נוסחאות עזר – מבוא להסתברות

חוקי הפילוג: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

חוקי דה מורגן: $\overline{(\bigcup_i A_i)}=(\bigcap_i \overline{A_i})$ $\qquad$ $\overline{(\bigcap_i A_i)}=(\bigcup_i \overline{A_i})$

A, B **מאורעות זרים** אם $A\cap B=\phi$,

סדרת מאורעות תקרא **זרים בזוגות** אם **כל** זוג מאורעות מתוכה הם זרים.

חוקי ההסתברות: $P\{\overline{A}\}=1-P\{A\}$; $P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}$

אם: $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ סדרת מאורעות **זרים בזוגות** אז: $P\{\bigcup_{i=1}^{n} Ai\}=\sum_{i=1}^{n} P\{Ai\}$

נוסחת **ההכלה וההוצאה** (inclusion exclusion):

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C\cup D)&=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-\\&-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-P(B\cap D)-P(C\cap D)+\\&+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P\{A\cap C\cap D\}+P(B\cap C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

כללים קומבינטוריים:

כלל המכפלה: אם ניסוי ניתן להצגה כמתבצע ב n שלבים, ובשלב k יש n_k תוצאות אפשריות וסימטריות,
ואם מרחב המדגם מוגדר כוקטורים באורך n כאשר הרכיב ה k שלו הוא תוצאת השלב ה k, אז
במרחב המדגם יש $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ תוצאות אפשריות סימטריות.

מספר האפשרויות לדגימה של k מתוך n איברים:

	התחשבות בסדר הדגימה	ללא התחשבות בסדר
עם החזרה	n^k	(מרחב מדגם לא סימטרי)
ללא החזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

הסתברות מותנית: $P\{A/B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$, **נוסחת הכפל**: $P\{A\cap B\}=P\{A\}P\{B/A\}$

נוסחת ההסתברות השלמה:

אם: $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של מרחב המדגם, אז: $P\{A\}=\sum_{i=1}^{n}P\{A/Bi\}P\{Bi\}$

נוסחת בייס: $P\{B_k/A\}=\frac{P\{A/B_k\}P\{B_k\}}{P\{A\}}$ כאשר: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P\{A/B_i\}P\{B_i\}$

אי תלות: A ו B הם מאורעות **בלתי תלויים** אם מתקיים: $P\{A/B\}=P(A)$ או $P\{A\cap B\}=P(A)P(B)$
קבוצת מאורעות הם בלתי תלויים אם כל קבוצה חלקית שלהם מקיימת שהסתברות החיתוך שלהם
שווה למכפלת ההסתברויות.

סדרת ניסויי ברנולי: סדרת ניסויים זהים ובלתי תלויים, כשבכל ניסוי שתי תוצאות אפשריות: הצלחה
וכשלון, וכאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p.

משתנים מקריים:

משתנה מקרי בדיד: פונקצית ההסתברות: $P(X=k)$ פונקצית ההתפלגות המצטברת: $F(k)=P(X\le k)$

התוחלת של X: $E(X)=\sum_k x_k P(X=x_k)$; התוחלת של פונקציה של X, g(X) היא: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P\{X=k\}$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בעל ההסתברות הגבוהה ביותר, **החציון** הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (בדידים) מיוחדים:

אחיד (בדיד): X~U(N), מתאר משתנה המקבל את הערכים: 1,2,…,N בהסתברויות שוות.

עבור משתנה זה:
$$P\{X=k\}=\frac{1}{N}\quad k=1,2,...,N\ ;\quad E[X]=\frac{N+1}{2}\quad ;\quad V[X]=\frac{N^2-1}{12}$$

בינומי: $X\sim B(n,p)$, מתאר את מספר **ההצלחות** ב- *n* ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה:
$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad k=0,1,...,n\ ;\quad E[X]=np\ ;\quad V[X]=npq$$

גיאומטרי: $X\sim G(p)$, מתאר את מספר הניסויים **עד** להצלחה (כולל) בסדרת ניסויי ברנולי.
עבור משתנה זה:
$$P(X=k)=pq^{k-1}\quad k=1,2,...\ ;\quad P(X\le k)=1-q^k\quad k=1,2,...\ ;\quad E[X]=\frac{1}{p};\quad V[X]=\frac{q}{p^2}$$

היפרגיאומטרי: $X\sim H(N,R,n)$ מתאר את מספר האיברים המיוחדים שיתקבלו בבחירת *n* איברים ללא החזרה מאוכלוסיה בגודל *N* שבה *R* איברים מיוחדים.
עבור משתנה זה:
$$P\{X=k\}=\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad k=0,1,2,...n\ ;\quad E(X)=n\frac{R}{N}\ ;\quad V(X)=n\frac{R}{N}\frac{(N-R)}{N}\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

פואסוני: $X\sim Pois(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור מספר אירועים ביחידת זמן.

עבור משתנה זה:
$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad k=0,1,2,...\ ;\quad E(X)=V(X)=\lambda$$

משתנה מקרי רציף: פונקצית הצפיפות: $f(x)$, פונקצית ההתפלגות המצטברת:
$$F(t)=P\{X\le t\}=\int_{x=-\infty}^{t} f(x)dx.$$

התוחלת של X: $E[X]=\int xf(x)dx$; **התוחלת של פונקציה של X**, g(X) היא: $E[g(X)]=\int g(x)f(x)dx$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בו הצפיפות היא מקסימלית, החציון הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (רציפים) מיוחדים:

אחיד (רציף): $X \sim U(a,b)$ מתאר משתנה המקבל ערכים בין a ל- b כך שההסתברות לערך בקטע פרופורציונית לאורך הקטע.

עבור משתנה זה:
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}\quad;\quad F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x\text{-}a}{b\text{-}a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}\quad;\quad \mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2};\quad \mathrm{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

מעריכי (אקספוננציאלי): $X\sim \mathrm{ezp}(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור אורך חיי רכיבים ומערכות אלקטרוניות.

עבור משתנה זה:
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases};\quad F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1\text{-}e^{-\lambda x} & 0\le x\end{cases}\quad;\quad \mathrm{E}(X)=\frac{1}{\lambda};\quad \mathrm{V}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

נורמלי: $X\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, משמש לצרכים רבים....

עבור משתנה זה:
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty\le x\le\infty\quad;\quad \mathrm{E}(X)=\mu;\quad \mathrm{V}(X)=\sigma^2$$

חישוב הסתברויות עבור משתנה זה בעזרת טבלת ההתפלגות המצטברת של המשתנה הסטנדרטי

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, והחישוב מתבצע על ידי: $P\{X\le t\}=P\{Z\le\frac{t-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$,

את הערך $\Phi(t)$ קוראים בטבלה, הוא מקיים: $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

משתנה דו ממדי בדיד: פונקצית ההסתברות המשותפת: $P(X=x_i,Y=y_j)=P_{X,Y}(x_i,y_j)$

פונקצית **ההסתברות השולית** של X: $P_X(k)=P\{X=k\}=\sum_j P\{X=k,Y=j\}$

פונקצית **ההסתברות המותנית** של X בהינתן Y=j: $P_{X/Y}(k/j)=P\{X=k/Y=j\}=\frac{P\{X=k,Y=j\}}{P\{Y=j\}}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $P_{X,Y}(x_i,y_j)=P_X(x_i)P_Y(y_j)$ לכל הערכים האפשריים i ו- j.

משתנה דו ממדי רציף: פונקצית הצפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y)$

פונקצית **הצפיפות השולית** של X: $f_X(x)=\int f_{X,Y}(x,y)dy$

פונקצית **הצפיפות המותנית** של X בהינתן Y=y: $f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ $\left(f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\right)$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ **לכל** הערכים האפשריים x,y.

תכונות התוחלת והשונות:
$$E[aX+b]=aE[X]+b\quad;\quad \mathrm{V}[aX+b]=a^2V[X]$$
$$E[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n E[X_i]\quad;\quad V[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n V[X_i]+\sum_{i\ne j}^{"n^2-n"}Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^n V(X_i)+2\sum_{i>j}Cov(X_i,X_j)$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))]=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\quad;\quad \rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$
$$\mathrm{Cov}(aX+b,Y)=a\mathrm{Cov}(X,Y)\;;\quad \mathrm{Cov}(X,Y+Z)=\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)$$

סכום מקרי של משתנים מקריים: $S_N=\sum_{i=1}^N X_i\;;\;\mathrm{E}[S_N]=E[N]E[X]\;;\;V[S_N]=E[N]V[X]+V[N]E^2[X]$

נוסחאות התוחלת והשונות בתנאי:

$$E(X \mid Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i \mid Y=y_j) \qquad E(X \mid A)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i \mid A)$$

$$E(X^2 \mid Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X=x_i \mid Y=y_j) \qquad V(X \mid Y=y_i)=E(X^2 \mid Y=y_j)-E^2(X \mid Y=y_j)$$

נוסחאות התוחלת והשונות השלמה:

$$E(X)=\sum_{j=1}^{n} E(X \mid Y=y_j)P(Y=y_j)=E\left(E(X \mid Y)\right) \qquad E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X \mid A_i)P(A_i)$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} E(X^2 \mid A_i)P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(V(X \mid A_i)+E^2(X \mid A_i)\right)P(A_i) \qquad V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

מדגם מקרי פשוט הוא אוסף של מ"מ בלתי תלויים, לכולם אותה התפלגות.

ממוצע המדגם הוא: $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, והוא מקיים: $V[\overline{X_n}]=\frac{V[X]}{n}$; $E[\overline{X_n}]=E[X]$

אי שויונים וחוקי גבול:

אי שויון מרקוב: אם X משתנה מקרי אי שלילי ולו תוחלת E[X] אז קיים: $P\{X \ge t\} \le \frac{E[X]}{t}$.

אי שויון צ'בישב: אם X משתנה שלו תוחלת E[X] ושונות V (X) אז קיים: $P\{|X-E[X]| \ge t\} \le \frac{V[X]}{t^2}$

(ה)חוק (החלש של) **המספרים הגדולים**: כאשר n שואף לאינסוף, ממוצע המדגם שואף לתוחלת המשתנה.

משפט הגבול המרכזי: עבור מדגם מקרי פשוט קיים, עבור n מספיק גדול ($n \ge 30$):
אם X משתנה מקרי עם תוחלת $E(X)=\mu$ ושונות $V(X)=\sigma^2$ אזי:

$$\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

קרוב נורמלי למשתנה בינומי: עבור X משתנה בינומי: $X \sim B(n,p)$
כאשר n מספיק גדול, כך ש: $np > 5$ וגם: $nq > 5$, מתקיים: $X \sim N(np, npq)$

תיקון רציפות: $P\{X<k\}=\Phi\left(\frac{k-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$; $P\{X \le k\}=\Phi\left(\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$

ומספר נוסחאות מתמטיות לסיום:

- טור חשבוני (אריתמטי):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} \quad ; \quad a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

ולדוגמא סכום המספרים הטבעיים הוא: $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{(1+n)\cdot n}{2}$

- טור הנדסי (גיאומטרי):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=a\frac{(1-q^n)}{1-q} \quad ; \quad a_n=a\cdot q^{n-1}$$

ובפרט כאשר $0 \le q < 1$: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i=a\frac{1}{1-q}$

Table of Normal Commulative Distribion Function

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

$\phi(Z)$	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995	0.999
z	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090