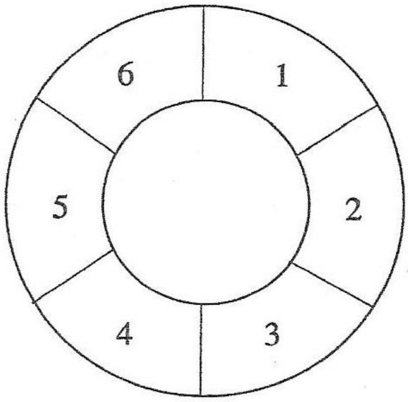
1. הטבלה התחלתית תראה כך:

מרכזי שיווק / מפעלים	A	B	C	היצע	u_i
1	20 105	15 35	12	140	0
2	14	20 100	16	100	10
3	10	12 0	14 80	80	-6
ביקוש	105	135	80		
v_j	40	30	34		

2. פתרון אופטימלי לא משתנה והתובלה הכוללת המינימלית החודשית היא: 4210 ₪.

<u>שאלה 11</u>

מפעל מייצר 6 מוצרים באמצעות 6 מכונות. המכונות מסודרות במעגל באולם הייצור, כמתואר באיור שלפניך.



המפעל מעסיק שלושה עובדים המפעילים את המכונות. כל אחד מהעובדים הוכשר להפעיל את כל שש המכונות, ומסוגל להפעיל שתי מכונות סמוכות בו זמנית.

הטבלה שלפניך מתארת את רווחי המפעל (בעשרות שקלים) לשעת עבודה, כאשר עובד מס׳ i מפעיל את המכונה מס׳ j (i=1,2,3 ; j=1,,23,4,5,6) .

מס׳ מכונה / מס׳ עובד	1	2	3	4	5	6
1	3	4	2	5	6	8
2	5	4	8	5	2	7
3	6	3	2	8	6	8

משיקולים של הנדסת אנוש הוחלט שכל עובד יפעיל שתי מכונות הסמוכות זו לזו.

איזה מכונות יפעיל כל עובד , כדי שהרווח הכולל של המפעל לשעת עבודה יהיה מקסימלי?

מה יהיה הרווח המקסימלי לשעת עבודה?

הערה : תנו דעתכם שניתן לשבץ את העובדים לעבודה במכונות 1 ו- 2 , 3 ו- 4 , 5 ו- 6 , אך גם במכונות 2 ו- 3 , 4 ו- 5 , 6 ו-1 וכ״ו .

פתרון

לפתרון בעיית ההשמה, יש להתייחס לשני מקרים שלהלן:

- עובד יכול לבצע עבודות: 1+2, 3+4, 5+6
- עובד יכול לבצע עבודות: 1+6, 5+4, 3+2

בנוסף, יש לשים לב כי הבעיה הנתונה היא בעיית מקסימום. כידוע $\max Z = -\min(-Z)$.

עתה נפתור את הבעיה לפי האלגוריתם ההונגרי בעבור כל מקרה בנפרד:

מקרה 1:

	1+2	3+4	5+6
1	-7	-7	-14
2	-9	-13	-9
3	-9	-10	-14

מקרה 2:

	1+6	5+4	3+2
1	-11	-11	-6
2	-12	-7	-12
3	-14	-14	-5

שלב 1: החסרת איבר מינימלי מכל שורה

מקרה 1:

	1+2	3+4	5+6
1	7	7	0
2	4	0	4
3	5	4	0

מקרה 2:

	1+6	5+4	3+2
1	0	0	5
2	0	5	0
3	0	0	9

שלב 2: החסרת איבר מינימלי מכל עמודה

מקרה 1:

	1+2	3+4	5+6
1	3	7	0
2	0	0	4
3	1	4	0

מקרה 2:

	1+6	5+4	3+2
1	0	0	5
2	0	5	0
3	0	0	9

שלב 3: בדיקה האם ניתן לבצע השמה

מקרה 1:

	1+2	3+4	5+6
1	3	7	0
2	0	0	4
3	1	4	0

2<3 לא ניתן לבצע השמה

מקרה 2:

	1+6	5+4	3+2
1	0	0	5
2	0	5	0
3	0	0	9

3=3 ניתן לבצע השמה

מקרה 1 – שלב 3.1: תיקון הטבלה להשמה

	1+2	3+4	5+6
1	2	6	0
2	0	0	5
3	0	3	0

שלב 3: בדיקת השמה

	1+2	3+4	5+6
1	2	6	0
2	0	0	5
3	0	3	0

3=3 ניתן לבצע השמה

שלב 4: השמה

	1+2	3+4	5+6
1	2	6	0 +
2	0	0 +	5
3	0 +	3	0

חישוב ערך פונקציית המטרה:

$$Z = -\sum_{i,j=1}^{3} x_{ij} \cdot c_{ij} = -(-14 - 13 - 19) = 36$$

מאחר והרווח נספר בעשרות שקלים – רווח המפעל לשעת עבודה הוא 360 ₪.

מקרה 2 – שלב 4: השמה, ישנן 2 אפוציות

	1+6	5+4	3+2
1	0 +	0	5
2	0	5	0 +
3	0	0 +	9

	1+6	5+4	3+2
1	0	0 +	5
2	0	5	0 +
3	0 +	0	9

חישוב ערך פונקציית המטרה פתרון 1:

$$Z = -\sum_{i,j=1}^{3} x_{ij} \cdot c_{ij} = -(-11 - 12 - 14) = 37$$

חישוב ערך פונקציית המטרה פתרון 2:

$$Z = -\sum_{i,j=1}^{3} x_{ij} \cdot c_{ij} = -(-11 - 12 - 14) = 37$$

מאחר והרווח נספר בעשרות שקלים – רווח המפעל לשעת עבודה הוא 370 ₪.

הפתרון האופטימלי הינו- רווח המפעל 370 ₪, כאשר עובד 2 מפעיל מכונות 3,2 ועובדים 1 ו-3 יכולים להפעיל את מכונות 1,6 או 5+4 ללא הבדל ברווח.

עבודה נעימה!!!