

ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES

1. Modelado de sistemas

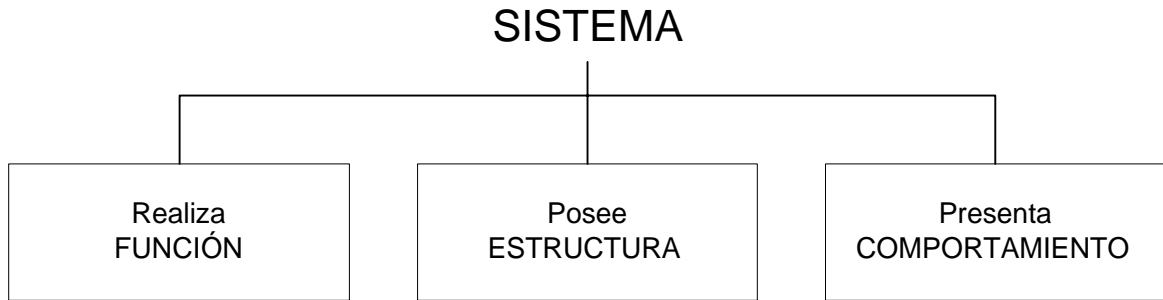


Figura 1.1: Definición de Sistema

Sistema: Un sistema realiza una función, posee una estructura y presenta un comportamiento.

Sistema de control de lazo abierto

Es aquel en el cual ni las variables del sistema ni la salida influyen en el control de ésta.

El éxito del control de lazo abierto depende de:

- Exactitud del modelo del sistema
- Repetibilidad de los eventos relacionados durante un largo período. (Ausencia de perturbaciones externas).

Sistema de control de lazo cerrado

Es aquel en el cual las variables del sistema o la salida influyen en el control de ésta, típicamente por medio del uso de realimentación.

Realimentación

Una muestra de la señal de salida es tomada y redirigida hacia la entrada para fines de comparación.

Planta

Equipo físico que se relaciona con la magnitud que se controla. Se representan como sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI).

Controlador

Elemento que se añade para llevar a cabo el control.

Estabilidad

Propiedad de un sistema que ante una entrada finita reacciona con una salida finita.

Servocontrol

Sistema en el cual la salida es la posición o alguna de sus derivadas.

Sistema dinámico

Unidad funcional cuyos principales descriptores varían en el tiempo y por lo tanto pueden ser descritos como funciones del tiempo.

Modelado

El modelado es una abstracción: la dinámica será abstraída del carácter físico.

Objetivo de la abstracción

- Describir los procesos temporales por medio de funciones del tiempo (señales).
- Resumir las relaciones entre esos procesos como dependencias funcionales entre las funciones del tiempo.

No importa que representen las variables temporales, sino cuáles variables del fenómeno reproducen el comportamiento dinámico del sistema en cuestión.

Modelado:

Comportamiento → **Función**

Simulación:

Función → **Comportamiento**

Identificación:

Comportamiento → **Estructura**

Tabla 1: Relaciones entre los componentes de un sistema

Pasos del Modelado

- 1) Descripción concreta del problema (y la planta).
- 2) Selección de las variables que son importantes para la descripción del comportamiento dinámico
- 3) Definición de la exactitud del modelo (linealizaciones, aproximaciones)
- 4) Identificación de entradas y salidas (aún de perturbaciones)
- 5) Creación de una descripción de la estructura
 - Identificar los componentes importantes y sus relaciones
 - Partir el sistema en sus elementos, (y luego tratamiento parcial). Las relaciones cuantitativas no interesan aún
 - Será evidente cuáles variables pueden ser influenciadas externamente, cuales son internas y cuáles pueden ser medidas externamente.
- 6) Obtención de las relaciones funcionales para cada elemento o componente.
 - Analíticamente (a partir de leyes físicas)
 - Empíricamente (experimentalmente)

resultado : modelo cuantitativo

7) Prueba del modelo

- Análisis (Estabilidad, error de estado estacionario, respuesta de frecuencia)
- Simulación (comparación de los resultados de la simulación con medidas del proceso)
- Síntesis del controlador (diseño)

Estructura del sistema

Importancia

- Contribuye a la comprensión del comportamiento del sistema
- muestra la relación entre las partes
- proporciona una visión global de las propiedades dinámicas del sistema.
- muestra donde el sistema se encuentra realimentado, los puntos donde está fuerte o débilmente acoplado y eventualmente puede partirse.

Representaciones gráficas de la estructura del sistema

- **Por medio de diagramas bloques:**

La estructura del sistema se describe a través de un conjunto de elementos de transferencia (transmitancias) y las relaciones entre éstos.

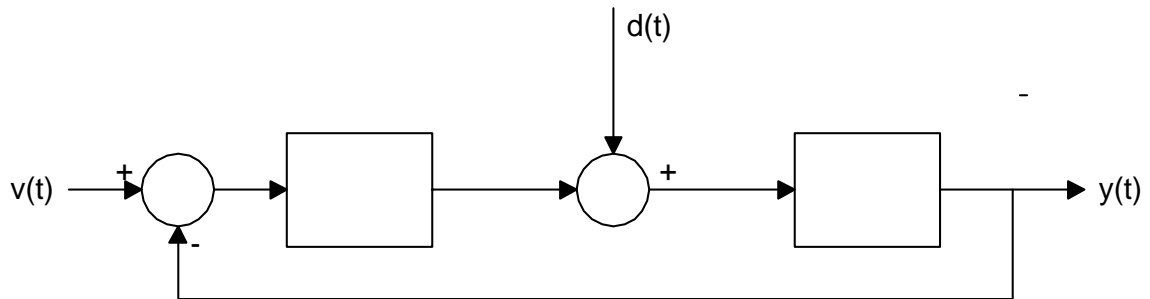


Figura 1.2: Sistema de control realimentado

Elementos del diagrama de bloques

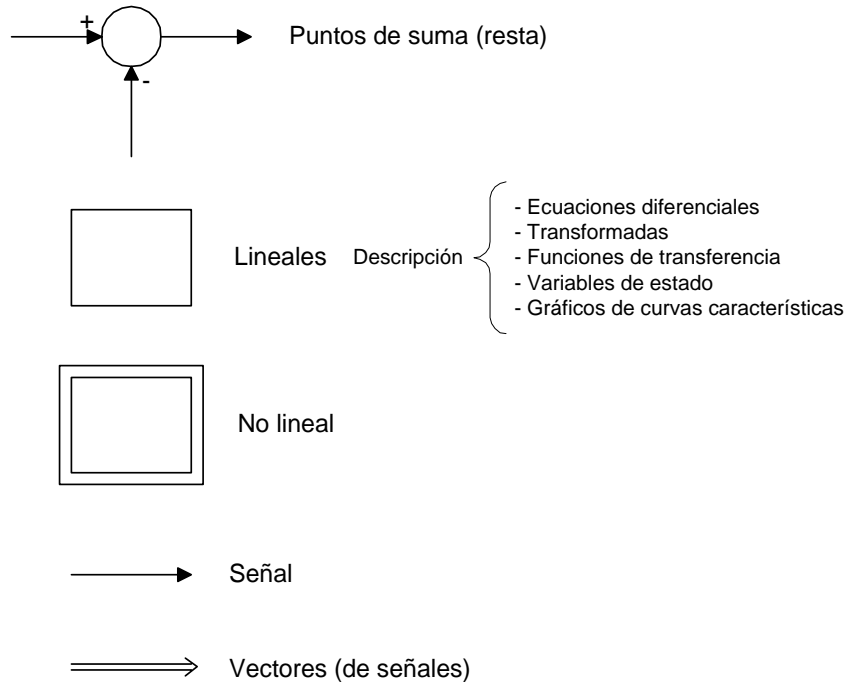


Figura 1.3: Elementos del diagrama de bloques

Diagramas de Flujo de Señales

La estructura del sistema se describe a través de un gráfico dirigido, donde los nodos representan las señales y las flechas representan propiedades de transferencia.

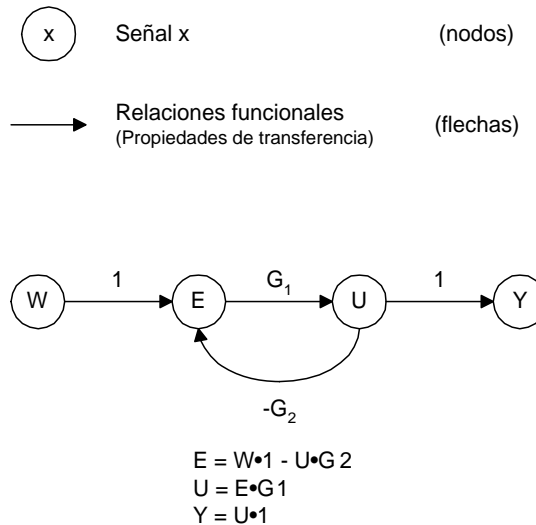


Figura 1.4: Elementos del diagrama de flujo de señales

Descripción de sistemas lineales en el tiempo

a) A través de ecuaciones diferenciales

Leyes físicas \rightarrow modelo matemático

Sistema eléctrico \Rightarrow Leyes de Kirchhoff

Sistema mecánico \Rightarrow Leyes de Newton

Leyes de conservación de la energía e impulso

Se trabajará con sistemas lineales, de parámetros concentrados e invariantes en el tiempo (LTI).

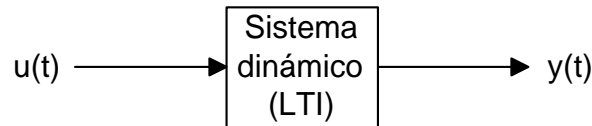


Figura 1.5: Sistema dinámico lineal invariante en el tiempo

Forma general de la ecuación diferencial (relación dinámica entre $y(t)$ y $u(t)$).

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u(t)}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u(t)}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (1)$$

Ecuación diferencial ordinaria de n -orden, donde a_i y b_i son reales y provienen de los parámetros físicos del sistema.

$$\text{Condiciones iniciales} \left\{ \frac{d^n y(0)}{dt^n}, \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}, \dots, y(0); q < n \text{ para causalidad} \right.$$

Dadas $u(t)$ para $t \geq 0$ y las condiciones iniciales es posible conocer $y(t)$

Función de Transferencia

Cálculo de la función de transferencia: aplicamos la Transformada de Laplace a la ecuación (1) y poniendo todas las condiciones iniciales en cero se tiene:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_{q-1} s^{q-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace que se aplican

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \mathcal{L} \{ \dot{f}(t) \} = sF(s) - f(t) \Big|_{t=0}; \quad F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\} = s^k F(s) - s^{k-1} f(t) \Big|_{t=0} - s^{k-2} \dot{f}(t) \Big|_{t=0} \dots - \frac{d^{k-1} f(t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s)$$

Función de transferencia en
forma de cociente de polinomios

Características de la función de transferencia:

- Tiene n polos y q ceros
- Es completa (los coeficientes de la ecuación diferencial están contenidos completamente)
- Depende únicamente de la planta (no de la entrada o de los valores iniciales, estos son cero)

Otras formas de representar G(s)

$$G(s) = \frac{C_q \cdot (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_q)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_n)}$$

Función de transferencia en forma de cociente
de producto de ceros entre producto de polos

$$G(s) = C_q \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{b_0}{a_0}$$

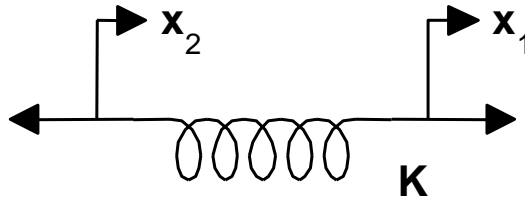
$q < n$ Función estrictamente propia (planta)

$q = n$ Función propia (controlador)

$q > n$ Función impropia (no existe)

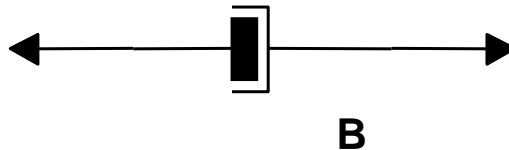
Modelos de Elementos Mecánicos

Elementos mecánicos de traslación (se suponen lineales)



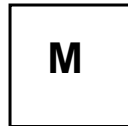
Resorte

$$F = K(x_1 - x_2)$$



Fricción viscosa

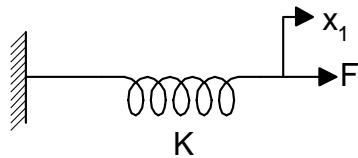
$$F = B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$



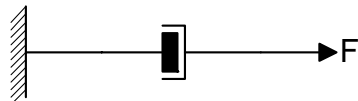
Masa

$$Ma = M\ddot{x}_1$$

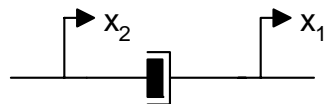
Figura 1.6: Elementos mecánicos de traslación



$$F = K x$$



$$F = B \frac{dx}{dt} = B v, v = \frac{dx}{dt}$$



$$F = B(v_1 - v_2) = B \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)$$

Figura 1.7: Modelos lineales de elementos mecánicos de traslación

Ley de Newton

$$\Sigma F = m \cdot a$$

Efecto de la gravedad: El efecto de la gravedad puede suprimirse de las ecuaciones si se hace un cambio del sistema de referencia.

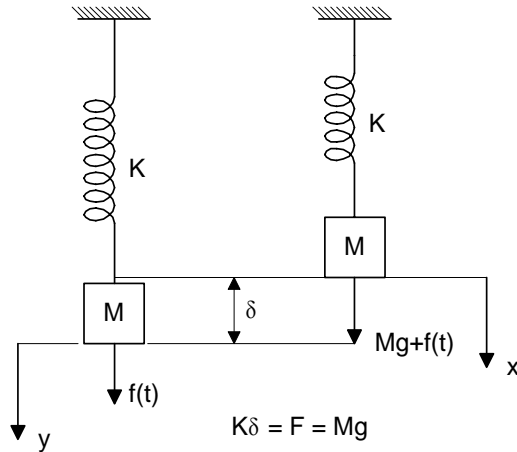


Figura 1.8: Efecto de la gravedad sobre un sistema mecánico

Ejemplo 1.1: Modelado de un sistema mecánico de translación

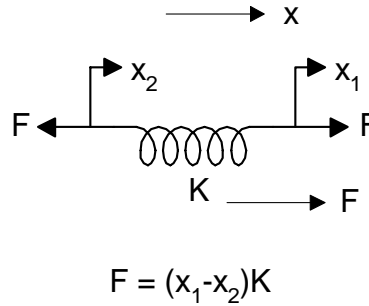
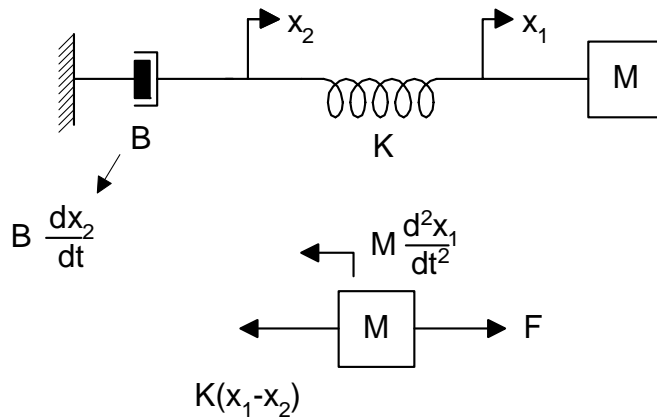


Figura 1.9: Diagrama de cuerpo libre del resorte



Punto P (x_1):

$$\sum F = Ma$$

Punto Q (x_2):

$$\sum F = 0$$

$$\Sigma F = F - M \frac{d^2x_1}{dt^2} - K(x_1-x_2) = 0$$

$$F - K(x_1-x_2) = M \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

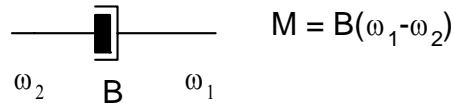
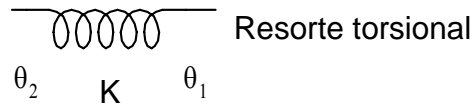
$$K(x_1 - x_2) = B\left(\frac{dx_2}{dt}\right)$$

Figura 1.10: Diagrama del sistema mecánico total y de cuerpo libre de la masa

Elementos mecánicos de rotación

$$\sum M = J \alpha$$

α → aceleración angular
 J → momento de inercia



Momento en el resorte torsional: $M = K(\theta_1 - \theta_2)$

Figura 1.11: Elementos mecánicos de rotación

Ejemplo 1.2: Modelado de un sistema mecánico de rotación

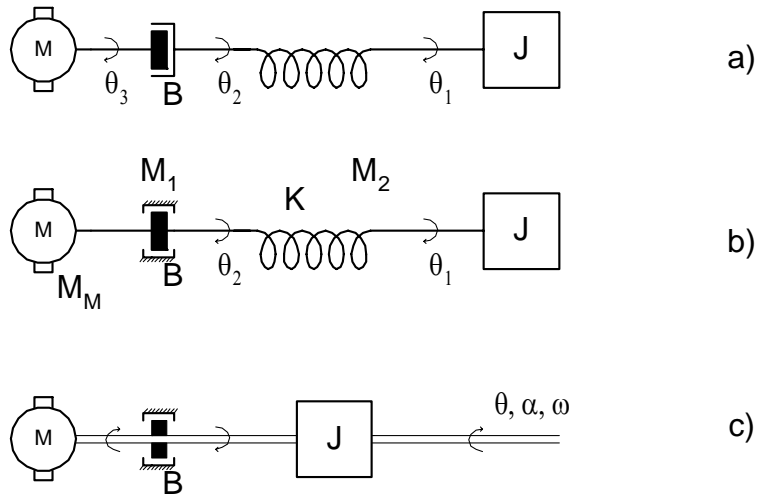


Figura 1.12: Diagrama del sistema mecánico de rotación

Ecuación de movimiento para la figura 1.12c

$$-J \frac{d^2\theta}{dt^2} - B \frac{d\theta}{dt} + M_M = 0 \quad \Rightarrow$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_M - B d\theta$$

Ejemplo 1.3: Modelado de un Motor CD controlado por armadura con excitación independiente (constante)

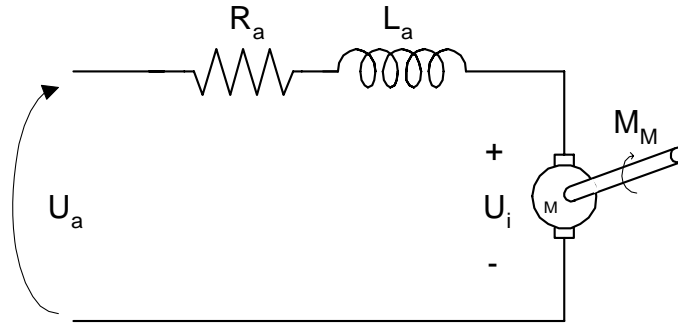


Figura 1.13: Motor CD controlado por armadura con excitación constante

Ecuaciones del motor:

$$\phi_e = K_1 i_e(t)$$

$$i_e(t) = cte \Rightarrow \phi_e = cte$$

$$M_M \propto i$$

$$M \quad = \quad C \, i_a \, \phi_e$$

$$U_i \quad \propto \quad \omega(n)$$

$$U_i \quad = \quad C \, \phi_e \, \frac{d\theta}{dt}$$

$$\sum U \quad = \quad 0$$

$$-U_a + R \, i_a + L_a \, \frac{di_a}{dt} + U_i \quad = \quad 0$$

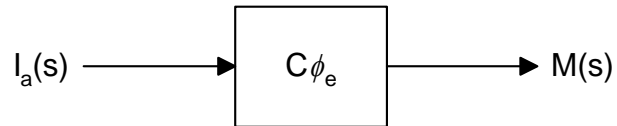
$$L_a \, \frac{di_a}{dt} + R \, i_a + C \, \phi_e \, \frac{d\theta}{dt} \quad = \quad U_a$$

$$L_a \, \frac{di_a}{dt} + R \, i_a \quad = \quad U_a - U_i$$

Usando Transformada de Laplace se tiene

$$m(t) = C i_a(t) \phi_e$$

$$M(s) = C \phi_e I_a(s)$$

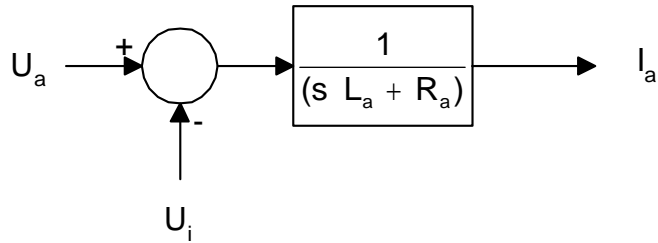


$$L_a \frac{di_a}{dt} + R i_a = U_a - U_i$$

$$s L I_a(s) + R I_a(s) = U_a(s) - U_i(s)$$

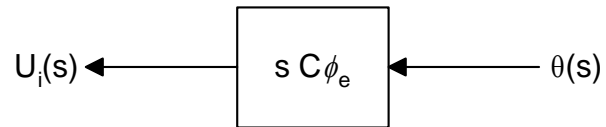
$$I_a(s)(s L_a + R_a) = (U_a - U_i)$$

$$I_a = \frac{U_a - U_i}{(s L_a + R_a)} = (U_a - U_i) \cdot \frac{1}{(s L_a + R_a)}$$



$$U_i = C \phi_e \frac{d\theta}{dt}$$

$$U_i = C \phi_e s \theta(s)$$



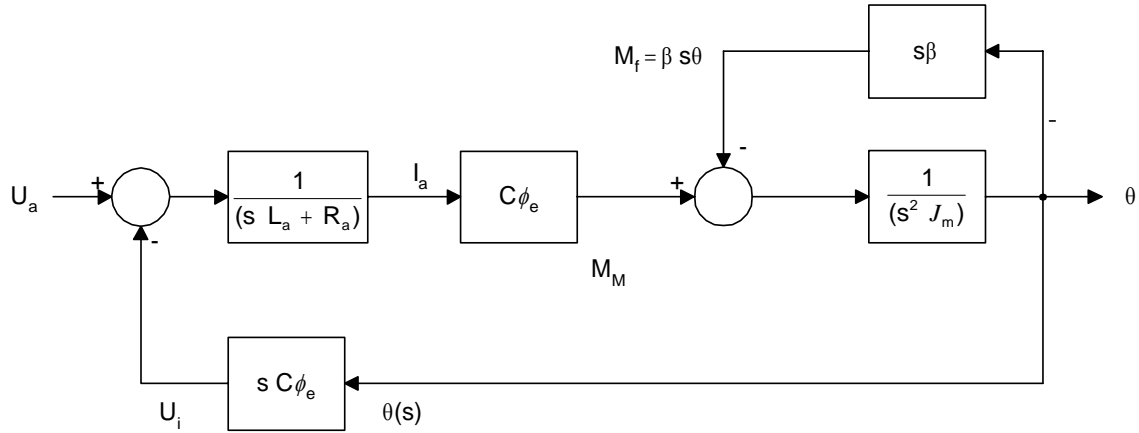


Figura 1.14: Diagrama de bloques para el motor CD controlado por armadura

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M_M - \beta \frac{d\theta}{dt}$$

$$J \cdot s^2 \theta(s) = M_M(s) - \beta \cdot s \theta$$

$$\theta(s) = (M_M(s) - M_f(s)) \cdot \frac{1}{s^2 J}$$