פתרון תרגיל בית מספר 3

שאלה 1

א. הגדרה:
שפה L היא coNP-שלמה אם מתקיים:
- $L \in coNP$, כלומר, $\bar{L} \in NP$.
- L היא coNP-קשה, כלומר, לכל שפה $L' \in coNP$ מתקיים $L' \leq_p L$.

ב. הוכחה:
אם L היא NP-שלמה, אז מתקיים $L \in NP$ וגם L היא NP-קשה. נוכיח ש-$\bar{L}$ היא coNP-שלמה:
- $L \in NP$, אזי $\bar{L} \in coNP$ עפ"י הגדרה.
- L היא NP-קשה, כלומר, לכל שפה $L' \in NP$ מתקיים $L' \leq_p L$. מכיון שרדוקציה פולינומית תקפה למשלים, אזי לכל שפה $L' \in coNP$ מתקיים $\bar{L'} \in NP$ ולכן $\bar{L'} \leq_p L$ מכאן $L' \leq_p \bar{L}$. כלומר, $\bar{L}$ היא coNP-קשה.

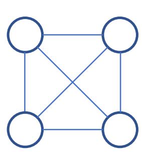
מכאן, $\bar{L}$ היא coNP-שלמה.

ג. לכל שפה נראה שהיא coNP-שלמה ע"י הוכחה שהמשלים שלה ב-NPC (ושימוש בסעיף הקודם).
- נסמן ב-L את השפה המוגדרת בסעיף ונגדיר את $\bar{L}$:
$$\bar{L} = \{(G,k) \mid \text{לא בכל קבוצת צמתים בגודל } k \text{ בגרף } G \text{ יש שני צמתים שמחוברים בקשת}\}$$
כלומר, קיימת תת-קבוצה של צמתי G בגודל k בה אין שני צמתים סמוכים. פרושו: ב-G קיימת קב"ת בגודל k. מכאן, $\bar{L} = IS$ (independent set). (אפשר גם להכיל את כל הקלטים הלא תקינים, אבל קל לבדוק תקינות הקלט). מאחר והוכחנו בכיתה ש-IS היא NP-שלמה, אז L היא coNP-שלמה.
- נסמן ב-L את השפה המוגדרת בסעיף ונגדיר את $\bar{L}$:
$$\bar{L} = \{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \mid \text{כל } \varphi_i \text{ היא נוסחת } CNF \text{ ולא קיים } j \text{ עבורו הנוסחה } \varphi_j \text{ אינה ספיקה}\}$$
כלומר, כל הנוסחאות $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ הן ספיקות. נוכיח ש-$\bar{L}$ היא NP-שלמה:
  - $\bar{L} \in NP$, כי ניתן בזמן פולינומי בגודל הקלט לנחש השמות לכל הנוסחאות ולאמת אותן.
  - כדי להוכיח ש-$\bar{L}$ היא NP-קשה, נראה רדוקציה $SAT \leq_p \bar{L}$. פונקצית הרדוקציה:
$$f(\varphi) = (\underbrace{\varphi, \varphi, \dots, \varphi}_{m})$$
הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב בזמן פולינומי. הפרדה: $\varphi \in SAT \iff \varphi$ נוסחה ספיקה $\iff (\underbrace{\varphi, \varphi, \dots, \varphi}_{m}) \in \bar{L}$.
הראנו ש-$\bar{L} \leq_p SAT$, והרי SAT היא NP-קשה, לכן גם $\bar{L}$ היא NP-קשה.

ובכן, $\bar{L}$ היא NP-שלמה, לכן L היא coNP-שלמה.

שאלה 2

א. דוגמה לגרף שהוא 4-צביע ואינו 3-צביע:



מאחר וכל אחד מ-4 הצמתים מחובר לכל האחרים, אז חייבים לצבוע כל צומת בצבע משלו – 4 צבעים שונים.

ב. בהנתן גרף $G(V,E)$ ניתן בזמן פולינומי בגודל הגרף לנחש את פונקצית הצביעה לצמתים $(c: V \to \{1,2,\dots,k\})$ ולאמת אותה – לבדוק שאין זוג צמתים סמוכים שצבועים באותו צבע.
מכאן, $k\text{-}Col \in NP$.

ג. פונקצית הרדוקציה:

$$f\big(G(V,E)\big) = G'(V',E')$$

כאשר $V' = V \cup \{x\}$ $(x \notin V)$ ו-$E' = \{(x,v) | v \in V\}$.

הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב בזמן פולינומי. הפרדה:

- אם $G \in 3\text{-}Col$, אז ניתן לצבוע את צמתי G ב-3 צבעים, לכן ב-G' ניתן להגדיר אותה צביעה על צמתי G ול-x לתת את הצבע הרביעי. כך נקבל 4-צביעה, מכאן $G' \in 4\text{-}Col$.
- אם $G' \in 4\text{-}Col$, אז ניתן לצבוע את צמתי G' ב-4 צבעים, כאשר הצבע שמוגדר עבור x לא זמין לשאר הצמתים, כי כולם שכנים של x. מכאן, שאר צמתי G' צבועים ב-3 צבעים בלבד, והרי זהו בדיוק הגרף G. לכן $G \in 3\text{-}Col$.

ד. אם הגרף 3-צביע, אז כל קבוצת הצמתים שניתן לצבוע באותו צבע היא קב"ת (לא מחוברים ע"י קשתות). לכן 3-צביעה הינה, למעשה, חלוקה של צמתי הגרף ל-3 קבוצות בלתי תלויות. מכאן, לפחות אחת מהן היא בגודל $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ לפחות. כלומר, גודל הקב"ת המקסימלית הוא לפחות $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

שאלה 3

<u>הוכחה</u>: יש להראות ש-$Sub\text{-}ISO \in NP$ וגם ש-$Sub\text{-}ISO$ היא NP-קשה:

- בהנתן גרפים $G(V_1,E_1), H(V_2,E_2)$, ניתן בזמן פולינומי בגודל הקלט לנחש את קבוצת הצמתים V_3 ופונקצית התאמה $f: V_3 \rightarrow V_2$ ולבדוק ש-f היא חח"ע ועל
(כלומר, $(\forall v,u \in V_3 \;\; f(v) \neq f(u) \;\; \wedge \; \forall v \in V_2 \; \exists u \in V_3 \;\; f(u) = v$). לכן $Sub\text{-}ISO \in NP$.
- נראה רדוקציה $CLIQUE \leq_p Sub\text{-}ISO$. פונקצית הרדוקציה:

$$f(G,k) = (G, K_k)$$

כאשר K_k הוא גרף מלא על k צמתים.

הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב בזמן פולינומי. הפרדה:

$(G,k) \in CLIQUE$ אמ"מ קיים ב-G קליק בגודל k אמ"מ קיים ב-G תת-גרף (קליק) איזומורפי ל-K_k אמ"מ $(G,K_k) \in Sub\text{-}ISO$.

מאחר ו-$Sub\text{-}ISO \in NP$ וגם $Sub\text{-}ISO$ היא NP-קשה, אזי $Sub\text{-}ISO \in NPC$.