אלגוריתם מתקדם – מטלה 1

מגישים:
אלעזר פיין
מאור אופק

.1

א. מתכונת אנטי סימטריה: העוצמה נשארת ללא שינוי, זה הוא רק הכיוון שמתהפך.

ב. 1. ניצור גרף חדש בו כיוון הזרימה הוא מT לS.
2. נבצע FF למציאת זרימה מקסימלית ’fmax.
3. ’fmax- שמצאנו בסעיף ב' היא הזרימה המינימלית בגרף המקורי מS לT fmin.

ג. <u>נכונות</u> – לפי קשר האנטי סימטריה בין הזרם מינימלי בגרף המקורי למקסימלי בגרף בו הכיוון הפוך:

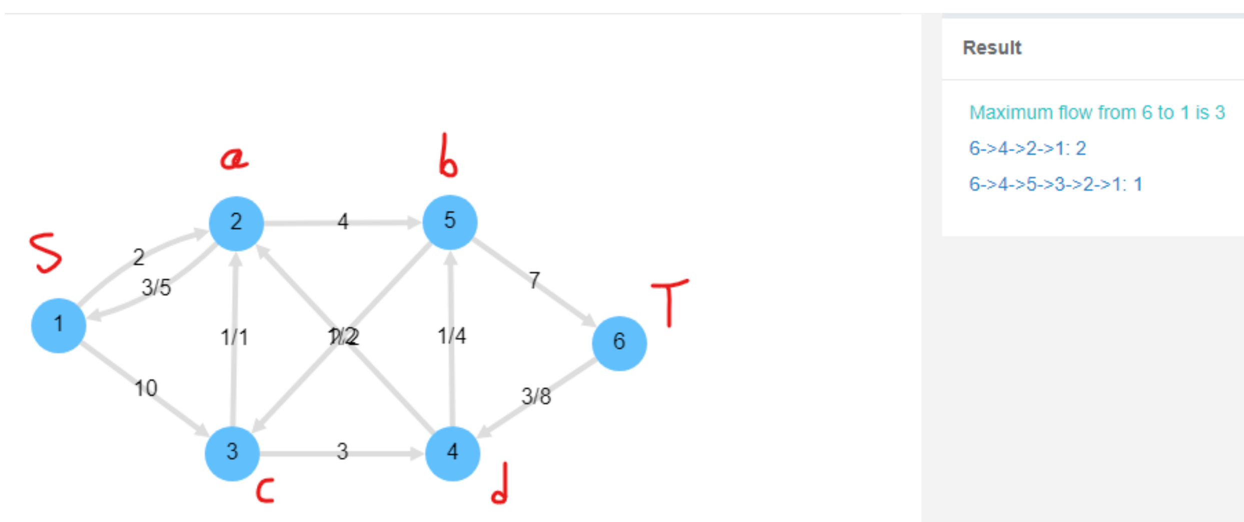
$$f(u,v) = -f(v,u)$$

כלומר אם נגדיל את f, כך נקבל f שלילי בעל עוצמה גדולה יותר – כלומר בהכרח **קטן יותר בגרף המקורי**.

<u>סיבוכיות</u> – סיבוכיות אלגוריתם ה- FF שבחרנו (+ סיבוכיות לינארית של בניית גרף הפוך שלא נחשיב):

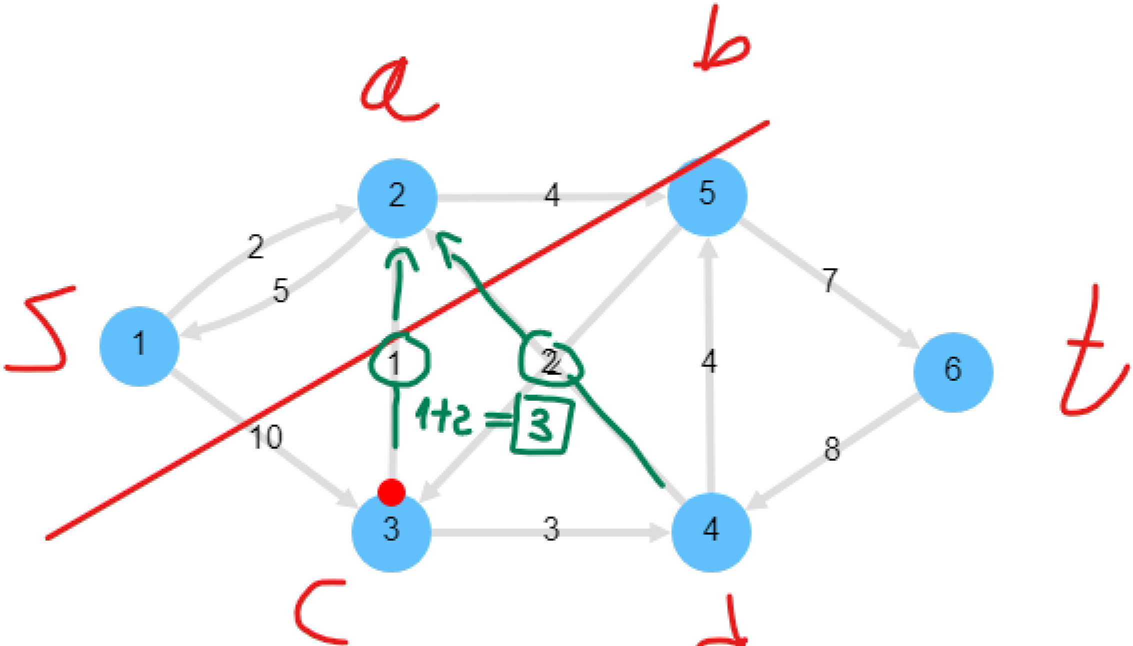
Algorithm	Time Complexity
Regular FF	$O(Ef)$ f: maximum flow
Edmonds–Karp	$O(\|V\|\|E\|^2)$
Dinic	$O(VE^2)$

ד.

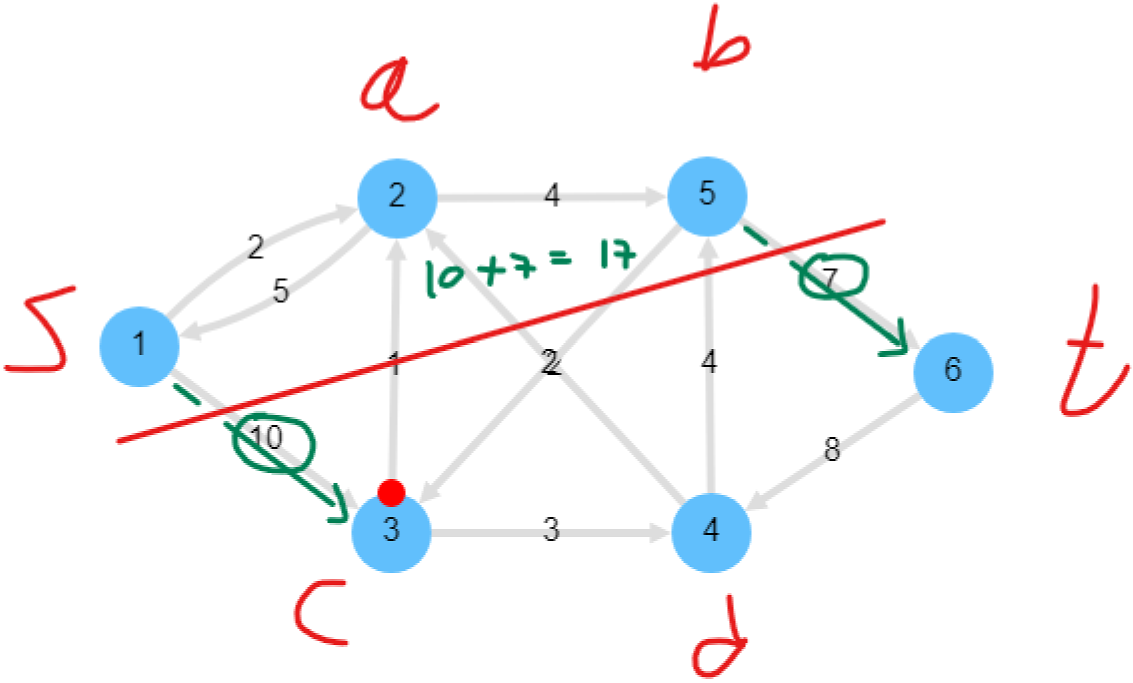


בגרף ההפוך זרימה מקסימלית היא 3, כלומר זרימה מינימלית במקורי היא 3-

ה.



זהו החתך המינימלי בגרף ההפוך, אך הוא לא החתך המקסימלי בגרף המקורי:



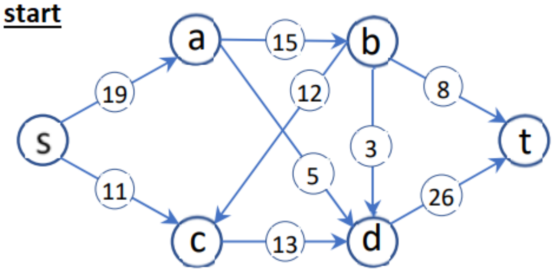
10 + 4 < 10 + 7.

רואים שהחתך המקסימלי הוא החתך המינימלי אך לא בהכרח בכיוון ההפוך.

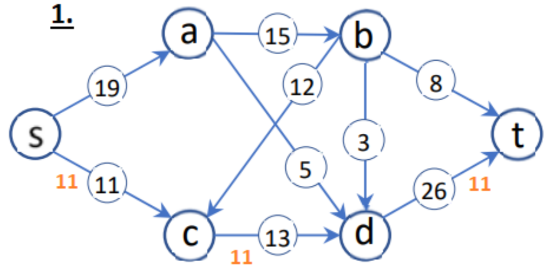
2.

א.

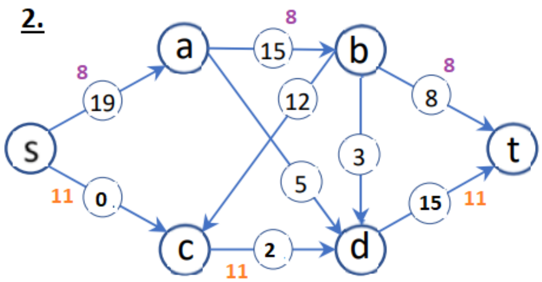
start



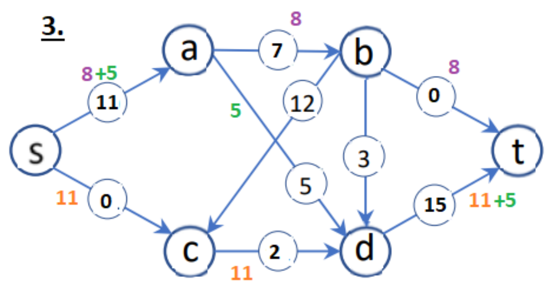
1.



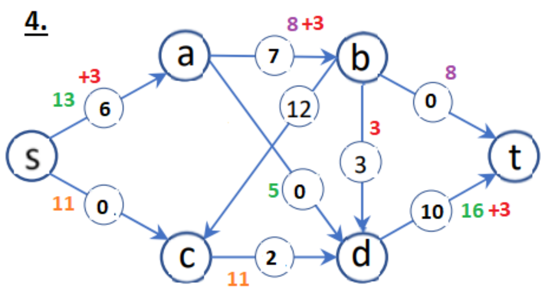
2.



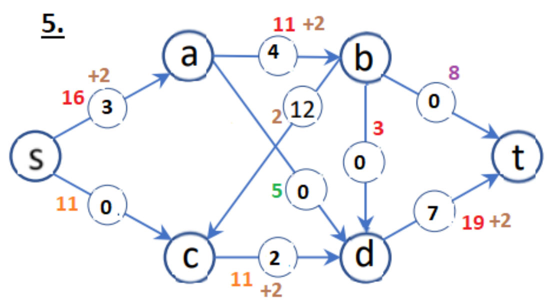
3.



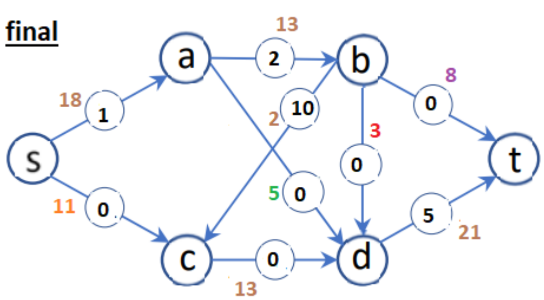
4.



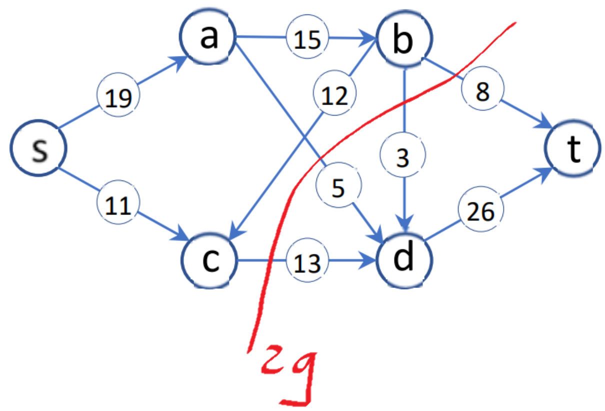
5.



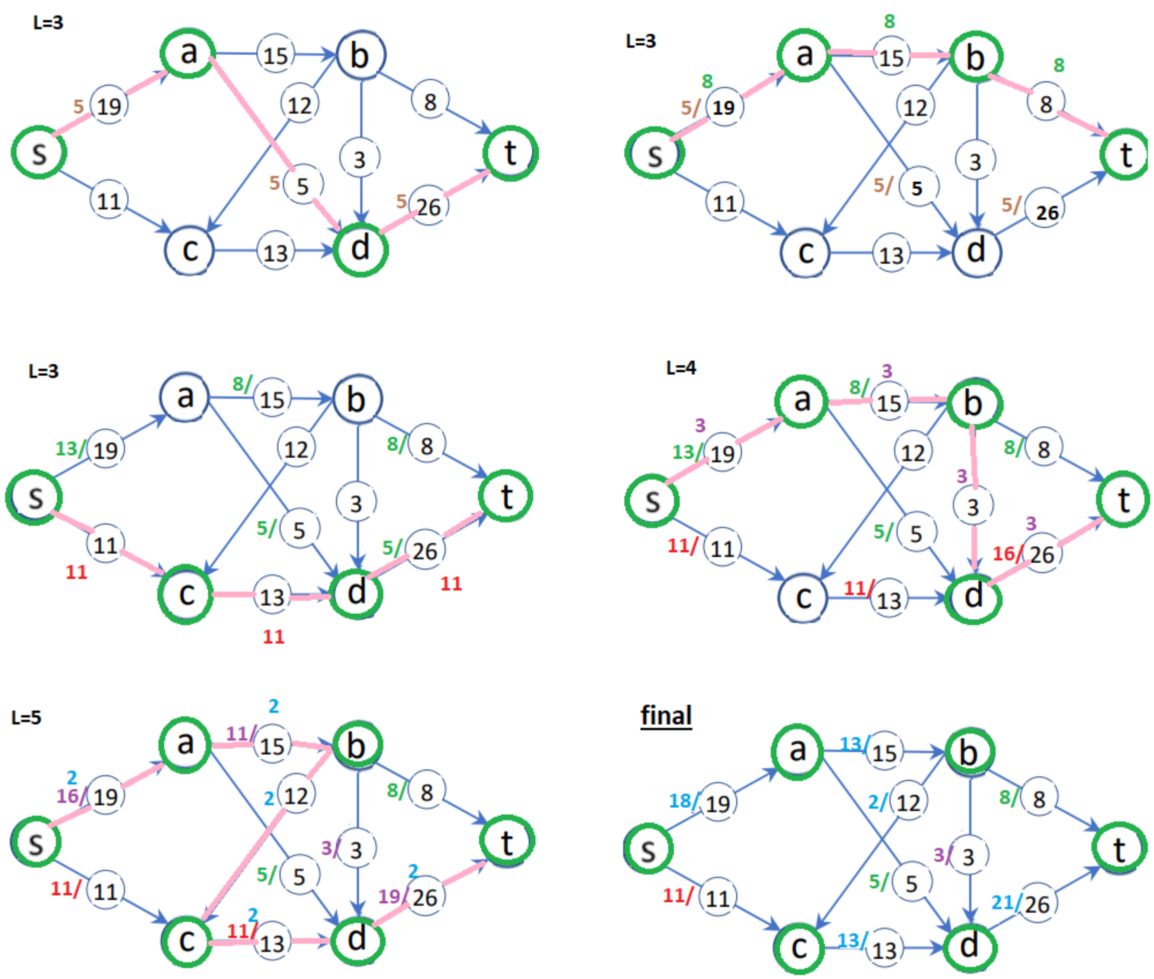
final



ב. C = 29



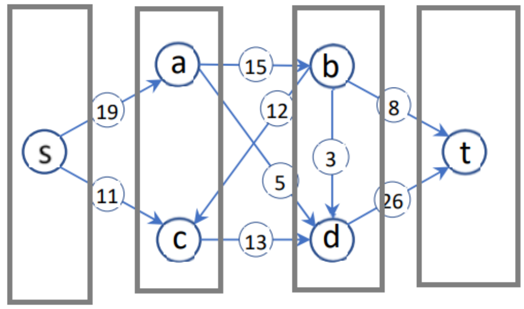
ג.



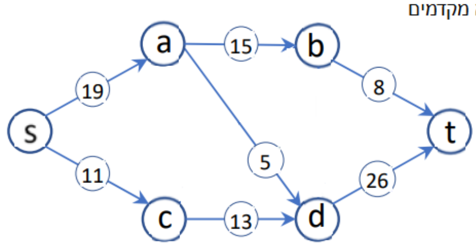
EK מצא באותו מספר צעדים כמו FF רגיל – 5.

ד.

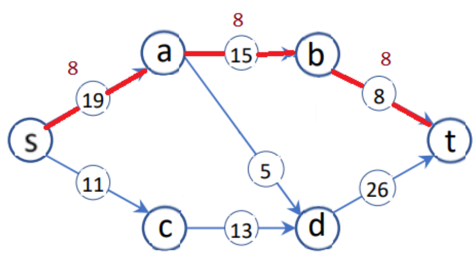
נסמן שכבות בגרף



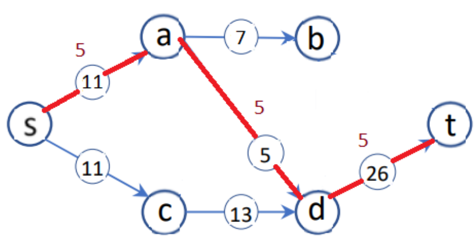
נמחק מסלולים שלא מקדמים אותנו שלב



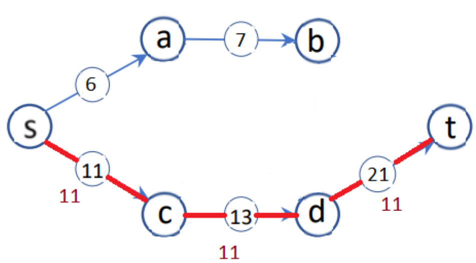
נריץ DFS



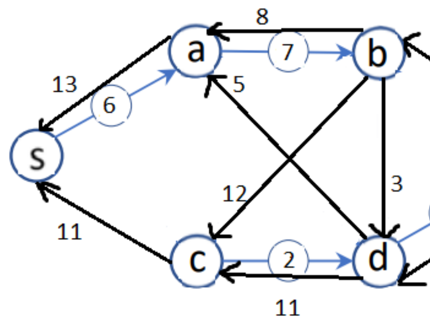
נריץ DFS



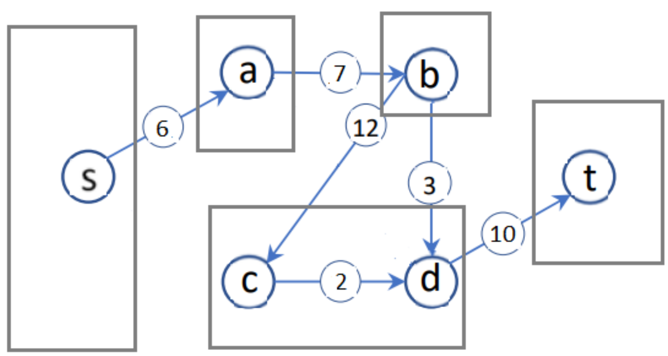
נריץ DFS



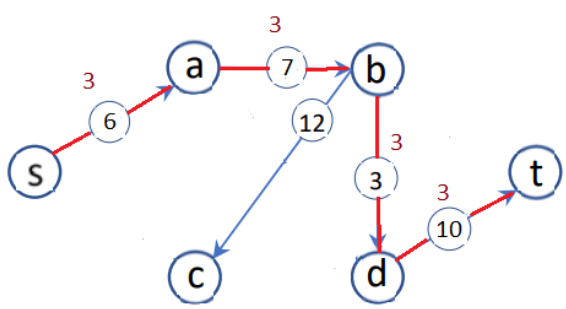
אין מסלול מ s ל t, נוסיף
לרשת המקורית ונקבל:



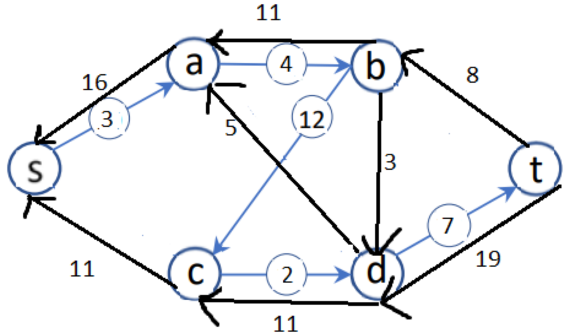
נבנה גרף שכבות



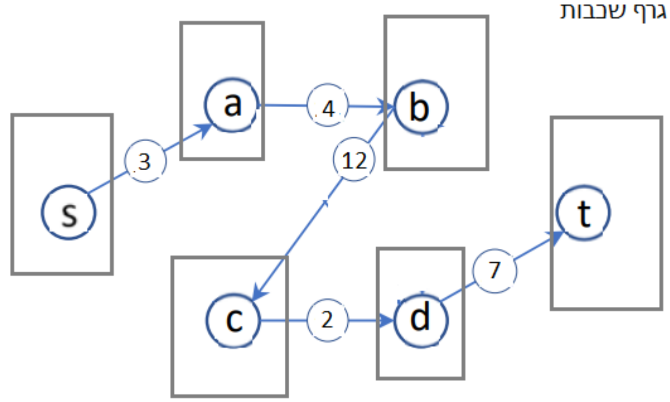
נריץ DFS



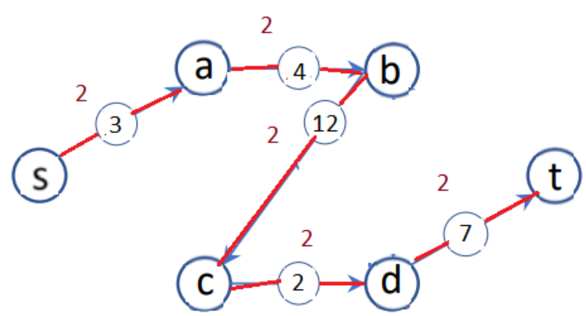
אין מסלול מ s ל t, נוסיף
לרשת המקורית ונקבל:



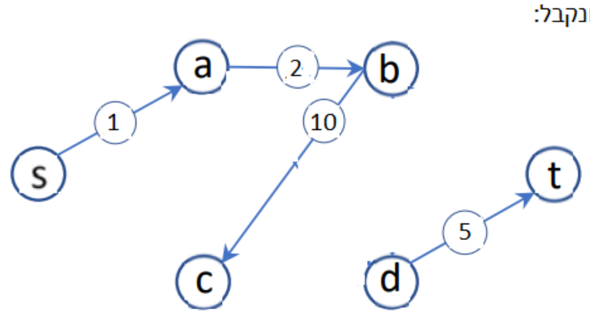
נבנה גרף שכבות

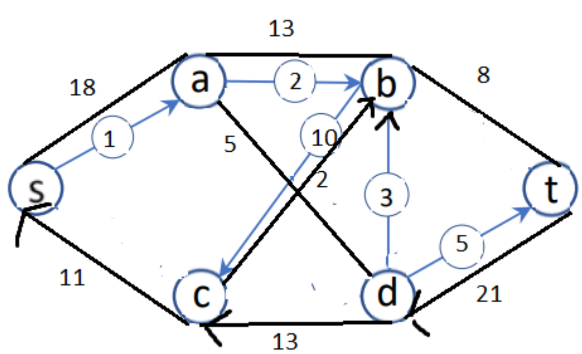


נריץ DFS



אין מסלול מ s ל t, נוסיף
לרשת המקורית ונקבל:





קיבלנו זרימה 29 =|f| . הרצנו 4 פאזות, סה"כ 6 שלבים.

3. **אלגוריתם**:

א. נבצע רדוקציה לבעיית שידוך, נבנה גרף דו-צדדי $G(L \cup R, E)$:

L = Π1

R = Π2

E = ø

בנוסף נבנה את הקבוצה X של האיברים שהאלגוריתם יחזיר.

ב. עבור כל זוג תתי קבוצות $u \in \pi_1$, $v \in \pi_2$, אם הן זרות נוסיף קשת לE: (u, v)

ג. נמצא שידוך מקסימלי.

ד. אם השידוך מושלם, עבור כל זוג בו נוסיף איבר אחד שמשותף לזוג לX.
אחרת, נחזיר שלא אפשרי ונצא מהאלגוריתם.

ה. נחזיר את X.

סיבוכיות:

בניית גרף – O(VE) = O(r ^ 2)

מציאת שידוך מקסימלי – $O(|E| * \min\{|L|, |R|\}) = O(|E| * r) = O(r^2)$

בסה"כ: O(r^2)

נכונות:

נוכיח שלכל פתרון אפשרי של השאלה קיים שידוך מושלם מתאים בגרף G ולהיפך.

כיוון 1:

בהינתן פתרון אפשרי של השאלה אשר מגדיר לכל תת-קבוצה בΠ1 תת-קבוצה מΠ2, נבחר מהגרף את הקשתות המקשרות אותן בגרף. קבוצת הקשתות שתתקבל היא שידוך, מכיוון שכל תת-קבוצה מקושרת לתת-קבוצה אחרת אחת בלבד. והשידוך הוא מושלם, כי מכסה את כל הגרף.

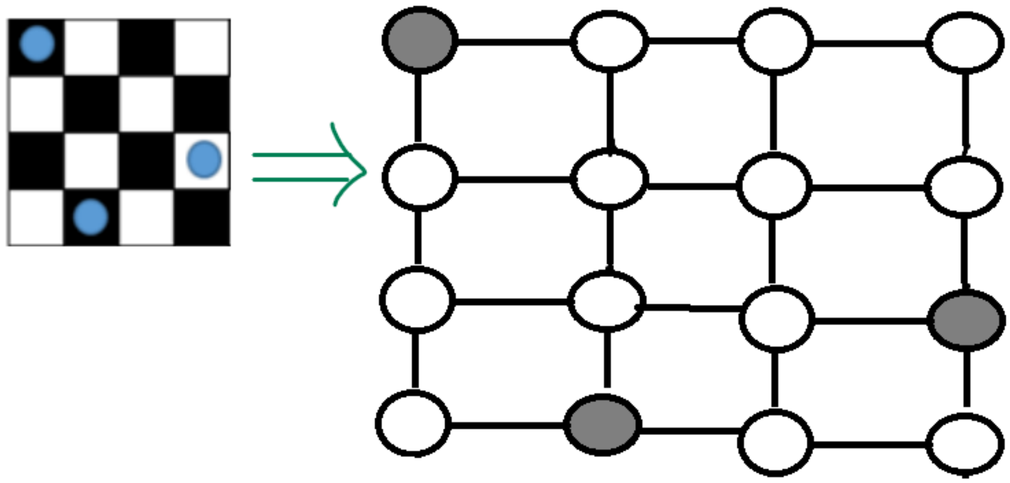
כיוון 2:

בהינתן שידוך מושלם בגרף G , נגדיר את הנציגים בr כפי שתואר באלגוריתם. זה אכן מגדיר פתרון לבעיה, כי כל צומת בגרף מחובר לקשת אחת בדיוק מהשידוך, ולכן כל קשת מייצגת איבר המשותף ל2 תתי-הקבוצות המקושרות ומיוחד כי בכל צד L, R תתי-הקבוצות (הקודקודים) זרות אחת לשנייה. וסה"כ r נציגים כיוון שכפי שצוין השידוך מושלם.

4. **אלגוריתם:**

א. אם מספר הכלים K אי זוגי, החזר תשובה שלילית.

ב. נבנה גרף G המייצג את הלוח – N*N קודקודים כאשר מחברים בין כל זוג קודקודים סמוכים בקשתות לא מכוונות, והקודקודים אשר מייצגים את המשבצות התפוסות מסומנים ובקבוצה O, או לא נבנים כלל:



ג. נריץ את אלגוריתם למציאת שידוך מקסימלי בגרף דו-צדדי.

ד. נחזיר האם הגענו למספר השידוכים הצפוי המתאים למספר משבצות בלוח מתאים מלא באריחים: $(N^2 – K) / 2$.

סיבוכיות:

בניית גרף: $O(VE) = O((n^2) * (n*(n-1)*2)) = O(n^4)$

מציאת שידוך מקסימלי = $O(|E|*|L \cup R|) = O((n*(n-1)*2) * n * n) = O(n^4)$,

אם מתייחסים לגודל הלוח n*n כקבוע לינארי K אז אפשר להתייחס ליעילות כריבועית.

נכונות:

נוכיח שלכל פתרון אפשרי של השאלה קיים שידוך מושלם מתאים בגרף G\O ולהיפך, כאשר O הם הקודקודים בהם נמצאים כלים.

כיוון 1:

בהינתן פתרון אפשרי של השאלה אשר מקשר כל זוג משבצות סמוך (שחור-לבן) באריח, נבחר מהגרף את הקשתות המקשרות אותן בגרף. קבוצת הקשתות שתתקבל היא שידוך, מכיוון שכל תת-קבוצה מקושרת לתת-קבוצה אחרת אחת בלבד. והשידוך הוא מושלם, כי מכסה את כל הגרף G\O.

כיוון 2:

בהינתן שידוך מושלם בגרף G\O , נגדיר את האריחים כפי שתואר באלגוריתם. זה אכן מגדיר פתרון לבעיה, כי כל קשת בשידוך מהווה אריח המחבר בין משבצת שחורה ללבנה, ומכיוון שהשידוך מושלם ב G\O אנחנו יודעים שכלל הלוח מכוסה באריחים פרט למשבצות בהן יש כלים – O.