אלגוריתם מתקדם - מטלה 3

אלעזר פיין
מאור אופק

.1

א. coNP – משלימה ל NP, מכילה את הבעיות שניתן לשלול בזמן פולינומיאלי.
coNP שלמה – מתארת את כל הבעיות הקשות מcoNP אשר ניתן לבצע רדוקציה מכל בעיה בcoNP אליהן.

ב.

i. $coNP = \{ \bar{L} \mid L \in NP \}$

ii. $L \in NP - Complete \Rightarrow \ \forall L' \in NP,\ x \in L' \ \Leftrightarrow f(x) \in L$
(Every problem in NP can be reduced to L in polynomial time)

iii. $\forall L' \in NP,\ x \notin L' \ \Leftrightarrow f(x) \notin L \ \Rightarrow \ \forall L' \in NP,\ x \in \overline{L'} \ \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}$
(By definition, Complement of L is also polynomial reducible)

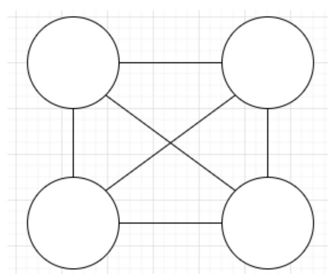
iv. $\Rightarrow \bar{L}$ is co-NP complete. (By definition – since every $\overline{L'}$ in coNP is polynomial reducible to it)

ג. זו בעיה משלימה ל IS (Independent Set) אשר היא בעיה ידועה ב NP כלומר זו נמצאת בcoNP לפי ההוכחה בסעיף ב מכיוון ש IS היא NP שלמה, בעיה זו היא coNP שלמה.

ד. זו בעיה משלימה ל SAT אשר היא בעיה ידועה ב NP כלומר זו נמצאת בcoNP לפי ההוכחה בסעיף ב מכיוון ש IS היא NP שלמה, בעיה זו היא coNP שלמה.

.2

א.



ב. K <= 1 – טריוויאלי ובמחלקת P לכן גם מוכל בNP.
K = 2 – שקול לבדיקה אם הגרף הוא דו-צדדי, פתיר בזמן פולינומיאלי ולכן גם מוכל בP וNP.
K => 3 - נשתמש בהגדרה של מחלקת NP - **מחלקת הבעיות שפתרונותיהן ניתנים לאימות באופן יעיל (כלומר, בזמן ריצה פולינומיאלי).** ונראה שלכל K ניתן לאמת בזמן פולינומיאלי את בעיית K-col:
<u>אלגוריתם אימות:</u>
בדוק אם הצביעה חוקית כלומר עבור על כל הקשתות ובדוק שאין קשת מונוכרומטית (ששני קודקודיה צבועים באותו צבע).

נכונות: אם G ∈ Col-k אז יש צביעה חוקית ב k - צבעים ולכן ניקח צביעה זו כעד ("גמד") והאלגוריתם יקבל. אם G ∉ Col-k אז בכל צביעה ב k צבעים תהיה קשת מונוכרומטית ולכן האלגוריתם יכשל לכל עד.
סיבוכיות:
מעבר על כל הקשתות ובדיקה של הקודקודים המחוברים לקצוותם – O(V+E) – פולינומיאלי.

הראינו עבור K => 2 שKCOL בP ובכלל בNP, ועבור כל K >= 3, הראינו שניתן לאמת כל גרף G לכל מספר צבעים K בזמן פולינומיאלי (ואפילו לינארי!) לכן בעיית KCOL היא בNP. **מ.ש.ל**

ג. נראה רדוקציה פולינומיאלי עבור כל **K, K+1** הנכונה כמובן גם עבור **3, 4**:

בהינתן גרף G = (V, E) בתור קלט לK-Col, נוסיף קודקוד חדש q, נחבר אותו לכל שאר הקודקודים ונקבל גרף חדש G' אותו נכניס כקלט ל (K+1)-Col, ($G' = (V \cup q,\ E \cup \{(q,v) \mid v \in V\})$).
כיוון 1:
אם G k צביע - אז ניתן לצבוע את G ב k צבעים. לכן אם נקבע צביעה חוקית של G ונצבע את q בצבע הנוסף אז זו צביעה חוקית של G' ב K+1 צבעים לכן G' K+1 צביע.
כיוון 2:
אם G' K+1 צביע – אז לפי הגדרה q צבוע בצבע שונה משאר הקודקודים לכן G = G'\q k צביע.

ד. קיימות בגרף 3-צביע 3 קבוצות קודקודים בלתי תלויות לפי שכל קבוצה בלתי תלויה מהווה צבע מסוים, זאת לפי שגרף 3-צביע לא קיימים קשתות אל קודקודים בעלי אותו צבע.

3. נראה שהבעיה היא NP שלמה לפי הגדרה, נראה כי היא בNP, וכי היא NP קשה.

א. הבעיה היא בNP:
ברור כי אלגוריתם האימות של הבעיה הוא בזמן פולינומיאלי, כי מספיק פה השוואת גדלים לשלילה ומעבר על הקודקודים והקשתות (בדיקה שלכל (u,v) קיים ((f(u), f(v)) לחיוב.

ב. הבעיה היא NP קשה:
נראה כי הבעיה היא NP קשה ע"י רדוקציה מבעיה NP קשה ידועה (וגם NP שלמה) – בעיית הקליקה:
קלט לבעיית הקליקה - גרף G, מספר K.
הדרישה היא להכריע אם קיימת קליקה בגרף בגודל K.
נבנה גרף שלם בעל K קודקודים – H, ונכריע באמצעות בעיית Sub-ISO – ברור כי אם קיים בG תת גרף אשר איזומורפי לH אז קיימת קליקה בG בגודל K. בניית הגרף H לוקחת זמן פולינומיאלי.

קיבלנו כי יש רדוקציה בזמן פולינומיאלי: $Clique \leq Sub - Iso$!

קיבלנו לפי הגדרה NP שלמות כי בעיית Sub-Iso היא NP שלמה. **מ.ש.ל**