3 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

OBJETIVO: Caracterizar las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias continuas más comunes.

3.1 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Si se tuviera interés en ***medir*** la estatura de una persona, el peso de un artículo, la vida útil de algún aparato electrónico, etc. no se podría descartar ningún número real como posible resultado, una variable de este tipo se llama **continua** y debido a que el número de valores posibles que puede tomar la variable es infinito, la probabilidad de que tome un valor x en particular es cero. Lo cual se escribe como $P(X = x) = 0$, $-\infty < x < \infty$.

Observa que:

i) $P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b)$.
ii) $P(a \leq X < b) = P(X = a) + P(a < X < b) = P(a < X < b)$.
iii) $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b)$.

Es decir; $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$.

3.1.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

Definición: Una **función de densidad continua** (para la v.a continua) es una función no negativa que cumple dos propiedades:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

ii) $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$

3.1.2 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD.

Definición: La **función de distribución o función de probabilidad acumulada** para una v.a continua, X con función de densidad $f_X(x)$ está dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

Observación:

i) $f_X(x) = F'_X(x), \quad -\infty < x < \infty$ en todos los puntos donde $f_X(x)$ es continua.

ii) $f_X(x) = 0$ en otro caso.

Ejemplo 1: Una v.a continua X que puede asumir valores entre 1 y 3 tiene una función de densidad de probabilidad dada por $f_X(x) = \frac{1}{2}$.

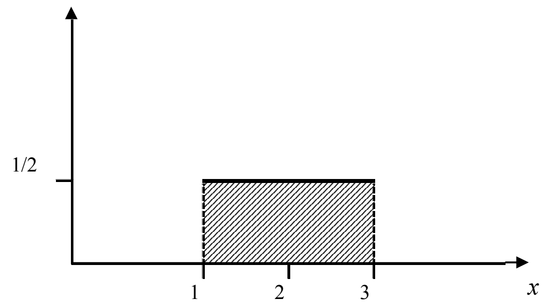
a) Muestra que el área bajo la curva es 1.

b) Encuentra $P(2 < X < 2.5)$.

c) Encuentra la $P(X \leq 1.6)$.

d) Encuentra $F_X(x)$ y úsala para encontrar $P(2 < X < 2.5)$.

<u>Solución</u>



Función de densidad para la v.a X

Observa que esta v.a sólo toma valores de 1 a 3, en los demás puntos la función es cero. El área total bajo la curva debe ser 1, por definición de f.d.p, debido a que la representación gráfica de esta función es una figura geométrica conocida, también podemos encontrar el área bajo la curva con la fórmula del área para el rectángulo, con base igual a 2 y altura igual a $\frac{1}{2}$.

a) $\int_1^3 f_X(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(3-1) = 1$

b) $P(2 < X < 2.5) = \int_2^{2.5} f_X(x)dx = \int_2^{2.5} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_2^{2.5} = \frac{2.5-2}{2} = \frac{1}{4}$

c) $P(X \leq 1.6) = \int_1^{1.6} f_X(x)dx = \int_1^{1.6} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_1^{1.6} = \frac{1.6-1}{2} = 0.3$

d) $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_1^{x} f_X(t)dt = \int_1^{x} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}t\Big|_1^{x} = \frac{x-1}{2}$ para $1 \leq x \leq 3$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Usando la acumulada se tiene que: $P(2 < X < 2.5) = F_X(2.5) - F_X(2) = \frac{2.5-1}{2} - \frac{2-1}{2} = \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4}$

Ejemplo 2: Sea *Y* una v.a continua con función de densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

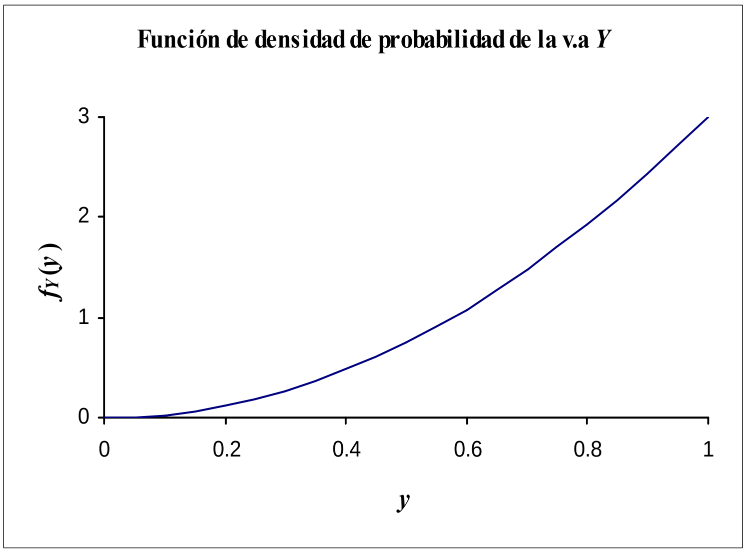
Encuentra la función de probabilidad acumulada y grafica ambas funciones.

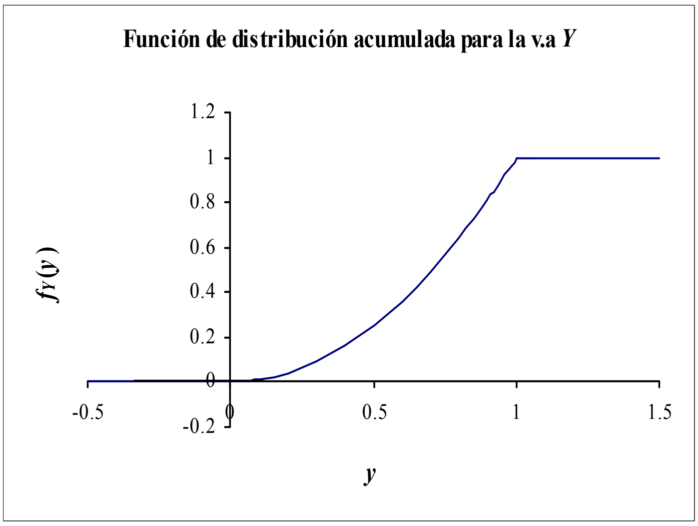
__Solución__

$$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(t)dt = \int_0^y 3t^2 dt = \left.\frac{3t^3}{3}\right|_0^y = y^3$$

Entonces

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^3 & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$





3.2 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

Las definiciones para media, varianza y f.g.m de una v.a continua son similares al caso discreto, sólo se cambian las sumatorias por integrales.

Media: $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$

Varianza: $\sigma_X^2 = V(X) = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$

Otra manera de expresar la varianza de la v.a X es: $\sigma_X^2 = E\left(X^2\right) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \mu_X^2$

Función generadora de momentos: $\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx$

Ejemplo 1: Si la v.a X tiene una f.d. expresada por la siguiente función:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4\left(1-x^3\right)}{3} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

a) Demuestra que es una función de densidad de probabilidad.
b) Encuentra la media y la varianza de la v.a X.
c) Encuentra la función de distribución acumulada.

<u>Solución</u>

a) Hay que verificar que se cumplen las dos condiciones de una f.d.p.
i) Observa que para x entre 0 y 1 el valor de la función es siempre no negativo.
ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^1 \frac{4\left(1-x^3\right)}{3}dx = \frac{4}{3}\left[\int_0^1 dx - \int_0^1 x^3 dx\right] = \frac{4}{3}\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = 1$

Por estas dos propiedades se concluye que sí es una f.d.p.

b) $E(X) = \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x\frac{4\left(1-x^3\right)}{3}dx = \frac{4}{3}\left[\int_0^1 xdx - \int_0^1 x^4 dx\right]$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] = \frac{2}{5}$$

$$E\left(X^2\right) = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2\frac{4\left(1-x^3\right)}{3}dx = \frac{4}{3}\left[\int_0^1 x^2dx - \int_0^1 x^5 dx\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{9}$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\mu_X^2=\frac{2}{9}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{50-36}{9(25)}=\frac{14}{225}$$

c) $F_X(x)=\int_0^x f_X(t)dt=\int_0^x \frac{4\left(1-t^3\right)}{3}dt=\frac{4}{3}\left[t-\frac{t^4}{4}\right]_0^x=\frac{4}{3}\left[x-\frac{x^4}{4}\right]=\frac{4x}{3}-\frac{x^4}{3}=\frac{4x-x^4}{3}$

Entonces la función de distribución acumulada queda como

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{4x-x^4}{3} & 0<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

Ejemplo 2: Si la función de probabilidad de una v.a. continua *X* es

$$f_X(x)=\begin{cases}ce^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{o.c}\end{cases}$$

a) Determina el valor de *c*.
b) Encuentra $P(1<X<2)$.
<u>**Solución**</u>

a) Se sabe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$

Entonces $\int_0^{\infty} ce^{-2x}dx=c\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_0^{\infty}=\frac{c}{2}=1 \quad \therefore \quad c=2$

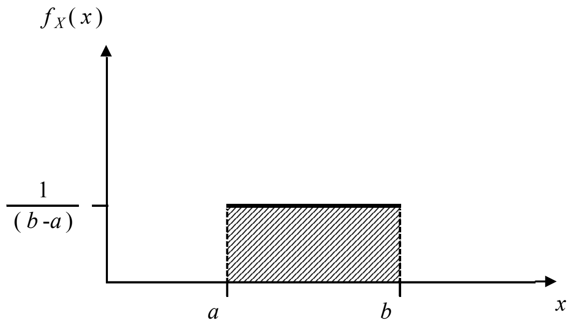
b) $P(1<X<2)=\int_1^2 2e^{-2x}dx=-\int_1^2 e^{-2x}(-2)dx=-e^{-2x}\Big|_1^2=-e^{-4}+e^{-2}=0.117$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME.

La más sencilla de las distribuciones continuas es la uniforme, la cual recibe su nombre debido a que es constante en todo el intervalo donde existe. Se dice que la v.a continua X, tiene una distribución uniforme si su **f.d.p** está dada por la expresión:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{o.c.}\end{cases}$$

Dado que el área bajo la función es la probabilidad total, podemos encontrar esta área con la fórmula conocida para un rectángulo, con base igual a $(b-a)$ y altura $\left(\dfrac{1}{b-a}\right)$, con lo cual se obtiene la unidad. La gráfica de esta distribución es la siguiente:



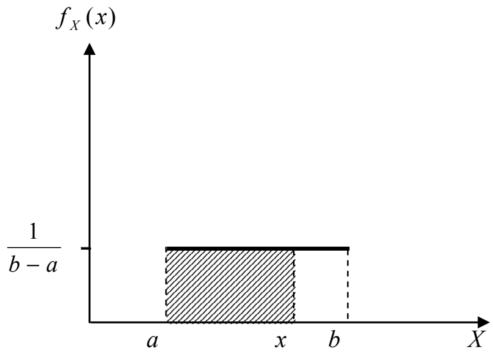
Distribución Uniforme en el intervalo (a , b)

La notación para esta distribución es $X \sim U(a,b)$ y se lee "la v.a X se distribuye uniformemente en el intervalo (a,b).

La **función de probabilidad acumulada** para esta distribución está dada por:

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^x = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{si } a < x < b.$$

Observa que es la fórmula para encontrar el área del rectángulo delimitado por las rectas $x=a$, $x=x$, $y=0$ y $y=\dfrac{1}{b-a}$.



Función de distribución acumulada en x para la distribución uniforme en el intervalo (a, b).

Valor esperado, varianza y f.g.m.

$$\mu_X = E(X) = \int_a^b x f_X(x)dx = \int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}$$

$$\boxed{\mu_X = \frac{a+b}{2}}$$

Para el cálculo de la varianza necesitamos el segundo momento:

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b^2+ab+a^2)(b-a)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Por lo tanto la varianza es:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12}}$$

La **f.g.m** es de la forma:

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b \frac{e^{tx}dx}{b-a} = \left.\frac{e^{tx}}{t(b-a)}\right|_a^b = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)} \qquad \boxed{\psi_X(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}}$$

Ejemplo 1: Si X se distribuye uniformemente, es simétrica respecto al origen y tiene varianza 1. ¿Cuánto vale a y cuánto b?

<u>**Solución**</u>

Por ser simétrica respecto al origen se tiene que si $b = k$, entonces $a = -k$. Además la información que se tiene es que: $V(X) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(-k-k)^2}{12} = 1 \;\therefore\; 12 = 4k^2$

es decir; $k = \sqrt{3}$ y por lo tanto $a = -\sqrt{3}$ y $b = \sqrt{3}$.

Ejemplo 2: Si $X \sim U(a=0, b=4)$. ¿Cuál es la probabilidad de que las raíces de $y^2 + 4xy + x + 1 = 0$ sean reales?

<u>**Solución**</u>

Las raíces de la ecuación cuadrática $y^2 + (4x)y + (x+1) = 0$, se sacan usando la fórmula general con $a = 1$, $b = 4x$ y $c = x+1$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4x \pm \sqrt{16x^2 - 4(x+1)}}{2}$$

Para que las raíces sean reales se necesita que el radicando sea mayor o igual a cero, es decir:

$$16x^2 - 4(x+1) \geq 0$$

Dividiendo entre 4, se tiene que $4x^2 - x - 1 \geq 0$

Esta última nuevamente es una ecuación de segundo grado pero ahora en x, con raíces dadas por;

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} = \begin{cases} 0.64 \\ -0.39 \end{cases}$$

Observa que la función es positiva en el intervalo (0.64, 4). La probabilidad de que las raíces sean reales coincide con la probabilidad de que X esté en ese intervalo.
Dado que $X \sim U(0,4)$ procedemos como sigue:

$$P(0.64 < X < 4) = \int_{0.64}^{4} \frac{dx}{4} = \left.\frac{x}{4}\right|_{0.64}^{4} = \frac{4-0.64}{4} = 0.84$$

3.3.1 Distribución Exponencial.

Se utiliza a menudo para representar la distribución del tiempo que transcurre antes de la ocurrencia de un suceso. Por ejemplo; período que un componente electrónico funciona sin fallar, también conocido como vida útil del componente, período requerido para atender a un cliente en un banco, período entre las llegadas de dos clientes sucesivos a un servicio, etc.
La v.a X tiene una distribución exponencial con parámetro $\beta > 0$, y se escribe $X \sim \exp(x;\beta)$ si su **f.d.p** es de la forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

La **función de distribución acumulada** de la v.a es;

$$F_X(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta t}\,dt = \int_0^x e^{-\beta t}\beta dt = -\left. e^{-\beta t}\right|_0^x = -e^{-\beta x} + e^{-0} = 1 - e^{-\beta x}$$

Para encontrar media y varianza de esta distribución, primero encontramos la **f.g.m**,

$$\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^\infty e^{tx}\beta e^{-\beta x}dx = \beta\int_0^\infty e^{(t-\beta)x}dx = \left.\frac{\beta}{t-\beta}e^{-(\beta-t)x}\right|_0^\infty$$

$$\boxed{\psi_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}}$$

$$\mu_X = E(X) = \psi'_X(t=0) = \frac{d}{dt}\left[\beta(\beta-t)^{-1}\right]\Big|_{t=0} = \beta(\beta-t)^{-2}\Big|_{t=0} = \frac{\beta}{\beta^2}$$

$$\boxed{\mu_X = \frac{1}{\beta}}$$

$$E\left(X^2\right) = \psi''_X(t=0) = \frac{d}{dt}\left[\beta(\beta-t)^{-2}\right]\Big|_{t=0} = 2\beta(\beta-t)^{-3}\Big|_{t=0} = \frac{2\beta}{\beta^3} = \frac{2}{\beta^2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} \quad \therefore \quad \boxed{\sigma^2 = \frac{1}{\beta^2}}$$

Esta distribución también tiene la propiedad de falta de memoria, es decir para los enteros positivos t y h se cumple que:

$$P(X \geq t+h \mid X \geq t) = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} = \frac{1-F_X(t+h)}{1-F_X(t)} = \frac{1-(1-e^{-t\beta-h\beta})}{1-(1-e^{-t\beta})} = \frac{e^{-t\beta}e^{-h\beta}}{e^{-t\beta}} = e^{-t\beta}$$

Y por otro lado $P(X \geq h) = 1 - F_X(h) = 1 - \left(1 - e^{-h\beta}\right) = e^{-h\beta}$

Entonces $\boxed{P(X \geq t+h \mid X \geq t) = P(X \geq h)}$

Teorema: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetro β. Entonces la v.a $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ también se distribuye como una exponencial pero con parámetro $n\beta$.

<u>Demostración</u>

Observa que si el tiempo mínimo de espera de los n que tenemos es mayor que t entonces todos los demás también son mayores que t, es decir:

$$P(Y > t) = P(X_1 > t, \ldots, X_n > t) = P(X_1 > t) \cdots P(X_n > t) = e^{-t\beta} \cdots e^{-t\beta} = e^{-nt\beta}$$

Por lo tanto $Y \sim \exp(y; n\beta)$. ♦

Ejemplo 1: El motor y el tren de transmisión de un automóvil nuevo están garantizados por un año. Las vidas medias de estos componentes se estiman en tres años, y el tiempo transcurrido hasta la falla tiene una distribución exponencial. La ganancia en un auto nuevo es de $1,000. Incluyendo los costos de refacciones y de mano de obra, la agencia debe pagar $250 para reparar la falla. ¿Cuál es la utilidad esperada por automóvil?

<u>Solución</u>

La vida media del motor y del tren de transmisión es de 3 años, es decir $E(X) = \frac{1}{\beta} = 3$, despejando se tiene que el parámetro de la distribución es $\frac{1}{3}$.

X : tiempo transcurrido hasta la falla.

$X \sim \exp\left(x; \beta = \frac{1}{3}\right)$

$U(X)$: utilidad en función del tiempo transcurrido hasta la falla.

$$U(X) = \begin{cases} 1000 & X > 1 \text{ año} \\ 1000 - 250 = 750 & X \leq 1 \text{ año} \end{cases}$$

La utilidad esperada está dada por:

$$
\begin{aligned}
E[U(X)] &= 1000P\,[U(X)=1000] + 750P\,[U(X)=750] \\
&= 1000P(X>1) + 750P(X\le 1) = 1000[1-F_X(1)] + 750F_X(1) \\
&= 1000 - F_X(1)[1000-750] = 1000 - 250F_X(1) \\
&= 1000 - 250\left(1-e^{-\frac{1}{3}}\right) = 750 + 250e^{-\frac{1}{3}} = 929.13
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2: ¿Hay una densidad exponencial que cumple la siguiente condición? $P(X \le 2) = \frac{2P(X\le 3)}{3}$. Si es así encuentra el valor del parámetro de la distribución.

Solución

$$
\begin{aligned}
&P(X\le 2) = F_X(2) = \frac{2F_X(3)}{3} = \frac{2P(X\le 3)}{3} \\
&1-e^{-2\beta} = \frac{2}{3}\left(1-e^{-3\beta}\right) \\
&3\left(1-e^{-2\beta}\right) = 2\left(1-e^{-3\beta}\right) \\
&3-3e^{-2\beta} = 2-2e^{-3\beta} \\
&3-2 = 3e^{-2\beta} - 2e^{-3\beta} \\
&1 = 3e^{-2\beta} - 2e^{-3\beta}
\end{aligned}
$$

Lo cual ocurre sólo si $\beta = 0$, pero una de las condiciones de la definición de la f.d.p exponencial es que el parámetro debe ser estrictamente mayor que cero, es decir no existe una distribución exponencial que cumpla la condición pedida.

Ejemplo 3: Se sabe que un componente electrónico tiene una vida útil representada por una densidad exponencial con tasa de falla de 10^{-5} fallas por hora. ¿Cuál es la fracción de componentes que fallan antes de su vida media?

Solución

La fracción de componentes de interés coincide con la probabilidad de que un componente falle antes de su vida esperada, por lo tanto procedemos como sigue:

X : vida útil del componente.
$X \sim \exp\left(x;10^{-5}\right)$

La tasa de falla es $\beta = 10^{-5}$ por lo tanto $E(X) = \frac{1}{\beta} = 10^{5}$.

Entonces $P\left(X < \frac{1}{\beta}\right) = P\left(X < 10^{5}\right) = 1 - e^{-10^{-5}(10^{5})} = 1 - e^{-1} = 0.632$

Ejemplo 4: Supón que se quiere decidir entre dos procesos de manufactura para fabricar cierto componente. Con el proceso *A*, producir un componente cuesta *C* dólares, con el proceso *B*, producir un componente cuesta kC dólares, con $k > 1$. El tiempo de vida de los componentes se distribuye exponencialmente con una tasa de $\frac{1}{200}$ fallas por hora para el proceso *A*. Los componentes producidos con el proceso *B* tienen una vida útil distribuida exponencialmente con una tasa de $\frac{1}{300}$ fallas por hora. Debido a una cláusula de garantía, si un componente dura menos de 400 hrs, el fabricante debe pagar una multa de M dólares. ¿Cuál proceso escogerías?

<u>Solución</u>

X : Vida útil del componente.
C_i : Costo bajo el proceso *i*, con $i = A, B$.

$$X_A \sim \exp\left(x_A; \beta_A = \frac{1}{200}\right)$$
$$X_B \sim \exp\left(x_B; \beta_B = \frac{1}{300}\right)$$

$$C_A = \begin{cases} C & X \geq 400 \text{ hrs.} \\ C + M & X < 400 \text{ hrs.} \end{cases}$$

$$C_B = \begin{cases} kC & X \geq 400 \text{ hrs.} \\ kC + M & X < 400 \text{ hrs.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(C_A) &= CP(X \geq 400) + (C+M)P(X < 400) \\ &= C(1 - F_X(400)) + (C+M)F_X(400) \\ &= C - CF_X(400) + (C+M)F_X(400) \\ &= C + [C + M - C]F_X(400) = C + MF_X(400) \end{aligned}$$
$$E(C_A) = C + M\left(1 - e^{-\frac{400}{200}}\right) = C + M\left(1 - e^{-2}\right)$$

Para el proceso *B* se tiene que:

$$\begin{aligned} E(C_B) &= kCP(X \geq 400) + (kC+M)P(X < 400) \\ &= kC(1 - F_X(400)) + (kC+M)F_X(400) \\ &= kC + MF_X(400) = kC + M\left(1 - e^{-\frac{400}{300}}\right) = kC + M\left(1 - e^{-1.33}\right) \end{aligned}$$

M es una multa fija que pagan ambos procesos en caso de que la vida útil del componente sea menor a 400 hrs. Si el costo esperado de producción bajo el proceso *A* es menor que el costo esperado bajo el proceso *B*, se prefiere el proceso *A*, lo cual ocurre si:

$$C+M\left(1-e^{-2}\right)<kC+M\left(1-e^{-1.33}\right)$$
$$C+M\left(1-e^{-2}\right)-M\left(1-e^{-1.33}\right)<kC$$
$$\frac{1}{C}\left[C+M\left(1-e^{-2}-1+e^{-1.33}\right)\right]<k$$
$$1+\frac{M}{C}\left(e^{-1.33}-e^{-2}\right)<k$$
$$1+0.129\frac{M}{C}<k$$

Ejemplo 5: Supón que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y que $X_i \sim \exp(x_i;\beta_i)$ con $i=1,\ldots,k$. Si $Y=\min(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ ¿Cómo se distribuye *Y*?

Solución

$X_i \sim \exp(x_i;\beta_i)$, entonces para $t>0$

$$\begin{aligned}P(Y>t) &= P(X_1>t, X_2>t, \ldots, X_k>t)\\ &= P(X_1>t)P(X_2>t)\cdots P(X_k>t)\\ &= \left(1-F_{X_1}(t)\right)\left(1-F_{X_2}(t)\right)\cdots\left(1-F_{X_k}(t)\right)=e^{-t\beta_1}e^{-t\beta_2}\cdots e^{-t\beta_k}=e^{-[\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k]t}\end{aligned}$$

Por lo tanto $Y\sim\exp\left(y;\beta=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right)$.

Ejemplo 6: Supón que cierto sistema contiene tres componentes que funcionan independientemente unos de otros y que están conectados en serie de forma que el sistema falla tan pronto como uno de los componentes falla. Si el tiempo de vida de cada uno de los componentes medido en horas se distribuye exponencialmente con parámetros 0.001, 0.003 y 0.006 respectivamente. Determina la probabilidad de que el sistema no falle antes de 100 horas.

Solución

X_i: tiempo de vida del *i*-ésimo componente.
$X_1 \sim \exp(x_1;0.001)$
$X_2 \sim \exp(x_2;0.003)$
$X_3 \sim \exp(x_3;0.006)$
X : tiempo de vida del sistema.

Debido a la construcción del sistema, su tiempo de vida es $X=\min(X_1, X_2, X_3)$. Entonces $X\sim\exp(x;0.01)$ ya que $0.001+0.003+0.006=0.01$.
Por lo tanto $P(X>100)=1-F_X(100)=1-\left(1-e^{-100(0.01)}\right)=e^{-1}=0.3678$

Ejemplo 7: Si un sistema electrónico contiene *n* componentes similares que funcionan independientemente unos de otros y están conectados en serie (el sistema falla tan pronto como uno de los componentes falla). Si el tiempo de vida de cada componente medido en horas, tiene una distribución exponencial con media μ. Encuentra la media y la varianza del tiempo de espera hasta que falle el sistema.

Solución

X_i: tiempo de vida del *i*-ésimo componente.

$X_i \sim \exp\left(x_i; \frac{1}{\mu}\right)$ con $i = 1,...,n$.

X : tiempo de vida del sistema.

$X = \min(X_1, \ldots, X_n)$

$X \sim \exp\left(x; \frac{n}{\mu}\right)$

Entonces; $E(X) = \frac{1}{\beta} = \frac{\mu}{n}$ y $V(X) = \frac{1}{\beta^2} = \frac{\mu^2}{n^2}$

3.3.2 Distribución Gamma.

Para esta distribución necesitamos recordar la función gamma por lo que es indispensable comenzar con la siguiente:

Definición: La función gamma para $\alpha > 0$ se define como $\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx}$

Nota: Para que la integral converja se requiere $x > 0$.

La función gamma tiene las siguientes propiedades:

1) Si $\alpha > 1$ entonces $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

2) Si $n \in Z^+$ entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$

Por este motivo también se conoce a esta función como función factorial generalizada.

Demostración

1) $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

Integrando por partes con $u = x^{\alpha-1}$, $du = (\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$, $dv = e^{-x}dx$ y $v = -e^{-x}$

$$\Gamma(\alpha) = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx = (\alpha-1)\int_0^\infty x^{(\alpha-1)-1}e^{-x}dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \quad \blacklozenge$$

2) Aplicando repetidas veces la propiedad uno se tiene que:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1)$$

Pero $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$ Entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\blacklozenge$

Los intervalos de tiempo entre dos fallas en un proceso de producción, los intervalos de tiempo entre dos llegadas a la caja en un banco, en general los tiempos entre dos ocurrencias de un evento son variables aleatorias continúas que se pueden modelar con la función de densidad tipo Gamma. Se dice que la v.a X tiene una distribución de probabilidad Gamma con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y se escribe $X \sim Gamma(x;\alpha,\beta)$ o equivalentemente $X \sim \Gamma(x;\alpha,\beta)$ si su **f.d.p** está definida como:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

La f.g.m para esta distribución está dada por:

$$\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx$$

Tomando $u = (\beta - t)x$ se tiene que $x = \dfrac{u}{\beta - t}$ y que $du = (\beta - t)dx$ entonces $dx = \dfrac{du}{\beta - t}$

Sustituyendo en la integral:

$$\psi_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta - t}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{\beta - t} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\beta-t)^{\alpha-1}} \frac{1}{(\beta-t)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta-t)^\alpha}$$

$$\boxed{\psi_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha}$$

Media y varianza.

$$\mu_X = E(X) = \psi'_X(t=0) = \alpha\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha-1} \beta(\beta-t)^{-2}\Bigg|_{t=0} \quad \therefore \quad \boxed{\mu_X = \frac{\alpha}{\beta}}$$

El segundo momento de la variable es:

$$E\left(X^2\right) = \psi''_X(t=0) = (\alpha\beta^\alpha)(\alpha+1)(\beta-t)^{-\alpha-2}\Big|_{t=0} = \alpha\beta^\alpha(\alpha+1)\beta^{-\alpha-2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

Entonces $\sigma^2 = V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^2 + \alpha - \alpha^2}{\beta^2}$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}}$$

Ejercicio: Si α es un entero positivo, encuentra la probabilidad de que la v.a $X \sim Gamma(x;\alpha,\beta)$ sea mayor que el número x.

<u>Solución</u>

$$P(X > x) = \int_x^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$

Integrando por partes con $u = x^{\alpha-1}$, $du = (\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$, $dv = e^{-\beta x}dx$ y $v = \frac{-e^{-\beta x}}{\beta}$

Y tomando $A = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, tenemos que:

$$P(X > x) = A\left[-\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}\bigg|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\beta}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx \right]$$
$$= A\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_x^\infty x^{\alpha-2}e^{-\beta x}dx \right]$$

Integrando nuevamente por partes con:

$$u = x^{\alpha-2}, \qquad du = (\alpha-2)x^{\alpha-3}dx$$
$$dv = e^{-\beta x}dx, \qquad v = \frac{-e^{-\beta x}}{\beta}$$
$$uv - \int v du = \frac{x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{\alpha-2}{\beta}\int_x^\infty x^{\alpha-3}e^{-\beta x}dx$$

$$= A\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^2}\int_x^\infty x^{\alpha-3}e^{-\beta x}dx \right]$$

$$= A\left\{ \frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^2}\left[\frac{x^{\alpha-3}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{\alpha-3}{\beta}\int_x^\infty x^{\alpha-4}e^{-\beta x}dx \right] \right\}$$
$$= A\left\{ \frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}e^{-\beta x}}{\beta^3} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{\beta^3}\int_x^\infty x^{\alpha-4}e^{-\beta x}dx \right\}$$
$$= A\left\{ \frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2} + \cdots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(\alpha-1))}{\beta^{\alpha-1}}\int_x^\infty x^{\alpha-\alpha}e^{-\beta x}dx \right\}$$

Pero $\int_x^\infty e^{-\beta x}dx = \frac{-e^{-\beta x}}{\beta}\bigg|_x^\infty = \frac{e^{-\beta x}}{\beta}$

Entonces:

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta} + \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}e^{-\beta x}}{\beta^3} + \cdots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(1)}{\beta^{\alpha-1}}\frac{e^{-\beta x}}{\beta}\right]$$

Sustituyendo el valor de *A*, llegamos a:

$$P(X > x) = \frac{e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \frac{e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} + \frac{e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!} + \cdots + e^{-\beta x}$$

$$\boxed{P(X > x) = \sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-\beta x}(\beta x)^k}{k!}} \quad (*)$$

Recuerda que la f.d.p de la Poisson es de la forma $f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Entonces, (*) es precisamente la probabilidad acumulada de la Poisson con parámetro $\lambda = \beta x$, evaluada en el número $(\alpha - 1)$. Que escribimos como $P(X > x) = F_X^P(\alpha - 1)$.

Finalmente se tiene que la función de distribución acumulada para la Gamma, está dada por:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - F_X^P(\alpha - 1)}$$

Observa que tomando $\alpha = 1$ en la distribución Gamma, $\Gamma(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} = \beta e^{-\beta x} = \exp(x;\beta)$ se obtiene la f.d.p exponencial con parámetro β.

Ejemplo 1: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ tienen una distribución exponencial con parámetro β y son independientes unas de otras. ¿Cómo se distribuye la v.a $X = \sum_{i=1}^{\alpha} X_i$?

<u>Solución</u>

Como las variables aleatorias son independientes, se usa la propiedad de que la f.g.m de una suma de variables aleatorias independientes es el producto de las f.g.m de cada una de las variables aleatorias que se están sumando;

$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{\alpha}\psi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{\alpha}\frac{\beta}{\beta - t} = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$ es la f.g.m para una Gamma con parámetros α y β.

Entonces, *suma de α variables aleatorias, independientes distribuidas exponencialmente con parámetro β es una* $\Gamma(x;\alpha,\beta)$.

Ejemplo 2: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y $X_i \sim \Gamma(x_i; \alpha_i, \beta)$ para $i = 1,...,k$. Encuentra la distribución de la v.a $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

<u>Solución</u>

$$\psi_{X_i}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_i}$$

$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{k} \psi_{X_i}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}$$

Entonces $X \sim \Gamma\left(x; \alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \beta\right)$.

Ejemplo 3: Un sistema redundante opera de la siguiente manera. Cuando la unidad 1 falla el tablero de decisiones pone la unidad 2 hasta que falla y entonces activa la unidad 3. El interruptor de decisión se supone perfecto, por lo que la vida del sistema puede representarse como la suma de las vidas de los subsistemas. Si las vidas de los subsistemas son independientes entre sí y cada subsistema tiene una vida X_j, $j = 1, 2, 3$, con densidad $g(x_j) = \frac{e^{-\frac{x_j}{100}}}{100}$, $x_j \geq 0$. Encuentra la función de confiabilidad $R(x)$ del sistema, donde $R(x) = P(\text{El sistema opere al menos } x \text{ horas}) = P(X \geq x) = 1 - F_X(x)$.

<u>Solución</u>

X_i: Vida del subsistema *i* con $i = 1, 2, 3$.
X : Vida del sistema.
$X = X_1 + X_2 + X_3$.

Si $X_i \sim \exp\left(x_i; \frac{1}{100}\right)$, entonces $X \sim \Gamma\left(x; \alpha = 3, \beta = \frac{1}{100}\right)$ y por lo tanto la confiabilidad del sistema es:

$$R(x) = 1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x}(\beta x)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-0.01x}(0.01x)^k}{k!} = e^{-0.01x}\left(1 + 0.01x + 0.00005x^2\right)$$

Ejemplo 4: Una caja de caramelos contiene 24 barras. El tiempo entre pedidos por barra se distribuye exponencialmente con media 10 minutos. Supón que se vende el primer caramelo en cuanto se abre la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja abierta a las 8:00 A.M. se haya terminado al medio día?

Solución

X_i: Tiempo entre pedidos $i = 1, 2, \ldots, 23$.
X : tiempo en que se acaba la caja.

$X = \sum_{i=1}^{23} X_i$, pero $X_i \sim \exp(x_i; 6)$ ya que 1 hora tiene 60 minutos.

Hay independencia entre pedidos, y de las 8:00 a las 12:00 hay 4 horas. Se desea encontrar la $P(X \le 4)$.
Sabemos que $X \sim \Gamma(x; \alpha = 23, \beta = 6)$, y que la distribución acumulada de probabilidad de la distribución Gamma queda en términos de la distribución acumulada de una Poisson con parámetro $\lambda = \beta x = 6(4) = 24$, así que:

$$F_X(4) = 1 - \sum_{k=0}^{22} \frac{e^{-24}(24)^k}{k!} = 1 - F_X^P(22) = 1 - 0.3917 = 0.6083$$

Ejemplo 5: El tiempo de reabastecimiento de cierto producto cumple con la distribución Gamma con media 40 y varianza 400. Determina la probabilidad de que un pedido se envíe dentro de los 20 días posteriores a su solicitud.

Solución

X : Tiempo de reabastecimiento del producto en días.
$X \sim \Gamma(x; \alpha = 4, \beta = 0.1)$

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} = 40 \text{ y } \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} = \frac{40}{\beta} = 400$$

Entonces $\alpha = 4$ y $\beta = 0.1$

$P(X < 20) = F_X(20) = 1 - F_X^P(3)$ con $\lambda = \beta x = 0.1(20) = 2$
$P(X < 20) = 0.1433$

3.4 DISTRIBUCIÓN NORMAL.

Es una de las distribuciones más importantes en estadística, es simétrica respecto a su media y casi el 98% de la distribución se encuentra entre $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$, en gran parte de las aplicaciones se supone normalidad en las variables.
Se dice que la v.a X tiene una distribución normal o Gaussiana con parámetros μ y σ^2 y se escribe $X \sim N\left(x;\mu,\sigma^2\right)$ si su **f.d.p** es de la forma:

$$f_X(x)=\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad \text{con} -\infty < x < \infty,\ \ -\infty < \mu < \infty,\ \ \sigma^2 > 0$$

Ejercicio: Demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} N(x;\mu,\sigma^2)dx = 1$

<u>**Solución**</u>

Sea $\mathrm{I}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx$
Si probamos que $\mathrm{I}^2=1$, se tendría que $\mathrm{I}=1$ y habremos terminado.

Haciendo el cambio de variable $u=\frac{x-\mu}{\sigma}$ $\therefore$ $du=\frac{dx}{\sigma}$, sustituyendo en I nos queda:

$$\mathrm{I}=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad \text{entonces} \quad \mathrm{I}^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\right)$$

$$\mathrm{I}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}dudv$$

Trabajando con coordenadas polares,

Si $u=rCos\theta$ y $v=rSen\theta$
$u^2+v^2=r^2Cos^2\theta+r^2Sen^2\theta=r^2\left(Cos^2\theta+Sen^2\theta\right)=r^2$

$$\begin{vmatrix}\partial_r u & \partial_\theta u\\ \partial_r v & \partial_\theta v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Cos\theta dr & -rSen\theta d\theta\\ Sen\theta dr & rCos\theta d\theta\end{vmatrix}=rCos^2\theta drd\theta+rSen^2\theta drd\theta=rdrd\theta\left(Cos^2\theta+Sen^2\theta\right)=rdrd\theta$$

$$\mathrm{I}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta$$

Tomando $u=-\frac{r^2}{2}$ y $du=-rdr$

$$\mathrm{I}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}\right]d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi}\theta\Big|_0^{2\pi} = 1$$

Observa que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ es una normal con media 0 y varianza 1. Esta normal recibe el nombre de normal estándar y se denota como $Z \sim N(0,1)$.

3.4.1 Estandarización y Cálculo de Probabilidades Utilizando las Tablas.

La v.a Normal estándar se representa con la letra zeta y se escribe $Z \sim N(z;0,1)$ o simplemente $Z \sim N(0,1)$, los valores de la distribución acumulada de la normal estándar se encuentran tabulados en unas tablas conocidas como tablas normales.

Función generadora de momentos.

$$\psi_X(x) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

Tomando $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ y $du = \frac{dx}{\sigma}$

$$\psi_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\mu+\sigma u)}e^{-\frac{1}{2}u^2}\sigma du = \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2-2t\sigma u\right)}du$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto en la exponencial.

$$\psi_X(t) = \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2-2t\sigma u+t^2\sigma^2-t^2\sigma^2\right)}du = \frac{e^{t\mu}e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-t\sigma)^2}du$$

$z = u - t\sigma$ y $dz = du$

$$\psi_X(t) = \exp\left(t\mu + \tfrac{1}{2}t^2\sigma^2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\tfrac{1}{2}z^2\right)dz\right]$$

Observa que el término entre corchetes es una normal estándar por lo que la integral tiene el valor de 1 por ser una f.d.p. así que la f.g.m de la normal es: $\boxed{\psi_X(t) = \exp\left(t\mu + \tfrac{1}{2}t^2\sigma^2\right)}$

Media y varianza.

$$E(X)=\psi'_X\,(t=0)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\left[\mu+\frac{\sigma^2 2t}{2}\right]\Bigg|_{t=0}=e^0(\mu+0)=\mu$$

$$E\left(X^2\right)=\psi''_X\,(t=0)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\sigma^2+\left[\mu+\sigma^2 t\right]\,e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\left(\mu+\sigma^2 t\right)\Bigg|_{t=0}=e^0\sigma^2+\mu e^0\mu=\sigma^2+\mu^2$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$$

Función de distribución acumulada.

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

Esta integral se tiene que hacer con métodos de integración numérica, pero se tabularon los valores para la normal estándar es decir para la normal con media cero y varianza 1. La distribución acumulada en z se denota por

$\phi(z)=F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$. Las tablas se conocen como tablas normales. Para consultarlas, primero se estandariza la distribución normal con media μ y σ^2, $N\left(x;\mu,\sigma^2\right)$ mediante la fórmula, $\boxed{z=\frac{x-\mu}{\sigma}}$.

Los valores originales de la variable se recuperan con la fórmula $x=z\sigma+\mu$.

Ejemplo 1: La resistencia al rompimiento en Newton de una tela sintética denotada por X se distribuye normal con media de 800 y varianza 144. El comprador de la tela requiere que esta tenga una resistencia de por lo menos 772N. Se selecciona al azar y se prueba una muestra de tela ¿Cuál es la probabilidad de que el comprador se lleve la tela?

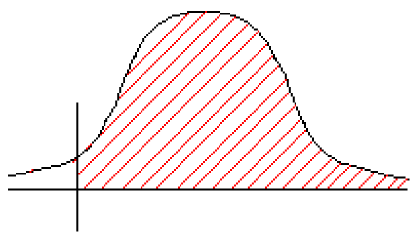
<u>Solución</u>

X : Resistencia de la tela al rompimiento.
$X\sim N\left(x;\mu=800,\sigma^2=144\right)$

Primero se estandarizan ambos lados de la desigualdad para poder buscar en tablas.

$$P(X\geq 772)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{772-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\geq\frac{772-800}{12}\right)=P(Z\geq -2.33)$$

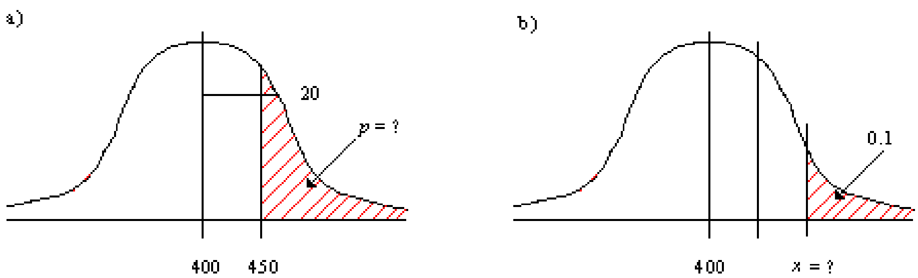
$$=1-\phi(-2.33)=1-0.0099=0.9901$$



Ejemplo 2: Se observó durante un largo período que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y en las reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución normal con una media de \$400 y una desviación estándar de \$20. Si el presupuesto para la próxima semana es de \$450.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?

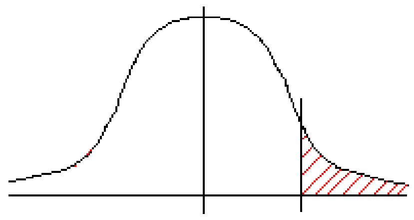
b) ¿De cuánto tendría que ser el presupuesto para reparaciones semanales y mantenimiento para que la cantidad presupuestada solamente sea rebasada con una probabilidad de 0.1?



<u>Solución</u>

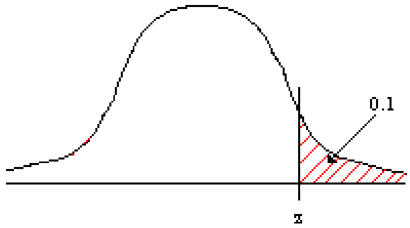
X : Cantidad semanal gastada.

$X \sim N(x; \mu = 400, \sigma^2 = 400)$



a) $P(X > 450) = P\left(Z \geq \dfrac{450-400}{20}\right) = P(Z \geq 2.5) = 1 - \phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$

b) Estoy buscando un valor x para la v.a tal que $P(X > x) = 0.1$. Al estandarizar la v.a hay un valor z para la normal estándar que corresponde a este valor de x. Es decir; $P(Z \geq z) = 0.1$.



Buscamos en las tablas el valor de z que corresponde a la probabilidad 0.1 y despejamos el valor de la v.a de interés de la fórmula de estandarización,

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \therefore \quad x = \mu + z\sigma$$

El valor de tablas es $z = 1.28$ por lo tanto $x = 400 + 1.28(20) = 425.6$.

Teorema: Si X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 y si $Y = aX + b$ donde a y b son constantes con a diferente de cero, entonces Y tiene una distribución normal con media $a\mu + b$ y varianza $a^2\sigma^2$.

<u>Demostración</u>

$$X \sim N(x; \mu, \sigma^2)$$
$$Y = aX + b$$
$$\psi_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{tb}E(e^{atX}) = e^{tb}\psi_X(at) = e^{tb}e^{at\mu + \frac{1}{2}a^2t^2\sigma^2} = \exp[(b + a\mu)t + \tfrac{1}{2}t^2(a^2\sigma^2)]$$

La f.g.m para la v.a Y corresponde a una normal con $\mu_Y = a\mu + b$ y $\sigma_Y^2 = a^2\sigma^2$.

Teorema: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_k$ son independientes y $X_i \sim N(x_i; \mu_i, \sigma_i^2)$ entonces $X_1 + \cdots + X_k$ tiene una distribución normal con media $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ y varianza $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2$.

<u>Demostración</u>

$$\psi_{X_i}(t) = e^{t\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sigma_i^2}$$
$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i$$
$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{k}\psi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} e^{t\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sigma_i^2} = \exp\left(t\sum_{i=1}^{k}\mu_i + \tfrac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2\right)$$

Que es precisamente la f.g.m para una normal con media $\mu_X = \sum_{i=1}^{k}\mu_i$ y varianza $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2$.

Corolario 1: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_k$ son independientes con $X_i \sim N(x_i; \mu_i, \sigma_i^2)$ y si $a_1, a_2, ..., a_k$ y b son constantes para las que al menos uno de los valores $a_1, a_2, ..., a_k$ es distinto de cero, entonces la variable $X = a_1X_1 + \cdots + a_kX_k + b$ tiene una distribución normal con media $\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_k\mu_k + b$ y varianza $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_k^2\sigma_k^2$.

Corolario 2: Supón que las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_k$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Sea la variable aleatoria $\overline{X}$ conocida como la media muestral. Entonces $\overline{X} \sim N\left(\overline{x}; \mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

<u>**Demostración**</u>

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ Por el corolario anterior se tiene que $\overline{X} \sim N\left(\overline{x}; \mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n}n\mu = \mu, \sigma_{\overline{X}}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Ejemplo 1: Un eje con diámetro exterior distribuido normalmente con media 1.2 y varianza 0.0016 se inserta en un cojinete de manguito que tiene un diámetro interior distribuido normalmente con media 1.25 y varianza 0.0009 ¿Cuál es la probabilidad de que el eje no quepa en el cojinete?

<u>**Solución**</u>

X : Diámetro exterior del eje.
Y : Diámetro interior del cojinete.

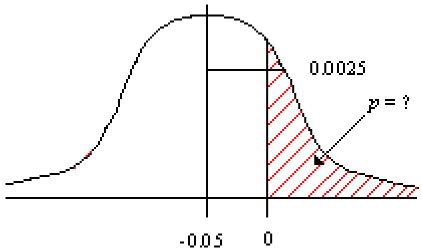
$X \sim N(x; \mu_X = 1.2, \sigma_X^2 = 0.0016)$
$Y \sim N(y; \mu_Y = 1.25, \sigma_Y^2 = 0.0009)$

Si el eje es más grande que el cojinete, entonces no cabe, por lo tanto la probabilidad de que el eje no quepa en el cojinete coincide con $P(X > Y)$, aplicando la teoría sobre suma de normales y estandarizando se tiene que:

$P(X > Y) = P(X - Y > 0) = P(W > 0)$

Con $W = X - Y$, entonces $W \sim N(w; \mu_W = 1.2 - 1.25 = -0.05, \sigma_W^2 = 0.0016 + 0.0009 = 0.0025)$.

Por lo tanto $P(W > 0) = P\left(Z > \frac{0 - (-0.05)}{\sqrt{0.0025}}\right) = P(Z > 1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$



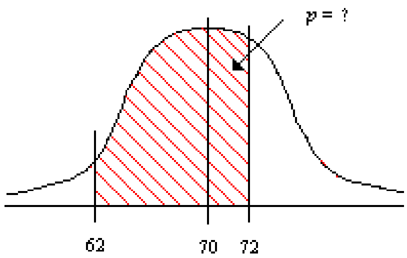
Ejemplo 2: La dureza de Rockwell de una aleación particular se distribuye normalmente con media de 70 y desviación estándar de 4.
a) Si un espécimen se acepta sólo si su dureza está entre 62 y 72. ¿Cuál es la probabilidad de que un espécimen elegido al azar tenga una dureza aceptable?
b) Si el intervalo de dureza aceptable es $(70-c, 70+c)$ ¿Para qué valor de c el 95% de los especimenes tendrían una dureza aceptable?
c) En el caso de que el intervalo aceptable sea el indicado en a) y la dureza de cada uno de 9 especimenes seleccionados al azar se determine en forma independiente ¿Cuál es el número esperado de especimenes aceptables de entre los 9?

Solución

X : Dureza de la aleación.
$X \sim N(x; \mu = 70, \sigma^2 = 16)$

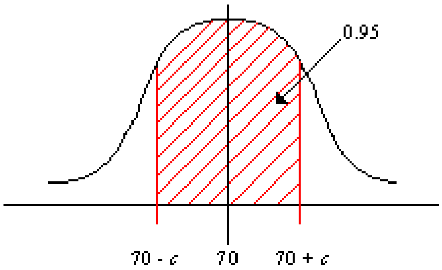
a) $P(62 < X < 72) = P\left(\frac{62-70}{4} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{72-70}{4}\right) = P(-2 < Z < 0.5)$

$$= \phi(0.5) - \phi(-2) = 0.69146 - 0.02275 = 0.66871$$



b) $P(70-c < X < 70+c) = P\left(\frac{70-c-70}{4} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{70+c-70}{4}\right) = P\left(\frac{-c}{4} < Z < \frac{c}{4}\right) = 0.95$

Debido a la simetría de la distribución y del intervalo se busca en tablas el valor de z que acumula una probabilidad de 0.975 el cual es $z = 1.96$ entonces, $1.96 = \frac{c}{4}$, por lo tanto $c = 4(1.96) = 7.84$



c) Sea Y : el número de especimenes aceptables.

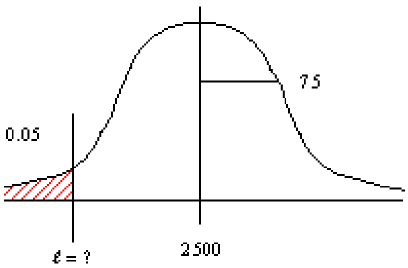
$\therefore \; Y \sim \text{bin}(y;\; n = 9,\; p = 0.66871)$

$E(Y) = np = 9(0.66871) = 6$

Ejemplo 3: Se sabe que cierta bombilla eléctrica tiene una salida que se distribuye normalmente con media de 2500 pie-candela y desviación estándar de 75 pie-candela. Determine un límite de especificación inferior tal que sólo 5% de las bombillas fabricadas sean defectuosas.

Solución

X : Salida de la bombilla.
$X \sim N\left(x; \mu = 2500, \sigma^2 = 75^2\right)$



$$P(X < l) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{l-2500}{75}\right) = P(Z < z) = 0.05$$

Buscando en tablas el valor de z que corresponde a la probabilidad acumulada de 0.05, se tiene que $z = \dfrac{l-2500}{75} = -1.65$ por lo tanto el límite inferior de especificación debe ser:
$l = 75z + 2500 = 75(-1.65) + 2500 = 2{,}376.25$ pie-candela.

3.4.2 TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE.

Si las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño *n* de una distribución con media μ y varianza σ^2 entonces para cualquier número fijo *x*.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \phi(x) \quad \text{con} \quad \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Interpretación: Si se selecciona una muestra aleatoria suficientemente grande de cualquier distribución con media μ y varianza σ^2 independientemente de si ésta distribución es discreta o continua, entonces la distribución de la variable aleatoria $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es aproximadamente normal estándar. Es decir $\overline{X}$ tiene una distribución aproximadamente normal con media μ y varianza $\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2$. Equivalentemente $\sum_{i=1}^{n} X_i$ se distribuye aproximadamente normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$.

Ya que $E(\overline{X}) = \mu = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;\therefore\; E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mu$

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;\therefore\; V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{n^2\sigma^2}{n} = n\sigma^2$$

Ejemplo 1: Supón que se lanza una moneda 900 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 495 caras?

<u>Solución</u>

Sean las variables aleatorias

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si cae cara en el } i\text{-ésimo tiro.} \\ 0 & \text{si cae cruz en el } i\text{-ésimo tiro.} \end{cases} \quad \text{con } i = 1,...,900.$$

Con $E(X_i) = p_i = \frac{1}{2}$ y $V(X_i) = p_i q_i = \frac{1}{4}$.

Sea $X = \sum_{i=1}^{900} X_i$ el número total de caras en los $n = 900$ lanzamientos. Entonces, por el Teorema Central del límite (TCL) se tiene que $X \sim N(x; \mu_X = n\mu, \sigma_X^2 = n\sigma^2)$, por lo tanto:

$$P(X > 495) = P\left(\frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > \frac{495 - 900(0.5)}{\sqrt{900(0.25)}}\right) = P(Z > 3) = 0.0013$$

Ejemplo 2: Supón que la distribución del número de defectos en un determinado rollo de tela es una distribución de Poisson con media 5 y que para una muestra aleatoria de 125 rollos se cuenta el número de defectos en cada rollo. Determina la probabilidad de que el número promedio de defectos por rollo en la muestra sea menor que 5.5.

Solución

X_i : Número de defectos en el i-ésimo rollo.

$\mu_i = 5$ y $\sigma_i^2 = 5$

$\overline{X}$: Número promedio de defectos por rollo en la muestra.

Por el TCL $\overline{X} \sim N\left(\overline{x}; \mu_{\overline{x}} = \mu = 5,\ \sigma_{\overline{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{5}{125} = 0.04\right)$.

Entonces: $P(\overline{X} < 5.5) = P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \dfrac{5.5 - 5}{\sqrt{0.04}}\right) = P(Z < 2.5) = 0.9938$

Ejemplo 3: Se empacan 250 piezas pequeñas en una caja. Los pesos de las piezas son variables aleatorias independientes con media de 0.5 libras y desviación estándar de 0.1 libras. Se cargan 20 cajas en una tarima. ¿Cuál es la probabilidad de que las piezas en la tarima excedan 2,510 libras de peso despreciando tanto el peso de la tarima como el de la caja?

Solución

X_i : Peso de la $i-$ésima pieza.

$250(20) = 5000$ piezas, entonces $n = 5000$.

$X_i \sim f_{X_i}\left(x_i; \mu_{X_i} = 0.5, \sigma_{X_i}^2 = (0.1)^2\right)$

Sea $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ el peso total de las piezas. Por el TCL se tiene que la distribución de esta v.a está dada por $X \sim N\left(\mu_X = 5000(0.5), \sigma^2 = 5000(0.1)^2\right)$.

$$P(X > 2510) = P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} > \frac{2510 - 2500}{7.07}\right) = P(Z > 1.41) = 1 - \phi(1.41) = 1 - 0.9207 = 0.079$$

3.4.3 APROXIMACIÓN NORMAL A LA BINOMIAL.

Si repetimos n ensayos Bernoulli de manera independiente, se tiene que $E(X_i) = p$ y $V(X_i) = pq$ con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si éxito en el } i\text{-ésimo ensayo.} \\ 0 & \text{si fracaso en el } i\text{-ésimo ensayo.} \end{cases}$$

el TCL garantiza que para n grande $\overline{X} \sim N\left(\bar{x}; \mu_{\bar{x}} = \mu = p, \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{pq}{n}\right)$

y que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(x; \mu_X = n\mu = np, \sigma_X = n\sigma^2 = npq)$

Si n es grande, y no podemos usar tablas binomiales para encontrar probabilidades de este tipo, se aproxima con una normal.

La distribución binomial es discreta y la normal es continua, ¿Qué se hace si se tiene interés en una probabilidad puntual de tipo $P(X = x)$? Para resolver el problema se usa la llamada *corrección por continuidad* que consiste en dar un margen de media unidad alrededor del valor puntual, por ejemplo $P(X = x) \approx P(x - 0.5 \le X \le x + 0.5)$.

$P(X \ge x) \approx P(X \ge x - 0.5)$

$P(X \le x) \approx P(X \le x + 0.5)$

$P(a \le X \le b) \approx P(a - 0.5 < X < b + 0.5)$

Ejemplo 1: En el muestreo de un proceso que produce artículos de los cuales 20% son defectuosos se selecciona una m.a de tamaño 100. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 15 artículos sean defectuosos en la muestra?

Solución

X : Número de artículos defectuosos en la muestra.

$p = 0.2 \quad q = 0.8 \quad n = 100$

$X = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(x; \mu_X = np = 20, \ \sigma_X^2 = npq = 16)$

La probabilidad sin corrección es $P(X \le 15) = P\left(Z \le \frac{15 - 20}{4}\right) = P(Z \le -1.25) = 0.1056$

Con corrección $P(X \le 15) = P(X \le 15.5) = P\left(Z \le \frac{15.5 - 20}{4}\right) = P(Z \le -1.125) = 0.1303$

Si comparamos estas probabilidades con la probabilidad correspondiente a la distribución exacta, es decir binomial, podemos observar que se obtiene una mejor aproximación al utilizar la corrección por continuidad.

Ver el cuadro siguiente:

Comparación de la $P(X \leq 15)$ según la distribución utilizada.

Binomial	Normal	Normal con corrección
0.12850551	0.10564977	0.13029452
Error	0.02285574	0.00178900

Como era de esperarse, es mejor la aproximación cuando se usa la corrección por continuidad observa que el error es más pequeño en este caso.

Ejemplo 2: Un encuestador considera que el 20% de los votantes en cierta área está a favor de una emisión de valores bursátiles. Si se seleccionan 64 votantes al azar de un gran número de votantes en esta área, aproxima la probabilidad de que la fracción de votantes en la muestra a favor de la emisión de los valores no difiera en más de 0.06 de la fracción que él supone es la correcta.

Solución

$p = 0.2$ (proporción de votantes a favor de la emisión), $pq = 0.16$ y $n = 64$

X_i :El $i-$ésimo votante está a favor de la emisión.

Se trata de una población Bernoulli con media $\mu = p = 0.2$ y varianza $\sigma^2 = pq = 0.2(0.8) = 0.16$.

$\overline{X}$: fracción de votantes en la muestra a favor de la emisión.

$$\overline{X} \sim N\left(\bar{x}; \mu_{\bar{x}} = \mu = 0.2,\ \ \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = 0.0025\right)$$

$$P\left(\left|\overline{X} - 0.2\right| \leq 0.06\right) = P(-0.06 \leq \overline{X} - 0.2 \leq 0.06)$$

$$= P\left(\frac{-0.06}{0.05} \leq \frac{\overline{X} - 0.2}{\sqrt{0.0025}} \leq \frac{0.06}{0.05}\right)$$

$$= P(-1.2 \leq Z \leq 1.2) = 0.7698$$

Ejemplo 3: Una línea aérea se da cuenta de que 5% de las personas que hacen sus reservaciones para cierto vuelo no se presentan. Si la aerolínea vende 160 boletos para un vuelo con solamente 155 asientos ¿Cuál es la probabilidad de que haya un asiento disponible para cada persona con reservación que se presenta para el vuelo?

Solución

P(La persona no llegue) = 0.05
P(La persona llegue) = 0.95
X_i :El $i-$ésimo pasajero llega.
Se trata de una población Bernoulli, siendo el éxito que la persona sí llegue al vuelo, entonces la media es $\mu = p = 0.95$ y la varianza $\sigma^2 = pq = 0.05(0.95) = 0.0475$.

X : Número de personas que llegan.

$$X = \sum_{i=1}^{160} X_i$$

$p = 0.95 \quad q = 0.05 \quad n = 160$

$$X \sim N\left(x; \mu_X = n\mu = 152, \quad \sigma_X^2 = n\sigma^2 = 7.6\right)$$

Sin corrección: $P(X \leq 155) = P\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{155-152}{\sqrt{7.6}}\right) = P(Z \leq 1.088) = 0.8617$

Con corrección: $P(X \leq 155.5) = P\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{155.5-152}{\sqrt{7.6}}\right) = P(Z \leq 1.27) = 0.8979$

Binomial: $P(X \leq 155) = 0.9061$

Ejemplo 4: Como un control de la abundancia relativa de cierta especie de pez en dos lagos, se hacen 50 observaciones con respecto a los resultados de la captura mediante trampas para cada lago. Para cada observación el experimento solamente anota si está o no la especie deseada. La experiencia previa ha mostrado que ésta especie aparecerá en las trampas del lago A aproximadamente 10% de las veces y en las trampas del lago B en aproximadamente 20% de las veces. Utiliza estos resultados para aproximar la probabilidad de que la diferencia entre las proporciones de las muestras difiera en a lo más 0.1 de la diferencia de las proporciones reales.

Solución

$p_A = 0.1$ proporción de peces en el pozo A.
$p_B = 0.2$ proporción de peces en el pozo B.
$\overline{X}_A$: proporción muestral de peces en el pozo A.
$\overline{X}_B$: proporción muestral de peces en el pozo B.
X : diferencia entre las proporciones muestrales.

$$\overline{X}_A \sim N\left(\overline{x}_A; \mu_{\overline{X}_A} = 0.1, \quad \sigma^2_{\overline{X}_A} = \frac{0.1(0.9)}{50}\right)$$

$$\overline{X}_B \sim N\left(\overline{x}_B ; \mu_{\overline{X}_B} = 0.2,\ \ \sigma^2_{\overline{X}_B} = \frac{0.2(0.8)}{50} \right)$$

$$X = \overline{X}_A - \overline{X}_B$$

$$X \sim N\left(x; \mu = 0.1 - 0.2 = -0.1,\ \ \sigma^2 = \frac{0.1(0.9) + 0.2(0.8)}{50} = 0.005 \right)$$

$$P\left(|X - (-0.1)| \le 0.1 \right) = P(-0.1 \le X - (-0.1) \le 0.1) = P\left(\frac{-0.1}{0.07071} \le \frac{X - (-0.1)}{0.07071} \le \frac{0.1}{0.07071} \right)$$

$$= P(-1.4142 \le Z \le 1.4142) = 0.8414$$

3.4.4 TEOREMA DE CHEBYSHEV.

Es de gran ayuda cuando no conocemos la f.d.p exacta de la v.a, pero conocemos los valores para su media y su varianza. Por ser desconocida la f.d.p no podemos encontrar probabilidades exactas de cualquier evento, pero este teorema pone una cota para la probabilidad de que la v.a se encuentre dentro de k veces su desviación estándar respecto a la media.

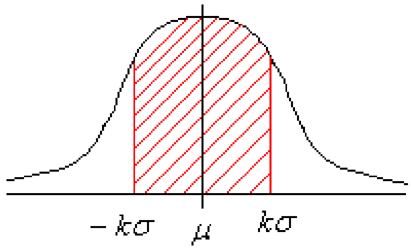
Teorema._ Sea X una v.a (discreta o continua) con f.d.p desconocida con media μ y varianza σ^2, para $k > 0$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

restando μ en todas partes dentro del paréntesis se tiene que $P\left(-k\sigma < X - \mu < k\sigma \right) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$

es decir $P\left(|X - \mu| < k\sigma \right) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$ o equivalentemente $P\left(|X - \mu| \ge k\sigma \right) \le \frac{1}{k^2}$.

Observación: No conocemos la f.d.p de la v.a y por lo tanto el valor de la probabilidad exacta de que el valor de la v.a está entre $\pm k$ desviaciones estándar de la media es desconocido, pero el Teorema de Chebyshev nos dice que no puede ser más chico que $1 - \frac{1}{k^2}$.



Ejemplo 1: La gerente de un taller de reparaciones no conoce la distribución de probabilidad del tiempo que se requiere para completar un trabajo. Sin embargo, de acuerdo con el desempeño pasado, ella ha podido estimar la media y la varianza como 14 días y 2 (días)^2, respectivamente. Encuentra un intervalo en el que la probabilidad de que un trabajo se termine en ese tiempo sea de 0.75.

Solución

X : tiempo para completar el trabajo.
$X \sim f_X\left(x; \mu = 14, \quad \sigma^2 = 2\right)$

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0.75 \quad \therefore \quad k^2 = 4 \quad \text{y} \quad k = 2$$

$$\mu \pm k\sigma = 14 \pm 2\sqrt{2}$$

El intervalo es [11, 17] días.

Ejemplo 2: El servicio postal requiere, en promedio, 2 días para entregar una carta en una Ciudad. La varianza se estima como 0.4 (días)^2. Si un ejecutivo desea que el 99% de sus cartas se entreguen a tiempo, ¿Con cuánta anticipación las debe depositar en el correo?

Solución

X : tiempo de entrega de una carta.
$\mu = 2$ días.
$\sigma^2 = 0.4$ días^2

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0.99 \quad \therefore \quad k = 10$$

$$\mu \mp k\sigma = 2 \mp 10\sqrt{0.4} = [-4.3, 8.3]$$

Para garantizar que las cartas lleguen a tiempo debe mandarlas con 8 días de anticipación.

3.5.1 DISTRIBUCION MUESTRAL JI-CUADRADA.

Cuando se toma una muestra aleatoria de tamaño *n* de una población de tamaño N con f.d.p $f_X(x)$, cada una de las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ que conforman la muestra son independientes y con la misma distribución. Cualquier función de estas variables sigue siendo una variable aleatoria que debe tener una f.d.p propia, que se puede deducir de la distribución conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$, que conforman la muestra aleatoria, por esta razón se denomina a esta f.d.p como distribución muestral.
Estas distribuciones muestrales son indispensables en las técnicas estadísticas más usadas en la práctica diaria tales como los intervalos de confianza, prueba de hipótesis, prueba de independencia entre variables, análisis de varianza, entre otras.

Definición: Un **estadístico** es cualquier función de una muestra aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_n$.

La media muestral $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y la varianza muestral $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ son ejemplos de estadísticos.

Definición: Los **grados de libertad** $g.l$ para cualquier estadístico es el número de datos que pueden variar libremente al calcular ese estadístico.

Por ejemplo, la media muestral no tiene restricción alguna por esta razón los n datos pueden variar libremente, es decir $\bar{x}$ tiene n $g.l.$, pero la suma de las desviaciones de los datos a su media debe ser cero, es decir $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$, por esta razón uno de los datos esta sujeto al valor de la suma de los $(n-1)$ restantes y con esto la varianza muestral tiene $(n-1)$ $g.l$.

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL JI-CUADRADA.

Si X es una v.a con distribución gamma con parámetros $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{n}{2}$ con n entero positivo, entonces se dice que X tiene una distribución llamada ji-cuadrada con *n* grados de libertad y se denota como $X \sim \chi_n^2$.

Su f.d.p es de la forma $f_X(x) = \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)}$, $x > 0$. La media y la varianza de la distribución son $E(X) = n$ y $V(X) = 2n$ respectivamente.

En esta distribución n se conoce como el parámetro de forma. Los valores de la distribución de probabilidad acumulada se encuentran tabulados en tablas.

Observa que si la ji-cuadrada tiene dos grados de libertad, se convierte en una exponencial con parámetro $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto la distribución gamma con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$, la distribución χ_2^2 y la distribución exponencial con parámetro $\beta = \frac{1}{2}$ son exactamente la misma distribución.

PARA LEER LAS TABLAS.

La notación $\chi^2_{\alpha,g.l}$ representa el valor de la v.a ji-cuadrada con $g.l$ grados de libertad que deja a la derecha una cola (probabilidad) de α.
Por ejemplo $\chi^2_{0.025,10} = 20.483$ indica que la probabilidad de que la v.a ji-cuadrada con 10 $g.l$ sea mayor que 20.483 es de 0.025, es decir $P\left(\chi^2_{10g.l} > 20.483\right) = 0.025$.

Generalmente las tablas de la distribución ji-cuadrada tienen como encabezado de las columnas los valores de α (probabilidad en la cola derecha de la distribución) y como encabezado de las filas los grados de libertad, lo que tenemos que hacer es buscar el número que se localiza en la intersección de la columna correspondiente a la probabilidad de interés y la fila correspondiente a los $g.l$ de interés y ese es el valor de la ji-cuadrada que estamos buscando.
En el ejemplo anterior buscamos la intersección de la columna encabezada por 0.025 con la fila encabezada por 10 y ahí se localiza el número 20.483.

Tabla de distribución ji-cuadrada.

	Probabilidad de cola derecha
$g.l$	**0.025**
10	**20.483**

Ejercicio: Verificar en las tablas los siguientes valores:

a) $\chi^2_{0.975,10} = 3.247$

b) $\chi^2_{0.01,25} = 44.314$

c) $\chi^2_{0.975,35} = 20.569$

d) $\chi^2_{0.995,29} = 13.1211$

e) $\chi^2_{0.95,60} = 43.1879$

f) $\chi^2_{0.01,17} = 33.4087$

g) $\chi^2_{0.025,50} = 71.4202$

Con Excel:

También podemos encontrar estos valores en Excel, con la instrucción "= *prueba.chi.inv(*α*,g.l)*" donde α es la probabilidad que queda en la cola derecha de la distribución ji-cuadrada y $g.l$ son los grados de libertad.
Por ejemplo; la instrucción $=$ *prueba.chi.inv(*$0.975,10$*)* reporta como resultado el valor 3.247 lo cual significa que $P\left(\chi^2_{10} > 3.247\right) = 0.975$.

3.5.2 DISTRIBUCION MUESTRAL t de Student.

Estrechamente relacionada con muestras aleatorias de una distribución normal. Si Y y Z son dos variables aleatorias independientes tales que $Y \sim N\left(y; \mu = 0, \sigma^2 = 1\right)$ y $Z \sim \chi^2_n$, entonces la v.a $t = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{Z}{n}}}$ tiene una distribución que se llama t de Student (en honor a su autor quien firmó sus investigaciones de esta distribución con el seudónimo de Student) con n grados de libertad, con f.d.p dada por la expresión.

$$t \sim t_n(t;n) = \frac{\Gamma\left[(n+1)/2\right]}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \qquad -\infty < t < \infty$$

Esta distribución también es simétrica y cuando n tiende a infinito la distribución t tiende a la normal estándar, la diferencia entre estas distribuciones es que la t de Student tiene colas más pesadas, es decir se acumula más probabilidad en las colas.

Existen tablas de la distrubición t de Student y para leerlas se necesita la probabilidad de la cola derecha y los grados de libertad.
La expresión $t_{\alpha,g.l}$ representa al valor de la distribución t de Student que deja a la derecha una probabilidad igual a α y que tiene $g.l$ grados de libertad.

Uno de los problemas más frecuentes en estadística es la comparación entre medias de dos poblaciones y en el caso de que no se cuente con toda la información poblacional o bien el tamaño de la muestra sea pequeño se usa esta distribución y por esta razón la prueba de comparación de medias para muestras pequeñas se conoce también como "prueba t".

PARA LEER LAS TABLAS.

La tabla de distribución t de Student también tiene columnas y filas, en las columnas se localiza la probabilidad de cola derecha y en las filas se presentan los grados de libertad.
Si queremos buscar el valor de la distribución t de Student con 9 $g.l$ que deja a la derecha una cola de 0.025, buscamos en la tabla el número localizado en la intersección de la columna encabezada por 0.025 con la fila encabezada por 9 encontrando así el número 2.262.

Tabla de distribución *t*-Student.

Probabilidad de cola derecha

$g.l$	**0.025**
9	**2.2622**

Esto significa que $P\left(t^2_{0.025,9} > 2.2622\right) = 0.025$.

Ejercicio: Verificar en las tablas los siguientes valores:

a) $t^2_{0.025,25} = 2.06$

b) $t^2_{0.05,24} = 1.711$

c) $t^2_{0.005,10} = 3.169$

d) $t^2_{0.1,17} = 1.33$

Con Excel:
La función que usa Excel para la distribución t de Student está en base a dos colas, es decir reparte la distribución de interés entre dos, indicando así que se debe repartir en ambas colas (inferior y superior). Por lo tanto la instrucción que usaremos es "$=$ *distr.t.inv(*2α*,g.l)*" donde α es la probabilidad en la cola derecha y $g.l$ son los grados de libertad de la distribución.
La instrucción "$=$ *distr.t.inv(*$2*0.025, 25$*)*" devuelve el valor 2.06 lo cual significa que $P\left(t_{25} > 2.06\right) = 0.0.025$.

Para verificar los incisos anteriores en Excel podemos ayudarnos con el cuadro siguiente:

α	**2*α**	***g.l***	***t*-Student**	**Instrucción**	**Resultado**
0.025	0.05	25	2.060	= distr.t.inv(0.05, 25)	2.060
0.05	0.1	24	1.711	= distr.t.inv(0.1, 24)	1.711
0.005	0.01	10	3.169	= distr.t.inv(0.01, 10)	3.169
0.1	0.2	17	1.333	= distr.t.inv(0.2, 17)	1.333

3.5.3 DISTRIBUCION MUESTRAL F.

Se llama así en honor a R.A Fisher quién la estudió ampliamente. Tiene gran aplicación al probar hipótesis sobre dos o más distribuciones normales.
Supón que tienes una población de tamaño N y que consideras todas la muestras aleatorias posibles de tamaños n_1 y n_2 y para cada una de estas muestras encuentras las varianzas muestrales s_1^2 y s_2^2 luego defines la v.a $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ y encuentras la f.d.p para esta v.a. Con este procedimiento se obtiene la distribución muestral llamada F, que varía con los grados de libertad. Observa que hay dos grados de libertad jugando en esta distribución, los que corresponden al numerador y los que corresponden al denominador.
Esta distribución se usa para hacer inferencias sobre las varianzas poblacionales cuando se tienen dos muestras aleatorias.

La forma de la f.d.p es: $f_X(x;\nu_1,\nu_2) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)\right]\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_2\right)} \frac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_1 x+\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$

Definición: Si U y V son dos variables aleatorias independientes tales que $U \sim \chi^2_{\nu_1}$ y $V \sim \chi^2_{\nu_2}$ entonces la v.a $F_{\nu_1,\nu_2} = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$ tiene una distribución llamada F con ν_1 $g.l$ en el numerador y ν_2 $g.l$ en el denominador y se escribe $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}(x;\nu_1,\nu_2)$.

PARA LEER LAS TABLAS.

Se necesita la probabilidad de la cola derecha α, los grados de libertad del numerador ν_1 y los grados de libertad del denominador ν_2. La notación F_{α,ν_1,ν_2} representa el valor de la v.a F con ν_1 $g.l$ en el numerados y ν_2 $g.l$ en el denominador que deja a la derecha una cola (probabilidad) de α.
Por ejemplo $F_{0.025,30,14} = 2.73$ indica que la probabilidad de que la v.a F con 30 $g.l$ en el numerador y 14 $g.l$ en el denominador sea mayor que 2.73 es de 0.025, es decir $P(F_{30,14} > 2.73) = 0.025$.
Las tablas para esta distribución tienen columnas encabezadas por los grados de libertad correspondientes al numerador y filas encabezadas por los grados de libertad correspondientes al denominador. El valor de α en algunas tablas se presenta como encabezado de una sección, es decir:

Tabla de distribución F

$\alpha = 0.01$	$g.l$ del numerador			
$g.l$ del denominador	1	2	…	20
1	4052.18	4.61		6208.73
2	98.50	4.83		99.45
⋮				
20	8.10	8.65		2.94

$\alpha = 0.05$	$g.l$ del numerador			
$g.l$ del denominador	1	2	…	20
1	161.45	3.05		248.01
2	18.51	3.55		19.45
⋮				
20	4.35	6.94		2.12

Hay otras tablas que contemplan el valor de α dentro de cada valor para los grados de libertad, es decir algo como:

Tabla de distribución F

$g.l$ del denominador		$g.l$ del numerador 1	2	...	20
	α = 0.01	4052.181	4999.500		6208.730
1	α = 0.025	647.789	799.500		993.103
	α = 0.05	161.448	199.500		248.013
	α = 0.01	98.503	99.000		99.449
2	α = 0.025	38.506	39.000		39.448
	α = 0.05	18.513	19.000		19.446
⋮					
	α = 0.01	8.096	5.849		2.938
20	α = 0.025	5.871	4.461		2.464
	α = 0.05	4.351	199.500		2.124

Se debe localizar el apartado de la tabla correspondiente a α y buscar el número que se localiza en la intersección de la columna encabezada por ν_1 con la fila encabezada por ν_2.

Por ejemplo $F_{0.025,2,20} = 4.461$ como se muestra en la figura siguiente:

Tabla de distribución F

$g.l$ del denominador		$g.l$ del numerador 1	**2**	...	20
	α = 0.01	4052.181	4999.500		6208.730
1	α = 0.025	647.789	799.500		993.103
	α = 0.05	161.448	199.500		248.013
	α = 0.01	98.503	99.000		99.449
2	α = 0.025	38.506	39.000		39.448
	α = 0.05	18.513	19.000		19.446
⋮					
	α = 0.01	8.096	5.849		2.938
20	**α = 0.025**	5.871	**4.461**		2.464
	α = 0.05	4.351	199.500		2.124

Ejercicio: Verificar en tablas los siguientes valores:

a) $F_{0.005,15,21} = 3.43$

b) $F_{0.1,40,60} = 1.44$

c) $F_{0.05,60,120} = 1.43$

Nota: En las tablas de la distribución F se encuentran valores pequeños de α, si necesitamos encontrar valores de la distribución para probabilidades grandes usamos la igualdad $F_{1-\alpha,m,n} = \dfrac{1}{F_{\alpha,n,m}}$.

Por ejemplo:

a) $F_{0.975,14,30} = \dfrac{1}{F_{0.025,30,14}} = \dfrac{1}{2.73} = 0.37$

b) $F_{0.995,21,15} = \dfrac{1}{F_{0.005,15,21}} = \dfrac{1}{3.43} = 0.29$

c) $F_{0.9,60,40} = \dfrac{1}{F_{0.1,40,60}} = \dfrac{1}{1.44} = 0.69$

d) $F_{0.95,120,60} = \dfrac{1}{F_{0.05,60,120}} = \dfrac{1}{1.43} = 0.70$

Con Excel:
La instrucción que reporta los valores de la distribución F, con ν_1 $g.l$ en el numerador y ν_2 $g.l$ en el denominador, que dejan a la derecha una probabilidad igual a α es "$= distr.f.inv(\alpha,\nu_1,\nu_2)$".

Por ejemplo La instrucción "$= distr.f.inv(0.005,15,21)$" devuelve el valor 3.43 lo cual significa que $P(F_{15,21} > 3.43) = 0.005$.

Utilizaremos estas distribuciones en el capítulo 5 que trata de la estimación puntual y por intervalo. La distribución $t-$Student sirve para intervalos de confianza y pruebas de hipótesis de la media poblacional cuando tenemos falta de información poblacional o muestras chicas.
La distribución ji-cuadrada se utiliza en la construcción de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis para la varianza de una población.
La distribución F se usa en intervalos de confianza y pruebas de hipótesis cuando se involucran dos varianzas poblacionales.