חישוב מספר המאפיינים שצריך להוסיף עבור רגרסיה פולינומיאלית

נתחיל בהצגת המאפיינים שצריך להוסיף בספירה ידנית.

בטבלאות הבאות, **p** מסמל את דרגת הפולינום ו- **n** מסמל את כמות המשתנים. **SUM** מסמל את כמות המשתנים שצריך להוסיף עבור דרגת הפולינום המתאימה.

שימו לב! כל טבלה מייצגת תוספות של מאפיינים בדרגה שלה בלבד.

אך, כאשר מוסיפים מאפיינים לרגרסיה פולינומיאלית, עלינו להוסיף גם את המאפיינים בדרגות הקטנות ממנה עד לדרגה 2 (כולל, מכיוון שדרגה 1 כבר קיימת תמיד).

לכן, אם נרצה לדעת כמה מאפיינים עלינו להוסיף עבור **p=4**, ו- **n=3**:

נסכום את הטבלה של **p=4**, ו- **n=3**, והטבלה של **p=3**, ו- **n=3** והטבלה של **p=2**, ו- **n=3**:

31 = 6 + 10 + 15

נפרט את הטבלאות אחת אחת:

ראשית, עבור **p=4**:

<table>
<tr><td colspan="2">n = 3, p = 4</td><td colspan="4">X_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUM = 15</td><td>X_1</td><td colspan="2">X_2</td><td>X_3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">X_1</td><td>X_1</td><td>$X_1 * X_1 * X_1 * X_1$</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>X_2</td><td>$X_1 * X_1 * X_1 * X_2$</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>X_3</td><td>$X_1 * X_1 * X_1 * X_3$</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">X_2</td><td>X_2</td><td>$X_1 * X_1 * X_2 * X_2$</td><td colspan="2">$X_1 * X_2 * X_2 * X_2$</td><td></td></tr>
<tr><td>X_3</td><td>$X_1 * X_1 * X_2 * X_3$</td><td colspan="2">$X_1 * X_2 * X_2 * X_3$</td><td></td></tr>
<tr><td>X_3</td><td>X_3</td><td>$X_1 * X_1 * X_3 * X_3$</td><td colspan="2">$X_1 * X_2 * X_3 * X_3$</td><td>$X_1 * X_3 * X_3 * X_3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="4">X_2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">X_2</td><td colspan="2">X_3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X_2</td><td>X_2</td><td colspan="2">$X_2 * X_2 * X_2 * X_2$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>X_3</td><td colspan="2">$X_2 * X_2 * X_2 * X_3$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>X_3</td><td>X_3</td><td colspan="2">$X_2 * X_2 * X_3 * X_3$</td><td colspan="2">$X_2 * X_3 * X_3 * X_3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="4">X_3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="4">X_3</td></tr>
<tr><td>X_3</td><td>X_3</td><td colspan="4">$X_3 * X_3 * X_3 * X_3$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">n = 2, p = 4</td><td colspan="2">X_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUM = 5</td><td>X_1</td><td>X_2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X_1</td><td>X_1</td><td>$X_1 * X_1 * X_1 * X_1$</td><td></td></tr>
<tr><td>X_2</td><td>$X_1 * X_1 * X_1 * X_2$</td><td></td></tr>
<tr><td>X_2</td><td>X_2</td><td>$X_1 * X_1 * X_2 * X_2$</td><td>$X_1 * X_2 * X_2 * X_2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">X_2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">X_2</td></tr>
<tr><td>X_2</td><td>X_2</td><td colspan="2">$X_2 * X_2 * X_2 * X_2$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">n = 1, p = 4</td><td>X_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUM = 1</td><td>X_1</td></tr>
<tr><td>X_1</td><td>X_1</td><td>$X_1 * X_1 * X_1 * X_1$</td></tr>
</table>

שנית עבור **p=3**:

n = 3, p = 3	X_1		
SUM = 10	X_1	X_2	X_3
X_1	$X_1 * X_1 * X_1$		
X_2	$X_1 * X_1 * X_2$	$X_1 * X_2 * X_2$	
X_3	$X_1 * X_1 * X_3$	$X_1 * X_2 * X_3$	$X_1 * X_3 * X_3$
	X_2		
	X_2	X_3	
X_2	$X_2 * X_2 * X_2$		
X_3	$X_2 * X_2 * X_3$	$X_2 * X_3 * X_3$	
	X_3		
	X_3		
X_3	$X_3 * X_3 * X_3$		

n = 2, p = 3	X_1	
SUM = 4	X_1	X_2
X_1	$X_1 * X_1 * X_1$	
X_2	$X_1 * X_1 * X_2$	$X_1 * X_2 * X_2$
	X_2	
	X_2	
X_2	$X_2 * X_2 * X_2$	

n = 1, p = 3	X_1
SUM = 1	X_1
X_1	$X_1 * X_1 * X_1$

שלישית עבור p=2:

<table>
<tr><td colspan="6">n = 4, p = 2</td><td colspan="6">SUM = 10</td></tr>
<tr><td colspan="12">X_1</td></tr>
<tr><td colspan="3">X_1</td><td colspan="3">X_2</td><td colspan="3">X_3</td><td colspan="3">X_4</td></tr>
<tr><td colspan="3">$X_1 * X_1$</td><td colspan="3">$X_1 * X_2$</td><td colspan="3">$X_1 * X_3$</td><td colspan="3">$X_1 * X_4$</td></tr>
<tr><td colspan="12">X_2</td></tr>
<tr><td colspan="4">X_2</td><td colspan="4">X_3</td><td colspan="4">X_4</td></tr>
<tr><td colspan="4">$X_2 * X_2$</td><td colspan="4">$X_2 * X_3$</td><td colspan="4">$X_2 * X_4$</td></tr>
<tr><td colspan="12">X_3</td></tr>
<tr><td colspan="6">X_3</td><td colspan="6">X_4</td></tr>
<tr><td colspan="6">$X_3 * X_3$</td><td colspan="6">$X_3 * X_4$</td></tr>
<tr><td colspan="12">X_4</td></tr>
<tr><td colspan="12">X_4</td></tr>
<tr><td colspan="12">$X_4 * X_4$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">n = 3, p = 2</td><td colspan="3">SUM = 6</td></tr>
<tr><td colspan="6">X_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">X_1</td><td colspan="2">X_2</td><td colspan="2">X_3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$X_1 * X_1$</td><td colspan="2">$X_1 * X_2$</td><td colspan="2">$X_1 * X_3$</td></tr>
<tr><td colspan="6">X_2</td></tr>
<tr><td colspan="3">X_2</td><td colspan="3">X_3</td></tr>
<tr><td colspan="3">$X_2 * X_2$</td><td colspan="3">$X_2 * X_3$</td></tr>
<tr><td colspan="6">X_3</td></tr>
<tr><td colspan="6">X_3</td></tr>
<tr><td colspan="6">$X_3 * X_3$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>n = 2, p = 2</th><th>SUM = 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">X_1</td></tr>
<tr><td>X_1</td><td>X_2</td></tr>
<tr><td>$X_1 * X_1$</td><td>$X_1 * X_2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">X_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">X_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$X_2 * X_2$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>n = 1, p = 2</th><th>SUM = 1</th></tr>
<tr><td colspan="2">X_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">X_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$X_1 * X_1$</td></tr>
</table>

נעבור מקרה מקרה וניצור נוסחה מתאימה.

לאחר מכן ניצור נוסחה כללית.

נתחיל במקרה האחרון שראינו, **p=2**.

ניתן לראות שהנוסחה היא:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

נשים לב שכל פעם שאנחנו מגדילים את **p** אנחנו מוסיפים מימד לסכימה.

לכן, עבור **p=3**, הנוסחה היא:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$$

ועבור **p=4**:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} k$$

נשאיר כתרגיל את החישוב עבור הטבלאות הנתונות פה בעזרת הנוסחאות הנ"ל.

כבר עכשיו אפשר לראות שככל ש **p** גדל כך אנחנו צריכים להוסיף יותר ויותר סימני סיגמה.

נכתוב זאת בצורה כללית:

$$\sum_{k_{p-1}=1}^{n}\ \sum_{k_{p-2}=1}^{k_{p-1}} \dots \sum_{k_2=1}^{k_3}\ \sum_{k_1=1}^{k_2} k_1$$

נשים לב שזוהי רק התוספת עבור דרגת הפולינום הספציפית.

אך, כאשר מוסיפים מאפיינים עבור רגרסיה פולינומיאלית, צריכים להוסיף גם את דרגות הפולינום הקטנות (עד לדרגה 2 כולל, מכיוון שדרגה 1 כבר קיימת תמיד).

כדי לעשות זאת נצטרך לסמן את הנוסחה שכבר יצרנו בסימן מיוחד.

הנוסחה עבור דרגה מסויימת **p**:

$$A_p^n = \sum_{k_{p-1}=1}^{n}\ \sum_{k_{p-2}=1}^{k_{p-1}} \dots \sum_{k_2=1}^{k_3}\ \sum_{k_1=1}^{k_2} k_1$$

ולכן הנוסחה הכללית עבור כל **P** כולל כל הדרגות מתחת:

$$\sum_{p=2}^{P} A_p^n = \sum_{p=2}^{P} \sum_{k_{p-1}=1}^{n} \sum_{k_{p-2}=1}^{k_{p-1}} \dots \sum_{k_2=1}^{k_3} \sum_{k_1=1}^{k_2} k_1$$

כלומר בסימן מקוצר בלבד:

$$\sum_{p=2}^{P} A_p^n$$

ניתן לקודד את חישוב הנוסחה בקוד בעזרת שילוב של רקורסיה ולולאות. אך ניתן גם להשתמש רק ברקורסיה (בעזרת מתודות עזר) או רק בלולאות (מאתגר מאוד).

קוד בפייתון:

```python
def infinite_sigmas(k, i):
    summ = 0
    if i <= 0:
        return 0
    if i == 1:
        return sum(range(1, k + 1))
    for j in range(1, k + 1):
        summ += infinite_sigmas(j, i - 1)
    return summ


def big_a(n, p):
    return infinite_sigmas(n, p-1)


def num_of_all_added_features_with_sigmas(n, P):
    summ = 0
    for p in range(2, P + 1):
        summ += big_a(n, p)
    return summ
```

לאחר הרצת הבדיקות הבאות:

```python
if __name__ == "__main__":
    print("n = 2, P = 2, SUM =", num_of_all_added_features_with_sigmas (n=2, P=2))
    print("n = 2, P = 3, SUM =", num_of_all_added_features_with_sigmas (n=2, P=3))
    print("n = 3, P = 4, SUM =", num_of_all_added_features_with_sigmas (n=3, P=4))
```

התוצאה:

```
n = 2, P = 2, SUM = 3
n = 2, P = 3, SUM = 7
n = 3, P = 4, SUM = 31
```

בידקו זאת ידנית בעזרת הטבלאות לעיל.

נוסחה נוספת

נשחק קצת עם התוכנה ונבדוק מה היא מחזירה לנו.

נשתמש במתודה **big_a** בלבד (כמות המאפיינים להוספה באותה דרגה בלבד, ללא הדרגות מתחת) מכיוון שאנחנו רוצים לראות אם יש נוסחה פשוטה יותר שמבטאת אותה.

נצייר טבלה של התוצאות (שימו לב, המספרים הם לאותה דרגת פולינום בלבד, ללא הדרגות תחתיה):

A	P=2	P=3	P=4	P=5	P=6	P=7
N=1	1	1	1	1	1	1
N=2	3	4	5	6	7	8
N=3	6	10	15	21	28	36
N=4	10	20	35	56	84	120
N=5	15	35	70	126	210	330
N=6	21	56	126	252	462	792
N=7	28	84	210	462	924	1716

נשים לב שכל שורה היא סדרת הפרשים, שבה ההפרשים נמצאים בשורה שמעליה.

בנוסף, כל טור הוא סדרת הפרשים, שבה ההפרשים נמצאים בטור שמשמאלו.

אפשר לראות שהמספרים הם מספרים שנמצאים במשולש פסקל, ננסה למצוא חוקיות.

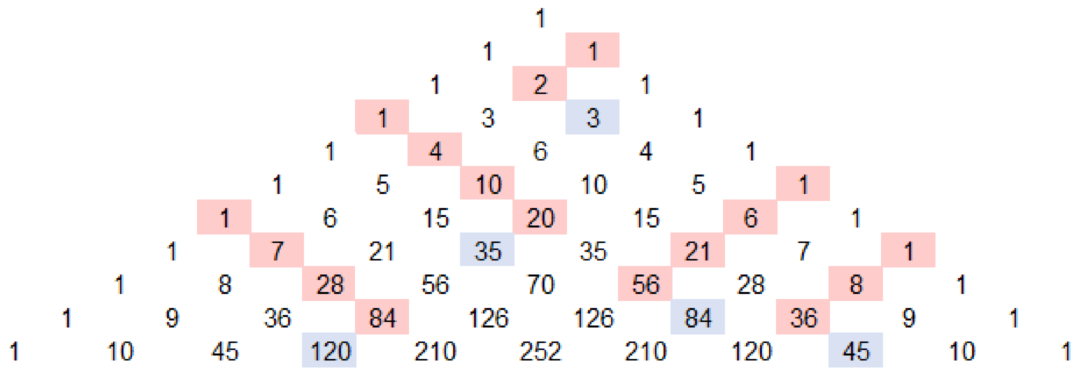
נצייר את המשולש:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

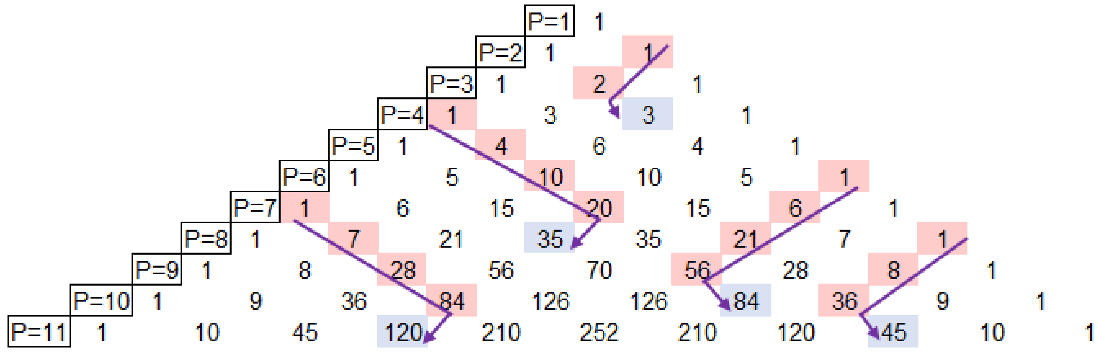
ניתן לראות שכל המספרים תואמים למספרים שנמצאים בטבלה שלנו.

נזכור תכונה נוספת של משולש פסקל, סכום האלכסונים (כלפי מטה) עד מספר מסויים שווה למספר באלכסון תחתיו ובאותו מיקום.

בתמונה הבאה באדום ניתן לראות את האלכסונים באדום ובכחול את הסכומים שלהם:



ניתן
לראות שהמספרים בטבלה הם בעצם סכומי אלכסונים במשולש פסקל:



עבור P כלשהו, נבחר את השורה המתאימה ל P ואז נצעד N צעדים באלכסון ונחשב את סכום הסדרה שהתקבלה. הסכום נמצא באלכסון תחתיה באותו מיקום (ניתן לראות בעזרת החצים הסגולים בתמונה).

נשים לב שבמשולש פסקל החצי הימני והשמאלי זהים זה לזה (כמו תמונת מראה) ולכן נוכל להתייחס לחצי השמאלי בלבד וזה יהיה נכון לכל המשולש.

בשביל למצוא סכום של סדרת אלכסונים במשולש פסקל נשתמש בנוסחה למציאת איבר במשולש פסקל בהינתן שורה (i) ועמודה (j) [כאשר השורה העליונה היא **i=1** והעמודה השמאלית ביותר בכל שורה היא **j=1**]:

$$\binom{i-1}{j-1}$$

אצלנו השורה היא **i = p + n** והעמודה היא **j = n**:

$$\binom{p+n-1}{n-1}$$

או:

$$\binom{p+n-1}{p}$$

קיבלנו בעצם את הנוסחה של צירופים עם חזרות.

מדף הנוסחאות של בדידה:

צירופים עם חזרות:

- מספר הדרכים לבחור k איברים לאו דווקא שונים מקבוצת האיברים של n סוגים שונים
- מספר הפתרונות (טבעיים או אפס) של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

- מספר דרכים לסדר k איברים זהים בין n תאים:

$$D(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

בנוסף, נשים לב שקיבלנו את השוויון הבא:

$$A_p^n = \sum_{k_{p-1}=1}^{n} \sum_{k_{p-2}=1}^{k_{p-1}} \ldots \sum_{k_2=1}^{k_3} \sum_{k_1=1}^{k_2} k_1 = \binom{p+n-1}{p}$$

לכן, נוכל להחליף את A_p^n בנוסחה הראשונה ב $\binom{p+n-1}{p}$.

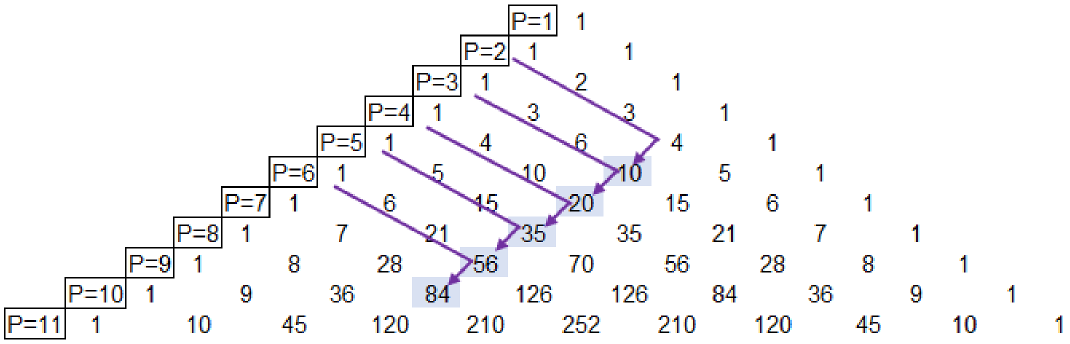
כלומר, נוסיף סכימה עבור כל הדרגות שמתחת ל P כדי למצוא את המספר האמיתי של מאפיינים שצריך להוסיף:

$$\sum_{p=2}^{P} \binom{p+n-1}{p}$$

אפשר לעצור כאן ולהשתמש בנוסחה הפשוטה שקיבלנו.

אך, אפשר גם להיפטר לגמרי מהסיגמה בעזרת שימוש בתכונות של משולש פסקל.

נסתכל שוב על משולש פסקל:

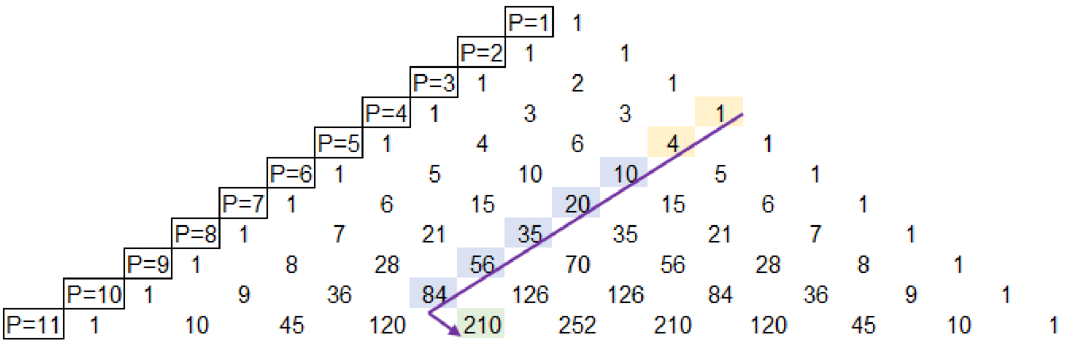


בכחול מסומנים כל הסכומים של הדרגות מ **p=6** עד **p=2** עבור **n=4**.

כלומר, הסיגמה שלנו סוכמת את כל המשבצות הכחולות.

נשים לב שהמשבצות הכחולות גם יוצרות אלכסון במשולש פסקל, אלכסון חלקי.

אם נרצה לסכום אותו בצורה פשוטה, נעשה זאת בעזרת החוק של האלכסונים:



הסכום של המספרים הכחולים הוא המספר בירוק פחות המספרים בכתום.

נוכל לרשום זאת בנוסחה:

$$\binom{p+n}{p} - n - 1$$

נוסיף טיפול למקרי קצה:

$$num\_features(n,p) = \begin{cases} \binom{p+n}{p} - n - 1\,, & if\ p \geq 2\ and\ n \geq 1 \\ 0\,, & else \end{cases}$$

זו הנוסחה הסופית הסגורה והפשוטה ביותר למציאת כמות המאפיינים שעלינו להוסיף עבור רגרסיה פולינומיאלית.

נקודד את חישוב הנוסחה בפייתון:

```python
def factorial(n):
    mult = 1
    for i in range(1, n + 1):
        mult *= i
    return mult


def binomial(n, k):
    return int(factorial(n)/(factorial(n-k)*factorial(k)))


def num_of_all_added_features_with_binomial(n, P):
    if P >= 2 and n >= 1:
        return binomial(P + n, P) - n - 1
    else:
        return 0
```

נבצע בדיקה עם הנוסחה הקודמת כדי לראות שהן זהות בכל המקרים (כולל מקרי קצה):

```python
if __name__ == "__main__":
    for i in range(-3, 10):
        for j in range(-3, 10):
            assert num_of_all_added_features_with_binomial(i, j) ==
num_of_all_added_features_with_sigmas(i, j)
    print("no assertion error -> same numbers")
```

התוצאה היא:

```
no assertion error -> same numbers
```