

פתרון תרגיל בית מספר 4

שאלה 1

הוכחה:

למעשה, כל שידוך רווי הינו קירוב לשידוך מקסימום עם יחס קירוב כפלי 2. נוכיח זאת ע"י השוואת גודל השידוך עם גודל כיסוי מינימום בגרף.

נסמן: M - שידוך רווי, M^* - שידוך מקסימום, C^* - כיסוי מינימום. אזי מצד אחד $|C^*| \geq |M^*|$, כי יש לכסות לפחות את כל הקשתות של M^* , אבל זהו שידוך, לכן כל קשת תכוסה ע"י צומת נפרד.

מצד שני, $|C^*| \leq 2|M|$, כי לא קיימת בגרף קשת שאף קצה שלה לא נוגע לפחות באחד הצמתים שמחוברים ל- M (אחרת, ניתן להוסיפה לשידוך, ואז אינו רווי), לכן קבוצת כל הצמתים המחוברים ל- M מהווה כיסוי. מכאן ניתן לקבל $|M| \geq \frac{|C^*|}{2} \geq \frac{|M^*|}{2}$.

שאלה 2

האלגוריתם המוצע:

1. הכוון המוצע הוא (בה"כ) שמאלה

2. $a = 1$

3. כל עוד לא נמצאה הפרצה בגדר:

- לך a צעדים בכוון המוצע, וחזור a צעדים לכוון ההפוך (למקומך): $\leftarrow \frac{a}{a}$ או $\rightarrow \frac{a}{a}$
- $a = a + d \quad \forall d > 0$ קבוע
- החלף כוון (מוצע).

הגדרה פורמלית:

$$a_1 = 1$$

$$a_i = 1 + (i - 1)d \quad i > 1$$

מחיר האלגוריתם

עבור $X = 1$ אם השועל בחר בצד הנכון הוא ילך 1, אחרת הוא ילך 3. חסם יחס התחרותיות במקרה כזה הוא 3.

ועבור $X > 1$: לחישוב מחיר האלגוריתם:

$$\rightarrow \frac{1}{1} + \leftarrow \frac{1}{1} + \leftarrow \frac{1}{1+d} + \rightarrow \frac{1}{1+d} + \dots + \rightarrow \frac{1}{1+(i-2)d} + \leftarrow \frac{1}{1+(i-2)d} + \leftarrow \frac{1}{1+(i-1)d} + \rightarrow \frac{1}{1+(i-1)d} + \rightarrow \frac{1}{X}$$

ומסיימים ימינה או שמאלה

$$2 \sum_{j=0}^i (1 + jd) + X = 2 \frac{(2+id)(i+1)}{2} + X = (2+id)(i+1) + X$$

$$\frac{ALG}{OPT} = \frac{(2+id)(i+1)}{X} + 1$$

לפני שהלך מרחק X והגיע לפרצה,

השועל הלך לאותו כוון מרחק $(i-1)d + 1$ ולא הגיע לפרצה, ולכן: $1 + (i-1)d < X \leq 1 + (i+1)d$

בהינתן קבוע R , נגדיר $X = 1 + Rd$

כך ש- $i = R$ (כלומר, השועל הלך $(R-1)d$ לכוון הנכון, אח"כ Rd לכוון הלא נכון, וכשהתכוון ללכת $(R+1)d$ לכוון הנכון, נעצר אחרי מרחק $X = Rd$). אז יחס התחרותיות הוא:

$$\frac{ALG}{OPT} = \frac{(2+id)(i+1)}{X} + 1 = \frac{(2+Rd)(R+1)}{X} + 1 = \frac{(1+Rd)(R+1) + (R+1)}{1+Rd} + 1 =$$

$$= R + 2 + \frac{R+1}{1+Rd} > R \quad \blacksquare$$