דפי נוסחאות עבור המבחן ב-
מבני נתונים
<u>מרצה : ד״ר ראובן חוטובלי</u>
נספח: ממשקים לטיפוסי נתונים בפרקים השונים

הממשק לטיפוס הנתונים **מחסנית** :

אתחל-מחסנית	פעולה המחזירה מחסנית ריקה.
מחסנית-ריקה? (S)	פעולה המקבלת כפרמטר מחסנית S, מחזירה `אמת` אם המחסנית ריקה, ו`שקר` אחרת. הנחה: המחסנית S מאותחלת.
דחוף-למחסנית(S, x)	הפעולה מכניסה את האיבר x לראש המחסנית S. הנחה: המחסנית S מאותחלת.
שלוף-ממחסנית (S)	פעולה המוציאה את האיבר שבראש המחסנית S ומחזירה את ערכו. הנחות: המחסנית S מאותחלת ואינה ריקה.
הצץ-למחסנית (S)	פעולה המחזירה את ערכו של האיבר שבראש S מבלי להוציאו. הנחות: המחסנית S מאותחלת ואינה ריקה.

הממשק לטיפוס נתונים **רשימה** :

אתחל-רשימה	פעולה המחזירה רשימה ריקה.
עוגן-רשימה (L)	פעולה המחזירה את המקום עוגן-רשימה ברשימה L. הנחה: הרשימה L מאותחלת.
סוף-רשימה (L)	פעולה המחזירה את המקום סוף-רשימה ברשימה L. הנחה: הרשימה L מאותחלת.
עוקב-ברשימה (L, p)	פעולה המחזירה את המקום העוקב למקום p ברשימה L. הנחות: הרשימה L מאותחלת. p הוא מקום ב-L שאינו סוף-רשימה.
קודם-ברשימה (L, p)	פעולה המחזירה את המקום הקודם למקום p ברשימה L. הנחות: הרשימה L מאותחלת. p הוא מקום ב-L שאינו עוגן-רשימה.
הכנס-לרשימה(L, p, x)	פעולה המכניסה לרשימה L את האיבר x מקום אחד אחרי המקום p. הנחות: הרשימה L מאותחלת. p הוא מקום ב-L שאינו סוף-רשימה.
הוצא-מרשימה (L, p)	פעולה המוציאה מן הרשימה L את האיבר הנמצא בה במקום p. לאחר ההוצאה נמצא במקום p האיבר שהיה עוקב לזה שהוצא מהרשימה. הנחות: הרשימה L מאותחלת. p הוא מקום ב-L שאינו סוף-רשימה או עוגן-רשימה.
עדכן-רשימה (L, p, x)	פעולה המעדכנת את האיבר הנמצא במקום pברשימה להיות x. הנחות: הרשימה L מאותחלת. p הוא מקום ב-L שאינו סוף-רשימה או עוגן-רשימה.
אחזר-מרשימה (L, p)	פעולה המחזירה את האיבר הנמצא במקום p ברשימה. הנחות: הרשימה L מאותחלת. p הוא מקום ב-L שאינו סוף-רשימה או עוגן-רשימה.
רשימה-ריקה? (L)	פעולה המחזירה `אמת` אם הרשימה L היא רשימה ריקה, ו`שקר` אחרת. הנחה: הרשימה L מאותחלת.

הממשק לטיפוס נתונים **תור**:

אתחל-תור	פעולה המחזירה התור הריק.
הכנס-לתור (Q, x)	פעולה המקבלת תור Q ואיבר x ומכניסה את האיבר x בסוף Q. הנחה: התור Q מאותחל.
הוצא-מתור (Q)	פעולה המקבלת תור Q, מוציאה את האיבר שנמצא בראש התור ומחזירה אותו. הנחות: התור Q מאותחל ואינו ריק.
ראש-התור (Q)	פעולה המקבלת תור Q ומחזירה את ערכו של האיבר שבראשו בלי להוציאו משם. הנחות: התור Q מאותחל ואינו ריק.
תור-ריק? (Q)	פעולה המחזירה `אמת` אם התור Q הוא תור ריק, ו`שקר` אחרת.הנחה: התור Q מאותחל.

הממשק לטיפוס נתונים **עץ בינארי**:

אתחל-עץ	פעולה המחזירה עץ בינרי ריק.
בנה-עץ (L, R, x)	פעולה המחזירה עץ בינרי שבשורשו האיבר x, התת-עץ השמאלי שלו L והתת-עץ הימני שלו R. הנחות: העצים L ו-R מאותחלים.
תת-עץ-שמאלי (T)	פעולה המחזירה את התת-עץ השמאלי של T. הנחות: T מאותחל ואינו ריק.
תת-עץ-ימני (T)	פעולה המחזירה את התת-עץ הימני של T. הנחות: T מאותחל ואינו ריק.
החלף-תת-עץ-שמאלי(T, new_tree)	פעולה המחליפה את התת-עץ השמאלי של T בעץ הבינרי new_tree. הנחות: העצים T ו-new_tree מאותחלים, T אינו ריק.
החלף-תת-עץ-ימני (T, new_tree)	פעולה המחליפה את התת-עץ הימני של T בעץ הבינרי new_tree. הנחות: העצים T ו-new_tree מאותחלים, T אינו ריק.
אחזר-שורש (T)	פעולה המחזירה את האיבר שבשורשו של T. הנחות: T מאותחל ואינו ריק.
עדכן-שורש (T, x)	פעולה המשנה את התוכן של שורש T להיות x. הנחות: T מאותחל ואינו ריק.
עץ-ריק? (T)	פעולה המחזירה `אמת` אם העץ הבינרי T הוא עץ ריק, ו`שקר` אחרת. הנחה: T מאותחל.

טענה: בסדרה הבאה : n , $n/2$ …… , 2^3, 2^2, 2, 1
ישנם $\log_2 n+1$ איברים וסכום כל אברי הסדרה=$(2n-1)$.

טענה : בסדרה הבאה : $2 , 4 , 16 , 256 , ...n$ ישנם $\log_2 \log_2 n+1$ איברים.

טענה : לכל $n \geq 1$ מתקיים : $n! \geq 2^{n-1}$

טענות: עבור n גדול מספיק ועבור קבוע c מתקיים

$$c<\log\log n<\log n<\log^2 n\leq\log^{\alpha} n<\sqrt{n}<n<n\log n<n^{\frac{3}{2}}<n^{\alpha}<c^n$$

עבור $\alpha\geq2$

<u>תכונות פונקציית לוגריתם:</u>

$$a^{\log_a n}=n$$
$$\log_c a\cdot b=\log_c a+\log_c b$$
$$\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$$
$$\log_a n^b=b\log_a n$$
$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$a^{\log_b n}=n^{\log_b a}$$

פונקצית לוגריתם היא פונקציה מונוטונית עולה.

סידרה חשבונית

סידרה חשבונית – הינה סידרת מספרים $a_1,a_2,a_3,...$ שבה $a_{i+1}-a_i=d$ לכל i , כאשר d קבוע כלשהו. בסדרה חשבונית מתקיים:

א. האיבר ה- n –י בסדרה חשבונית הוא :

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

ב. סכום של n האיברים הראשונים של אברי הסדרה החשבונית הוא:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

<u>סידרה הנדסית:</u> סידרה הנדסית הינה סידרת מספרים $a_1,a_2,a_3,...$ שבה

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q$$

לכל i , כאשר q קבוע כלשהו. בסדרה הנדסית מתקיים:

א. האיבר ה – n – י בסדרה הנדסית הוא :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

ב. סכום של n האיברים הראשונים של אברי הסדרה ההנדסית הוא:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

<u>בסידרה הנדסית אינסופית יורדת</u>

$$s_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-q}$$

<u>טענה</u> : בסדרה הנדסית הבאה :

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,........ \qquad \frac{1}{n}$$

יש $\log_2 n + 1$ איברים וסכום כל אברי הסדרה שווה ל- (2-1/n).

<u>משפט עיקרי</u>

נתונים a ו - b קבועים כך ש – $a >= 1$ ו - $b > 1$.

נתונה פונקציה $f(n)$ ופונקציה $T(n)$ אשר מוגדרת על השלמים האי שליליים באופן הבא:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

ניתן לחסום בצורה אסימפטוטית את $T(n)$ כך :

1. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש - $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$

(כלומר $f(n) < n^{\log_b a}$)אזי

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$.

3. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש - $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

(כלומר $f(n) > n^{\log_b a}$)<u>אזי</u>

ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af(n/b) <= cf(n)$

עבור כל n מספיק גדול, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$.

4. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^k n)$ עבור $k >= 0$

אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^{k+1} n)$.

<u>משוואות הפרשים</u>

אם למשוואת ההפרשים של נוסחת הנסיגה הבאה:

$f(n) = cf(n-1) + df(n-2)$ (d,c קבועים כלשהם השונים

מ- 0) יש שני שורשים r1 ו-r2 אז:

(i) אם $r1 \neq r2$

$$f(n) = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$$

(ii) אם $r1 = r2$

$$f(n) = A_1 r_1^n + A_2 \cdot n r_2^n$$

טענה:

נתונה נוסחת נסיגה ליניארית לא הומוגנית הבאה :

$$(*)\ a_0t(n) + a_1t(n-1) + ... + a_kt(n-k) = b^n \cdot p(n)$$

כאשר b קבוע כלשהו ו- p(n) פולינום שדרגתו d.
לפתרון נוסחת הנסיגה המשוואה האופיינית הינה:

$$(a_0 \cdot \alpha^k + a_1 \cdot \alpha^{k-1} + ... + a_k \cdot \alpha^0)(\alpha-b)^{d+1} = 0$$

<u>טענה</u>

נתונה נוסחת נסיגה ליניארית לא הומוגנית הבאה:

$$(**)\ a_0t(n)+a_1t(n-1)+a_2t(n-2)+ ...+a_kt(n-k)=b_1^np_1(n)+b_2^np_2(n)+...$$

כאשר b_i –ים הם קבועים כלשהם השונים זה מזה, $p_i(n)$ פולינום בעל דרגה d_i.
לפתרון נוסחת הנסיגה המשוואה ה אופיינית הינה:

$$(a_0a^k + a_1a^{k-1} + a_2a^{k-2} + ... + a_ka^0)(a-b_1)^{d_1+1}(a-b_2)^{d_2+1}...=0$$

<u>טענות שונות:</u>

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$ .2 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$

3. $\boxed{\underline{\log n! = \Theta(n\log n)}}$

נוסחת סטרלינג - $n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + \Theta(\frac{1}{n}))$

4. $\sum_{k=1}^{n} \ln k = (n+1)\ln(n+1) + n + O(\log n)$

כלומר: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln k \cong \Theta(n\log n)}$

5. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$

כלומר: $\boxed{H(n) \cong \Theta(\log n)}$

6. $\Theta([f(n)]^2) = [\Theta(f(n)]^2 = \Theta(f(n)) \cdot \Theta(f(n))$

7. $(n + a)^b = \Theta\,(n^b)$ עבור a ו-b קבועים כלשהם כאשר b>0 .

8. אם $T(n)=T(\alpha n)+T((1-\alpha)n)+n$

אזי $T(n)=\Theta(n\cdot\log n)$

9. אם $T(n)= T(n-x)+T(x)+n$ כאשר $1 =< x$ קבוע כלשהו

אז $T(n)=\Theta(n^2)$

10. אם $T(n)=2\cdot T(n/2)+n/Logn$

אזי $T(n)=\Theta(n\cdot LogLogn)$

11.

- **<u>הסימון o - או הקטן</u>**

תהי פונקציה כלשהי : $g:N\rightarrow R^*$ נגדיר:

$o(g(n))=\{f:N\rightarrow R^*|(\forall c>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0)[f(n)<cg(n)]\}$

או בצורה אחרת

עבור כל קבוע חיובי $c>0$ קיים קבוע $n_0>0$ כך ש: לכל $n\geq n_0$ מתקיים

לכל $n\geq n_0$ מתקיים : $o(g(n)) = \{ f(n) / 0\leq f(n)<cg(n)\}$.

12.

- **<u>הסימון w</u>**

תהי פונקציה כלשהי : $g:N\rightarrow R^*$ נגדיר:

$w(g(n))=\{f:N\rightarrow R^*|(\forall c>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0)[f(n)>cg(n)]\}$

או בצורה אחרת

עבור כל קבוע חיובי $c>0$ קיים קבוע $n_0>0$ כך ש:

לכל $n\geq n_0$ מתקיים :

$w(g(n)) =\{ f(n) / 0\leq f(n)>cg(n)\}$