# Diagramas de Bode

Respuesta En Frecuencia

Ing. William Marín Moreno

## Generalidades

Es un diagrama asintótico: se puede aproximar fácilmente trazando líneas rectas (asíntotas).

Presenta la respuesta de [1]Magnitud y [2]Fase con la variación de la Frecuencia de una función de transferencia.

Tanto las escalas abscisas como la magnitud misma se representa en unidades logarítmicas.

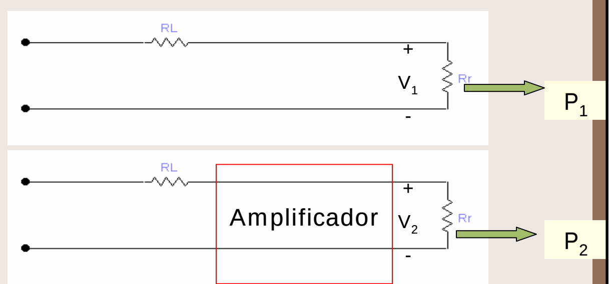
## Decibeles (dB)

Unidad <u>logarítmica</u> utilizada para escalas de magnitud.

Ideado por los Ingenieros de Sistemas telefónicos por la necesidad de medir si se requieren amplificadores en una línea telefónica.

Si la línea es muy larga

**RL >> Rr** se requiere de un amplificador para que el mensaje se escuche con claridad




## Decibeles (dB)

El oído humano es un mecanismo logarítmico: La ***<u>intensidad</u>*** de un sonido, es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda sonora. La intensidad del sonido es una cantidad objetiva, que se puede medir por medio de diversos instrumentos, como por ejemplo un osciloscopio.

Por otro lado, la <u>sonoridad</u> es una sensación fisiológica que difiere de una persona a otra. La sonoridad es subjetiva, pero está relacionada con la intensidad del sonido.

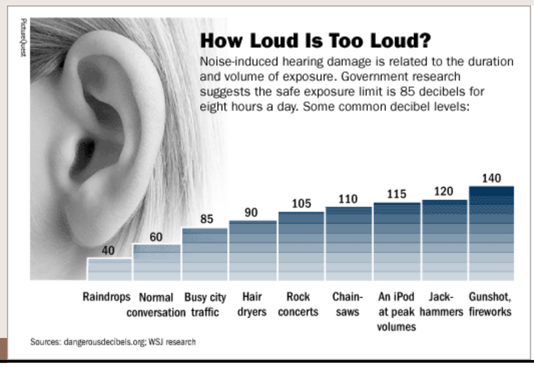
Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Fletcher-Munson_curve

http://en.wikipedia.org/wiki/Robinson-Dadson_curves

ISO 226 :2003

# Decibeles (dB)

- Debido a que la sensación fisiológica de fuerza sonora no varía directamente con la intensidad, sino que su dependencia es más bien de tipo logarítmico, se utiliza una escala logarítmica para describir ***el nivel de intensidad*** de una onda sonora.




El máximo recomendado 85dB durante 8 horas

# Decibeles (dB)

Por esa razón los controles de volumen de los equipos de sonido son logarítmicos !!!!!!
Siendo que el oído humano es logarítmico, si P2 es el doble que P1, el sonido del mensaje no se escuchará dos veces más alto, sino que será ligeramente mayor.
Sabiendo esto, los ingenieros telefónicos midieron la efectividad de los amplificadores en unidades logarítmicas, y definieron el BELIO:

$$B = \log \frac{P_2}{P_1}$$

Potencia de salida amplificada

Potencia de salida SIN amplificar

## Decibeles (dB)

Puesto que $P_2 = V_2^2 / R_R \qquad P_1 = V_1^2 / R_R$

$$B = \log \frac{P_2}{P_1} = \log \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 = 2 \log \frac{V_2}{V_1}$$

Pero el BELIO es una unidad muy grande, por lo que se utilizan las décimas de Belio, el *decibelio* (dB)

$$\frac{B}{10} = 2 \log \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow dB = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$

## Decibeles (dB)

$$dB = 10.\log \frac{P_2}{P_1}$$

$$dB = 20.\log \frac{V_2}{V_1}$$

$$dB = 20.\log \frac{I_2}{I_1}$$

## Construcción del Diagrama de Bode

Escala Vertical: ganancia(dB)=20 log|$V_{out}/V_{in}$|
Escala Horizontal: x = log f

Para construir la gráfica de Bode, primero se debe normalizar la ecuación de la función de transferencia, esto es, escribirla de forma tal que contenga:

- **Constantes.**
- **Ceros en el origen.**
- **Polos en el origen.**
- **Ceros finitos**
- **Polos Finitos**

## Construcción del Diagrama de Bode

- Cada uno de los términos anteriores, debe expresarse tal que cada término polo o cero contengan una ganancia DC=0
- Así, la función de transferencia debe quedar escrita de la forma normalizada, por ejemplo:

$$H(\omega) = K\frac{(j\omega + Z_1)}{j\omega(j\omega + P_1)} = \frac{KZ_1}{P_1} * \frac{(j\omega/Z_1 + 1)}{j\omega(j\omega/P_1 + 1)} = K' * \frac{(j\omega/Z_1 + 1)}{j\omega(j\omega/P_1 + 1)}$$

Los polos y ceros cuadráticos conjugados requieren una notación diferente

## Construcción del Diagrama de Bode

En una forma más general, una ecuación de bode queda como:

Polo o cero en el origen

cero simple (finito)

cero cuadrático

$$H(\omega) = K \frac{(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega/z_1)\left[1 + j2\zeta\, \omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2\right]\ldots}{(1 + j\omega/p_1)\left[1 + j2\zeta\, \omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2\right]\ldots}$$

Con esto, graficar

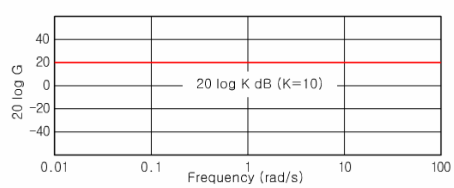
$$20\log\left|H(\omega)\right|$$

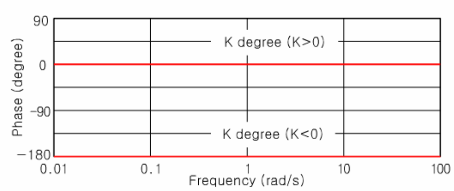
## Constantes

$$\left|\boldsymbol{G(s)}\right|_{dB} = 20\,\mathbf{log}_{10}\,\boldsymbol{K}$$

$$\angle \boldsymbol{G(s)} = 0^\circ \qquad \boldsymbol{K} > 0$$

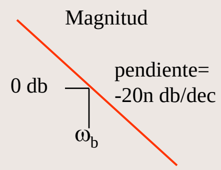
$$= 180^\circ \qquad \mathbf{K} < 0$$



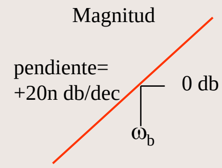
## Polos y ceros en el origen

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_b}\right)^n}$$





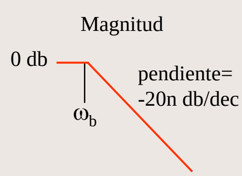
$$\left(\frac{s}{\omega_b}\right)^n$$

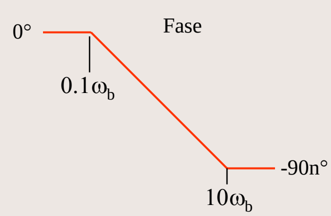




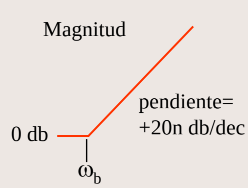
## Polos y ceros simples

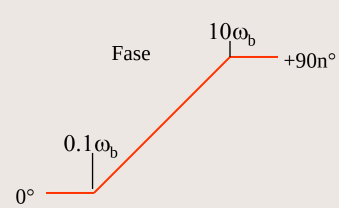
$$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_b}+1\right)^n}$$



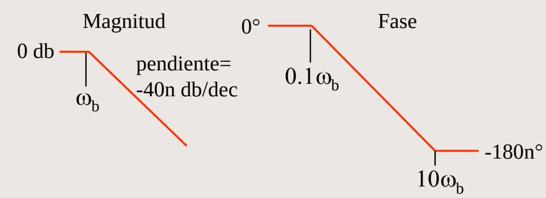

$$\left(\frac{s}{\omega_b}+1\right)^n$$



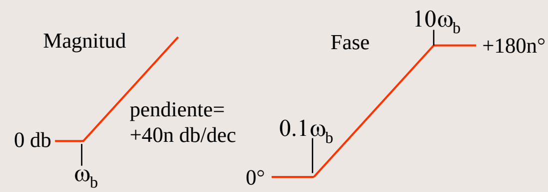



## Polos y ceros cuadráticos conjugados

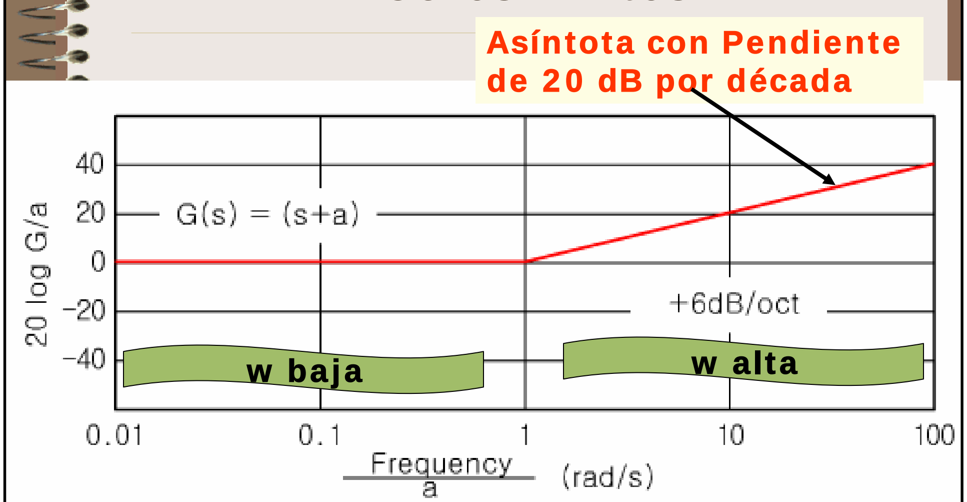
$$\frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\omega_b}\right)^2+\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{s}{\omega_b}\right)+1\right]^n}$$




$$\left[\left(\frac{s}{\omega_b}\right)^2+\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{s}{\omega_b}\right)+1\right]^n$$




## Ceros Finitos



## Octavas

En música, una octava (ocho notas) representa el doble de la frecuencia. La nota "la" media es de 440Hz y la siguiente "la" por encima (una octava más alta) es de 880Hz.

Si para alta frecuencia se utiliza la aproximación dB = 20 log(w) y con una frecuencia $w=10^4$

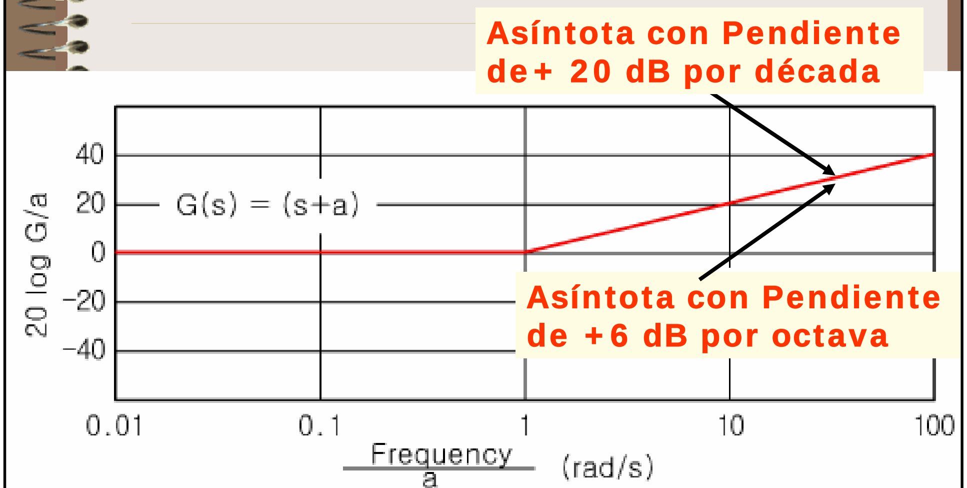
$$dB = 20\log 10^4 = 80dB$$

Si duplicamos w (subimos una octava) tenemos

$$dB = 20\log 2*10^4 = 20(\log 2 + \log 10^4)$$
$$= 20(0.301+4) \approx 6dB + 80dB = 86dB$$

**6 dB más alta!!**

## Ceros Finitos



# Ejemplo

$$G(s)=\frac{1000\cdot s\cdot(20\cdot s+200)}{(2\cdot s+2)\cdot\left[(s+50)^2+7500\right]}$$

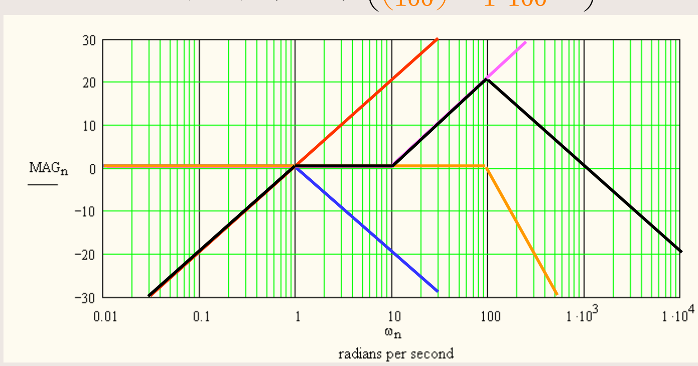
$$G(s)=\frac{1000\cdot s\cdot(20\cdot s+200)}{(2\cdot s+2)\cdot\left[(s+50)^2+7500\right]}=\frac{200000\cdot s\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}{(2\cdot s+2)\cdot\left(s^2+100\cdot s+10000\right)}$$

$$=\frac{100000\cdot s\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{1}+1\right)\cdot\left(s^2+100\cdot s+10000\right)}=\frac{10\cdot s\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{1}+1\right)\cdot\left[\left(\frac{s}{100}\right)^2+\frac{1}{1}\cdot\frac{S}{100}+1\right]}$$

# ejemplo (Cont.)

4) Create the preliminary Magnitude plot of:

$$G(s)=\left(\frac{s}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{s}{1}+1}\right)\cdot\left(\frac{\frac{s}{10}+1}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{s}{100}\right)^2+\frac{1}{1}\cdot\frac{s}{100}+1}\right)\cdot(10)$$

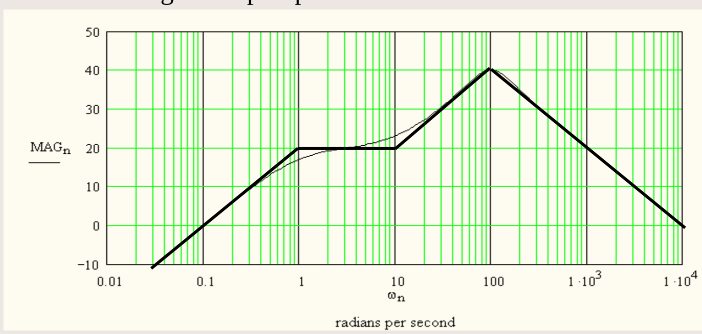


# ejemplo (Cont.)

5) Create the final Magnitude plot by shifting vertically by the gain term:

$$G(s)=\left(\frac{s}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{s}{1}+1}\right)\cdot\left(\frac{\frac{s}{10}+1}{1}\right)\cdot\left[\frac{1}{\left(\frac{s}{100}\right)^2+\frac{1}{1}\cdot\frac{s}{100}+1}\right]\cdot(10)$$

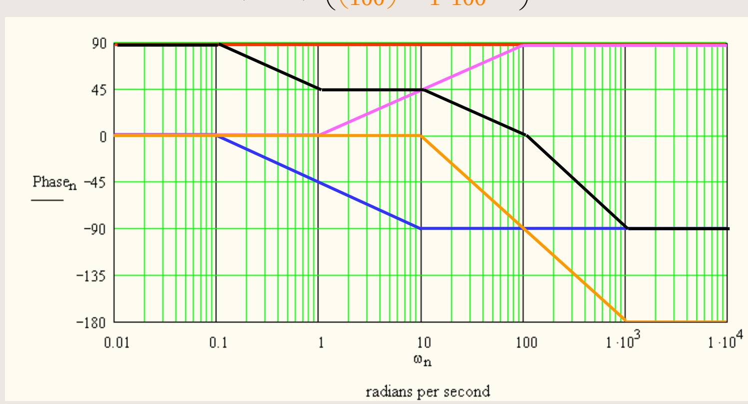
The final Magnitude plot plot is:



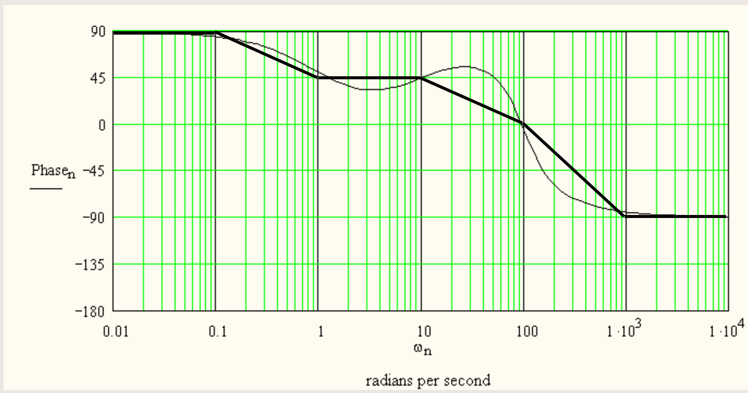

# ejemplo (Cont.)

6) Create the Phase plot of:

$$G(s)=\left(\frac{s}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{s}{1}+1}\right)\cdot\left(\frac{\frac{s}{10}+1}{1}\right)\cdot\left[\frac{1}{\left(\frac{s}{100}\right)^2+\frac{1}{1}\cdot\frac{s}{100}+1}\right]\cdot(10)$$



Comparando con la curva REAL



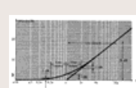

## Curvas reales

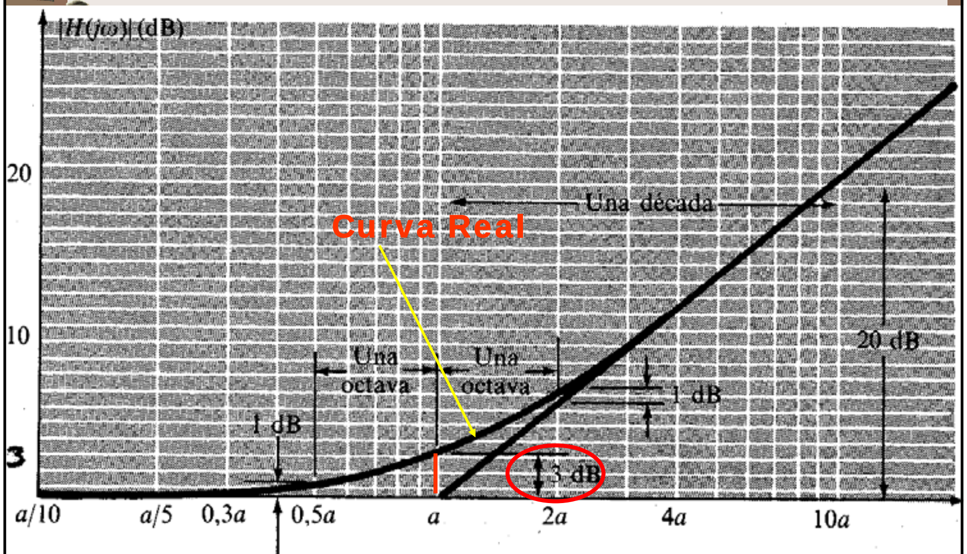
Las curvas reales no siguen las asíntotas con la brusca variación en la frecuencia de corte $\omega$ **= a.**

$$20\log\left|1+\frac{jw}{a}\right|_{w=a} = 20\log|1+j| = 20\log\sqrt{2}$$

$$=10\log 2 = 3dB$$

Se debe entonces realizar una correción de la curva en la frecuencia de corte $\omega$ **= a.** de **+3dB**






## Curvas reales

Igualmente para una octava por debajo del vértice $\omega$ **= a/2.**

$$20\log\left|1+\frac{jw}{a}\right|_{w=a/2} = 20\log\left|1+j0.5\right| = 20\log 1.118$$

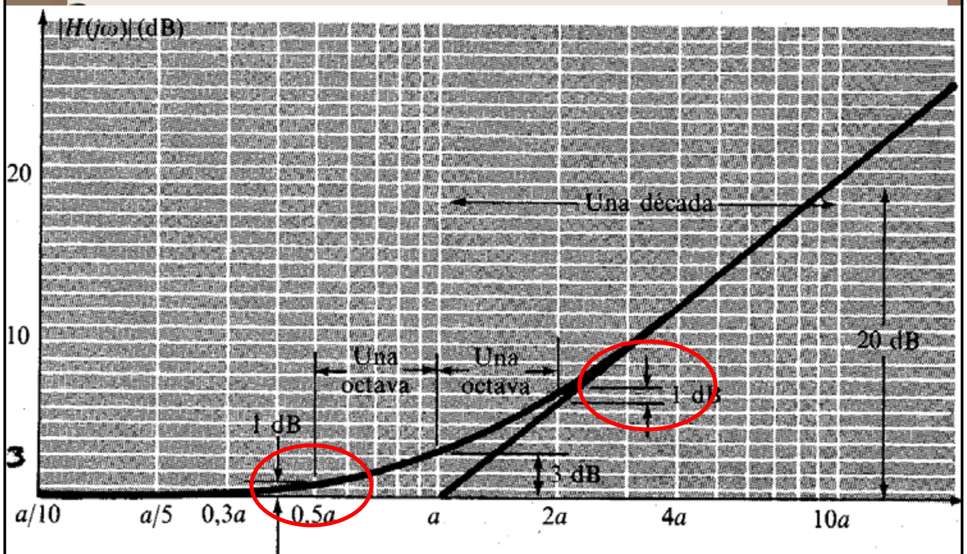
$$= +1dB$$

Para una octava por encima del vértice $\omega$ **= 2a.**

$$20\log\left|1+\frac{jw}{a}\right|_{w=2a} = 20\log\left|1+j2\right| = 20\log 2.236$$

$$= +7dB$$

Pero la curva asintótica ya alcanzó el valor de +6dB en este punto(20dB/dec = 6dB/octava), por lo que solo se hace un corrección de +-1dB en estas frecuencias.




**Cómo usar MATLAB para construir el diagrama de Bode:**

El primer paso consiste en escribir *G(s)* en la forma *N(s)/D(s)*, donde *N(s)* y *D(s)* son polinomios en *s*. Después, en la línea de comandos de MATLAB teclea los comandos:

```
num=[Nm Nm-1 ... N0];
den=[Dn Dn-1 ... D0];
bode(num,den); grid
```

Donde $N_i$ es el coeficiente de grado *i* del numerador, y $D_i$ es el coeficiente de grado *i* del denominador, *m* es el grado del numerador, y *n* es el grado del denominador.

Ejemplo: Si $G(s)=(s+2)/(s^2+3s+5)$ entonces:

```
num=[1 2];
den=[1 3 5];
bode(num,den); grid
```