אלגוריתם מתקדם – מטלה 4

אלעזר פיין
מאור אופק

1. נוכיח כי היחס בין גודל השידוך הרווי R שקיבלנו מהאלגוריתם קירוב וגודל השידוך מקסימום M הוא:

$$\frac{|M|}{2} \leq |R|$$

(כלומר עונה על הגדרת קירוב 2 כפלי)

נוכיח בשלילה:

א. נניח כי $\frac{|M|}{2} > |R|$.

ב. הקשתות בR נוגעות ב-2L קודקודים, והקשתות של R נוגעות ב-2K קודקודים.

ג. לפי ההנחה אנחנו מקבלים כי $k > 2 * l$.

ד. בM יש לכל היותר 2L קשתות שנוגעות לפחות בקודקוד אחד מR, כלומר, מסעיף ג' נובע כי יש לפחות קשת אחת בM שאין לה קודקוד בR כלומר הקשת יכולה להיווסף לR כדי להגדיל את השידוך כלומר השידוך R הוא לא רווי, בסתירה לנתון, לכן ההנחה בא' שגויה.
קיבלנו כי :

$$\frac{|M|}{2} \leq |R|$$

מ.ש.ל

(* דרך אחרת לעשות (שהוצעה):
ידוע לנו כי האלגוריתם למציאת שידוך רווי הוא למעשה אותו אלגוריתם קירוב שראינו (AVC) לבעיית VC בעל יחס קירוב 2 כפלי, נסמן אותו כAVC ואת האלגוריתם האופטימלי לVC כOPT-VC.

$$AVC \leq 2 * OPT - VC$$

נסמן את האלגוריתם האופטימלי לבעיית שידוך מקסימום $OPT - MAXIMUM - MATCHING$ כ*OMM*.
נותר להראות כי $\frac{OMM}{2} \leq \ AVC$. כלומר יש להראות את הקשר בין *VC* ל *MATCHING*.)

2.

נסמן בa_i את המרחק שעובר השועל בשלב ה- i, כאשר:

$$a_1 = 1\ , \quad a_2 = 1 + d, \ldots., \quad a_i = 1 + (i-1)d, \quad a_{i+1} = 1 + id$$

המרחק שהשועל עושה כאשר הפרצה נמצאת שמאלית אליו:

$$\mathbf{1 + 1 + d \quad + \quad 1 + 2d + 1 + 3d + \cdots \ldots \ldots + 1 + (i-1)d + 1 + id + \quad X}$$

כלומר המחיר של האלגוריתם יהיה:

$$\text{ALG} = i + d\sum_{j=0}^{i} j + X = i + d\left(\frac{i(i+1)}{2}\right) + X = \ i^2 d(i+1) + X$$

ויחס התחרותיות יהיה:

$$\frac{ALG}{OPT} = \frac{i^2 d(i+1)}{X} + 1$$

מכיוון שהמרחק המקסימלי שהשועל הלך לכיוון הפרצה $1 + (i-1)d$ לפני שהגיע אליה והצעד שבו הגיע אליה הוא בגודל עד $1 + id$:

$$\mathbf{1} + \boldsymbol{id} \geq \mathbf{X} > 1 + (i-1)d > (i-1)d$$

כעת נוכיח בשלילה כי היחס תמיד יהיה גדול מ*R*:

א. הנחת השלילה:

$$\exists R \forall X, \qquad \frac{ALG}{OPT} = \frac{i^2 d(i+1) + X}{X} \leq R$$

ב.

$$\exists R \forall X, \qquad i^2 d(i+1) \leq X(R-1)$$

ג.

$$1 + id \geq X \rightarrow \exists R \forall X, i^2 d(i+1) \leq (1+id)(R-1)$$

ד.

$$\exists R \forall X, i^2 d(i+1) \leq i^2 d(id+1) \leq (1+id)(R-1)$$

ה.

$$\exists R \forall X, i^2 d \leq (R-1)$$

ו. מכיוון ש*d* לא אפס (אחרת הצעדים לא גדלים וכל פעם הולכים רק צעד אחד מהמרכז):

$$\exists R \forall X, \qquad i^2 \leq \frac{R-1}{d}$$

קיבלנו פסוק שקר! ברור שככל שנגדיל את *X* כך גם *i* יגדל כי יש ביניהם קשר ריבועי (לפי הנוסחה של *ALG*) ובסופו של דבר *i* יעבור את *R/D* כי *R* ו-*d* <u>קבועים</u> לכן יש פה סתירה והנחת השלילה שגויה!

$$\left(\lim_{i \to \infty} i = \lim_{x \to \infty} (+f(x)) = \infty \right)$$

הערה: לא מתייחסים במעברים ל*i=0* כי ברור שתמיד נצטרך לעשות לפחות צעד אחת אלא אם כן *X = 0* וזה לא סותר את הדרישה של "*X* גדול מספיק".

קיבלנו עבור צד שמאל:

$$\forall R \exists X, \qquad \frac{ALG}{OPT} = \frac{i^2 d(i+1) + X}{X} > R$$

אם הפרצה נמצאת לימינו של השועל:

$$\mathbf{1 + 1 + \boldsymbol{d} \quad + \quad 1 + 2\boldsymbol{d} + 1 + 3\boldsymbol{d}} + \cdots \dots \dots + \mathbf{1} + (\boldsymbol{i} - \mathbf{1})\boldsymbol{d} + \boldsymbol{X}$$

השועל הלך לכיוון הפרצה עד מרחק $1+(i-2)d$ לפני שהגיע אליה אליה והצעד שבו הגיע אליה הוא בגודל עד $1+id$ ולכן:

$$\mathbf{1}+\boldsymbol{id} \geq \mathbf{X} > 1+(i-2)d > (i-2)d$$

מחיר האלגוריתם:

$$\mathrm{ALG} = i-1+\ d\sum_{j=0}^{i-1} j + X = \ i-1+d\left(\frac{(i-1)(i-1+1)}{2}\right)+X = \ id(i-1)^2+X$$

יחס התחרותיות:

$$\frac{ALG}{OPT} = \ \frac{id(i-1)^2}{X}+1$$

נוכיח בשלילה באותו אופן שהוכחנו לצד שמאל:

א. הנחת השלילה:

$$\exists\mathrm{R}\forall\mathrm{X}, \qquad \frac{ALG}{OPT} = \ \frac{id(i-1)^2+X}{X} \leq R$$

ב.

$$\exists\mathrm{R}\forall\mathrm{X}, \qquad \frac{ALG}{OPT} = \ id(i-1)^2 \leq X(R-1)$$

ג.

$$1+id \geq \mathrm{X} \rightarrow \ \exists\mathrm{R}\forall\mathrm{X}, id(i-1)^2 \leq (1+id)(R-1)$$

ד.

$$\exists\mathrm{R}\forall\mathrm{X}, \ \ id(i-1)^2 \leq (1+id)(i-1)^2 \leq (1+id)(R-1)$$

ה.

$$\exists\mathrm{R}\forall\mathrm{X}, \ \ (i-1)^2 \leq (R-1)$$

קיבלנו פסוק שקר! ברור שככל שנגדיל את *X* כך גם *i* יגדל כי יש ביניהם קשר ריבועי (לפי הנוסחה של *ALG*) ובסופו של דבר *i* יעבור את *R* כי *R* <u>קבוע</u> לכן יש פה סתירה והנחת השלילה שגויה!

קיבלנו עבור צד ימין:

$$\forall\mathrm{R}\exists\mathrm{X}, \qquad \frac{ALG}{OPT} = \ \frac{id(i-1)^2+X}{X} > R$$

הוכחנו שעבור כל R שנבחר, גם אם הפרצה בצד שמאל וגם אם היא בצד ימין, קיים X גדול מספיק כך שיחס התחרותיות יהיה גדול מR.

מ.ש.ל