

תרגיל בית מספר 1

(להגשה עד 18/11/2021 בזוגות)

שאלה 1

1. תהי $N(G(V, E), s, t, c)$ רשת זרימה בה מוגדרת פונקציית זרימה f . נסמן ב- F את עוצמת הזרימה ברשת. אם נחליף תפקידים בין s ל- t (כלומר, נתייחס לרשת $N'(G(V, E), t, s, c)$ ללא שינויים בפונקציית הזרימה f , מה תהיה עוצמת הזרימה ברשת החדשה? במלים אחרות, מהי עוצמת הזרימה מ- t ל- s ? נמקו את תשובתכם.

2. הציעו אלגוריתם יעיל למציאת זרימת מינימום ברשת. כלומר, בהנתן רשת $N(G(V, E), s, t, c)$ על האלגוריתם למצוא פונקציית זרימה עבורה עוצמת הזרימה ברשת מ- s ל- t תהיה מינימלית האפשרית (יתכן מספר שלילי).

3. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות של האלגוריתם המוצע בסעיף הקודם.

4. הריצו את האלגוריתם המוצע על הרשת $N(G(V, E), s, t, c)$ הבאה:

$$V = \{s, t, a, b, c, d\}$$

$$c(s, a) = 2, \quad c(s, c) = 10, \quad c(a, b) = 4, \quad c(a, s) = 5, \quad c(b, c) = 2, \quad c(b, t) = 7,$$

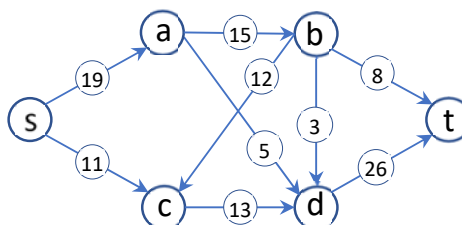
$$c(c, a) = 1, \quad c(c, d) = 3, \quad c(d, a) = 2, \quad c(d, b) = 4, \quad c(t, d) = 8$$

מהי עוצמת זרימת מינימום מ- s ל- t ברשת הנתונה?

5. מהו החתך החוסם מלמטה את עוצמת זרימת המינימום מ- s ל- t ברשת (לפחות אחד)? האם הינו חתך s - t מקסימום (חתך בעל קיבול מקסימלי)? אם כן, האם זה תמיד כך? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2

א. הריצו אלגוריתם של פורד-פלקרסון למציאת זרימת מקסימום ברשת הבאה. ציירו את הרשת השנייה בכל פאזה וסמנו את מסלול השיפור. את בחירת המסלול המשופר בצעו בשיטה חמדנית כאשר בכל פאזה יש לבחור מסלול שיפור המאפשר שיפור גדול ככל האפשר.



ב. ציינו חתך מינימום בגרף. מהו קיבולו?

ג. הריצו את האלגוריתם בו מסלול השיפור נבחר כמסלול הקצר ביותר (Edmonds-Karp). האם תימצא זרימה מקסימלית בפחות איטרציות (פאזות)?

ד. הריצו את האלגוריתם של דיניץ למציאת זרימת מקסימום ברשת הנתונה. מהו מספר הפאזות הפעם? יש לסרטט את רשת השכבות בכל שלב.

שאלה 3

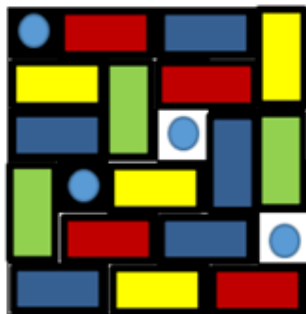
יהיו Π_1, Π_2 שתי חלוקות של קבוצה בת m איברים. כל חלוקה מורכבת מבדיוק r תת-קבוצות זרות. רוצים למצוא קבוצה בת r איברים, כך שכל אחת מתת-הקבוצות של Π_1 ושל Π_2 תהינה מיוצגות. תנו אלגוריתם יעיל לפתרון הבעיה, הוכיחו את נכונותו ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4

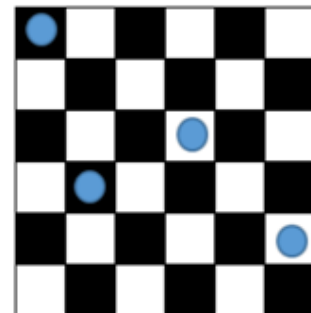
נתון לוח שחמט בגודל $n \times n$ (n זוגי). על הלוח מפוזרים k כלים, ומיקומיהם נתונים.

כתבו אלגוריתמים שמכריע האם ניתן לרצף את כל המשבצות הפנויות של הלוח בעזרת אריחים מלבניים בגודל 2×1 , המונחים בצורה מאונכת או מאוזנת על שתי משבצות סמוכות של הלוח. חשבו לאיזו בעיה כדאי לעשות רדוקציה.

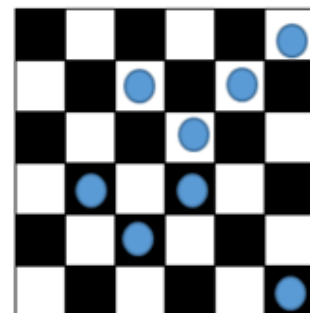
ניתן לרצף באופן הבאה:



לדוגמה, את הלוח:



לעומת זאת את הלוח הבא לא ניתן לרצף בשום צורה (חשבו מדוע).



בהצלחה!