<u>סיכום באוטומטים:</u>

עבור א"ב Σ:

1. $\Sigma^* = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Sigma^p = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$

<u>שפה:</u> תת קבוצה של (סופית או אינסופית) של מילים מתוך Σ^* .

עבור שפה L:

1. $L \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L = \emptyset$
2. $L \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot L = L$
3. $L^n = L^{n-1} \cdot L$, … , $L^1 = L$, $L^0 = \{\varepsilon\}$
4. $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$
5. לכל 2 שפות L_1 L_2 מתקיים $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)$

<u>ביטוי רגולרי:</u> שיטה ליצוג סופי של שפה. לכל ביטוי רגולרי מתאימה שפה. בהינתן א"ב Σ , ב"ר הוא מילה מעל הא"ב $\Sigma \cup \{\emptyset, \cup, \cdot, (,)\}$ השייך לשפה המינימלית המוגדרת:

1. כל $\sigma \in \Sigma$ ו $\emptyset$ הם ב"ר

עבור a,b ב"ר:

2. $(a) \cup (b)$ ב"ר
3. $(a) \cdot (b)$ ב"ר

<u>סמטיקה של ביטויים רגולרים:</u> עבור ב"ר r_1, r_2 מתקיים:

1. $L(r_1 \cup r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$
2. $L(r_1 r_2) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
3. $L\left((r_1^*)\right) = \left(L(r_1)\right)^*$
4. $L(\emptyset) = \phi$ השפה הריקה
5. עבור $\sigma \in \Sigma$ $L(\sigma) = \{\sigma\}$

<u>משפט:</u> אוסף השפות הרגולריות L_{reg} סגור תחת:

1. איחוד
2. חיתוך
3. שרשור
4. כוכב קליני
5. משלים, כלומר $L \in L_{reg} \Leftrightarrow \bar{L} \in L_{reg}$

<u>אוטומט סופי דטרמינסטי DFA</u>

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, A)$

<u>אוטומט סופי אי דטרמינסטי NFA</u>

$N = (Q, \Sigma, \Delta, s, A)$

<u>הבדלים בין NFA לDFA</u>

1. בNFA לא חובה להגדיר פונקציית מעברים לכל מצב.

2. בNFA ניתן להגדיר מעבר ε , בהם המעבר בין מצבים נעשה ללא קריאת תו.

3. בNFA ניתן להגדיר עבור מצב ואות מסויימים מספר מעברים.

<u>הגדרה:</u> קבוצת השפות שעבורן קיים אוטומט DFA L_{DFA}

<u>הגדרה:</u> קבוצת השפות שעבורן קיים אוטומט NFA L_{NFA}

<u>משפט:</u> $L_{DFA} = L_{NFA} = L_{reg}$

<u>למת הניפוח:</u>

אם $L \in L_{reg}$ אז קיים קבוע N כך **שלכל** $w \in L$ עם $|w| \geq N$, **קיימת** חלוקה למילים $w = xyz$ ומתקיים:

1. $y \neq ε$

2. $|xy| \leq N$

3. $xy^n z \in L$ לכל $n \geq 0$.

<u>שיטה:</u> על מנת להראות ששפה אינה חסרת הקשר, נניח בשלילה שהיא אכן חסרת הקשר (כמוכן צריך להגדיר את k עבורו תתקיים הלמה בשלילה) ונשתמש בלמת הניפוח על מנת להגיע לסטירה לתנאי 3 של הלמה.

מסקנות מלמת הניפוח:

אם $L \in L_{reg}$ אינסופית אז **קיימת** מילה $w \in L$ ופירוק $w = xyz$ כך שלכל n, המספר $|xy^n z|$ הוא אורך של מילה הנמצאת ב L .

אם שפה אינה רגולרית אז היא אין סופית.

<u>משפט:</u> אם L רגולרית אז סדרת ההפרשים שלה חסומה, כלומר קיים $R \in \mathbb{N}$ כך שלכל r_i , $r_i \leq R$ כאשר r_i הפרש של האורכים של 2 מילים בשפה (כשהן מסודרות לפי הסדר).

<u>משפט:</u> אם סדרת ההפשרים עבור השפה L אינה חסומה אז L אינה שפה רגולרית

<u>הערה:</u> כיוון שני הוא אינו נכון, כלומר יכולה להיות שפה לא רגולרית אך סדרת ההפרשים שלה חסומה, לדוגמה $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$

<u>סיפא מפרידה:</u> תהיינה $x, y \in \Sigma^*$ שתי מחרוזות. $z \in \Sigma^*$ תקרא סיפה מפרידה בין x ל-y ביחס לשפה L אם $(xz \in L \ \wedge yz \notin L)$ או $(xz \notin L \ \wedge yz \in L)$

<u>היחס $\equiv_L$</u>: נאמר כי $x \equiv_L y$ אם מתקיים $xz \in L \iff yz \in L$ לכל $z \in L$. כלומר אין סיפא מפרידה בין x ל-y .

תכונות היחס: היחס $\equiv_L$ הוא יחס שקילות ולכן הוא מחלק Σ^* למחלקות שקילות כך שלכל זוג מילים מאותה מחלקת שקילות אין סיפא מפרידה, ולכל 2 מילים במחלקות שקילות שונות יש סיפא מפרידה.

<u>הערה:</u> כל מחלקת שקילות מוכלת ב-L או מוכלת ב $\bar{L}$

<u>דרגה של שפה:</u> נגדיר את $Rank(L)$ להיות מספר מחלקות השקילות ביחס $\equiv_L$.

<u>משפט:</u> L היא שפה רגולרית אם"ם דרגתה סופית.

משפט: תהי L שפה עבורה מתקיים $Rank(L) = n$ אז קיים DFA בעל n מצבים המקבל את L ולא קיים DFA עם פחות מצבים.

דברים שימושיים – שפות רגולריות:

1. $L((\emptyset^*)) = \{\varepsilon\}$
2. L היא שפה רגולרית אם ניתנת לתיאור ע"י ביטוי רגולרי r . $L = L(r)$
3. $L \in L_{reg}$ אם"ם $L^R \in L_{reg}$
4. אם $L \in L_{reg}$ אז $f_\sigma(L) \in L_{reg}$
5. אם $L \in L_{reg}$ אז $h(L) \in L_{reg}$ כאשר h היא הפונקציה ההומומורפית (נכון גם עבור הפונקציה ההפוכה).
6. שפות מהמבנה $L = \{w: |w|_a mod\ 7 = 4\}$ הן שפות רגולריות.
7. $L = \{ww^R | w \in \Sigma^*\}$ לא רגולרית.
8. $L = \{ca^k b^k: k \geq 0\} \cup \{a\} \cdot \{a,b,c\}^* \cup \{cc\} \cdot \{a,b,c\}^*$ לא רגולרית **אך** מקיימת את למת הניפוח.
9. $L = \{a^m b^n: \gcd(m,n) > 1\}$ לא רגולרית.
10. $L = \{a^n b^n: n \geq 0\}$ לא רגולרית.
11. $L_k = \{0,1\} \cdot \{0\} \cdot \{0,1\}^{k-1}$, רגולרית כמוכן לM DFA מינימלי כך ש $L(M) = L_k$ יש 2^k מצבים, כלומר לשפה זו יש 2^k מחלקות שקילות.
12. $L_k = \{ww^R: w \in \{a,b\}^*\}$ רגולרית ומתקיים $2^k \leq Rank(L_k) \leq 3 \cdot 2^k - 1$
13. $L = \{1^p: p\ is\ prime\}$ לא רגולרית
14. עבור שפה רגולרית L. שפה $L' \subseteq L$ לא בהכרח רגולרית. לדוגמה $\{a^n b^n\} \subseteq \Sigma^*$

דברים שהוכחנו בעבודות בית – שפות רגולריות:

1. L הינה שפה רגולרית לא ריקה .אורך המילה הקצרה ביותר בשפה הוא. k לאוטומט הדטרמיניטסי M כך ש L=L(M) יש לפחות k+1 מצבים.
2. תהי L שפה כלשהי .מחלקת השקילות $\equiv_L$ המכילה את ε מכילה רק את ε או אינסוף מילים.
3. יהי $A=(Q,\Sigma,s,\delta,A)$ אוטומט סופי דטרמינסטי כך ש . $|Q|=n$

   L(A)אינסופית אם ורק אם קיימת $w \in L(A)$ כך ש$n \leq |w| < 2n$
4. $L = \{a^i b^j: (i+j) mod 2 = 0\}$ רגולרית
5. $L = \{a^i b^j: i \neq j, i,j \geq 0\}$ לא רגולרית
6. $L = \{a^{2^n}: n > 0\}$ לא רגולרית
7. $L = \{xy | x,y \in \Sigma^* \wedge x \neq y\}$ רגולרית
8. $Rank(L) = Rank(\bar{L})$

<u>דקדוק חסר הקשר:</u>

דקדוק חסר הקשר הנו רביעיה: $<\Sigma, N, R, S>$ כאשר:

Σ - הא"ב זר ל N

N – הא"ב (זר לΣ) של אותיות לא סופיות (משתנים)

R – קבוצה סופית של כללי גזירה מהצורה $A \to w$ כך ש $A \in N$ ו- $w \in (N \cup \Sigma)$

<u>שפה חסרת הקשר:</u>

שפה L היא חסרת הקשר $\Leftrightarrow$ קיים דקדוק חסר הקשר G כך ש $L = L(G)$

<u>הגדרה:</u> L_{CFG} - משפחת השפות חסרות ההקשר.

L_{CFG} סגורה תחת: איחוד, שרשור, כוכב קליני וחיתוך עם שפה רגולרית.

L_{CFG} **לא** סגורה תחת חיתוך ומשלים.

<u>אוטומט מחסנית:</u>

אוטומט מחסנית הינו שישיה $<Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, A>$ כאשר:

Q, Σ, s, A בדומה לאוטומט סופי.

Γ - א"ב המחסנית.

$\Delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to P(Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$ - פונקציית המעברים.

שפה L היא חסרת הקשר $\Leftrightarrow$ קיים אוטומט מחסנית המקבל אותה.

<u>למת הניפוח לשפות חסרות הקשר:</u>

תהי L שפה חסרת הקשר, אזי קיים קבוע k כך שלכל $w \in L$ כך ש - $|w| \geq k$ קיימת חלוקה למילים $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ כך ש- $w = uvxyz$ ומתקיים:

1. $vy \neq \varepsilon$
2. $|vxy| \leq k$
3. $uv^n xy^n z \in L$ לכל $n \geq 0$.

<u>שיטה:</u> על מנת להראות ששפה אינה חסרת הקשר, נניח בשלילה שהיא אכן חסרת הקשר (כמוכן צריך להגדיר את k עבורו תתקיים הלמה בשלילה) ונשתמש בלמת הניפוח על מנת להגיע לסטירה לתנאי 3 של הלמה.

<u>משפט:</u> אם L שפה חסרת הקשר אזי הסדרה $\{|x| : x \in L\}$ הנה סדרה בעלת הפרשים חסומים (מסקנה מלמת הניפוח).

<u>אוטומט מחסנית משוכלל:</u> אוטומט מחסנית שיכול גם להכניס ולהוציא מילים מהמחסנית. כמוכן קיים אוטומט מחסנית רגיל השקול לאוטומט מחסנית משוכלל.

<u>הגדרה:</u> L_{PDA} משפחת כל השפות המתקבלות ע"י אוטומט מחסנית.

<u>משפט:</u> $L_{PDA} = L_{CFG}$

<u>דברים שימושיים – שפות חסרות הקשר:</u>

1. אם L שפה חסרת הקשר אז L^R גם חסרת הקשר.
2. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ חסרת הקשר.

3. $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ אינה חסרת הקשר.

4. $L = \{a^n b^m : n \neq m\}$ חסרת הקשר.

5. $L = \{w \in \{a,b\}^* : w^R = w\}$ כלומר שפת הפולינדרומים חסרת הקשר.

6. $L = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$ חסרת הקשר.

7. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* : |w|_a < |w|_b < |w|_c\}$ אינה חסרת הקשר.

8. $L = \{a^n c b^n : n \geq 0\}$ חסרת הקשר.

<u>דברים שהוכחנו בעבודות בית – שפות חסרות הקשר:</u>

1. $L = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a \geq 1, |w|_a = 0 \; mod \; 2\}$ חסרת הקשר.

2. $L = \{avbw : v,w \in \{a,b\}^*, |v| = |w|\}$ חסרת הקשר.

3. $L = \{ww^R w : w \in \{a,b,c\}^*\}$ אינה חסרת הקשר.

4. $L = \{a^i b^j c^k : i < j \; or \; j > k\}$ חסרת הקשר.

5. $L = \{a^i b^j c^k : i < j \; and \; j > k\}$ אינה חסרת הקשר.

6. עבור k טבעי קבוע, $L_k = \{ww[1 \dots k]w^R : w \in \{a,b\}^*\}$ חסרת הקשר.

<u>מכונת טיורינג:</u>

<u>הגדרה:</u> מכונת טיורינג היא שביעייה $M =< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{acc}, q_{rej} >$ כאשר:

Q – קבוצת מצבים סופית.

Σ – א"ב הקלט.

$\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{ƀ\}$ – א"ב הסרט הכולל בתוכו את התו ƀ המציין רווח.

s - מצב התחלתי.

q_{acc} – מצב מקבל יחיד, המכונה נעצרת כשמגיעה למצב זה.

q_{rej} – מצב דוחה יחיד, המכונה נעצרת כשמגיעה למצב זה.

δ – פונקציית המעברים $\delta: (Q \backslash \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L,R,S\}$

מכונת טיורינג מקבלת שפה L כאשר לכל $w \in L$ המכונה מקבלת את המילה. ולכל $w \notin L$ המכונה דוחה או לא עוצרת על המילה.

מכונת טיורינג מכריעה שפה L כאשר לכל $w \in L$ המכונה מקבלת את המילה. ולכל $w \notin L$ המכונה דוחה את המילה.

<u>מכונת טיורינג K סרטית:</u> שביעיה כפי שהוגדרה מ"ט דטרמינסטית אך פונקציית המעברים שלה מוגדרת אחרת: $\delta: (Q \backslash \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^K \to (Q \times \Gamma \times \{L,R,S\})^K$. כלומר מתבצעת פונקציית המעברים על K סרטים.

<u>מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית:</u> $M =< Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, q_{acc}, q_{rej} >$. מוגדרת באופן דומה למ"ט דטרמינסטית עם כמה שינויים. ייתכנו מספר מצבים עבור אותה אות ממצב כלשהו. (ייתכנו מספר חישובים עבור אותו קלט. כמוכן אם מ"ט א"ד נתקעת על קלט כלשהו אם במהלך החישוב מגיעה לקונפיגורציה $uq\sigma v$ ולא מוגדרת $\Delta(q,\sigma)$.

מ"ט א"ד מקבלת/דוחה את המילה w אם קיים לפחות חישוב אחד המקבל/דוחה את המילה. כמוכן מ"ט א"ד מקבלת שפה L אם לכל $w \in L$ המכונה מקבלת את המילה. ולכל $w \notin L$ המכונה דוחה או לא עוצרת על המילה.

מ"ט א"ד מכריעה שפה L אם המכונה מקבלת את L וגם לכל $w \in \Sigma^*$, כל חישוב של המכונה על w מסתיים תוך מספר סופי של צעדים.

באופן דומה למ"ט K סרטית ניתן להגדיר **<u>מ"ט א"ד K סרטית</u>**.

<u>עץ קונפיגורציות:</u> בהנתן מ"ט א"ד M ומילה w. נוכל להסתכל על עץ החישוב, צמתי העץ הם קונפיגורציות והבנים של קונפיגורציה הם הקונפיגרציות אליהן ניתן לעבור. כדי לקבל מ"ט א"ד M שקולה למ"ט דטרמיניסטית N נרוץ על העץ קונפיגורציות באלגוריתם BFS .

<u>מ"ט מחשבת פונקציה:</u> בהינתן פונקציה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ נאמר שמ"ט M מחשבת את f , אם M מגיעה למצב מקבל עבור כל $x \in \Sigma^*$ וכאשר M עוצרת על קלט x, על הסרט של M יופיע $f(x)$.

<u>המחלקה R:</u> מחלקת כל השפות אשר קיימת להן מ"ט המכריעה אותן. R סגורה תחת איחוד, חיתוך, שרשור, כוכב קליני ומשלים.

<u>המחלקה RE:</u> מחלקת כל השפות אשר קיימת להן מ"ט המקבלת אותן. RE סגורה תחת איחוד, חיתוך וכוכב קליני ו<u>אינה</u> סגורה תחת משלים.

<u>מכונת מונים:</u> מ"ט בעלת סרט (או מספר סרטיה) עבודה וסרט הדפסה, כך שעל סרט ההדפסה המכונה יכולה בכל שלב להדפיס אות מ Γ או סימן ההפרדה $ אשר מסמן סיום של מילה אחת וההתחלה של מילה שנייה ולהזיז את הראש ימינה. לא ניתן לקרוא מסרט ההדפסה, להשאיר את הראש במקום לאחר הדפסת אות או להזיז את הראש שמאלה.

נאמר כי שפה L ניתנת למנייה רקורסיבית (נל"ר) אם קיימת מ"ט מונה E, כך שלכל $w \in \Sigma^*$:

$w \in L$ אם"ם בהרצת E על קלט ריק, E מדפיסה לפחות פעם אחת את w .

<u>מפשט:</u> L נל"ר $\Leftrightarrow$ $\mathrm{L} \in RE$

<u>משפט:</u> $L \in RE$ אם"ם קיימת מכונת מונים E שמדפיסה כל $w \in L$ פעם אחת לפחות ו$L = L(E)$

<u>משפט:</u> $L \in R$ אם"ם קיימת מכונת מונים E שמדפיסה כל $w \in L$ בסדר הלקסיקוגרפי שלהן.

<u>קידוד של מ"ט:</u> קידוד של M $= \langle M \rangle$ הוא ייצוג המכונה ע"י מחרוזת מעל $\{a, c\}$.

<u>מכונת טיורינג אוניברסלית:</u> מ"ט U המקבלת את $\langle M \rangle \langle w \rangle$ ומסמלצת את ריצת M על w . אם M מקבלת/דוחה את w , U תקבל/תדחה גם. אם M לא עוצרת אז גם U לא עוצרת.

<u>המכונה U^t:</u> מ"ט אוניברסלית עם חסם על זמן ריצה. המכונה מקבלת קלט $\langle M \rangle \langle w \rangle \langle t \rangle$ (כאשר $\langle t \rangle$ הוא ייצוג אונרי של המספר t) ומריצה את M על w במשך t צעדים. אם החישוב מסתיים תוך t צעדים או פחות, U^t תחזיר המכונה מחזירה את הקונפיגורציה הT בחישוב ותקבל/תדחה כמו M. אם החישוב לא הסתיים אחרי t צעדים. המכונה מחזירה את הקונפיגורציה הT בחישוב ודוחה.

<u>אינטואיציה</u>: כל שפה אשר ניתן לקבל אותה ע"י כתיבת פונקציה בשפה עילית (Java) , ניתן לבנות מ"ט אשר גם מקבלת את השפה.

<u>מודלים שקולים:</u> אם שפה L מתקבלת ע"י מודל אחד אז קיים מודל אחר ששפתו תהיה L.

1). מ"ט 2). מ"ט K סרטית 3). מ"ט א"ד 4). מ"ט א"ד K סרטית 5). מכונת מונים 6). מכונת מונים K סרטית

רדוקציות:

הגדרה: שפה A ניתנת לרדוקציה לשפה B $(A \leq B)$ אם קיימת פונקציה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ (רדוקציה) המקיימת: f חשיבה ו $x \in A \iff f(x) \in B$.

משפט: אם $A \leq B$ אז הבאים מתקיימים: $B \in RE \Longrightarrow A \in RE$, $A \notin RE \Longrightarrow B \notin RE$. ובאופן דומה $B \in R \Longrightarrow A \in R$, $A \notin R \Longrightarrow B \notin R$.

משפט: אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אז $L \in R$ וגם $\bar{L} \in R$.

מסקנה: אם $L \in RE \backslash R$ אז $\bar{L} \notin RE$.

הגדרה: $CO-RE = \{L \subseteq \Sigma^*: \bar{L} \in RE\}$ כלומר $L \in CO-RE$ אם $\bar{L} \in RE$.

תכונה: תכונה $P \subseteq RE$ הינה אוסף השפות מעל Σ^* המקיימות תנאים מסויימים.

תכונה לא טריוויאלית : תכונה P היא תכונה לא טריוויאלית אם $P \neq RE$ וגם $P = \phi$

משפט רייס: לכל תכונה לא טריוויאלית P, השפה $L_p = \{< M >: L(M) \in P\}$ אינה כריעה כלומר $L_p \notin R$. אם $\phi \in P$ אז $L_p \notin RE$.

שפות מיוחדות:

1. $L_{acc} = \{< M >< w >: w \in L(M)\}$
2. $L_{halt} = \{< M >< w >: M \; halts \; on \; w\}$
3. $L_d = \{< M >: < M > \notin L(M)\}$
4. $L_{\Sigma^*} = \{< M >: L(M) = \Sigma^*\}$

תכונות של השפות המיוחדות:

1. $L_{acc}, L_{halt}, \overline{L_d} \in RE \backslash R$
2. $\overline{L_{\Sigma^*}}, L_d, L_{\Sigma^*}, \overline{L_{acc}} \notin RE$
3. $L_{\Sigma^*} \notin CO-RE$ שקול ל $\overline{L_{\Sigma^*}} \notin RE$
4. $L_d \in CO-RE$
5. $\Sigma^*, \phi \in R$

דברים שימושיים – רדוקציה:

1. $L_{A-H} = \{< M >: M \; halts \; on \; every \; input\}$ $\quad L_{A-H} \notin RE$
2. $L_{not-reg} = \{< M >: L(M) is \; not \; regular\}$ $\quad L_{not-reg} \notin RE$
3. אם $L \in R \backslash RE$ אז גם $L^R \in RE \backslash R$.
4. אם $L \leq L'$ אז $\bar{L} \leq \bar{L'}$
5. $L_d \leq \overline{L_{acc}}$ (גם $\overline{L_d} \leq L_{acc}$)
6. $L_{acc} \leq L_{\Sigma^*}$
7. $L_{acc} \leq L_{halt}$

להשלים את כל זה מהדף נוסחאות שיש

<u>טענות נכונות/לא נכונות</u> להוסיף את מה שצריך

<u>שפות הנמצאות ב R:</u>

<u>שפות הנמצאות ב RE:</u>

<u>שפות שלא נמצאות בR:</u>

<u>שפות שלא נמצאות בRE:</u>