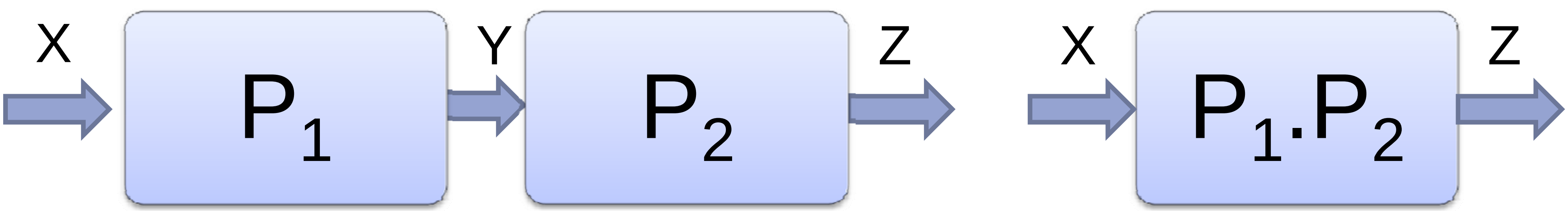
Análisis de Sistemas Lineales

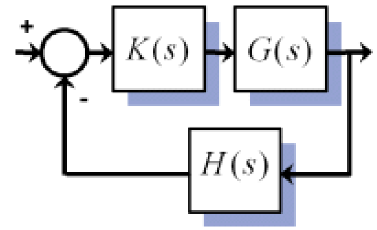
Álgebra de bloques

Teorema 1: Bloques en cascada

- Las funciones de transferencia contenidas en bloques que se encuentran en cascada se multiplican para reducirse a un solo bloque

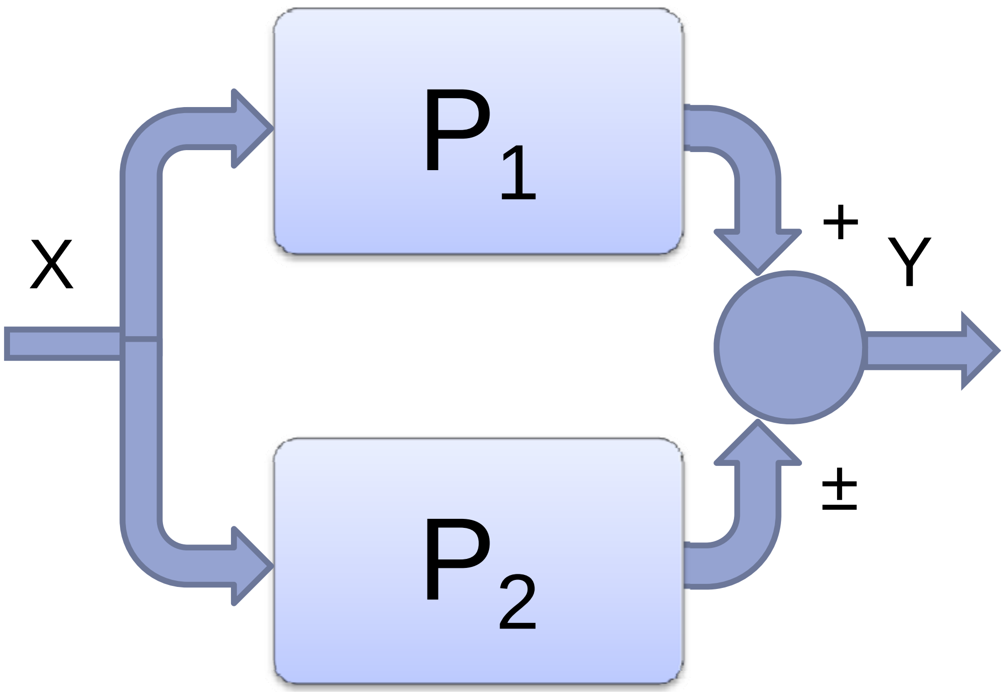
$Z = P_2 Y,$

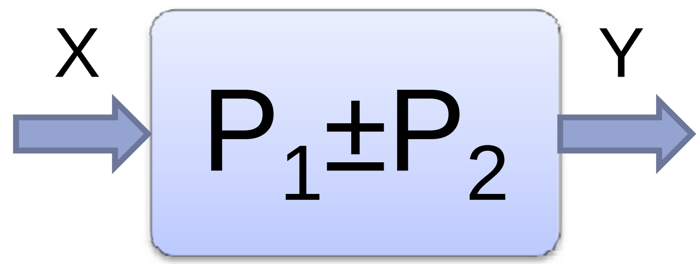




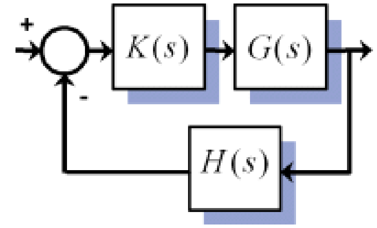
Teorema 2: Bloques en paralelo

$$Y = P_1X \pm P_2X = (P_1 \pm P_2)X$$

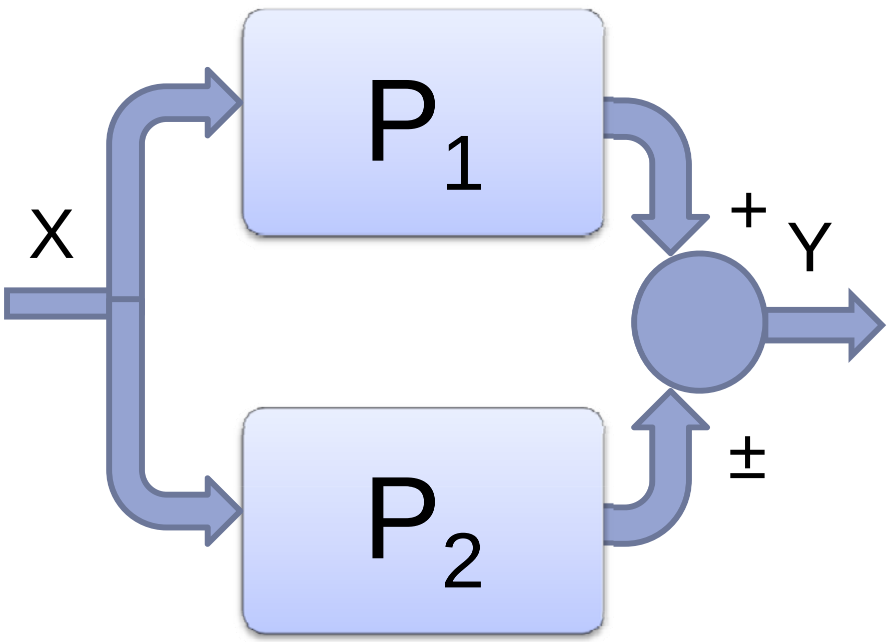




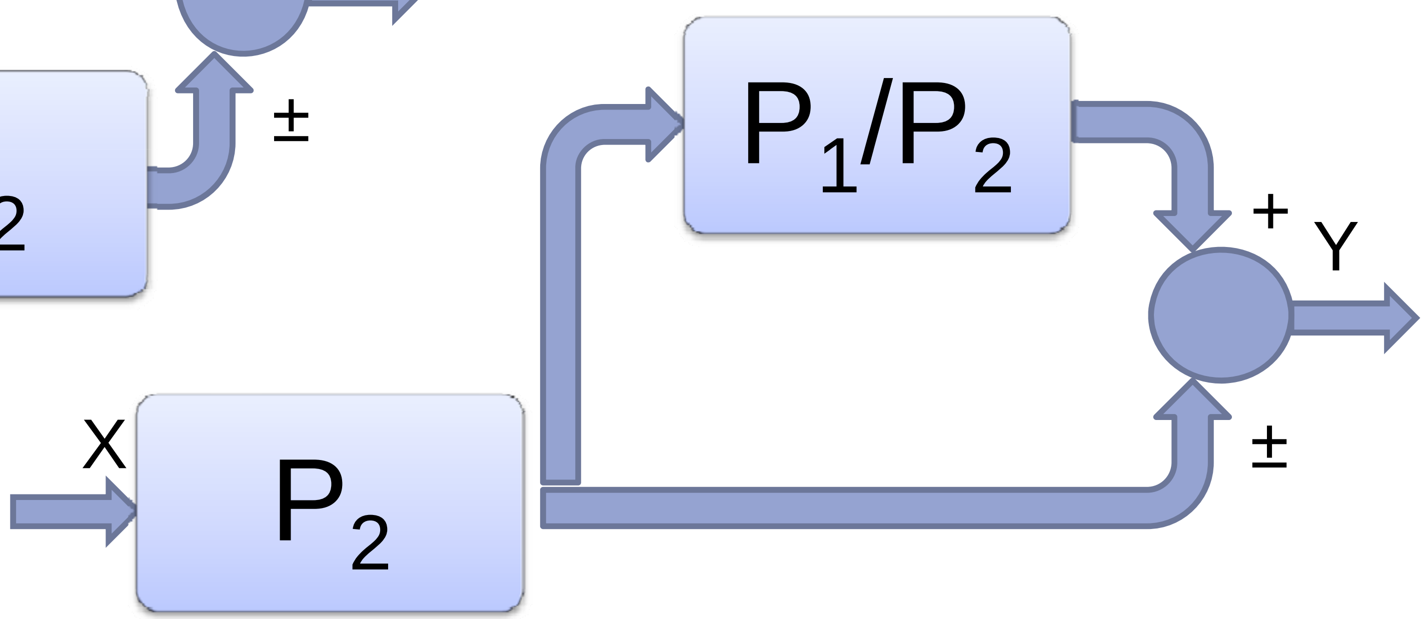
Teorema 3: Eliminación de bloque en la trayectoria directa

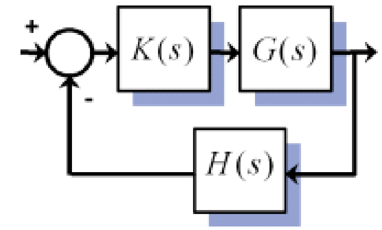


$$Y = P_1X \pm P_2X$$



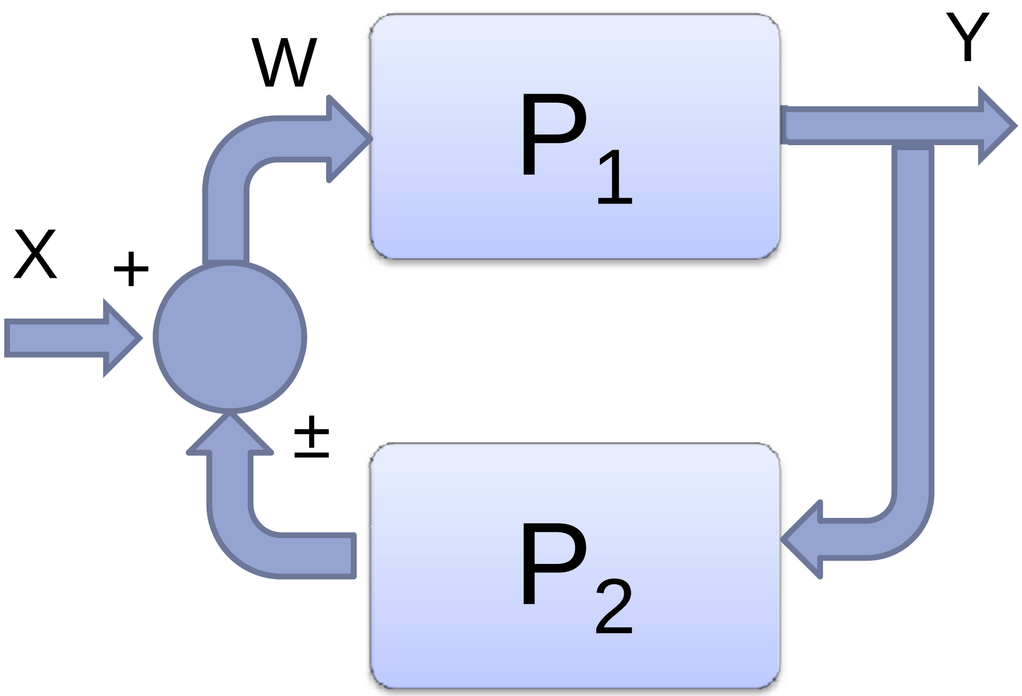
$$Y = (P_1/P_2)P_2X \pm P_2X$$

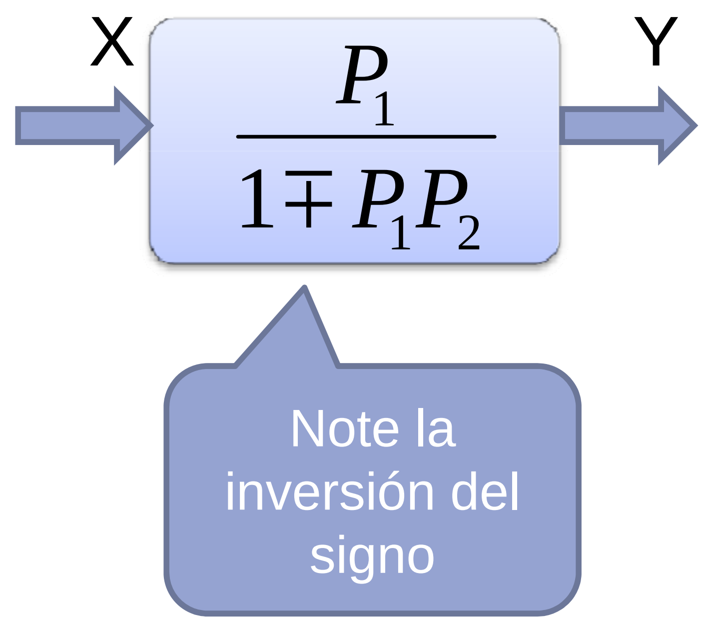




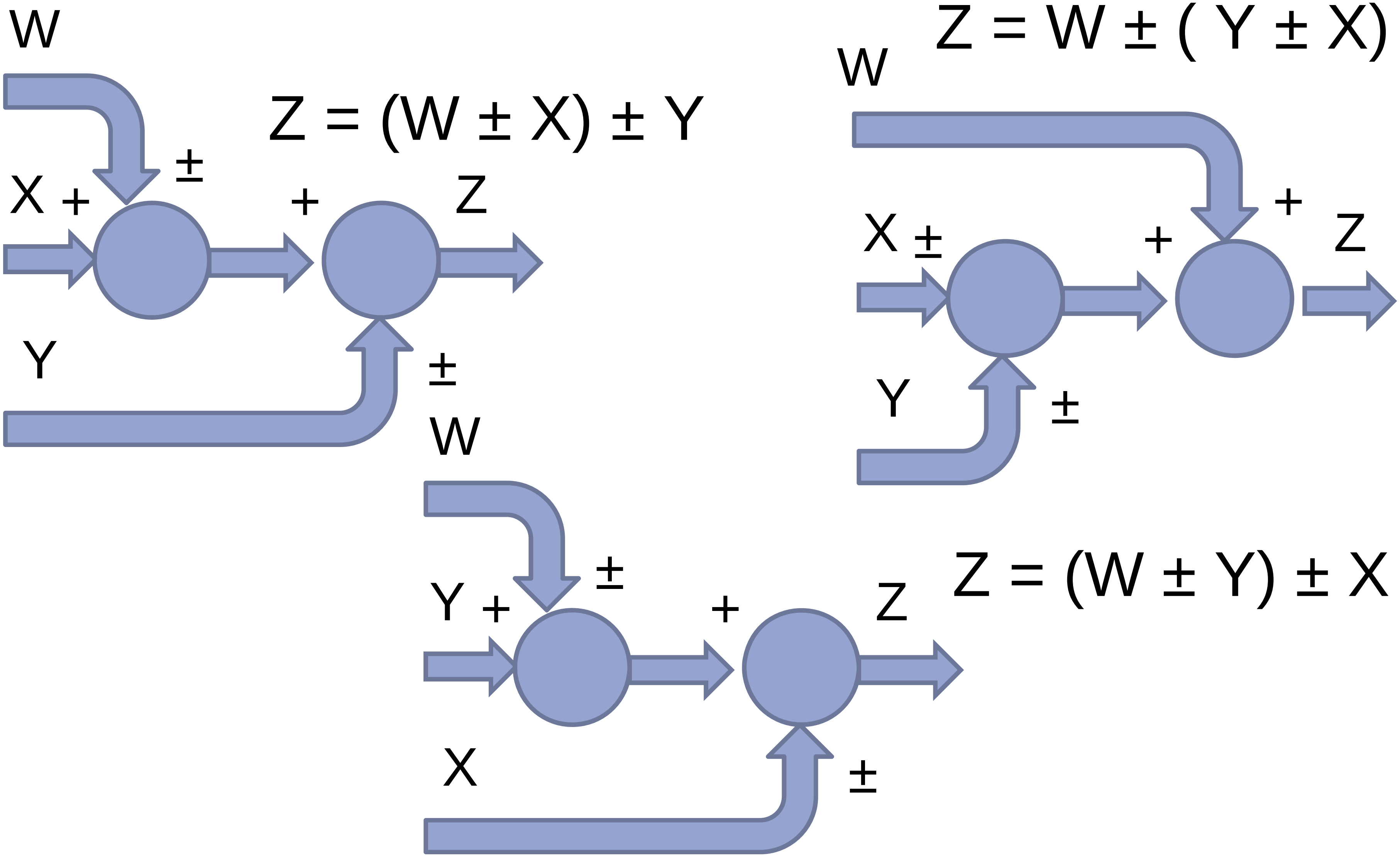
Teorema 4: Realimentación

$Y = P_1W;$





Teorema 5: Redistribución de puntos de suma (asociación)



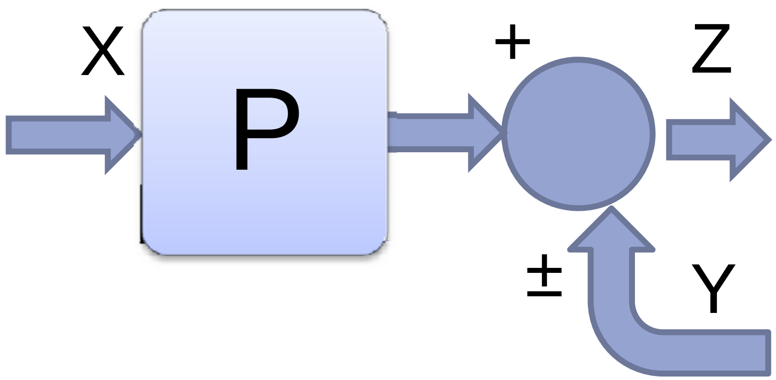
$$Z = (W \pm X) \pm Y$$

$$Z = W \pm (Y \pm X)$$

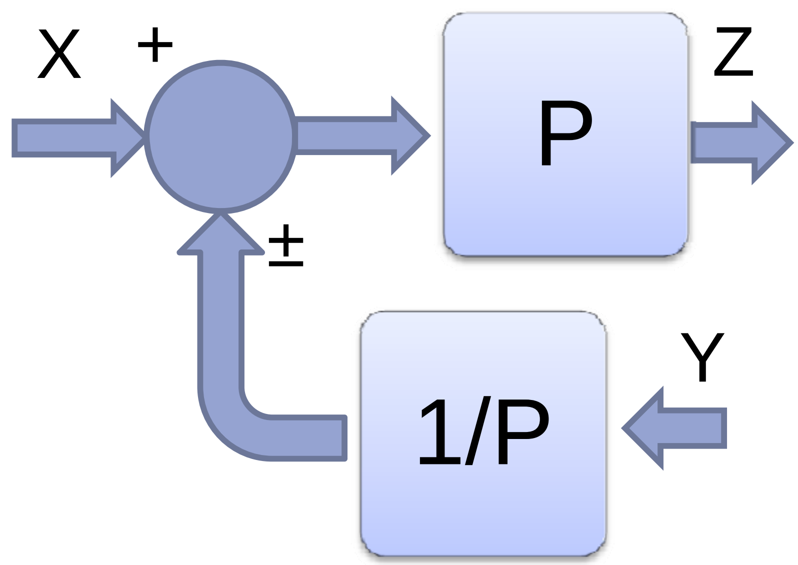
$$Z = (W \pm Y) \pm X$$

Teorema 6: Desplazamiento de un bloque hacia delante de un punto de suma

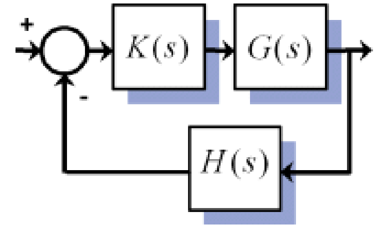
$$Z = PX \pm Y$$



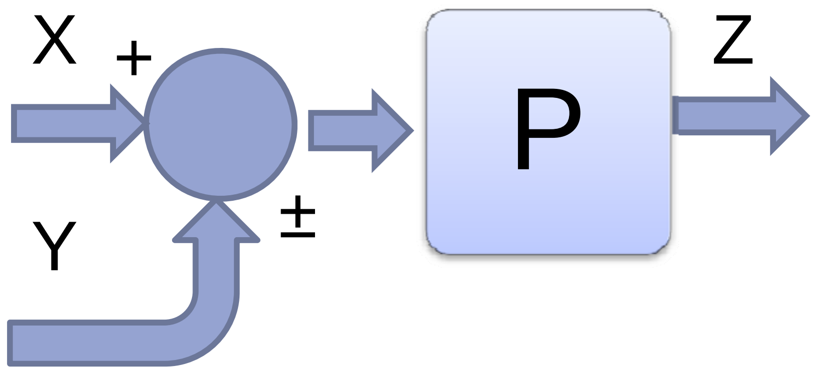
$$Z = P(X \pm Y/P) =$$



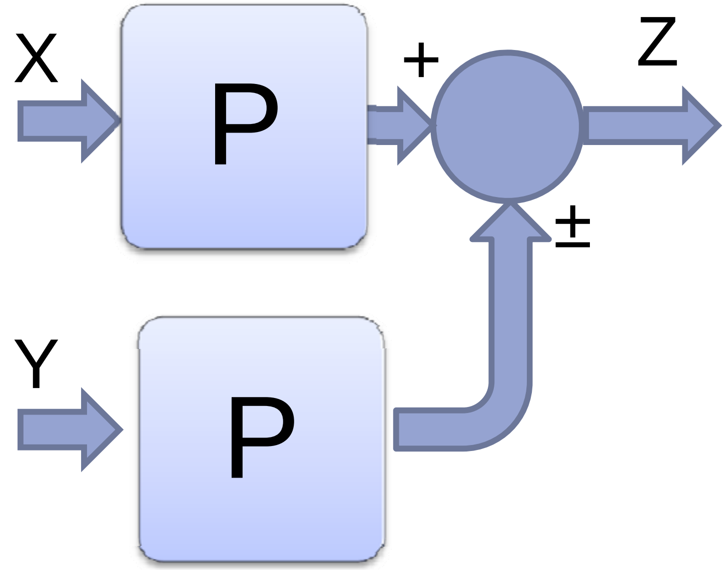
Teorema 7: Desplazamiento de un punto de suma hacia delante de un bloque



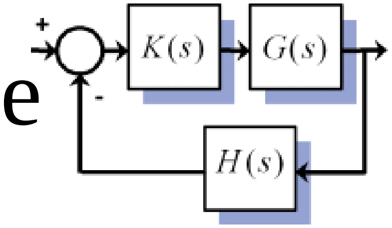
$Z = P(X \pm Y)$



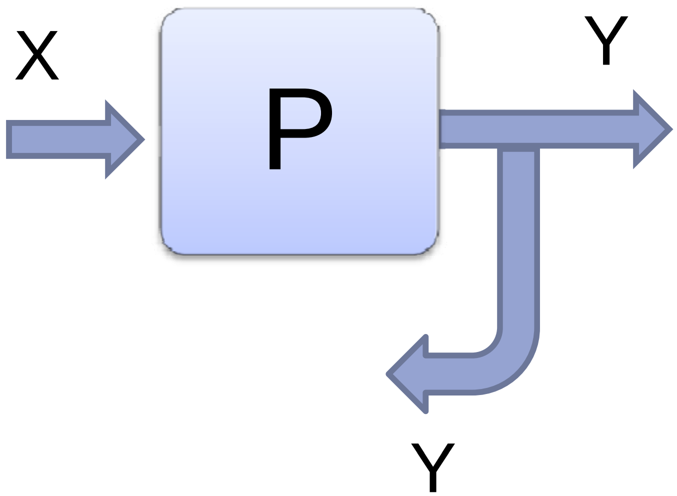
$Z = PX \pm PY = P(X \pm Y)$



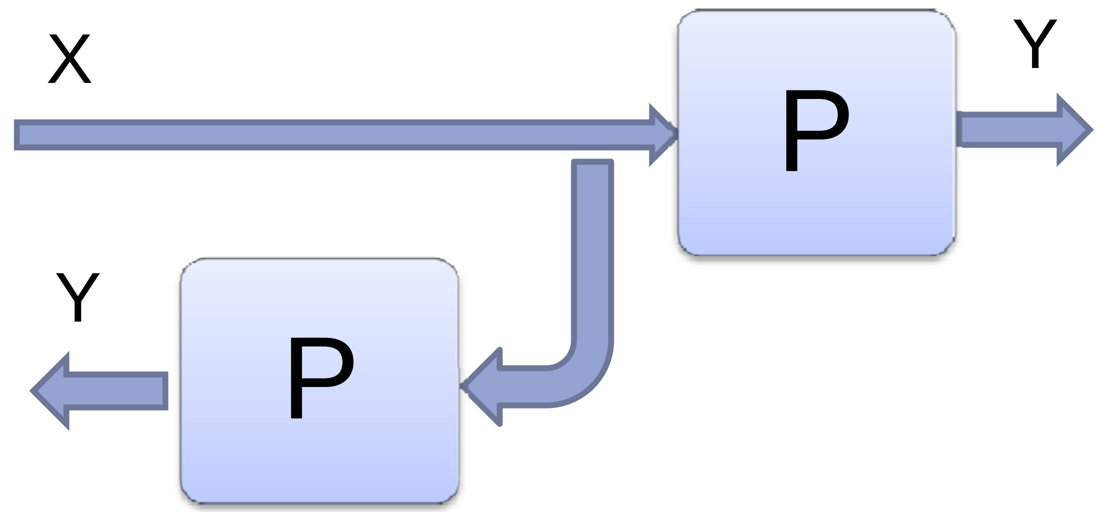
Teorema 8: Desplazamiento de un bloque hacia delante de un punto de toma

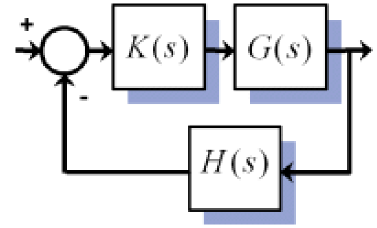


$Y = PX$

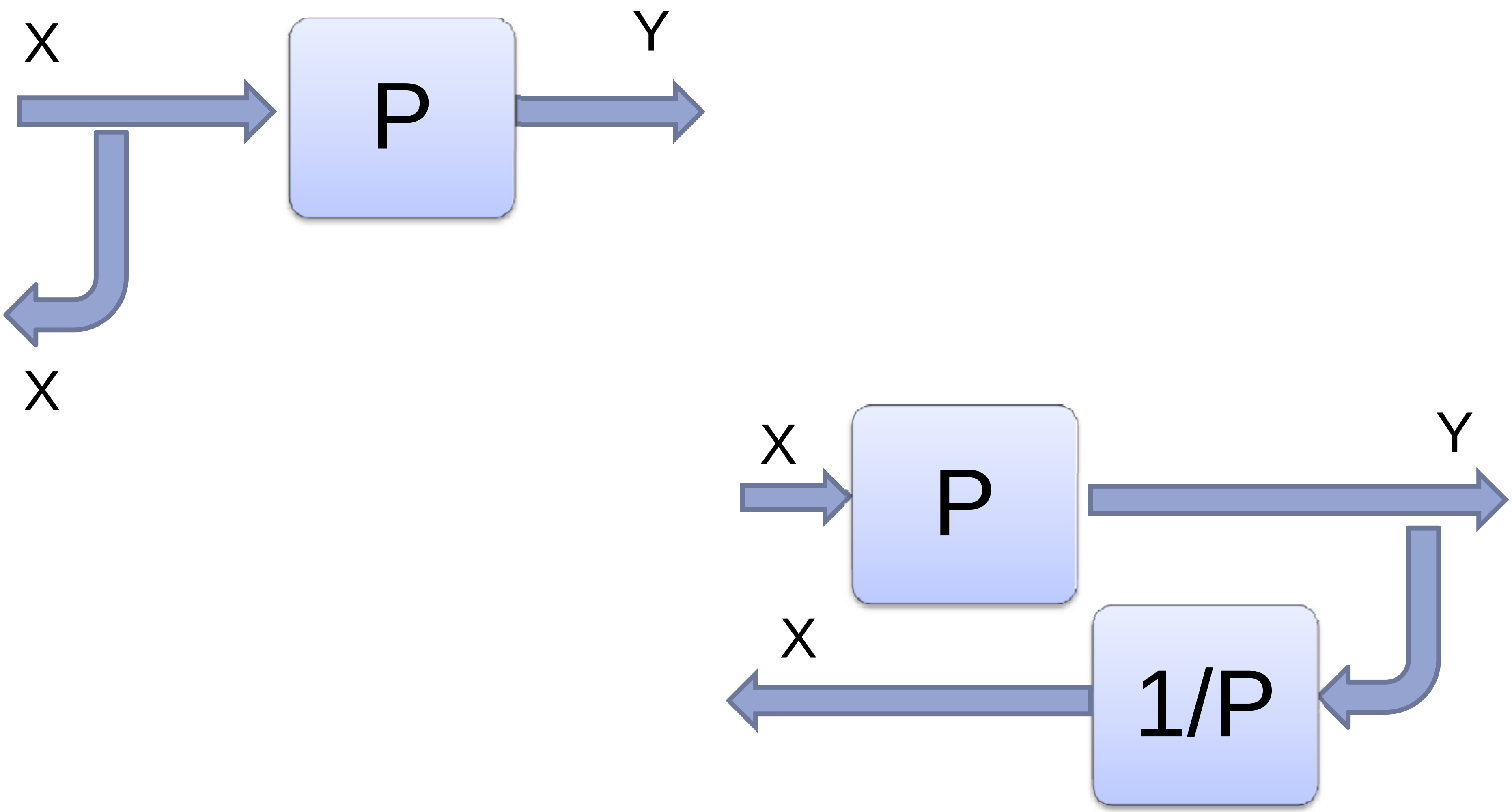


$Y = PX$

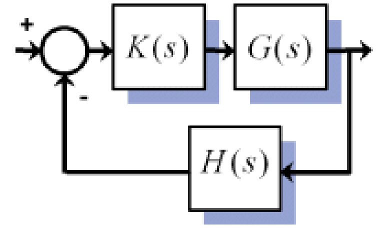




Teorema 9: Desplazamiento de un punto de toma hacia delante de un bloque



Ejemplo 1: Ecuaciones del motor de CD controlado por campo



Ecuaciones temporales

$$R_e \cdot i_e + L_e \cdot \frac{di_e}{dt} - u_e = 0$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_M - B \cdot \omega$$

$$M_M = K_3 \cdot i_e$$

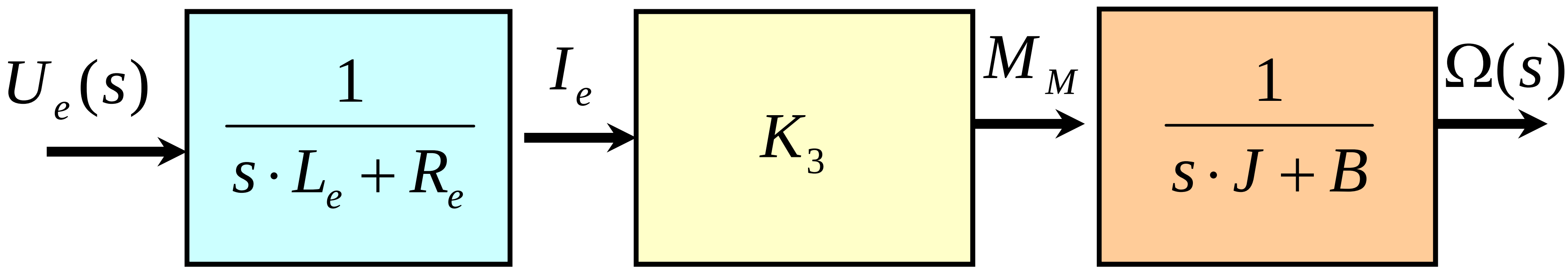
Ecuaciones transformadas

$$[s \cdot L_e + R_e] \cdot I_e(s) = U_e(s)$$

$$[s \cdot J + B] \cdot \Omega(s) = M_M(s)$$

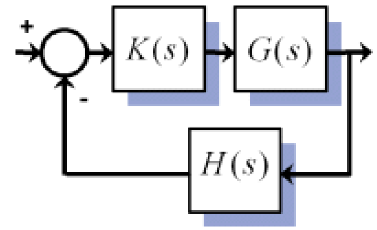
$$M_M(s) = K_3 \cdot I_e(s)$$

Ejemplo 1: Diagrama de bloques del motor de CD controlado por campo



$$\frac{\Omega(s)}{U_e(s)} = \frac{K_3}{JL_e} \frac{1}{\left(s + B/J\right)\left(s + R_e/L_e\right)}$$

Ejemplo 2: Ecuaciones del motor de CD controlado por armadura



Ecuaciones temporales

$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + u_i - u_a = 0$$

$$u_i = K_1 \cdot \omega$$

$$M_M = K_2 \cdot i_a$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_M - B \cdot \omega$$

Ecuaciones transformadas

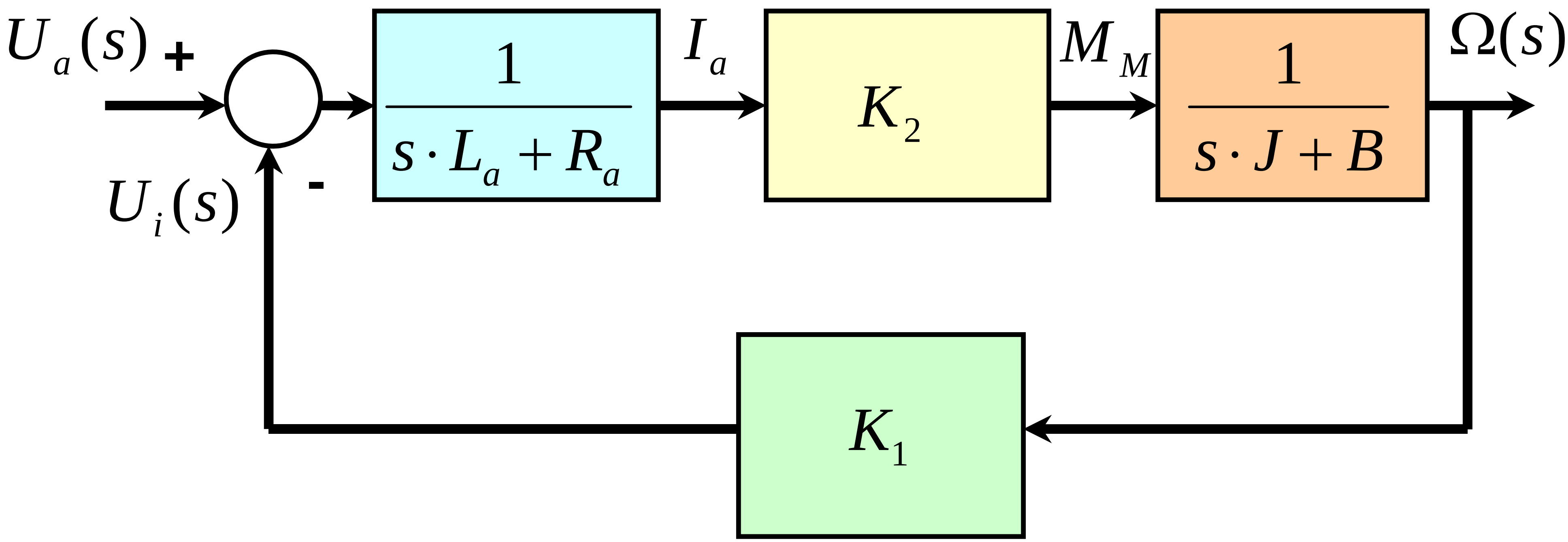
$$[s \cdot L_a + R_a] \cdot I_a(s) = U_a(s) - U_i(s)$$

$$U_i(s) = K_1 \cdot \Omega(s)$$

$$M_M(s) = K_2 \cdot I_a(s)$$

$$[s \cdot J + B] \cdot \Omega(s) = M_M(s)$$

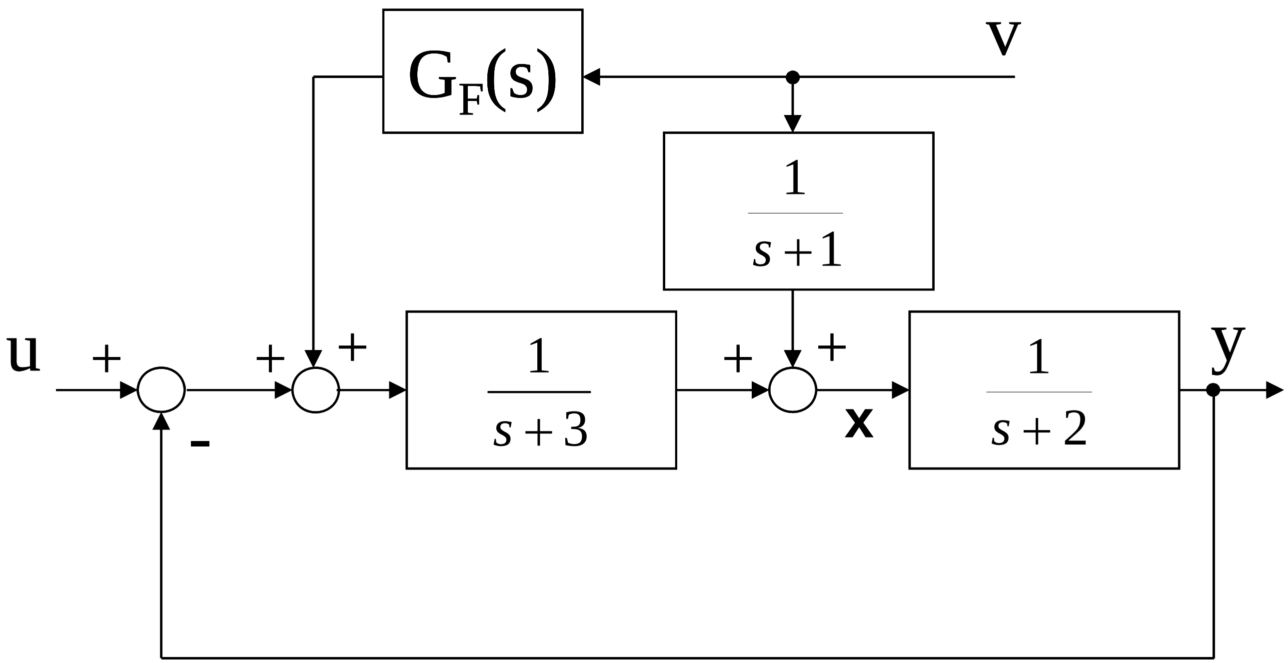
Ejemplo 2: Diagrama de bloques del motor de CD controlado por armadura



$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_2}{(sJ + B)(sL_a + R_a) + K_1 K_2}$$

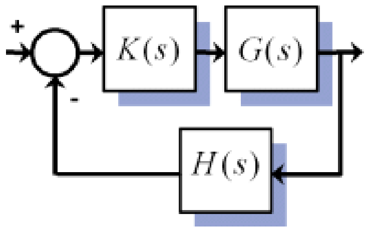
Ejercicio 1: Encuentre $G_F(s)$

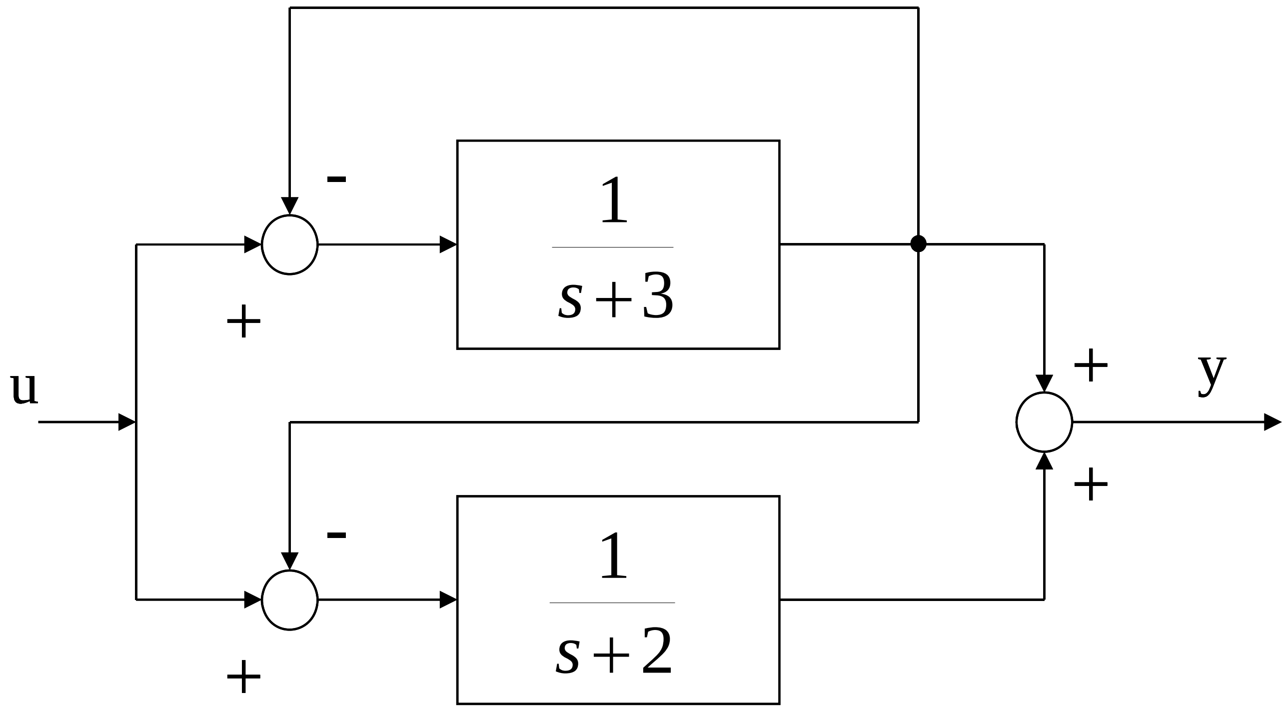
Encuentre $G_F(s)$ de tal forma que la influencia de $v(t)$ se cancele a la salida del sistema.



$$G_F(s) = \frac{-(s+3)}{s+1}$$

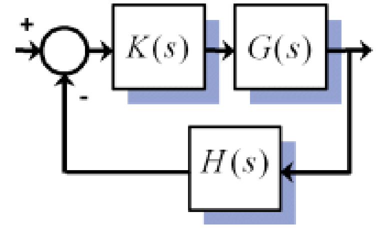
Ejercicio 2: Encuentre Y(s)/U(s) usando simplificación de bloques





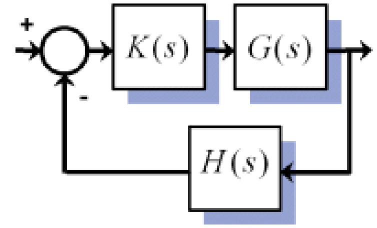
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+2.5)}{(s+2)(s+4)}$$

Regla de Masón: Definiciones



- **Trayecto**: Recorrido directo entre dos líneas en el sentido de las flechas, pasando solo una vez por cada bloque o línea.
- **Lazo**: Trayecto que se cierra sobre si mismo, partiendo de una línea y regresando a la misma línea.
- **Lazo adjunto**: son aquellos lazos que comparten algún tramo del diagrama.
- **Lazo NO adjunto**: Aquellos lazos que no poseen ninguna línea en común; esto es no se tocan.
- **Ganancia del trayecto**: Producto de las transmitancias de los bloques de un trayecto, tomando en cuenta los signos de los sumadores.
- **Ganancia de lazo**: Producto de las transmitancias de los bloques de un lazo, tomando en cuenta los signos de los sumadores.

Regla de Masón: Ecuaciones



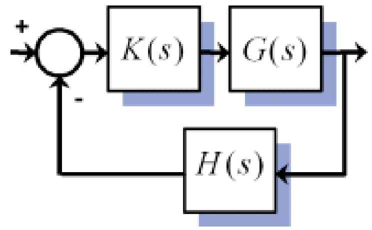
- La regla de Masón permite encontrar la transmitancia **G** entre cualquier par de variables (líneas) de un sistema.

$$G = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} T_i \Delta_i$$

Donde:

- T_i = Ganancia del *i-ésimo* trayecto de los n posibles entre las dos líneas.
- Δ = Determinante del diagrama =
  - 1 – (suma de todas las ganancias de lazo distintos posibles) + (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de ***dos*** lazos no adjuntos) – (suma de los productos de todas las ganancias de todas las combinaciones posibles de ***tres*** lazos no adjuntos) + ...- =
- Δ_i = Cofactor de T_i

Regla de Masón: Determinante



$$\Delta = 1 - \sum_{a} L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \ldots$$

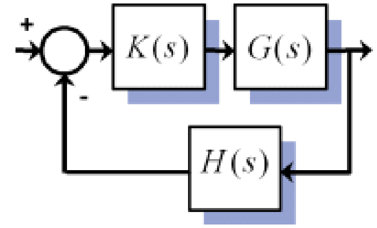
Donde:

$\sum_{a} L_a$ = Suma de todas las ganancias de lazos distintos posibles.

$\sum_{b,c} L_b L_c$ = Suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos no adjuntos.

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = Suma de los productos de todas las ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos no adjuntos.

Regla de Masón: Cofactores



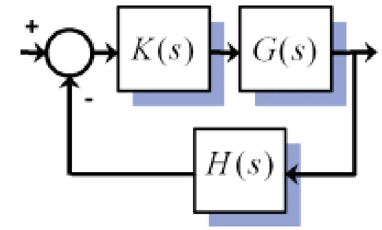
- Δ_i = Cofactor de T_i

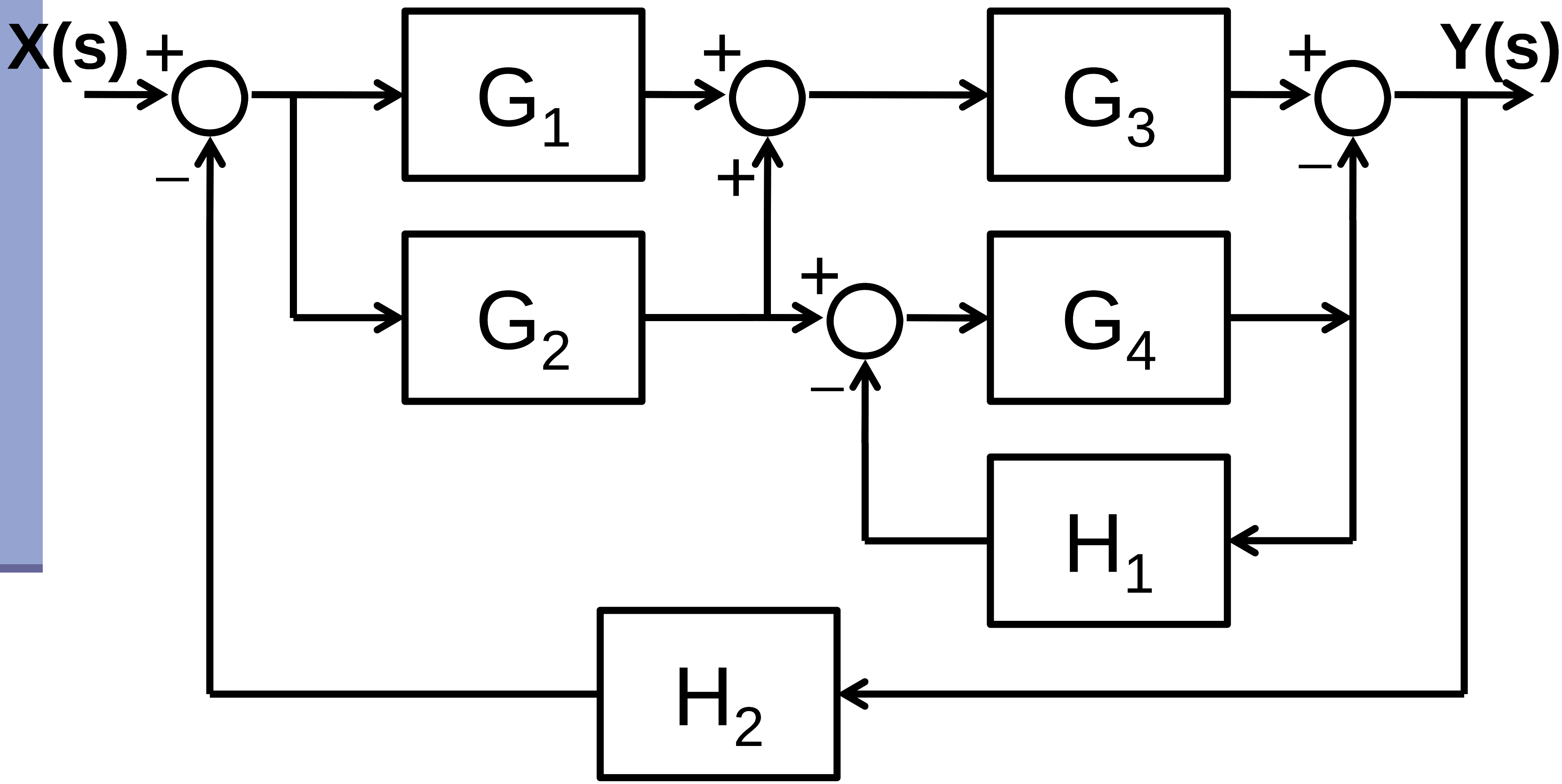
Es el determinante del resto del diagrama que queda cuando se suprime el trayecto que produce T_i.

Δ_i podrá obtenerse de Δ, eliminando aquellos términos o productos que contengan algún lazo adjunto al trayecto T_i.

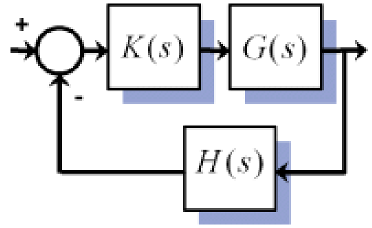
Cuando el trayecto toca a todos los lazos del diagrama, o cuando este no contiene ningún lazo, Δ_i es igual a la unidad.

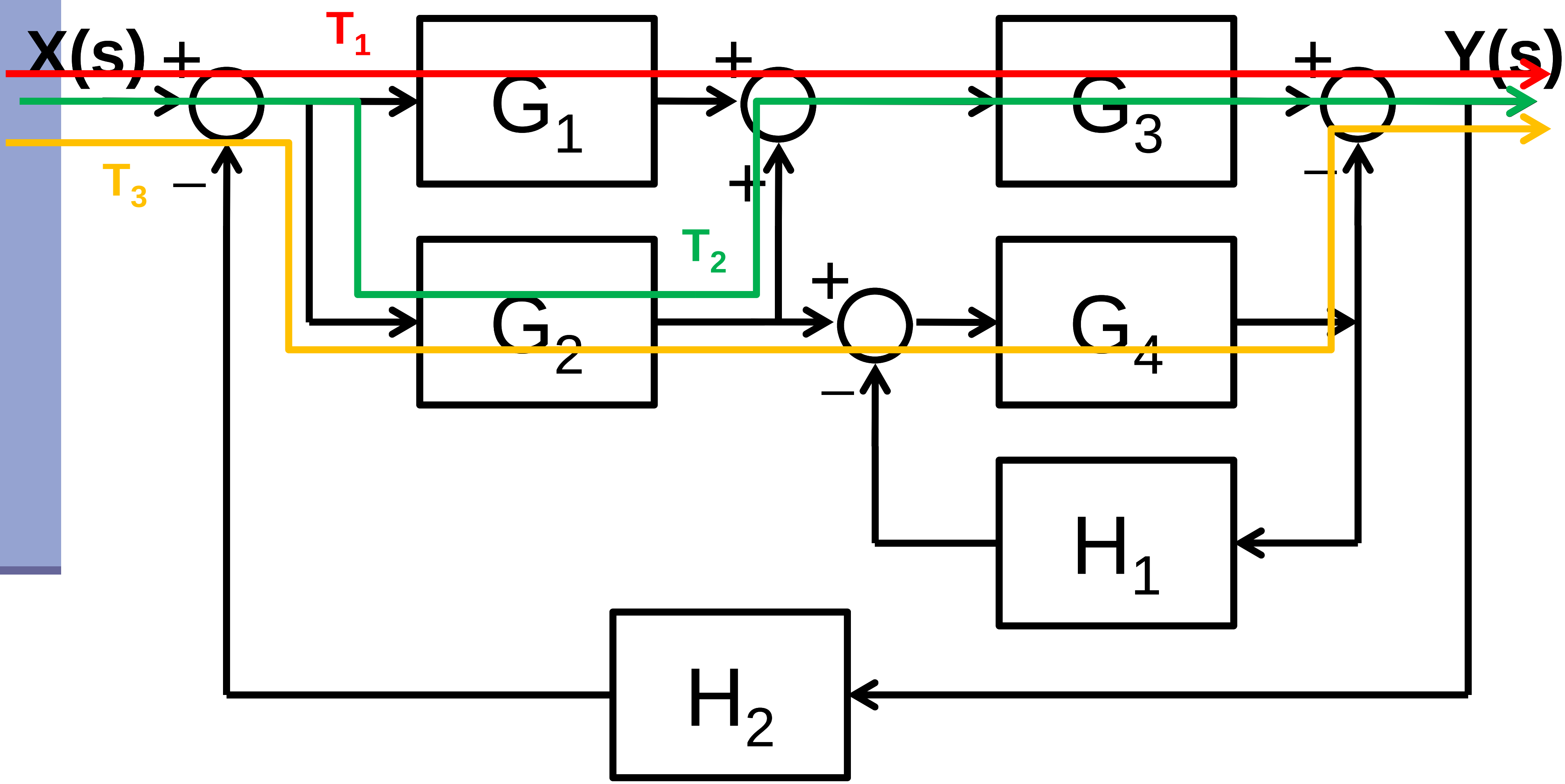
Regla de Masón: Ejemplo

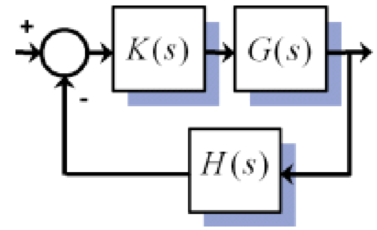




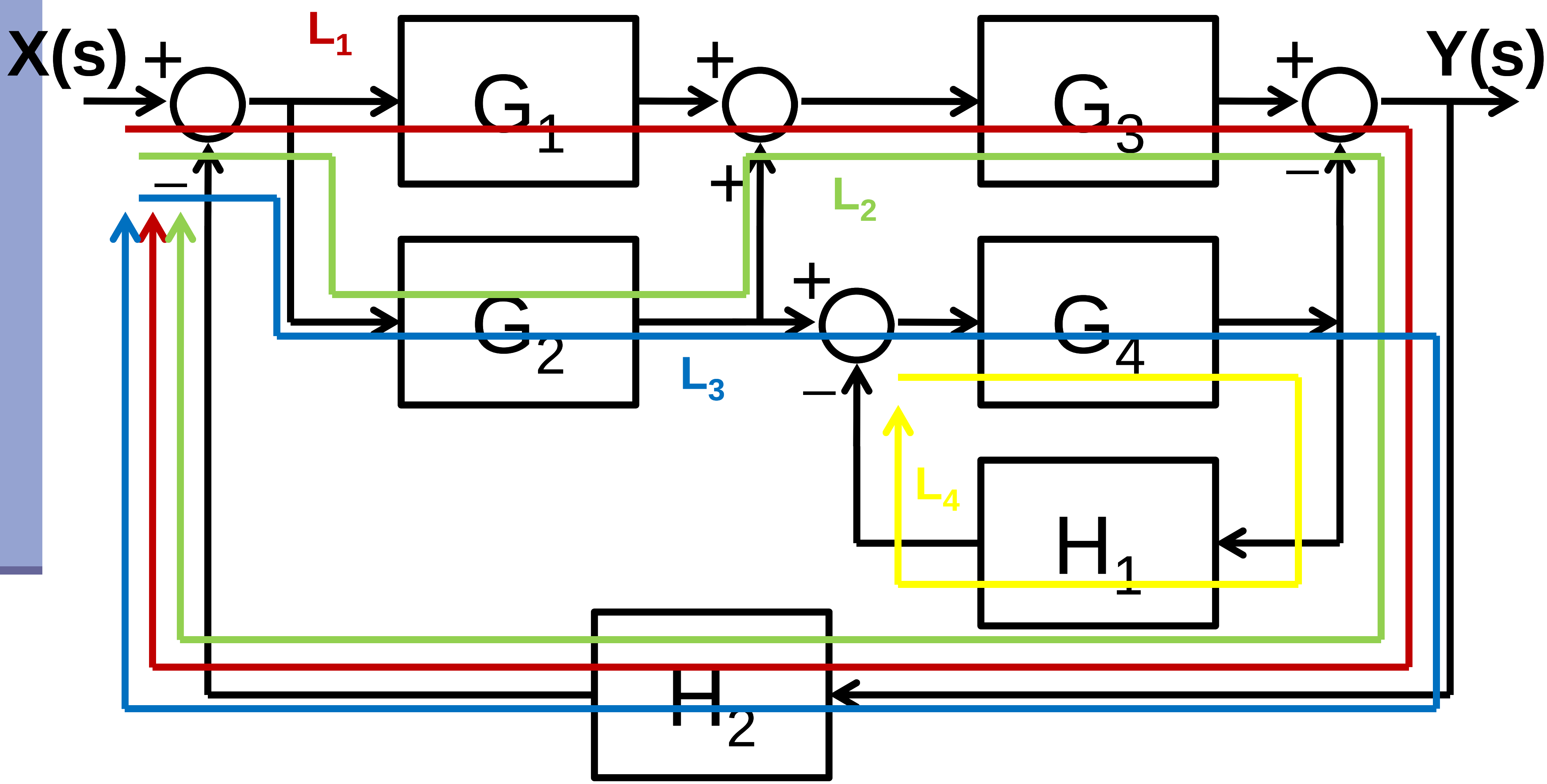
Regla de Masón: Trayectorias



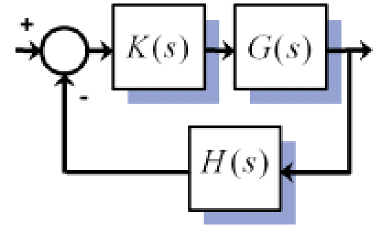




Regla de Masón: Lazos



Regla de Masón: Trayectorias



Tenemos tres trayectorias directas: T_1, T_2 y T_3

$$T_1 = G_1 G_3$$

$$T_2 = G_2 G_3$$

$$T_3 = -G_2 G_4$$

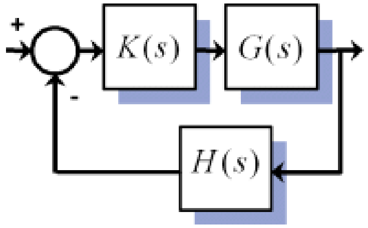
Suprimiendo las trayectorias directas 1 y 2 quedan sus cofactores

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1 - (-G_4 H_1) = 1 + G_4 H_1$$

Al suprimir la trayectoria T3, no queda ningun lazo por lo que:

$$\Delta_3 = 1$$

Regla de Mason: Lazos



Existen 4 lazos: L_1, L_2, L_3 y L_4 que son:

$$L_1 = -G_1 G_3 H_2 \qquad L_2 = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_4 = -G_4 H_1 \qquad L_3 = G_2 G_4 H_2$$

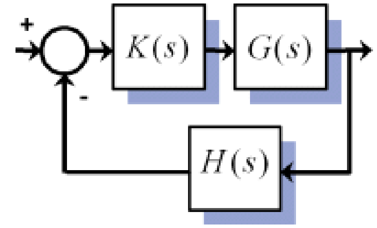
Las combinaciones de lazos no adjuntos son: L_1L_4 y L_2L_4:

$$L_1 L_4 = G_1 G_3 G_4 H_1 H_2 \qquad L_2 L_4 = G_2 G_3 G_4 H_1 H_2$$

El determinante queda como:

$$\Delta = 1 - \left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4\right) + \left(L_1 L_4 + L_2 L_4\right)$$

Regla de Mason: Resultado

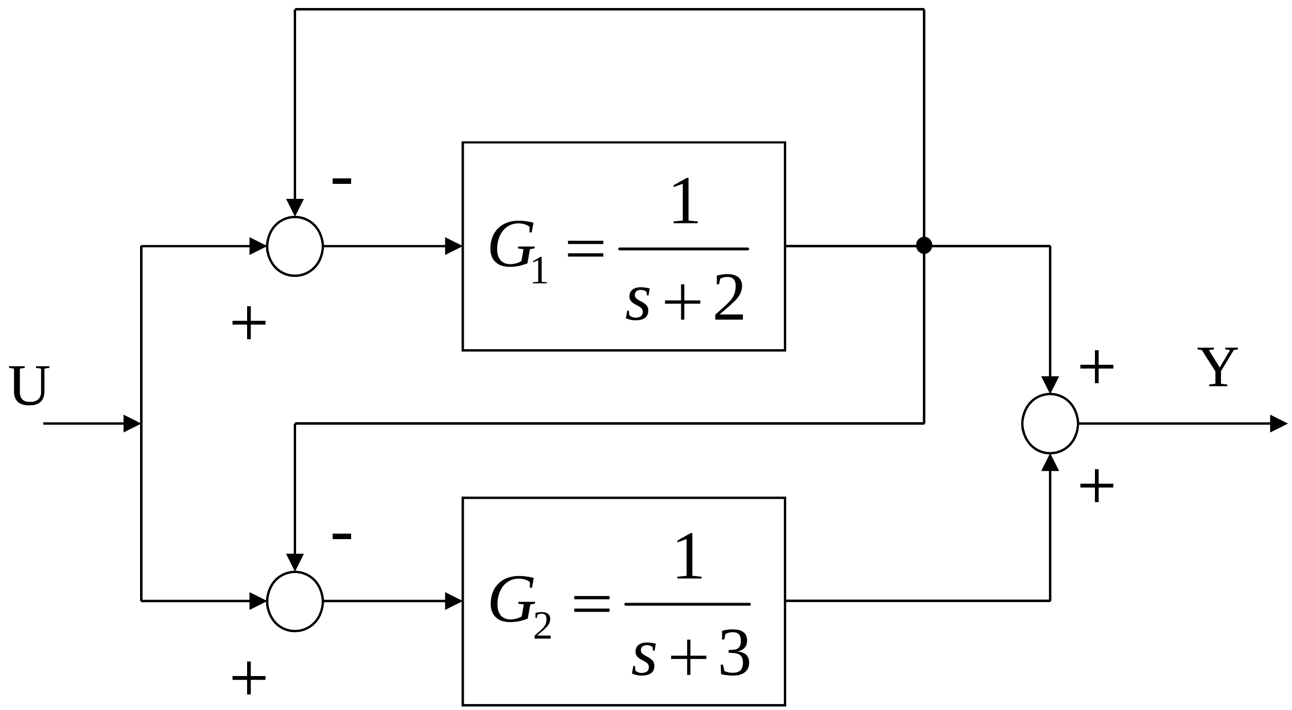


- La función de transferencia será entonces:

$$G(s) = \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2 + T_3\Delta_3}{1 - \left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4\right) + \left(L_1 L_4 + L_2 L_4\right)}$$

$$G(s) = \frac{G_1G_3\left(1 + G_4H_1\right) + G_2G_3\left(1 + G_4H_1\right) - G_3G_4}{1 + G_1G_3H_2 + G_2G_3H_2 - G_2G_4H_2 + G_4H_1 + G_1G_3G_4H_1H_2 + G_2G_3G_4H_1H_2}$$

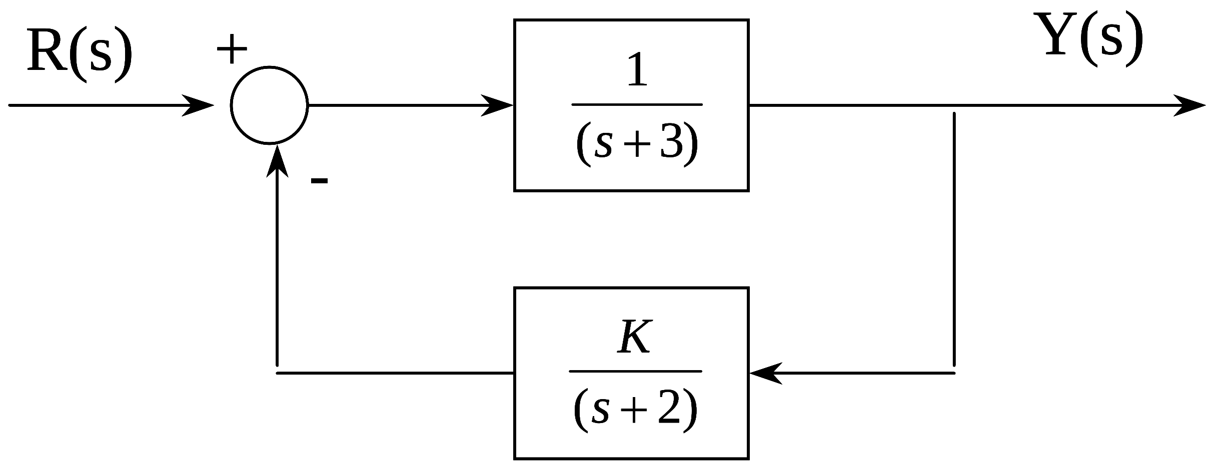
Ejercicio 3: Encuentre Y(s)/U(s) usando Mason



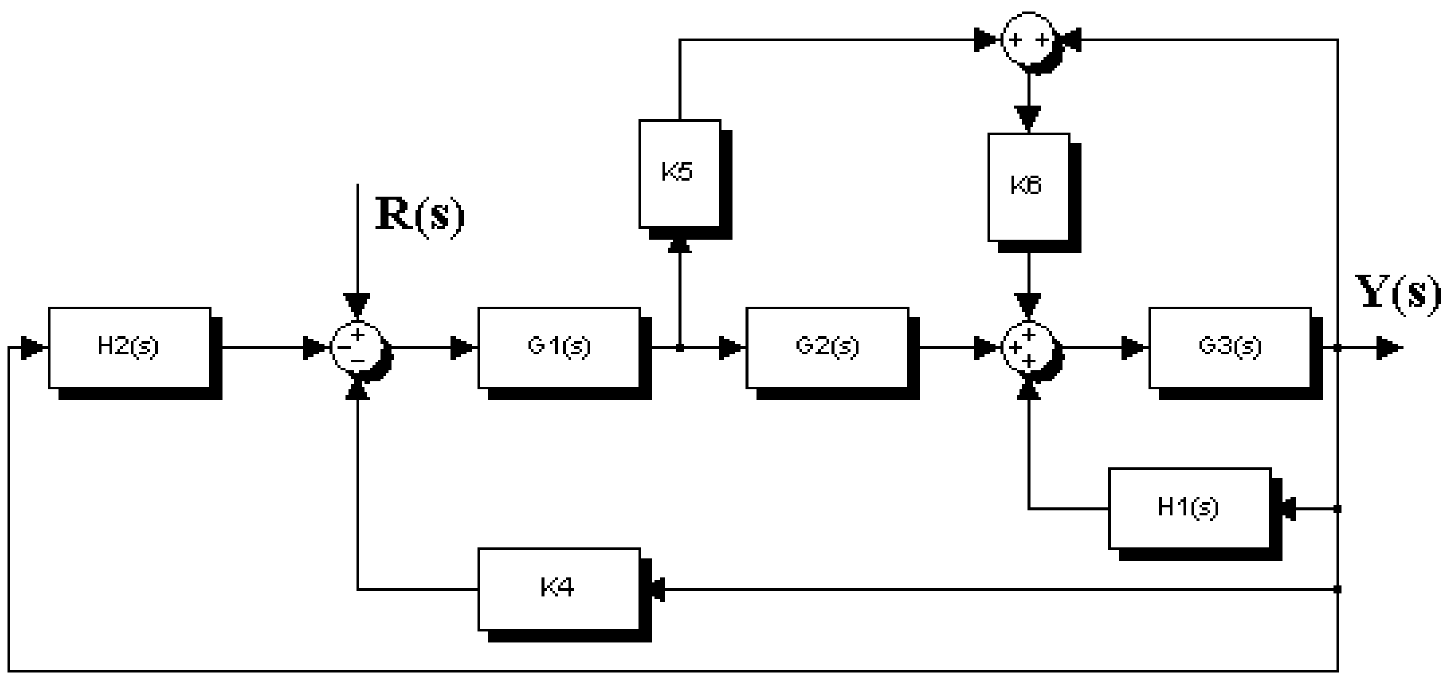
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+2.5)}{(s+3)^2}$$

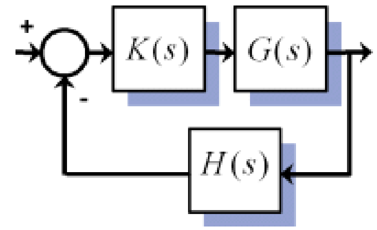
Ejercicio 4: Encuentre Y(s)/R(s)

- A) K = 4



- B)





Referencias

- Rodríguez Ávila, Jesús E.. „**Introducción a la Ingeniería del Control Automático**“, McGraw-Hill, 1998, México.

- Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.

- Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4ª Ed., Madrid.