# פתרון תרגיל בית מספר 1

## שאלה 1

1. נתייחס לחתך s-t כלשהו, נסמנו $(S,\bar{S})$. ברשת המקורית $N\left(G(V,E),s,t,c\right)$ עוצמת הזרימה היא $\sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e)=F$ (לפי למת הזרימה בחתך). באופן סימטרי, עוצמת הזרימה מ-$t$ ל-$s$ ניתן למדוד באותו החתך: $\sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e)-\sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e)=-F$.
כלומר, עוצמת הזרימה מ-$t$ ל-$s$ שווה בערך מוחלט לעוצמת הזרימה מ-$s$ ל-$t$, אך הסימן הוא הפוך.

2. <u>האלגוריתם</u>:
   a. החלף תפקידים בין $s$ ל-$t$, כלומר התייחס לרשת $N\left(G(V,E),t,s,c\right)$.
   b. ברשת $N\left(G(V,E),t,s,c\right)$ מצא זרימת מקסימום ע"י הרצת אלגוריתם של דיניץ.
   הזרימה המתקבלת הינה זרימת מינימום ברשת המקורית.

3. <u>הוכחת נכונות</u>:
ע"מ להוכיח כי האלגוריתם מוצא את זרימת המינימום ברשת הנתונה, יש להוכיח שפונקציית הזרימה שהוא מחזיר הינה חוקית ועוצמתה הנמוכה ביותר בין כל הזרימות האפשריות.
החוקיות נובעת מהפעלת האלגוריתם של דיניץ שתמיד מחזיר זרימה חוקית, כלומר זרימה שמקיימת חוק הצומת וחוק הקשת.
נוכיח את המינימליות: נסמן ב-$f_A$ את הזרימה המתקבלת בהרצת האלגוריתם הנ"ל, ועוצמתה נסמן ב-$F_A$. נניח בדרך השלילה שקיימת זרימה אחרת $f^*$ שעוצמתה $F^*$ קטנה יותר, כלומר $F^*<F_A$. אזי לפי התכונה שגילינו בסעיף (1), ברשת $N\left(G(V,E),t,s,c\right)$ עוצמת הזרימה $f_A$ היא $-F_A$, ועוצמתה של $f^*$ היא $-F^*$. מאחר ו-$F^*<F_A$, אז $-F^*>-F_A$ בסתירה לכך ש-$f_A$ היא זרימת מקסימום ברשת $N\left(G(V,E),t,s,c\right)$.

<u>סיבוכיות</u>: הסיבוכיות היא בדיוק כמו באלגוריתם של דיניץ: $\mathrm{O}\left(|V|^2\cdot|E|\right)$.

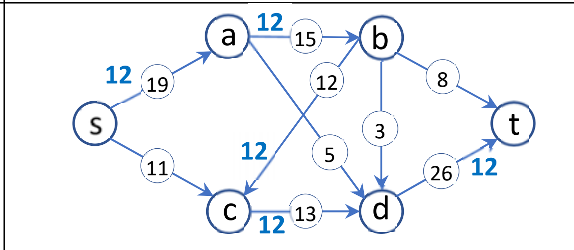
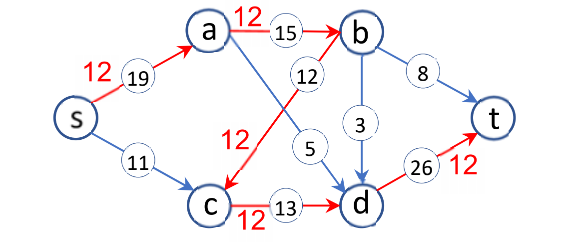
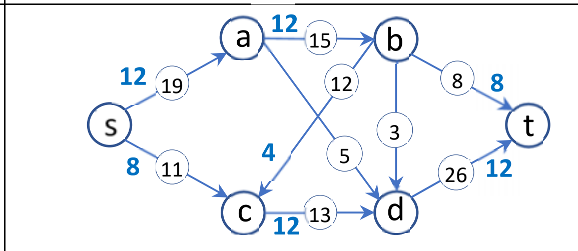
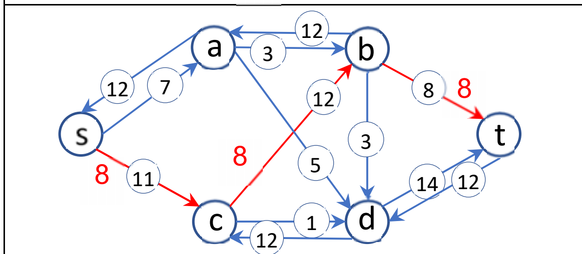
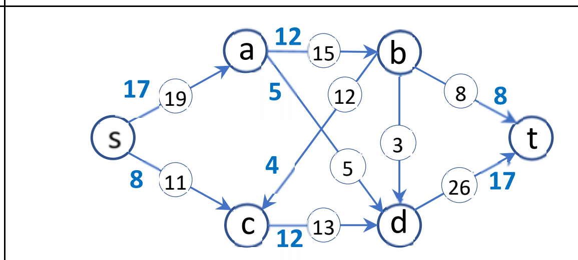
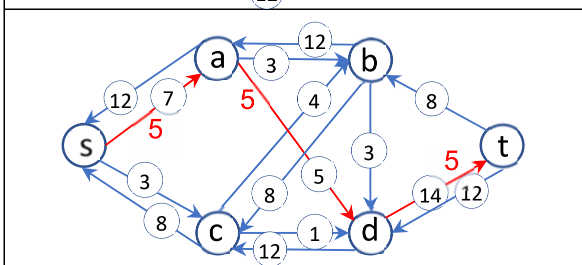
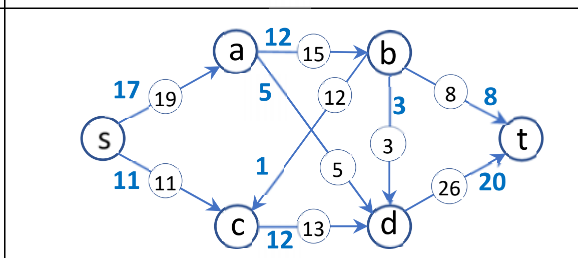
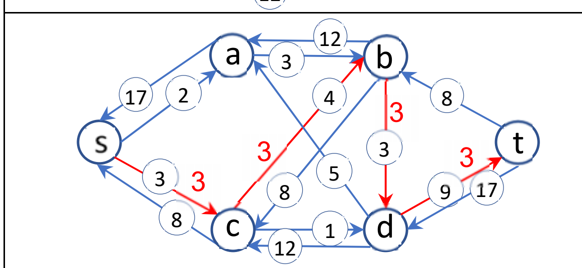
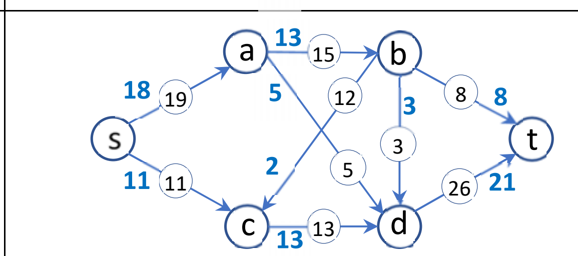
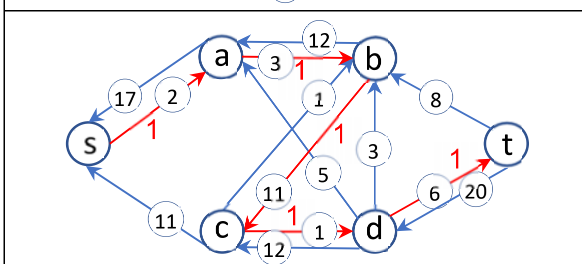
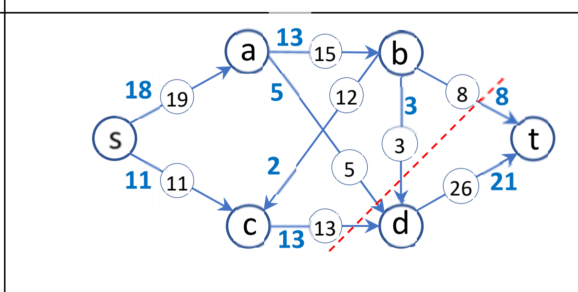
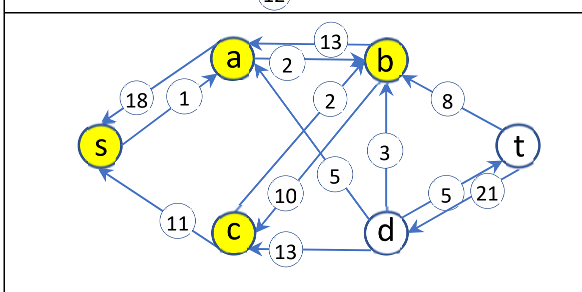
4. זרימת המינימום המתקבלת היא:
$$f(a,s)=3,\quad f(b,c)=1,\quad f(c,a)=1,\quad f(d,a)=2,\quad f(d,b)=1,\quad c(t,d)=3,$$
$$f(s,a)=f(s,c)=f(a,b)=f(b,t)=f(c,d)=0$$
עוצמת הזרימה היא $-3$.

5. החתך החוסם מלמטה את עוצמת זרימת המינימום מ-$s$ ל-$t$ הוא החתך $(S,\bar{S})$ כאשר $S=\{s,a\}$, כי כל הקשתות של החתך הזה הן ריקות, והקשתות ההפוכות בחתך כולן רוויות. קיבול החתך הוא 14, וזה <u>לא מקסימום</u>, כי קיים חתך $(S',\bar{S}')$ עם $S'=\{s,a,b\}$ אשר קיבולו הוא 19.

## שאלה 2

א.

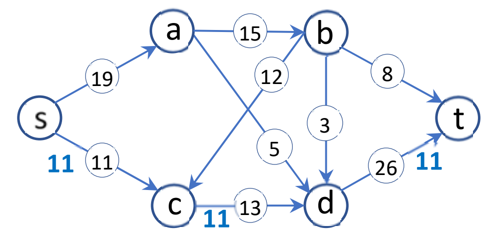
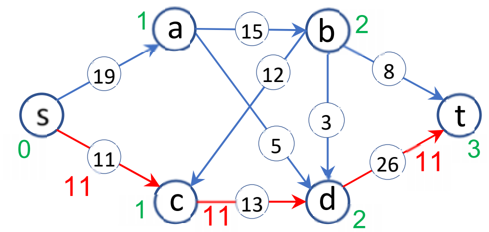
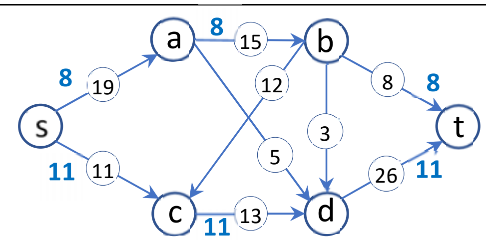
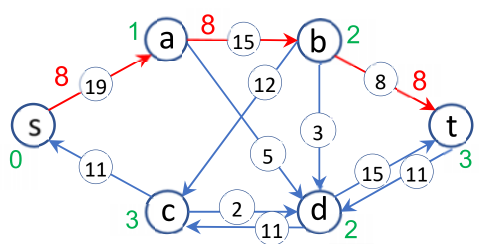
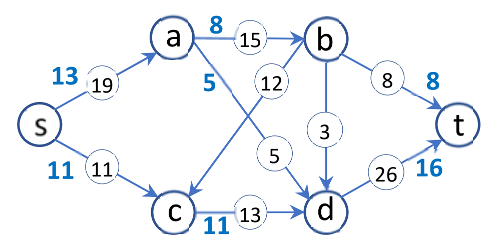
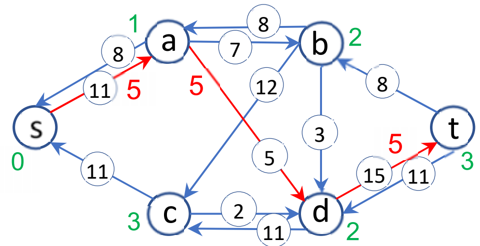
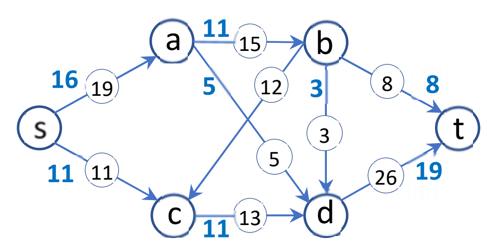
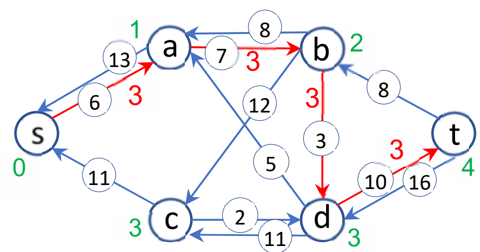
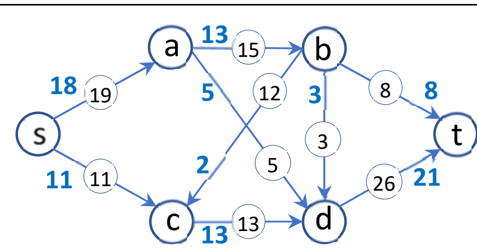
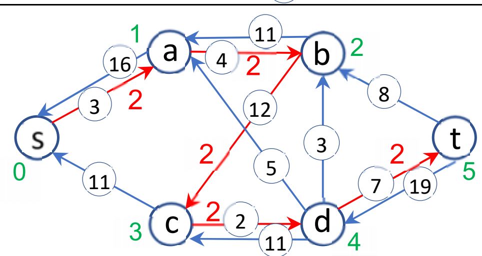
להלן הרצת האלגוריתם של פורד-פלקרסון. מסלול שיפור (**גדול ככל האפשר**) בכל פאזה מסומן באדום.
הקיבולים מצויינים בעיגולים על הקשתות. זרימות 0 לא סומנו.

| פאזה | רשת | רשת שיורית |
| --- | --- | --- |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 | <br>זרימת מקסימום וחתך מינימום | <br>אין מסלול שיפור |

ב. חתך מינימום מסומן ברשת בפאזה 6 ע"י קו אדום מקווקו. קיבולו 29 (כעוצמת זרימת מקסימום).

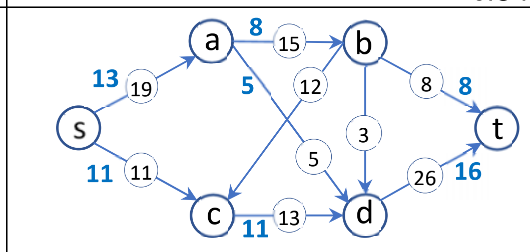
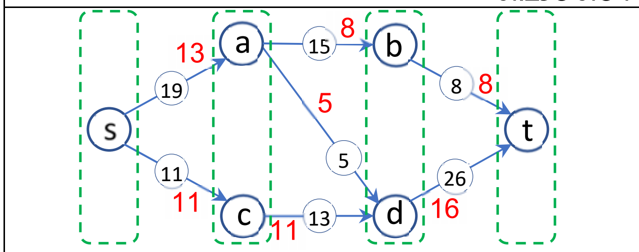
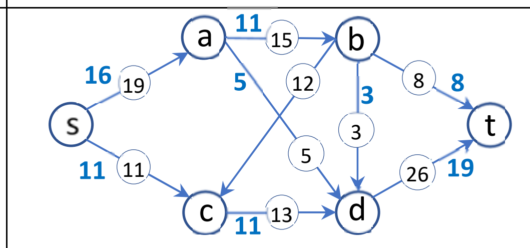
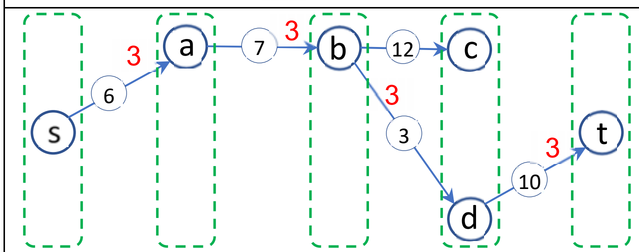
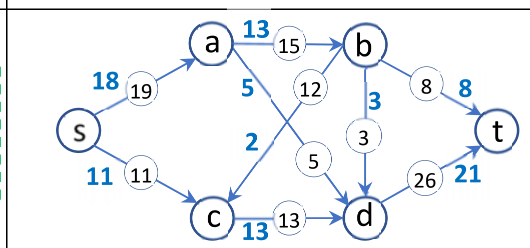
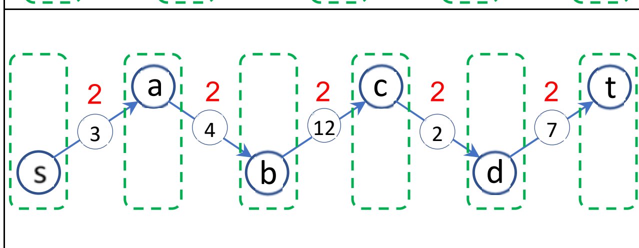
ג.

להלן הרצת האלגוריתם של Edmonds-Karp. מסלול שיפור (**הקצר ביותר**) בכל פאזה מסומן באדום.
הקיבולים מצויינים בעיגולים על הקשתות. זרימות 0 לא סומנו. סימוני BFS מופיעים בירוק ליד כל הצמתים.

| פאזה | רשת | רשת שיורית |
|---|---|---|
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 | זרימת מקסימום | אין מסלול שיפור |

מספר פאזות זהה להרצה בסעיף א'.

ד. להלן הרצת האלגורית של דיניץ. בכל פאזה, לא שורטטה רשת שיורית אלא רק רשת שכבות. הקיבולים מצויינים בעיגולים על הקשתות. זרימות 0 לא סומנו

| פאזה | רשת | רשת שכבות |
|---|---|---|
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 | זרימת מקסימום | לא ניתן לבנות את רשת השכבות |

מספר הפאזות הוא 4, וזה קטן יותר מההרצות הקודמות.

## שאלה 3

א.

<u>אלגוריתם</u>: (בשיטת רדוקציה)

1. נסמן ב-A את קבוצת האיברים בגודל m. נניח שהחלוקה $\Pi1$ מחלקת את הקבוצה A לתת-הקבוצות $P_1,P_2,....,P_r$ והחלוקה $\Pi2$ לתת-הקבוצות $Q_1,Q_2,....,Q_r$. נבנה גרף דו-צדדי G שבו צד אחד (נגיד L) הם הקדקודים $P_1,P_2,....,P_r$, הצד הנגדי – R – הם הקדקודים $Q_1,Q_2,....,Q_r$, וקיימת קשת בין כל זוג צמתים $P_i,Q_j$ בעלי איברים משותפים.
2. נמצא שידוך מקסימום M בגרף הדו-צדדי G.
3. אם M אינו שידוך מושלם, נוציא הודעה שלא קיים פתרון לבעיה המקורית. אחרת (M מושלם), נחזיר קבוצת איברים $D \subseteq A$ כאשר לכל קשת $(P_i,Q_j) \in M$, יהיה ב-D בדיוק איבר אחד מתוך $P_i \cap Q_j$.

ב.

<u>נכונות</u>:

יש להוכיח תקופות של הרדוקציה: להראות שלכל שידוך מושלם ב-G קיים פתרון – קבוצת נציגים תקינה, ומצד שני, אם קיימת קבוצת נציגים תקינה לבעיה, אז ב-G קיים שידוך מושלם.

1. יהיה M שידוך מושלם ב-G, אז $|M| = r$, כי $|L| = |R| = r$. לכן גם $|D| = r$ על פי האלגוריתם. כל איבר של D נגזר מקשת $(P_i,Q_j) \in M$ ולכן מייצג את $P_i$ ו-$Q_j$. מאחר ו-M הוא שידוך מושלם, כלומר משדך את כל צמתי G, אזי כל תת-הקבוצות של $\Pi1,\Pi2$ מיוצגות.
2. יהיה D הפתרון של הבעיה המקורית – קבוצת הנציגים. מאחר ו-$\Pi1,\Pi2$ הן חלוקות, אז כל איבר של D שייך בדיוק לתת קבוצה אחת של $\Pi1$ (נגיד $P_i$) ובדיוק לתת קבוצה אחת של $\Pi2$ (נגיד $Q_j$). אז נסמן איבר כזה $d_{ij} \in D$.
כעת נגדיר תת-קבוצה של קשתות מ-G: $E' = \{ (P_i,Q_j) \mid d_{ij} \in D \}$. מאחר ו-$|D| = |E'| = r$ שזה מס' תת-קבוצות בכל חלוקה, אז כל תת-קבוצה מכל חלוקה מיוצגת ע"י איבר אחד בדיוק של D וכך גם ע"י קשת אחת בדיוק של $E'$. לכן לכל זוג קשתות מ-$E'$ אין קצוות משותפים, כלומר $E'$ היא שידוך. מאחר ואברי D מייצגים את כל תת-הקבוצות של $\Pi1,\Pi2$, אזי השידוך $E'$ משדך את כל צמתי G, כלומר $E'$ היא שידוך מושלם.

<u>סיבוכיות</u>:

לשם יעילות, כדאי ליצור וקטור (נגיד S) באורך m בו לכל איבר של A יצויין לאיזו תת-קבוצה הוא שייך בכל חלוקה. יצירת וקטור כזה תקח $O(m)$. החישוב הבא נעשה ע"ס הנחה שניתן לקבל מידע מ-S בזמן $O(1)$.

1. בנית הגרף: קבוצת הצמתים $|V| = |L| + |R| = 2r$ ניתן לבנות בזמן $O(r)$.
קבוצת הקשתות $|E| \le \min\{m, r^2\}$ ניתן לבנות בזמן $O(m)$ (תוך שימוש בוקטור S).
2. מציאת שידוך מקסימום בגרף הדו-צדדי לוקחת $O(|V||E|) = O(\min\{rm, r^3\})$.
3. בניית קבוצה D ע"ס השידוך המושלם היא $O(m)$ (תוך שימוש בוקטור S).

סה"כ הסיבוכיות היא $O(\min\{rm, m+r^3\})$.

## שאלה 4

<u>אלגוריתם</u>:

1. אם k אי זוגי, החזר FALSE (אי אפשר לרצף את הלוח).
2. אם בין k המשבצות התפוסות מספר הלבנות לא שווה למספר השחורות, החזר FALSE. (כי כל אריח מכסה בדיוק משבצת אחת לבנה ומשבצת אחת שחורה)
3. בנה גרף דו-צדדי $G(B \cap W,E)$, בו W היא קבוצת הצמתים המייצגים את המשבצות הלבנות ו-B היא קבוצת המשבצות השחורות. כל משבצת בגרף מתחברת ע"י קשת לכל משבצת סמוכה לה מהצד השני (מקסימום 4 שכנות).
אם ב-G קיים שידוך מושלם, החזר TRUE. אחרת – FALSE.