

תרגיל בית מספר 3

(להגשה עד 30/12/2021 בזוגות)

שאלה 1

בשאלה זו נעסוק ב-coNP שלמות.

א. הגדירו מהי שפה coNP שלמה.

ב. הראו שאם L היא NP שלמה, אז \bar{L} היא coNP שלמה.

ג. הראו שהשפות הבאות הן coNP שלמות:

- i. קלט: גרף מכון $G(V, E)$ ומספר טבעי k .
שאלה: האם בכל קבוצת צמתים בגודל k בגרף G יש שני צמתים שמחוברים בקשת?
- ii. קלט: רשימת נוסחאות בוליאניות $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ מצורת CNF.
שאלה: האם קיים $1 \leq j \leq m$ עבורו הנוסחה φ_j אינה ספיקה?

שאלה 2

בעיית k-Col היא בעיית צביעת גרף ב-k צבעים. גרף לא מכון G ייקרא k-צביע, אם ניתן לצבוע את קודקודיו ב-k צבעים, כך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע. נגדיר את השפה:

$$k\text{-Col} = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is a } k\text{-colorable graph} \}$$

- א. הציגו דוגמה לגרף שהוא 4-צביע ואינו 3-צביע.
- ב. הראו שעבור כל k , הבעיה k-Col היא ב-NP.
- ג. הראו את הרדוקציה: $3\text{-Col} \leq_p 4\text{-Col}$ (רמז: שימו לב שמדובר ברדוקציה כמעט טריוויאלית).
- ד. חפשו קשר בין התכונה "3-צביע" של גרף לבין קבוצות קודקודים בלתי-תלויות הקיימות בו. כלומר: אם נתון גרף בעל n קודקודים שהוא 3-צביע, מה ניתן לומר על קבוצות קודקודים בלתי-תלויות בגרף?

שאלה 3

שני גרפים יקראו איזומורפיים אם שניהם הם למעשה אותו גרף רק בשינוי שמות הקודקודים. פורמלית, שני גרפים $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ ייקראו איזומורפיים (ונסמן: $G_1 \simeq G_2$) אם קיימת התאמה חח"ע ועל $f: V_1 \rightarrow V_2$ כך שעבור כל $u, v \in V_1$ מתקיים:

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$$
 נגדיר את הבעיה Sub-ISO. בבעיה זו נתונים שני גרפים ויש לבדוק האם הגרף השני איזומורפי לתת-גרף כלשהו של הגרף הראשון. פורמלית:

$$\text{Sub-ISO} = \{ \langle G, H \rangle \mid G, H \text{ are graphs, } \exists G', G' \text{ is a subgraph of } G \text{ and } G' \simeq H \}$$
 הראו ששפה זו היא ב-NPC.

בהצלחה!