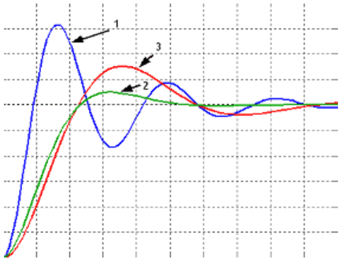
Análisis de Sistemas Lineales

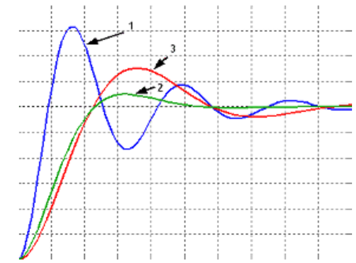
Introducción: Modelado y respuesta dinámica de sistemas

¿Qué es un sistema lineal?



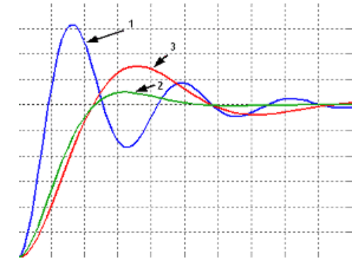
- La respuesta será construida con las respuestas de los estudiantes

Contenido



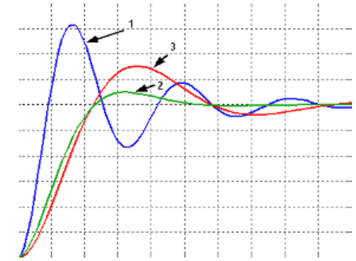
- Introducción
- Sistemas de giro-translación
- Sistemas electromecánicos
- Sistemas hidráulico-mecánicos
- Respuestas dinámicas de sistemas
- Sistemas de primer y segundo orden

Introducción



- En muchos sistemas característicos en ingeniería intervienen elementos de más de una disciplina (mecánicos, eléctricos, de fluidos y térmicos)
- Se supone, a pesar de que el comportamiento de muchos de ellos no es lineal, una relación lineal de los elementos al combinarlos; usando una aproximación.

Linealidad

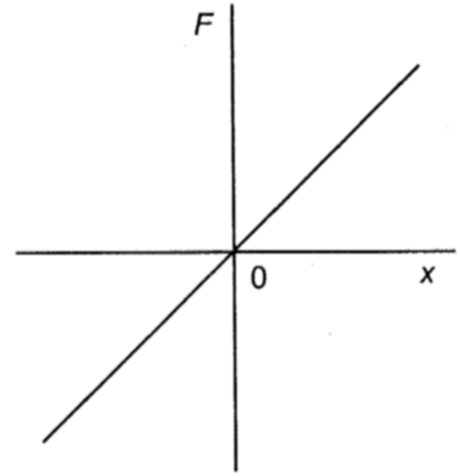


a) Resorte ideal

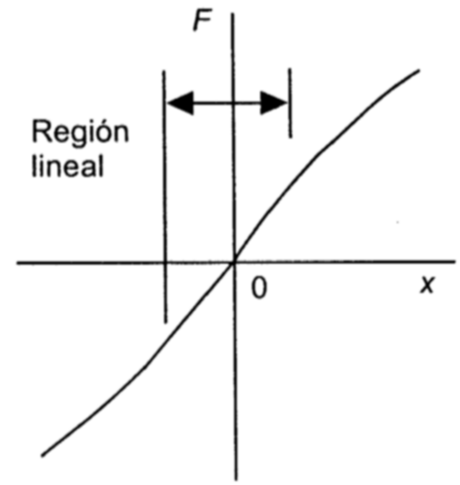
- La relación de la fuerza con el desplazamiento es lineal en un resorte ideal

a) Resorte real

- Solamente una región alrededor del origen es lineal

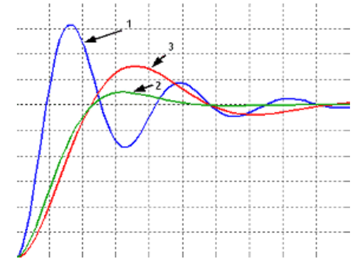


a)



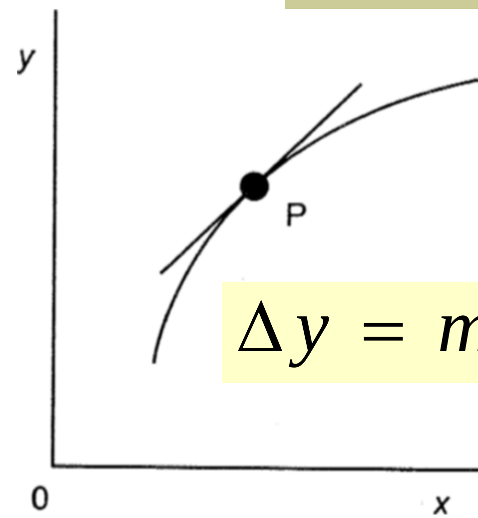
b)

Linealidad 2

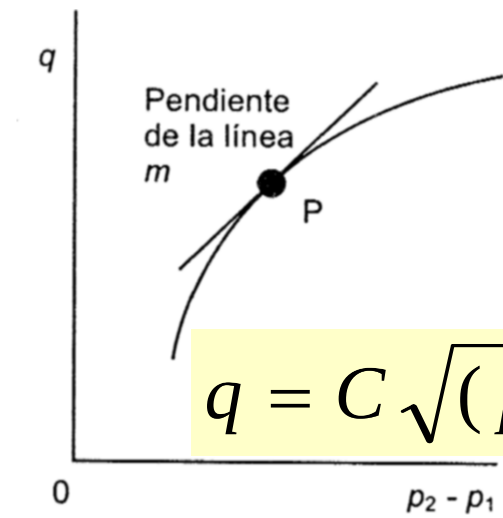


- En muchos casos de sistemas no lineales hay que linealizar alrededor del punto de operación con una recta de pendiente m; y para pequeñas variaciones de las señales de entrada y salida
- Flujo por un orificio donde el área es constante

$$\Delta q = m\Delta(p_1 - p_2)$$

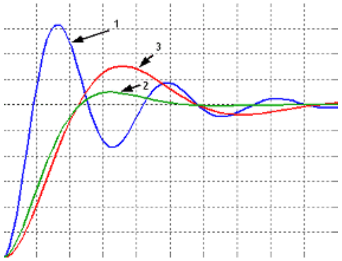


$$\Delta y = m\,\Delta x$$



$$q = C\sqrt{(p_1 - p_2)}$$

Linealidad 3

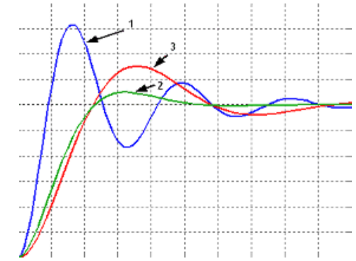


- En una válvula de control, el área no es constante

$$q = C \cdot A\sqrt{(p_1 - p_2)}$$

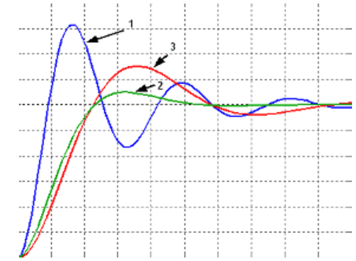
- Ecuación linealizada para el flujo por un orificio donde ambas variables pueden cambiar

$$\Delta q = m_1 \Delta A + m_2 \Delta (p_1 - p_2)$$



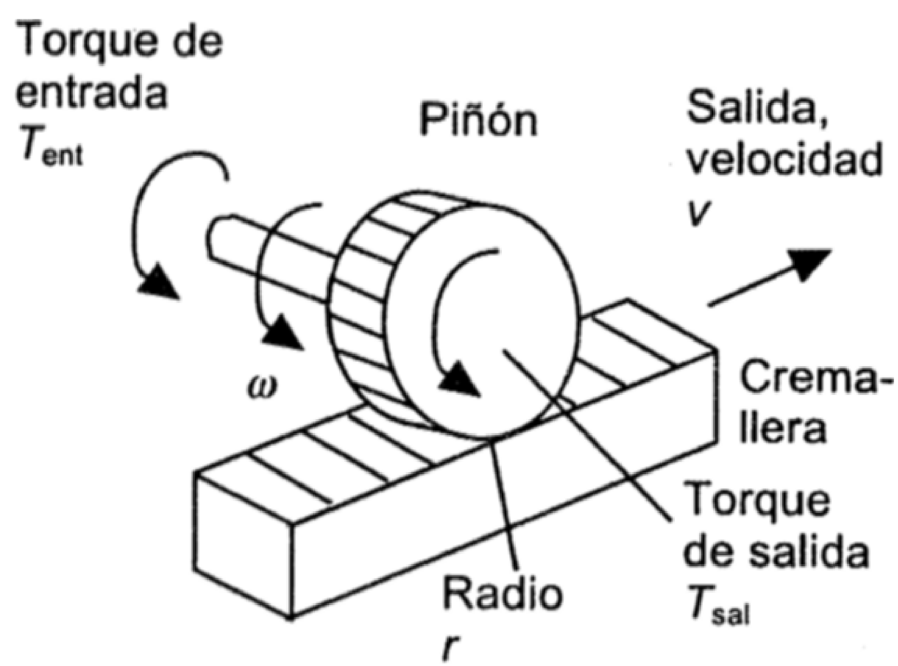
Sistemas de giro-translación

Piñón y cremallera

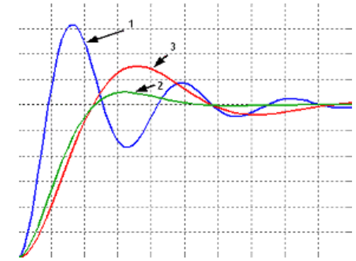


- Mecanismo para convertir movimiento rotacional en uno translacional

- Resultado: ecuación diferencial de primer orden que relaciona la entrada con la salida

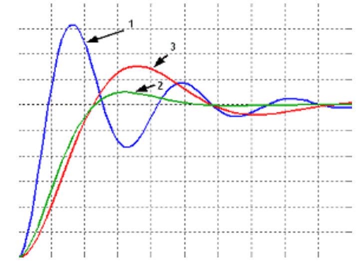


$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{r}{J + m \cdot r^2} \right) (T_{ent} - r \cdot c_f \cdot v)$$



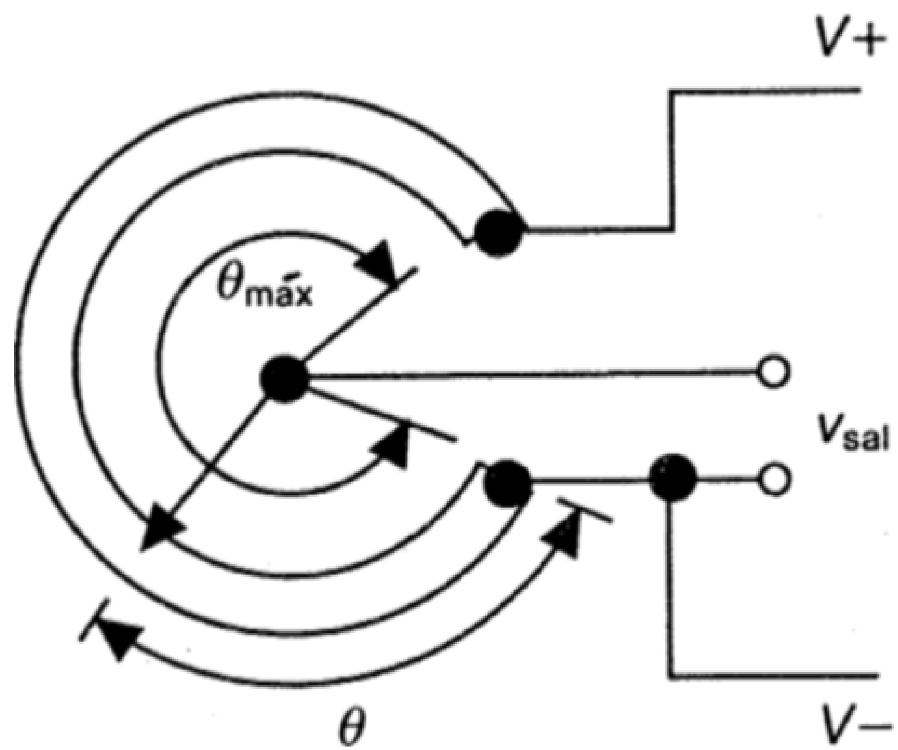
Sistemas electromecánicos

Potenciómetro



- El potenciómetro rotacional es un divisor de tensión

$$U_{sal} = U\,\frac{\theta}{\theta_{máx.}}$$



- Donde U es la tensión total aplicada

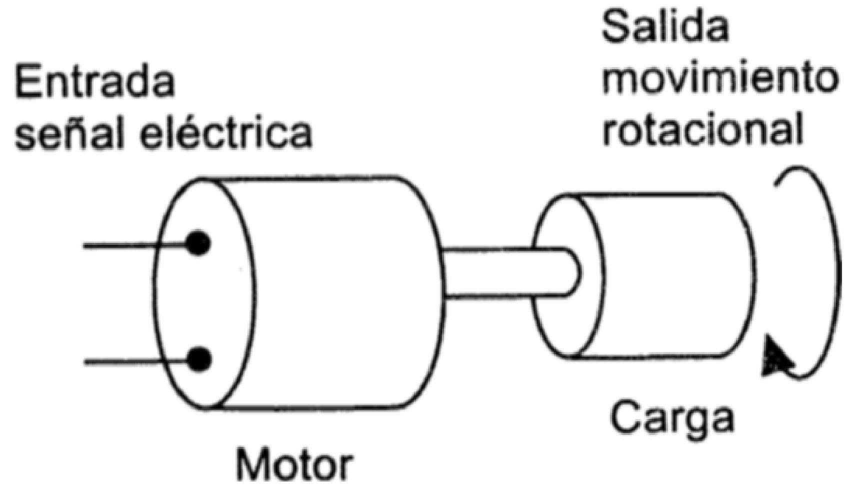
Motor de CD

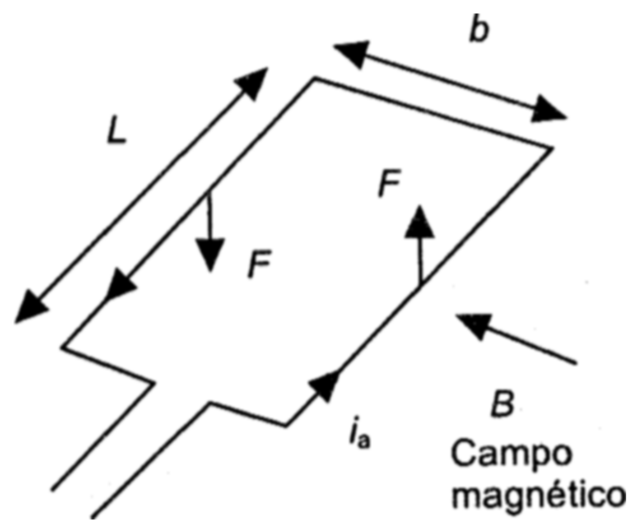
- Un motor CD puede ser controlado por la armadura o por el campo

$$T = N \cdot B i_a L \cdot b$$

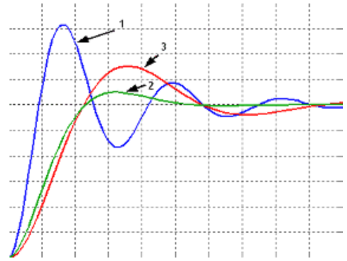
$$T = k_1 \cdot B i_a$$

$$u_{ind.} = k_2 \cdot B\omega$$

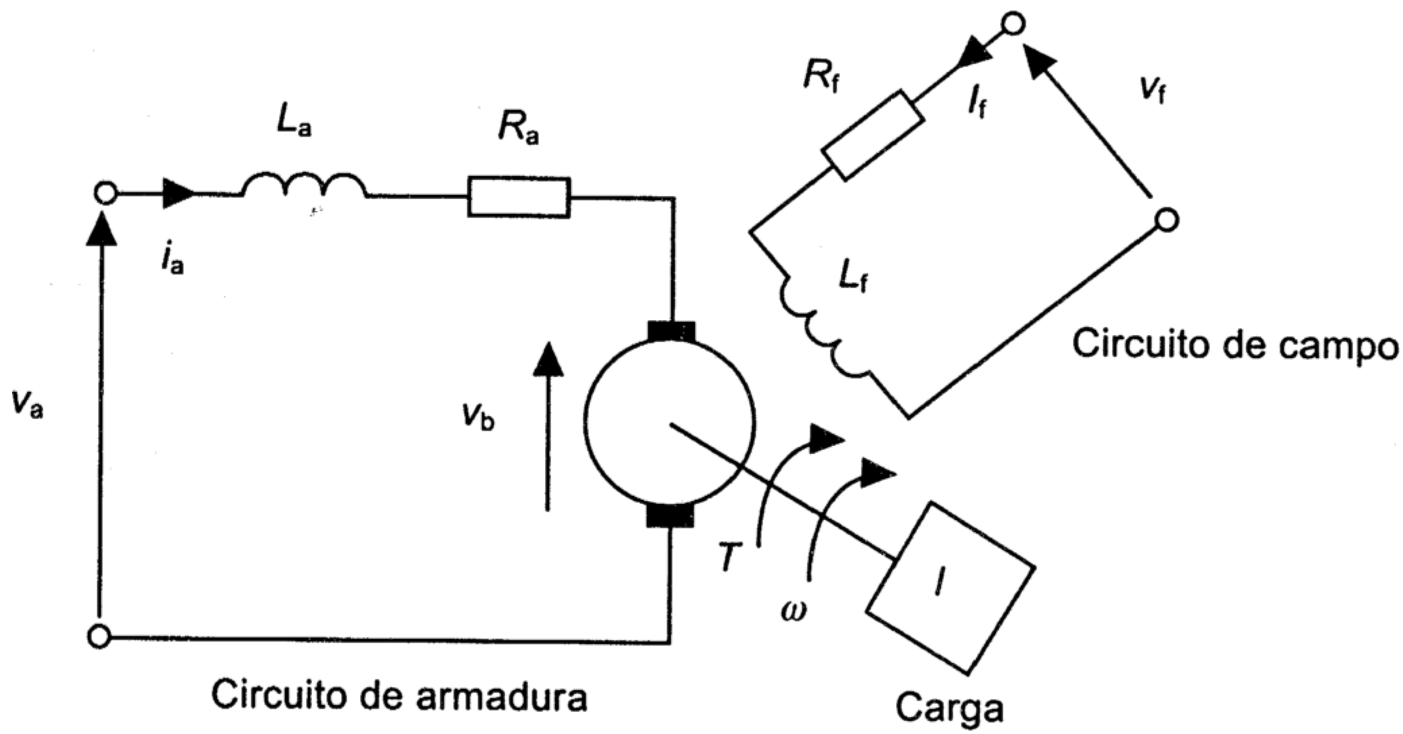




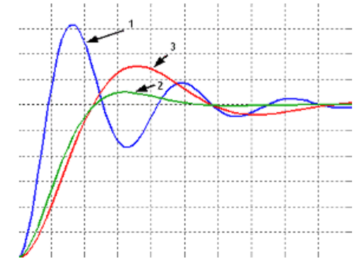
Circuitos de un motor de CD



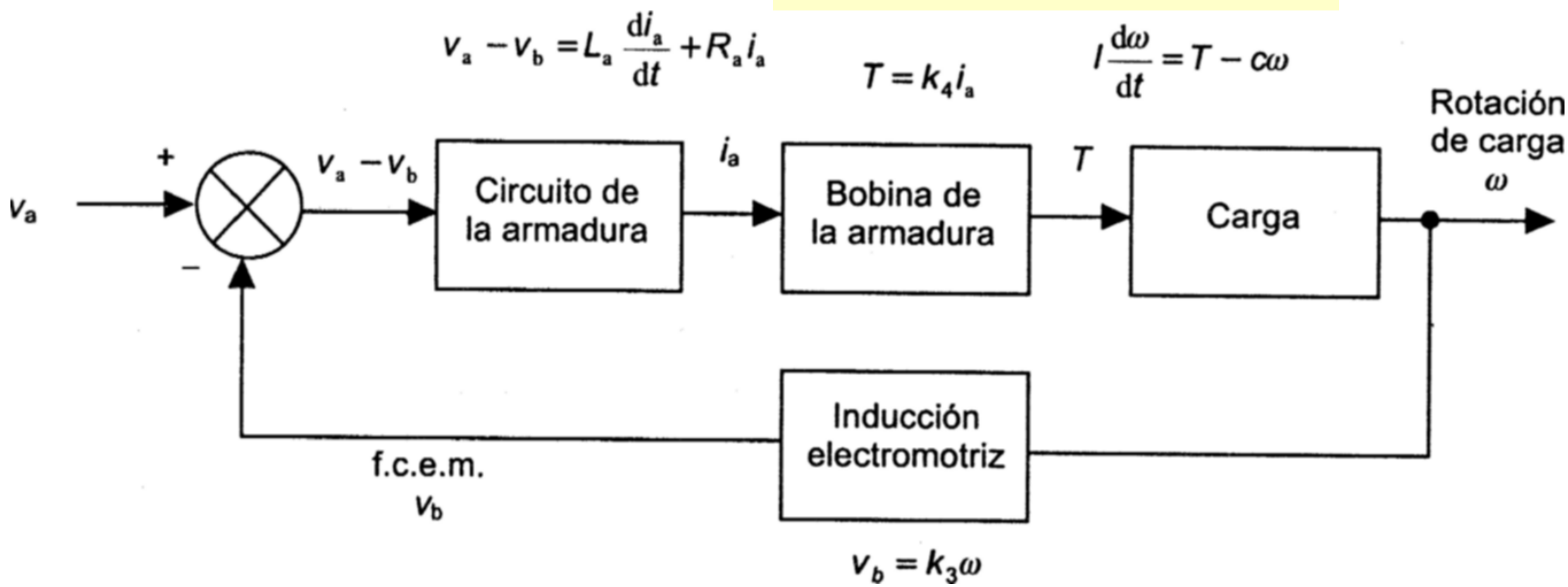
- En un motor controlado por armadura, la corriente de campo i_f se mantiene constante y el motor se controla variando la tensión de armadura u_a
- En un motor controlado por campo, se mantiene constante la tensión de armadura



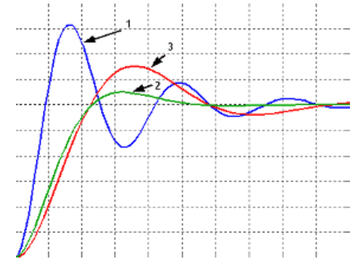
Motor de CD controlado por armadura



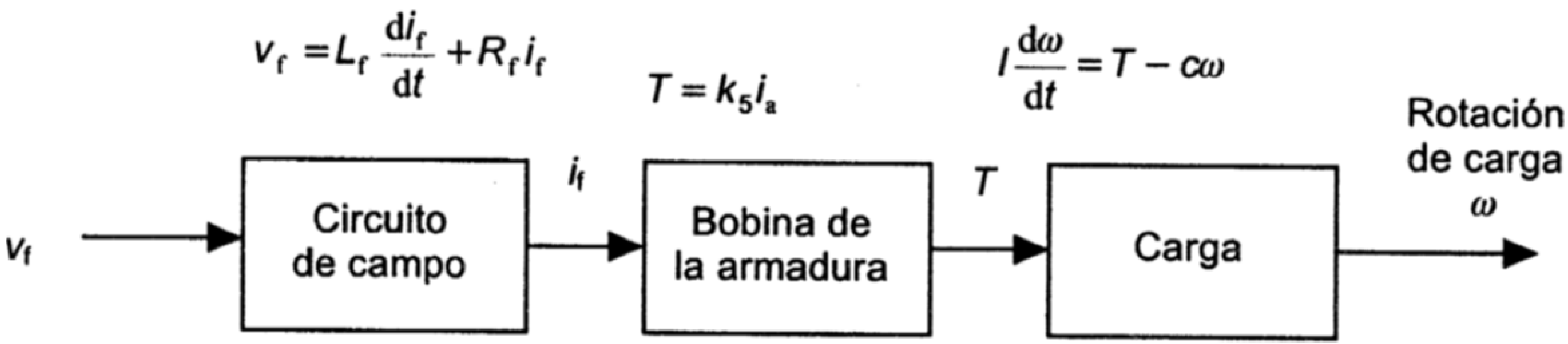
- Ya que el campo es constante $$u_{ind.} = k_3 \cdot \omega$$
- El circuito de armadura $$u_a - k_3\omega = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a$$
- El torque neto $$J\frac{d\omega}{dt} = k_1 B \cdot i_a - c_f \omega$$

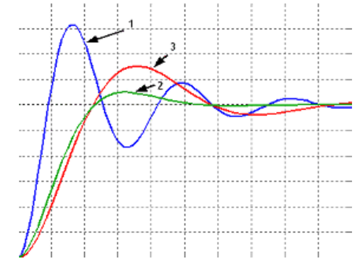


Motor de CD controlado por campo



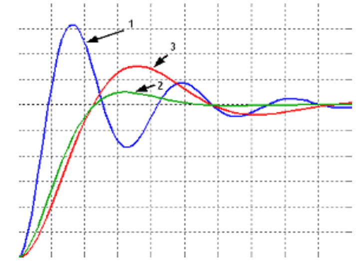
- El circuito de campo $$u_f = L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f$$
- El torque $T = k_1 B \cdot i_a = k_5 i_f$
- El torque neto $$J\frac{d\omega}{dt} = k_5 \cdot i_f - c_f \omega$$





Sistemas hidráulico-mecánicos

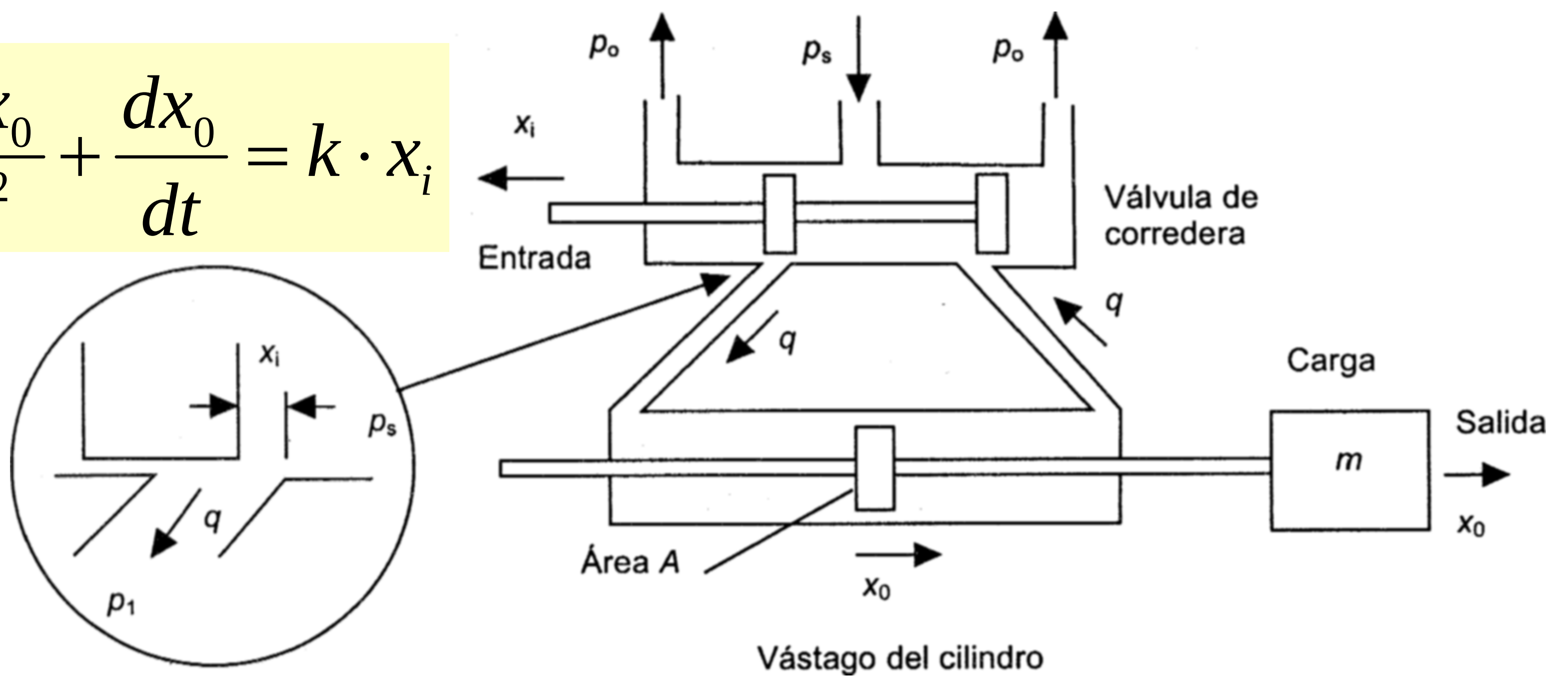
Sistema hidráulico y carga

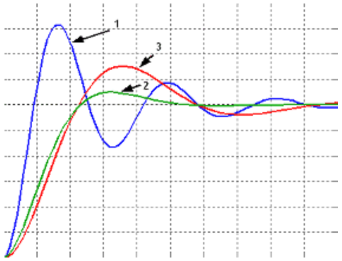


- Se muestra un sistema hidráulico en el que la entrada de desplazamiento x_i se transforma en la salida de desplazamiento x_o, de una carga

$$\frac{(m_3+m_4)m}{A^2+c(m_3+m_4)}\frac{d^2x_0}{dt^2}+\frac{dx_0}{dt}=\frac{Am_1}{A^2+c(m_3+m_4)}x_i$$

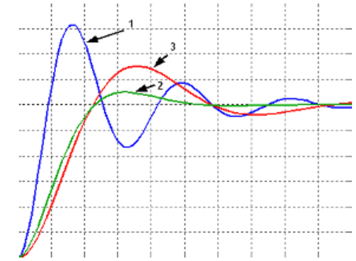
$$\tau\frac{d^2x_0}{dt^2}+\frac{dx_0}{dt}=k\cdot x_i$$





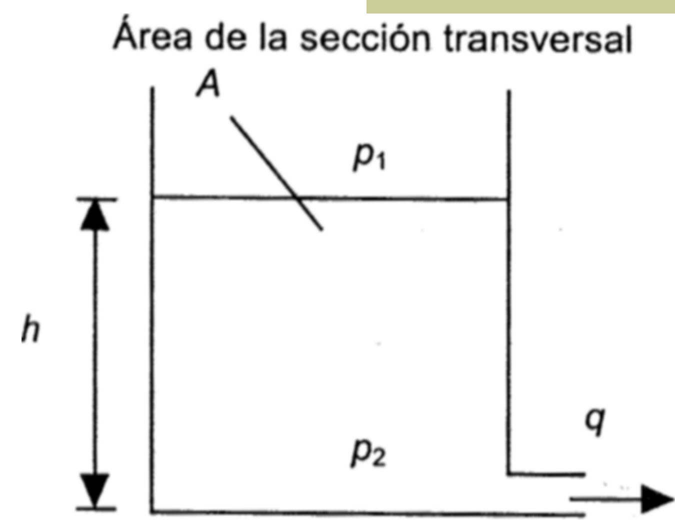
Respuestas dinámicas de sistemas

Respuesta natural y forzada



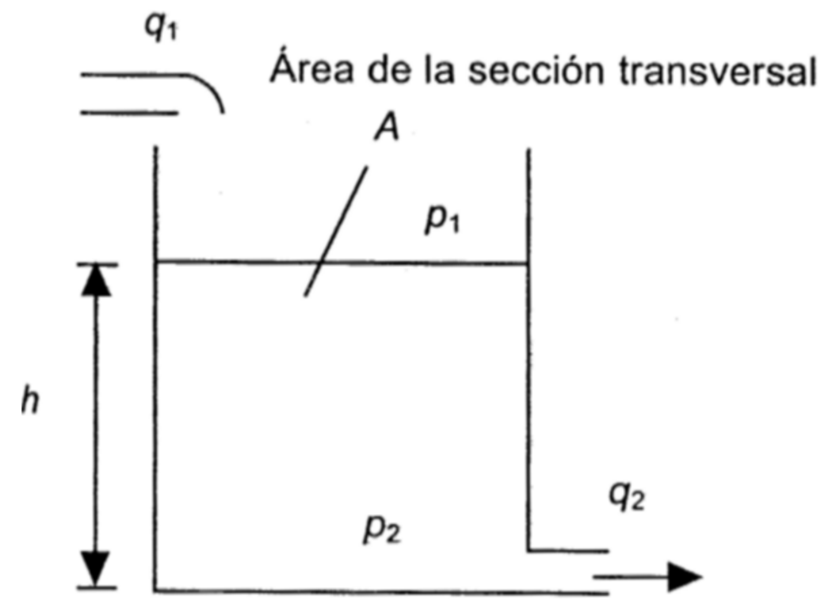
- Respuesta natural: sin entrada

$$R \cdot A \frac{dh}{dt} + \rho g \cdot h = 0$$

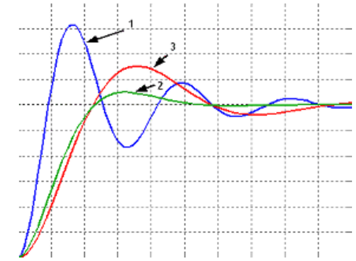


- Respuesta forzada, con la entrada.

$$R \cdot A \frac{dh}{dt} + \rho g \cdot h = q_1$$

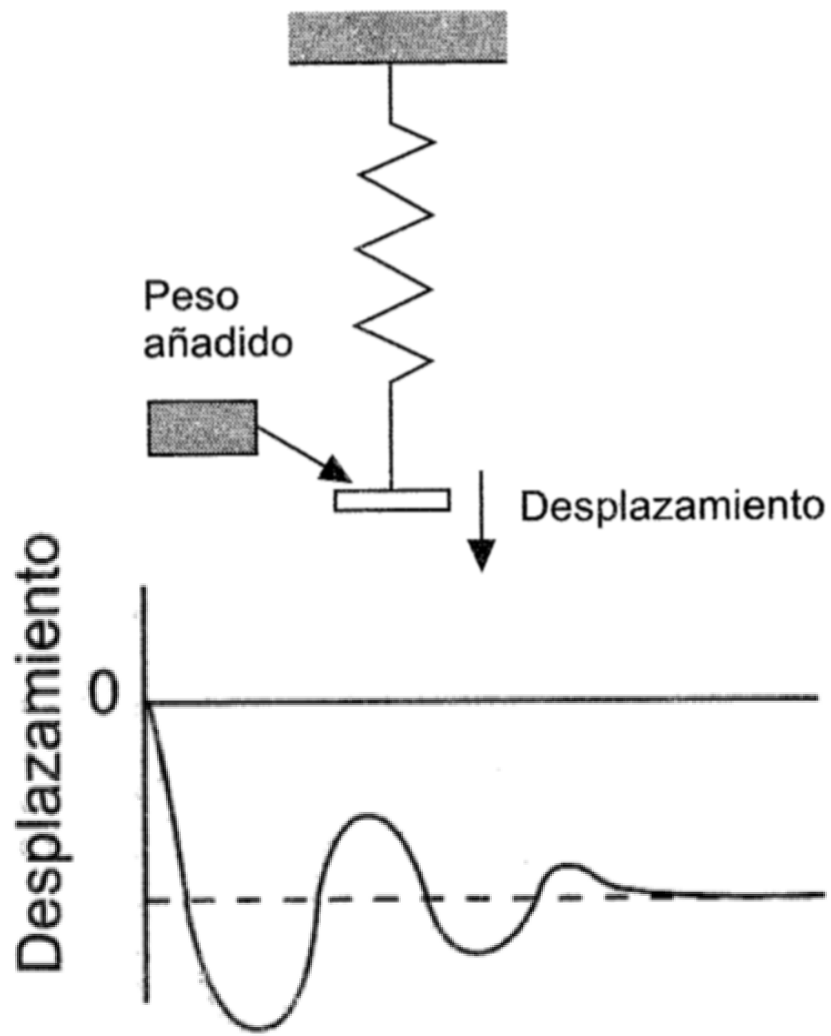


Respuestas transitoria y de estado estacionario

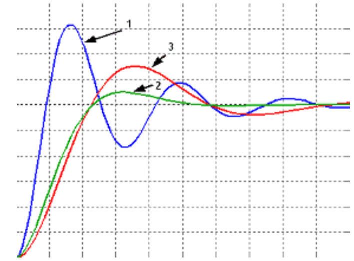


- Respuesta transitoria es la parte de la respuesta que se produce cuando hay un cambio y desaparece después de un tiempo

- Respuesta de estado estacionario es la que permanece después de que han desaparecido todas las respuestas transitorias



Sistemas de primer orden



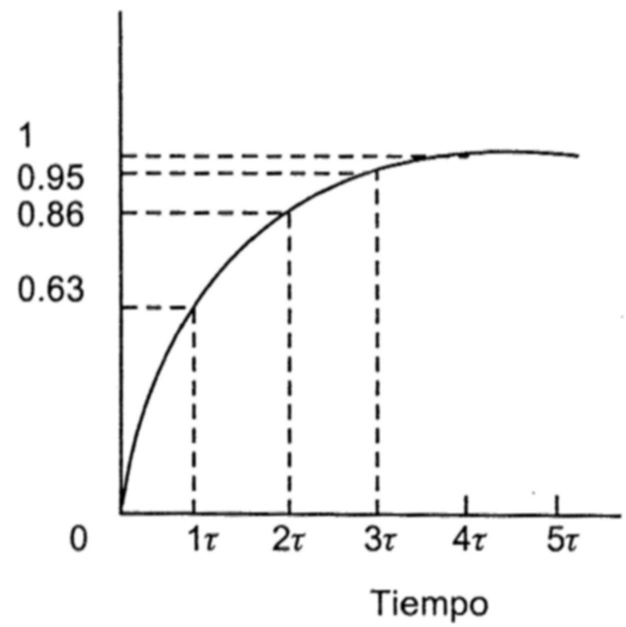
$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = b_0 \cdot y$$

- La respuesta total tiene una parte natural y otra forzada. Con una entrada constante

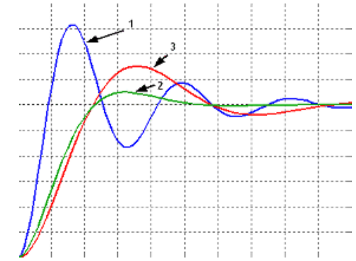
$$x = Ae^{-\frac{a_0}{a_1}t} + \frac{b_0}{a_0}k$$

- Si x = 0 para t = 0

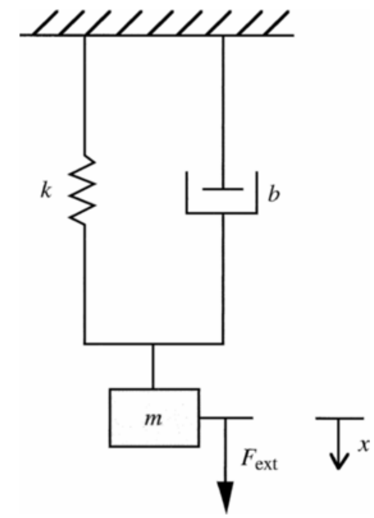
$$x = \frac{b_0}{a_0}k(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t})$$



Sistemas de segundo orden

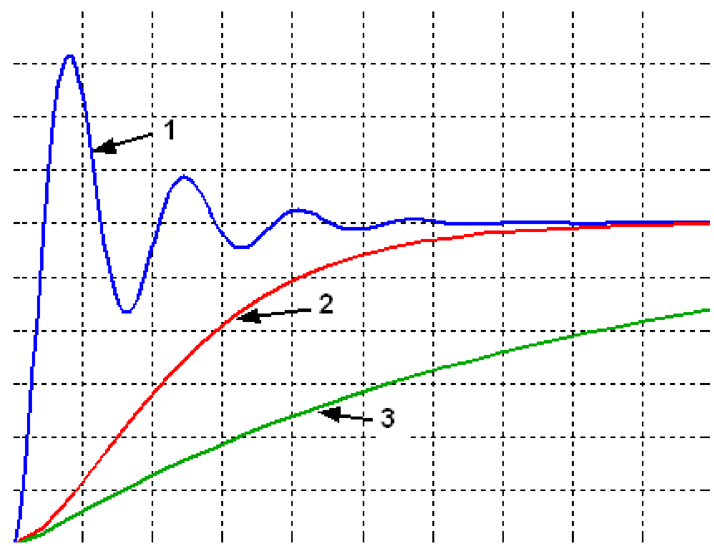


$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+k\cdot x=F$$



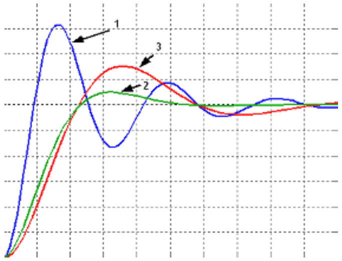
Dependiendo del valor de las raíces, el sistema puede tener tres tipos de comportamiento:

$$s=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

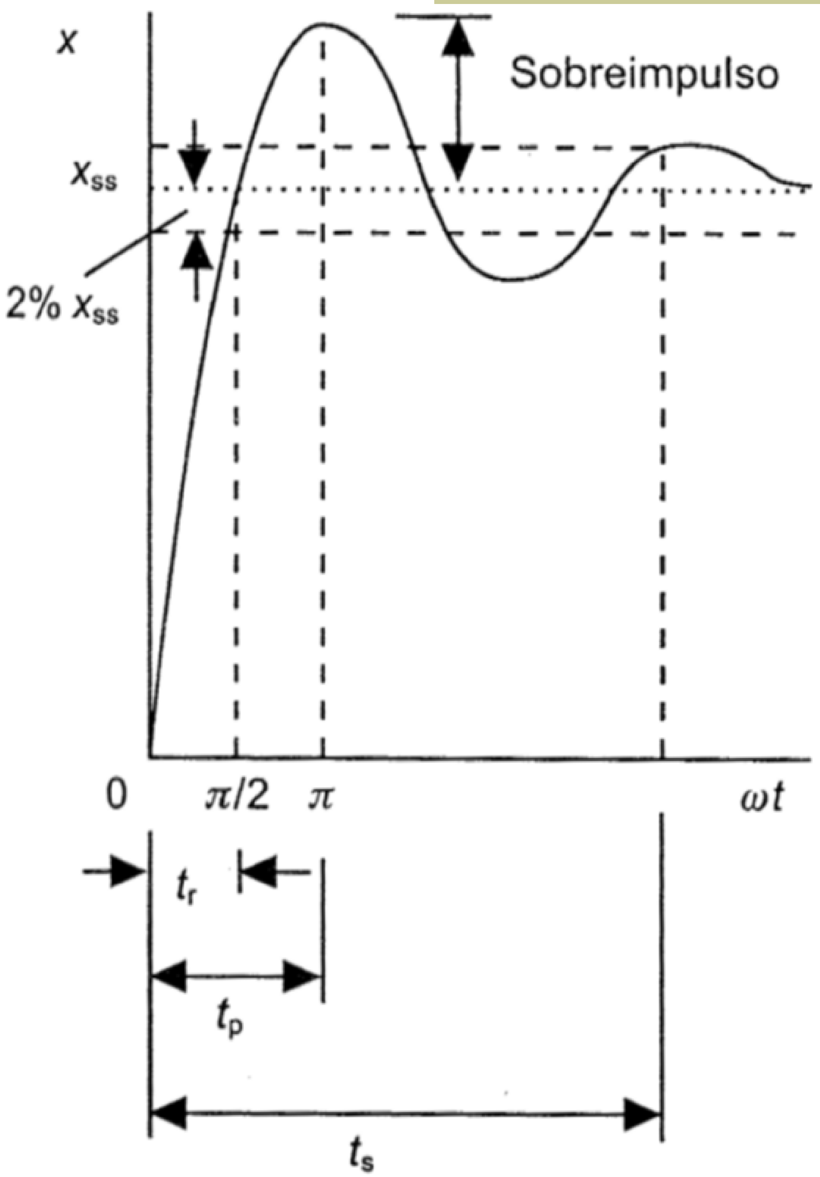


1. Subamortiguado (ζ<1)
2. Críticamente amortiguado (ζ=1)
3. Sobreamortiguado (ζ>1)

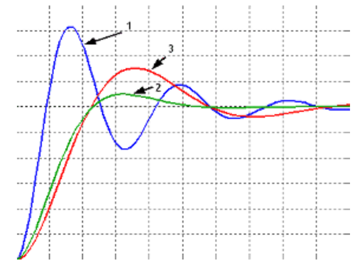
Comportamiento de los sistemas de segundo orden



- t_r : Tiempo de subida
- t_p : Tiempo del máximo
- t_s : Tiempo de asentamiento del 2% o 5%
- M_p : Sobreimpulso



Comportamiento de los sistemas de segundo orden



- t_r : Tiempo de subida

$$t_r = \frac{1}{2\pi\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- t_p : Tiempo del máximo

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

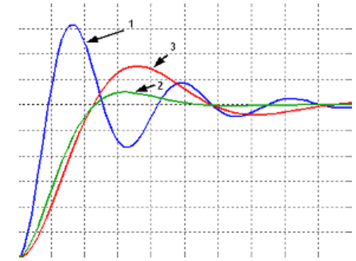
- t_s : Tiempo de asentamiento del 2% o 5%

$$t_{s2\%} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad t_{s5\%} = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

- M_p : Sobreimpulso

$$M_P = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Referencias



- Bolton, William. **Mecatrónica: Sistemas de Control Electrónico en Ingeniería Mecánica y Eléctrica.** 2ª Ed., Alfaomega, México, 2001.

- Alciatore G., David; Histand B., Michael. **Introduction to mechatronics and measurement systems**. 2ª Ed., McGraw Hill, USA, 2003.