Análisis de Sistemas Lineales

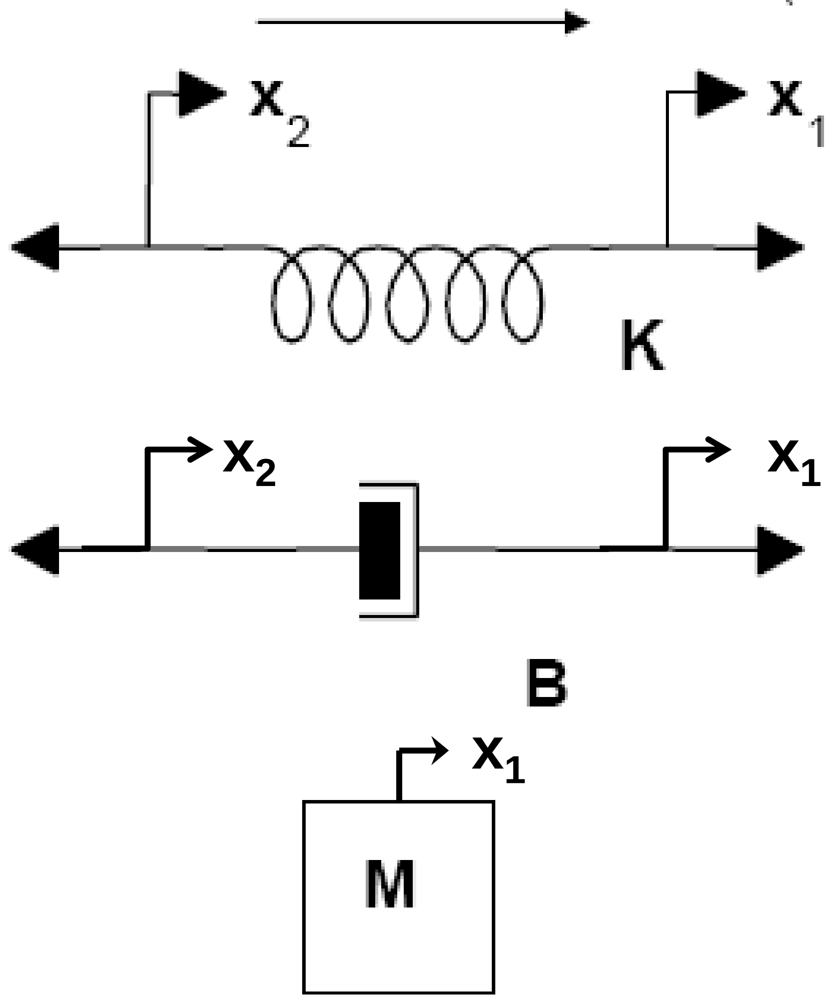
Modelado de Sistemas mecánicos

Contenido

- Modelos de elementos mecánicos de traslación
  - Ejemplos
- Modelos de elementos mecánicos de rotación
  - Ejemplos
- Ejercicios

Modelos de elementos mecánicos de traslación

Elementos mecánicos de traslación (se suponen lineales)



Resorte

$$F = K(x_1 - x_2)$$

Fricción viscosa

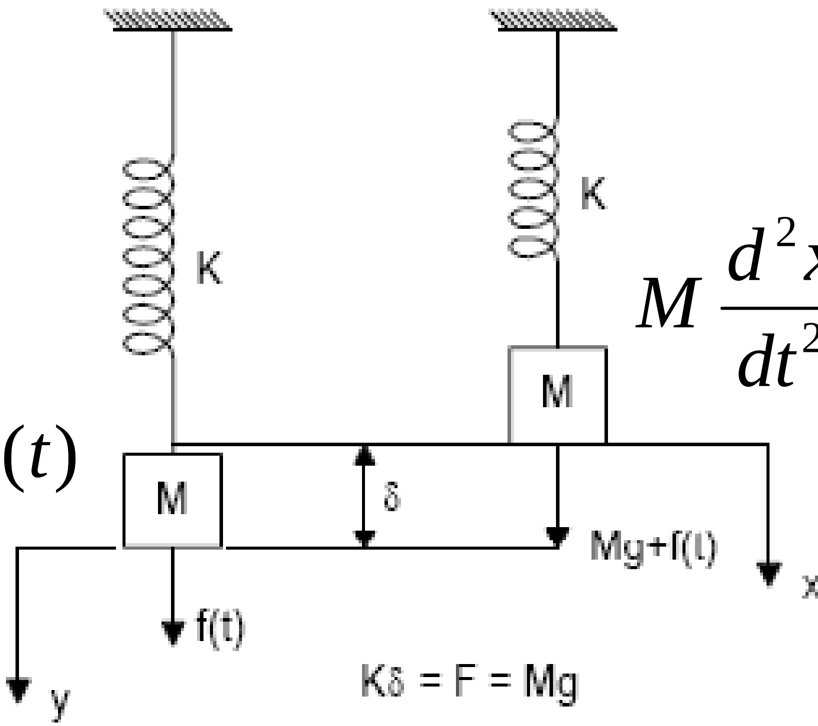
$$F = B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Masa

$$Ma = M\ddot{x}_1$$

El efecto de la gravedad

Efecto de la gravedad: El efecto de la gravedad puede suprimirse de las ecuaciones si se hace un cambio del sistema de referencia.



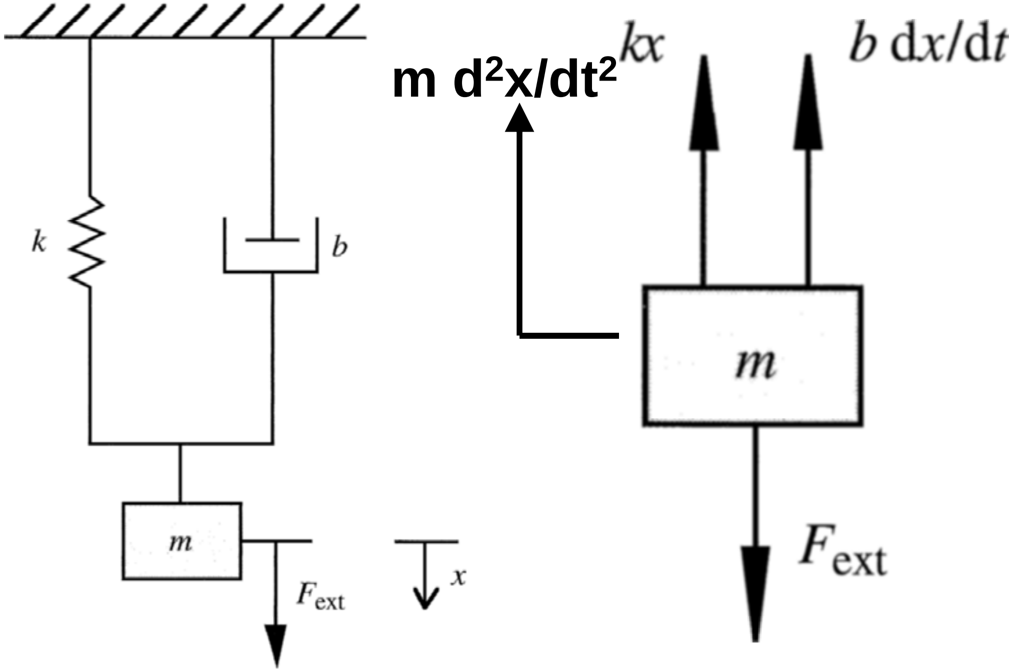
$$M\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = f(t) + Mg$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + Ky = f(t)$$

$$y = (x - \delta)$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = f(t) + K\delta$$

Ejemplo 1: Modelo de un sistema masa resorte



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_{ext.}$$

$$m=1kg$$

$$b=0.2\frac{N\cdot s}{m}$$

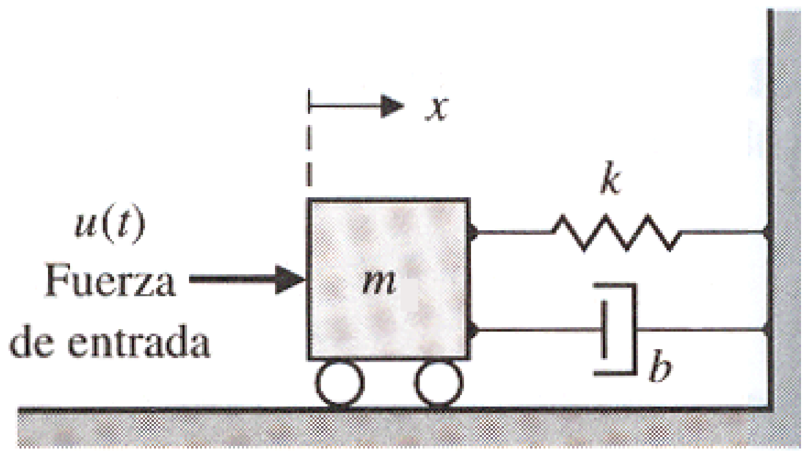
$$k=5\frac{N}{m}$$

$$F_{ext.}=9.81N$$

$$ms^2X(s)+bsX(s)+kX(s)=F_{ext.}(s)$$

$$G(s)=\frac{X(s)}{F_{ext.}(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k}$$

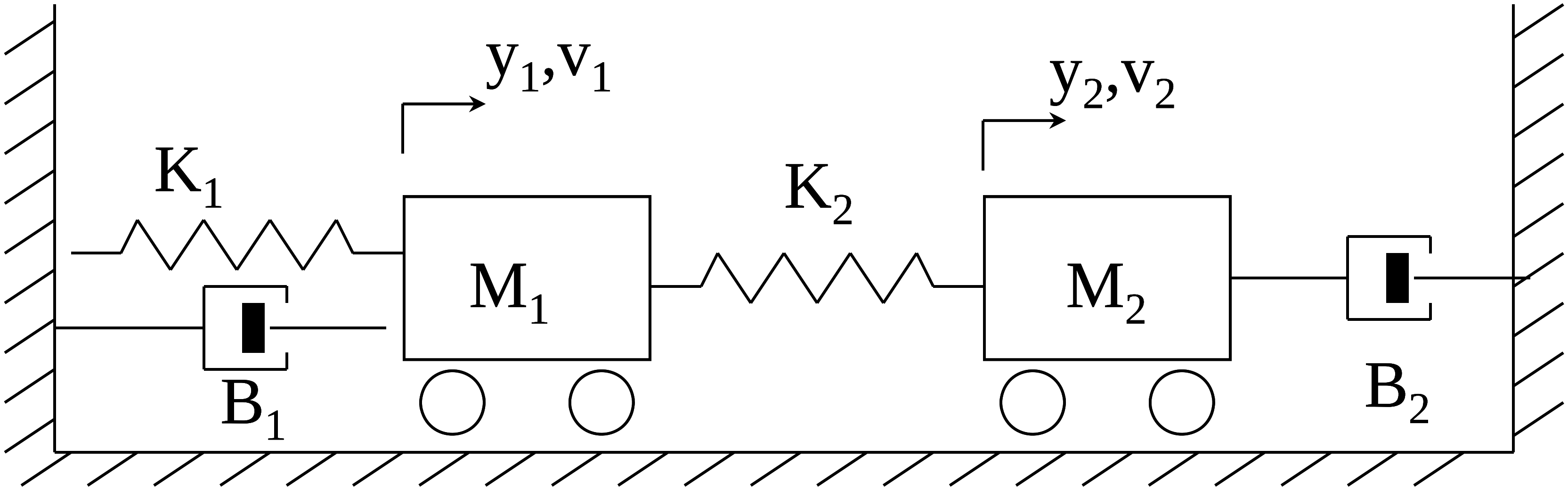
Ejemplo 2: Modelo de un carrito con resorte y amortiguamiento



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u(t)$$

$$\frac{U(s)}{X(s)} = \frac{1/m}{s^2 + b/m\, s + k/m}$$

Ejemplo 3: Masas en movimiento



$$M_1\ddot{y}_1 + B_1\dot{y}_1 + K_1 y_1 + K_2(y_1 - y_2) = 0$$

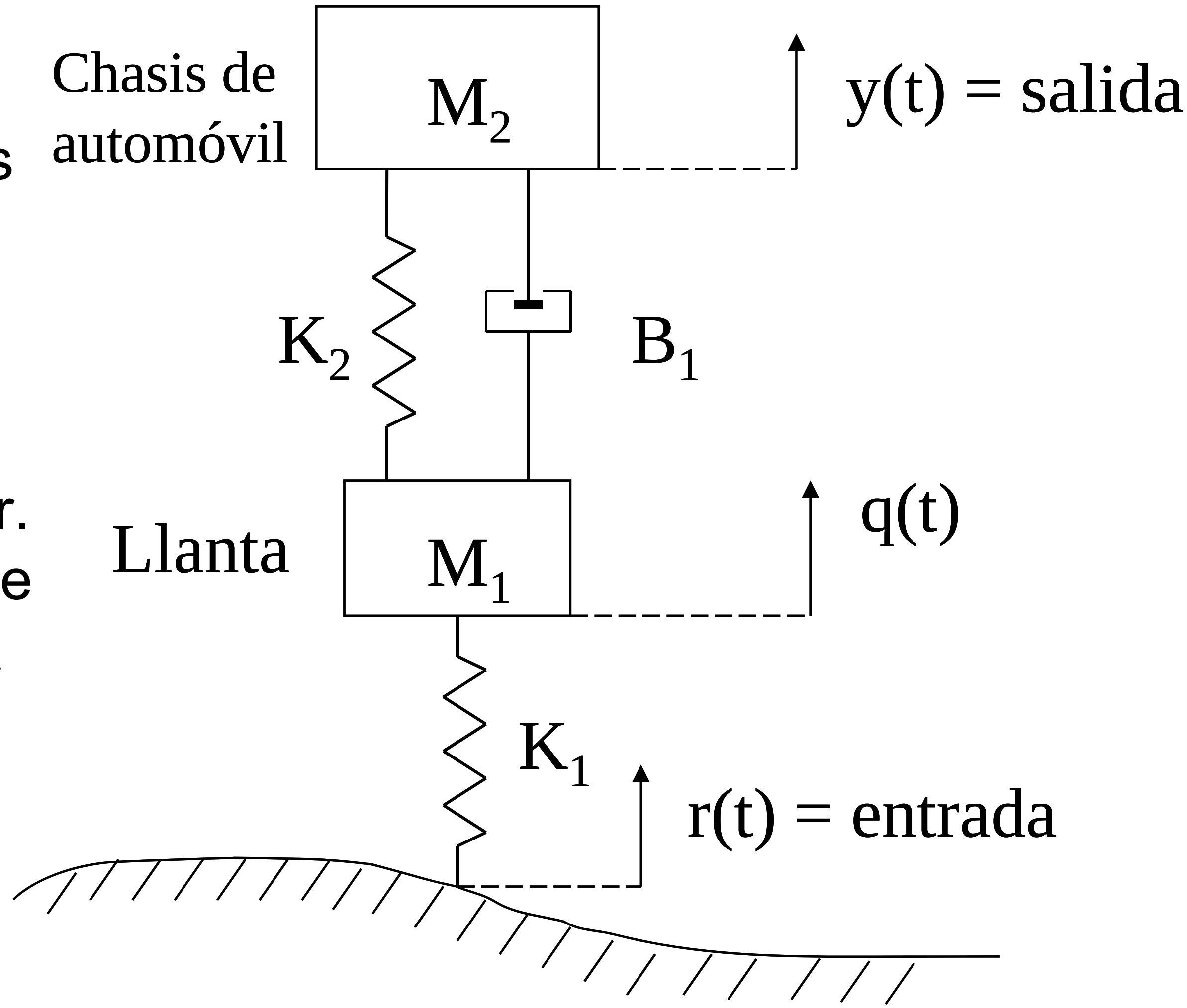
$$M_2\ddot{y}_2 + B_2\dot{y}_2 + K_2(y_2 - y_1) = 0$$

$$(K_1 + K_2)y_1 - K_2 y_2 + B_1\dot{y}_1 + M_1\ddot{y}_1 = 0$$

$$-K_2 y_1 + K_2 y_2 + B_2\dot{y}_2 + M_2\ddot{y}_2 = 0$$

Ejemplo 4: Sistema de suspensión de un automóvil

M1 es la masa de la llanta, M2 es ¼ de la masa del chasis del automóvil, K1 es la constante elástica de la llanta y K2 es la constante elástica del resorte de suspensión y B1 es la constante del amortiguador. La entrada r(t) es el nivel de la calle y la salida y(t) es la posición vertical del chasis del automóvil respecto a algún punto de equilibrio.



Ejemplo 4: Sistema de suspensión de un automóvil

$M_2 = M/4 = 225kg$

$K_2 = 3571 N/m$

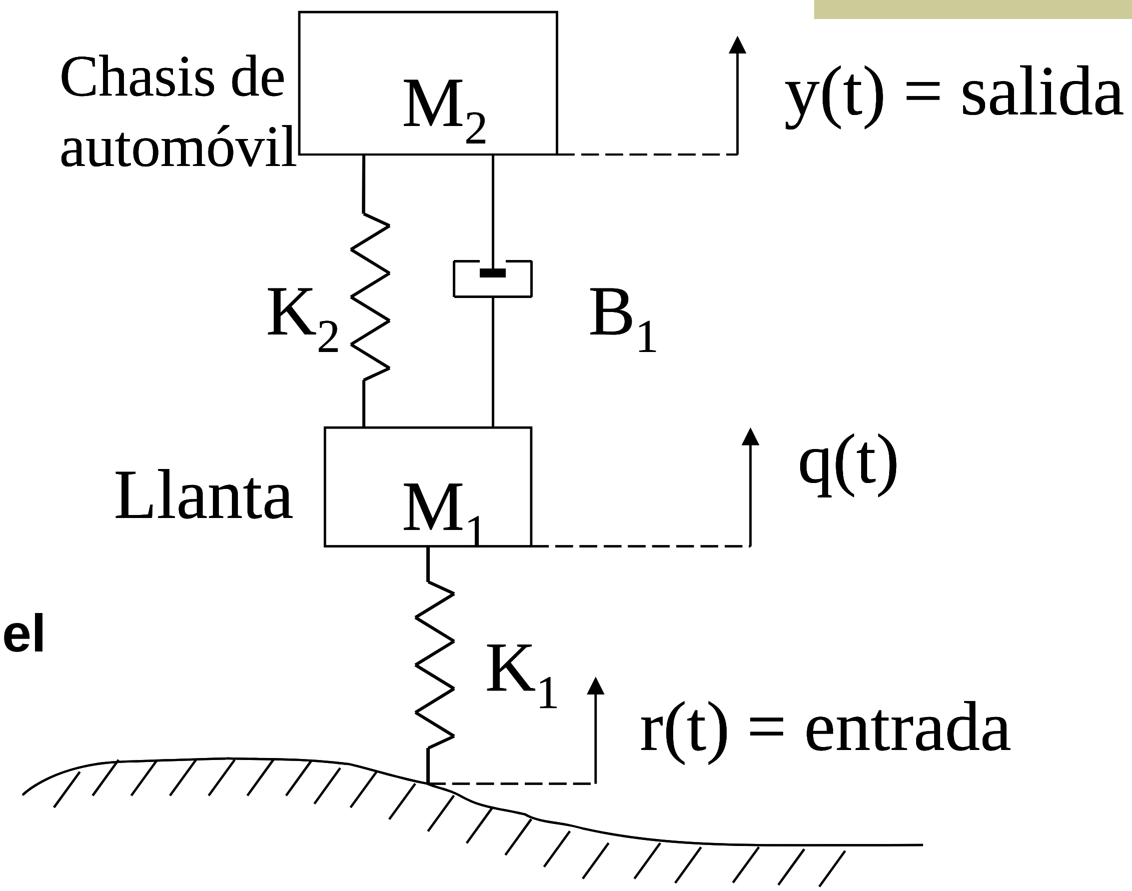
$B_1 = 357 N \cdot s/m$

$M_1 = 10kg$

$K_1 = 17855 N/m$

$F_{ent.} = 544 N$

F_{ent} es producida por el desplazamiento r(t)

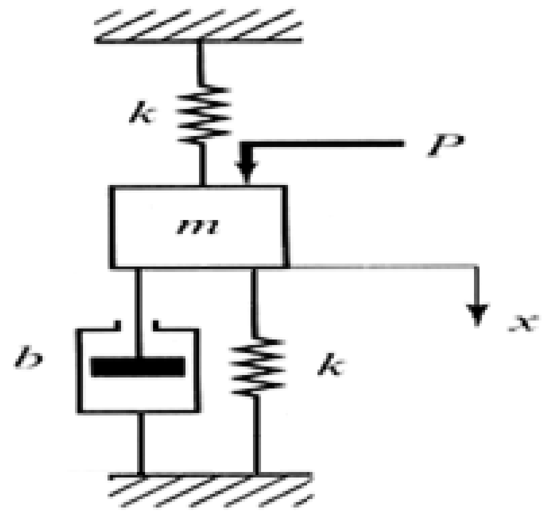


$$M_1\ddot{q} + B_1(\dot{q} - \dot{y}) + K_2(q - y) + K_1 q = K_1 r$$

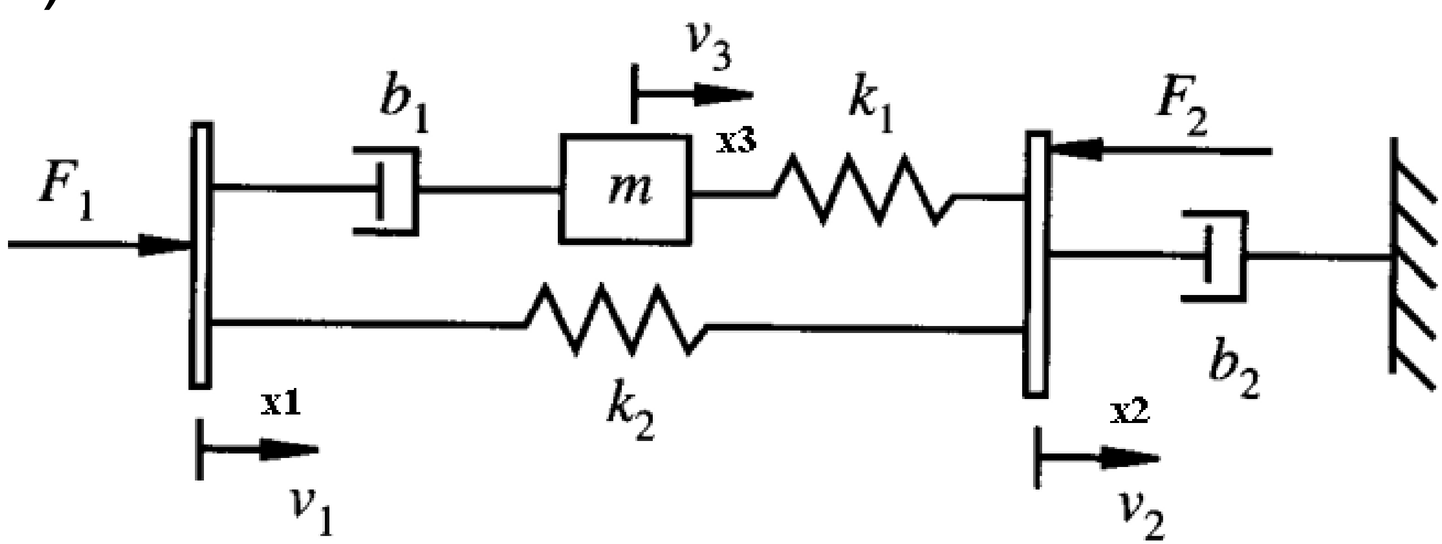
$$M_2\ddot{y} + B_1(\dot{y} - \dot{q}) + K_2(y - q) = 0$$

Ejercicio 1: Encuentre el modelo

- A)



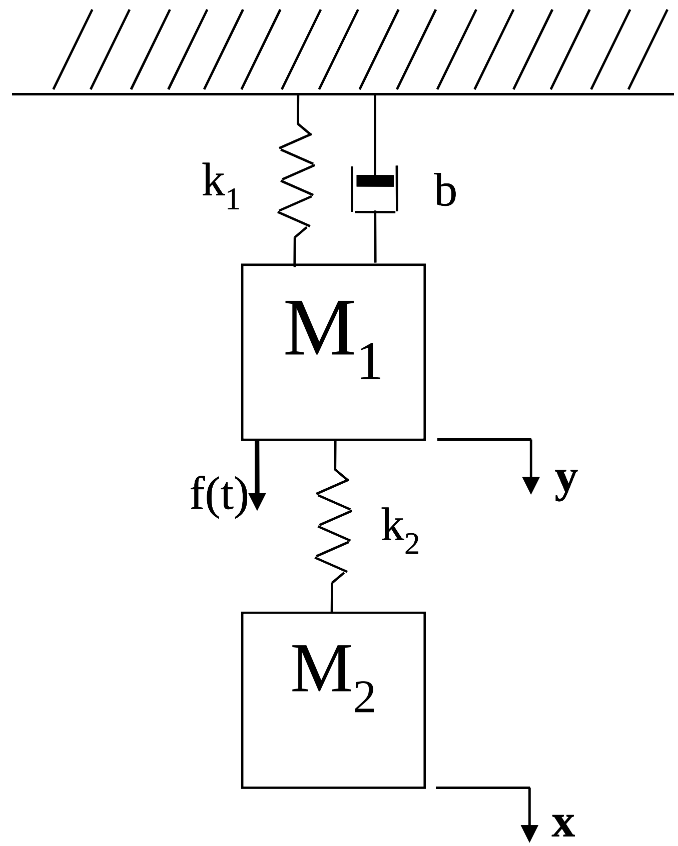
- B)



Ejercicio 2: Encuentre Y(s)/F(s)

Considere que antes de la aplicación de la fuerza f(t), el sistema se encontraba en reposo. Encuentre:

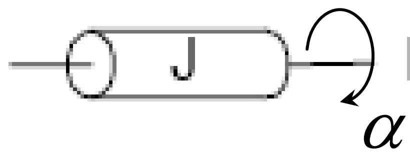
- Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico
- La función de transferencia de la posición de la masa 1 respecto a la fuerza de entrada.



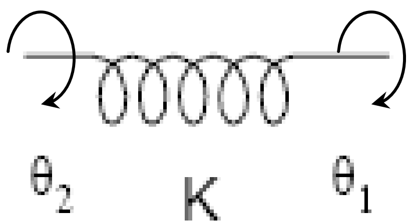
Modelos de elementos mecánicos de rotación

$\sum M = J\alpha$

- α → aceleración angular
- J → momento de inercia

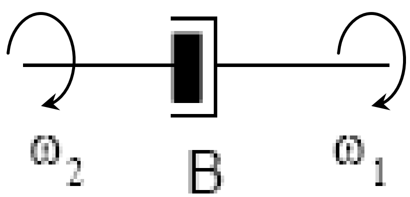


Momento rotacional



Resorte torsional

$$M_k = K(\theta_1 - \theta_2)$$



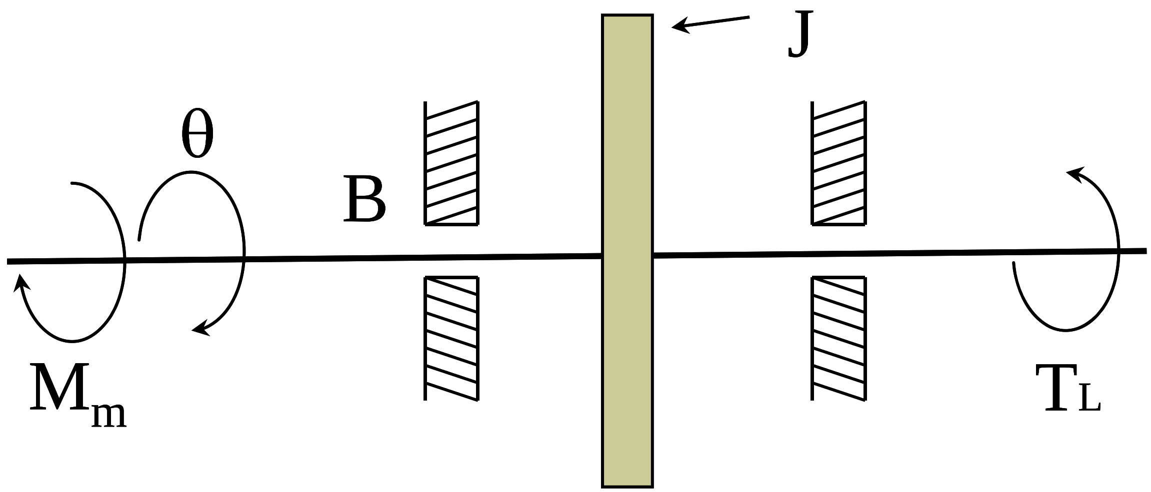
Fricción viscosa rotacional

$$M_B = B(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Ejemplo 5: Flecha de un motor

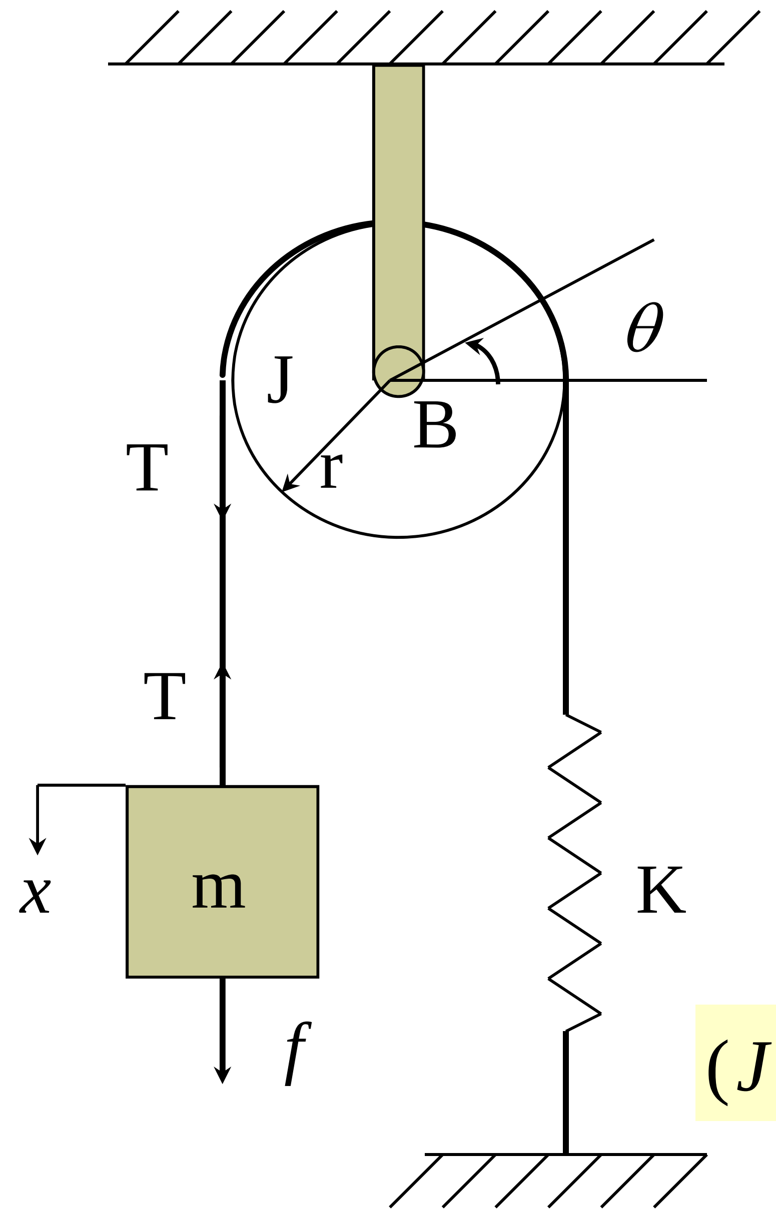
Consideraciones

- La barra es indeformable
- La fricción es viscosa



$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = M_m - T_L$$

Ejemplo 6: Sistema de polea con contrapeso



El momento de inercia de la polea respecto al eje de rotación es **J**; la constante de fricción en el eje es **B**. El radio de la polea es **r**. La constante del resorte es **K**, la masa del objeto es **m** y la tensión de la cuerda es **T**. Se aplica una fuerza ***f*** en el sentido de la fuerza de gravedad

$$(J + m \cdot r^2)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K \cdot r^2\theta = f \cdot r$$

Ejemplo 7: Piñón y cremallera

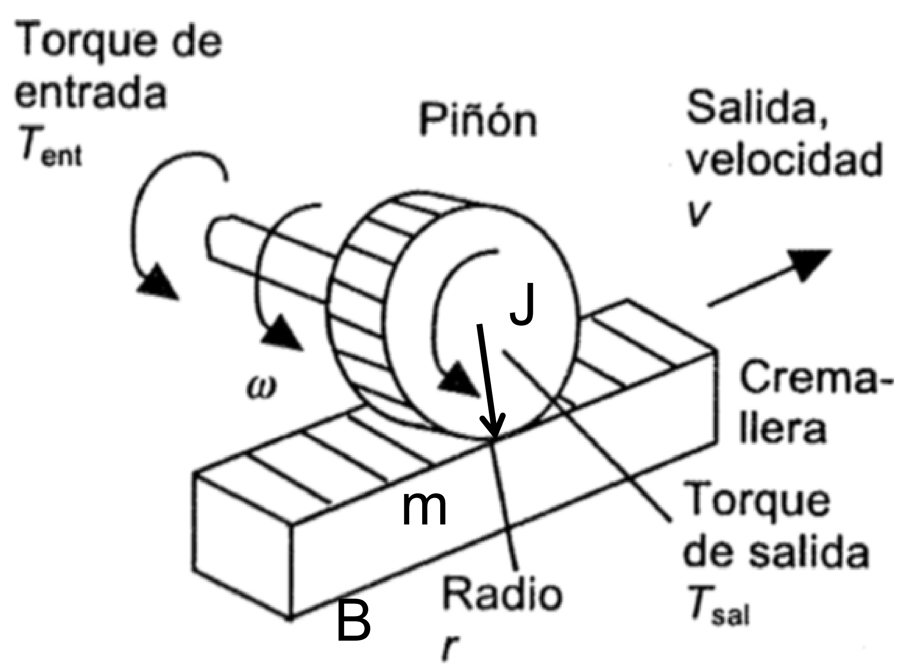
$$m = 1kg$$

$$J = 3.125kgm^2$$

$$b = 0.2\frac{N \cdot s}{m}$$

$$r = 2.5cm$$

$$T_{ent.} = 9.81Nm$$



$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{r}{J + m \cdot r^2}\right)(T_{ent} - r \cdot B \cdot v)$$

Ejemplo 8: Transmisión de torque sin pérdidas

Considere

- La relación de radios
- La conservación de la potencia

$$T_1\omega_1 = T_2\omega_2$$

- El torque de reacción en cada flecha.

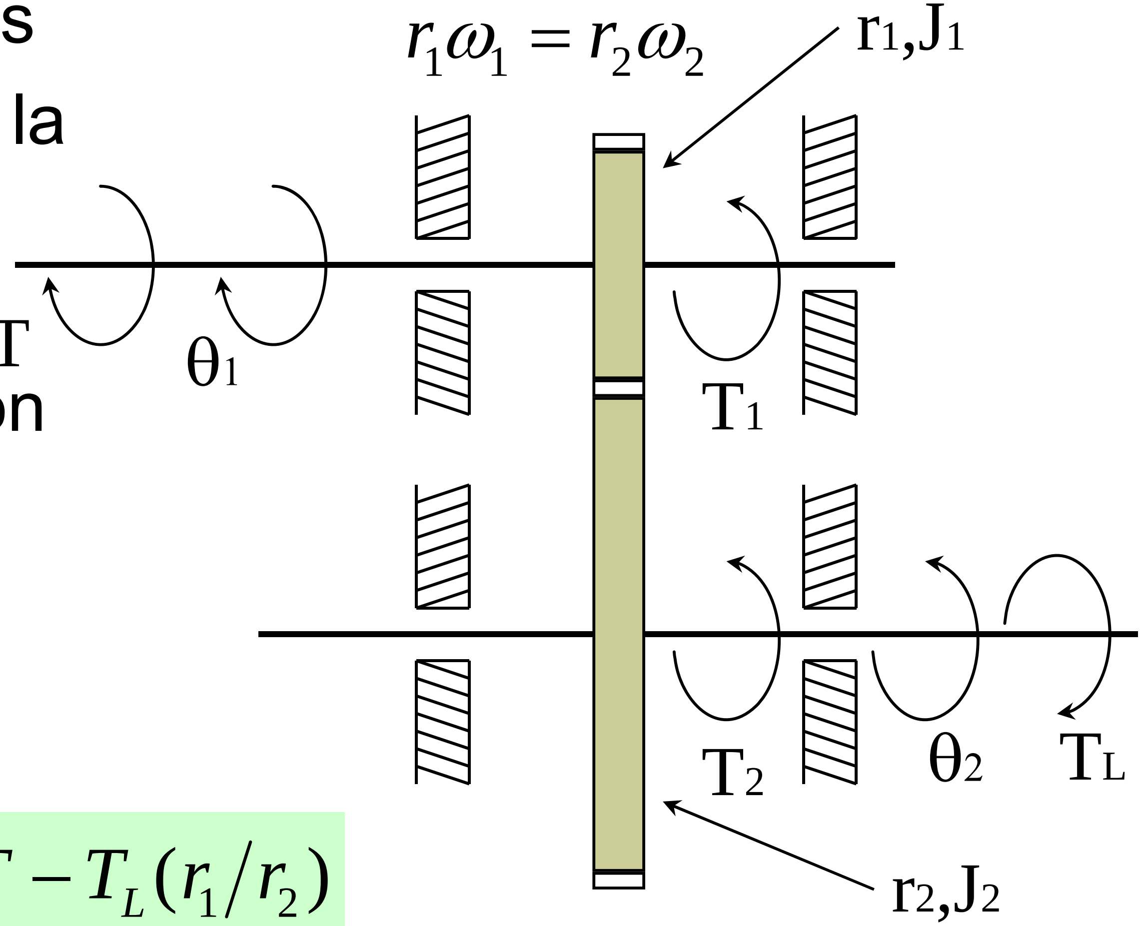
$$J_1\ddot{\theta}_1 + T_1 = T$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = T_2 - T_L$$

$$\left(J_1 + J_2(r_1/r_2)^2\right)\ddot{\theta}_1 = T - T_L(r_1/r_2)$$

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2$$

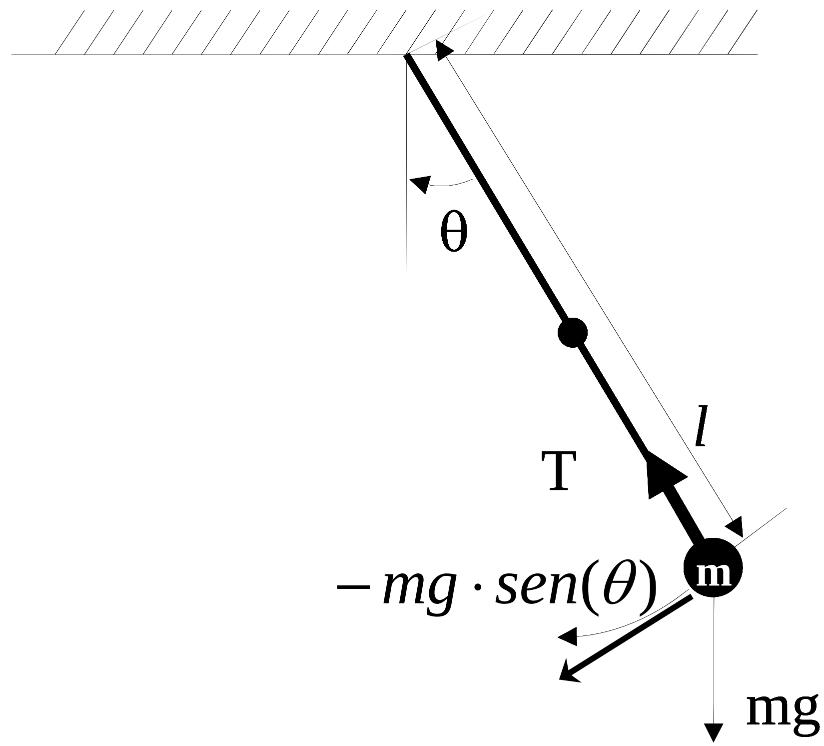
$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$



Ejemplo 9: Péndulo simple

Consideraciones

- El ángulo θ es pequeño
  - $sen(\theta)=\theta$
- Sin fricción en el pivote
- La masa ***m*** está suspendida del techo por una barra indeformable de longitud ***l.***



$$J = l^2 m$$

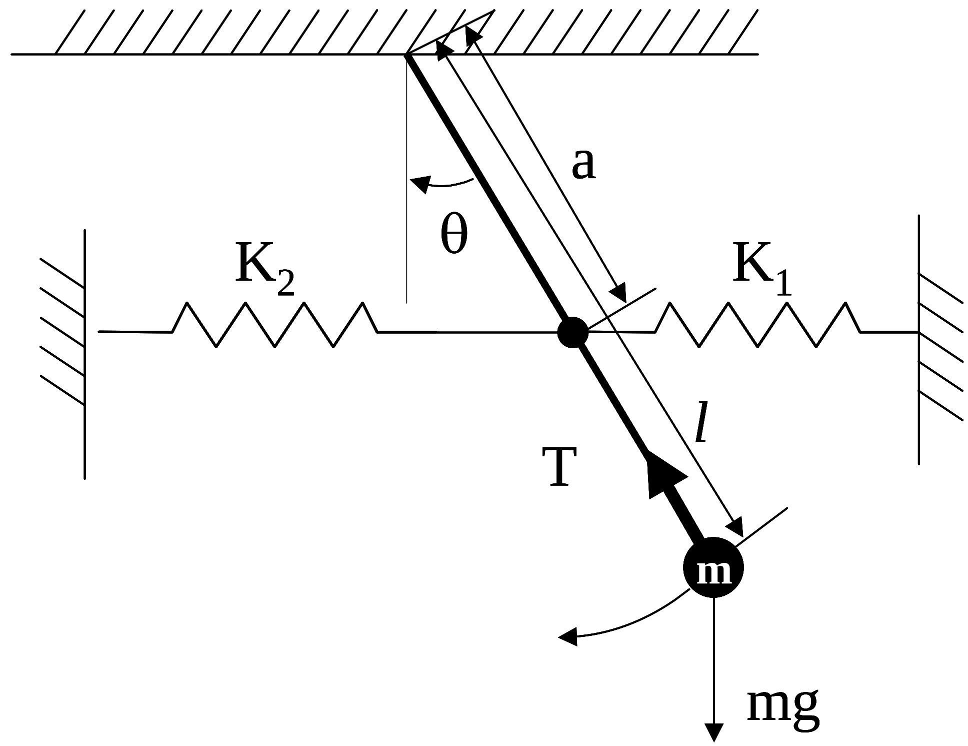
$$J\ddot{\theta} = -lmg \cdot sen(\theta)$$

$$l\ddot{\theta} = -g \cdot sen(\theta)$$

Ejemplo 10: Péndulo con restricción

Consideraciones

- El ángulo θ es pequeño.
- Sin fricción en el pivote
- La masa ***m*** está suspendida del techo por una barra indeformable de longitud ***l.***
- *La barra está* restringida a la distancia ***a*** por medio de dos resortes con constantes K_1 y K_2.



Ejemplo 10: Péndulo con restricción (2)

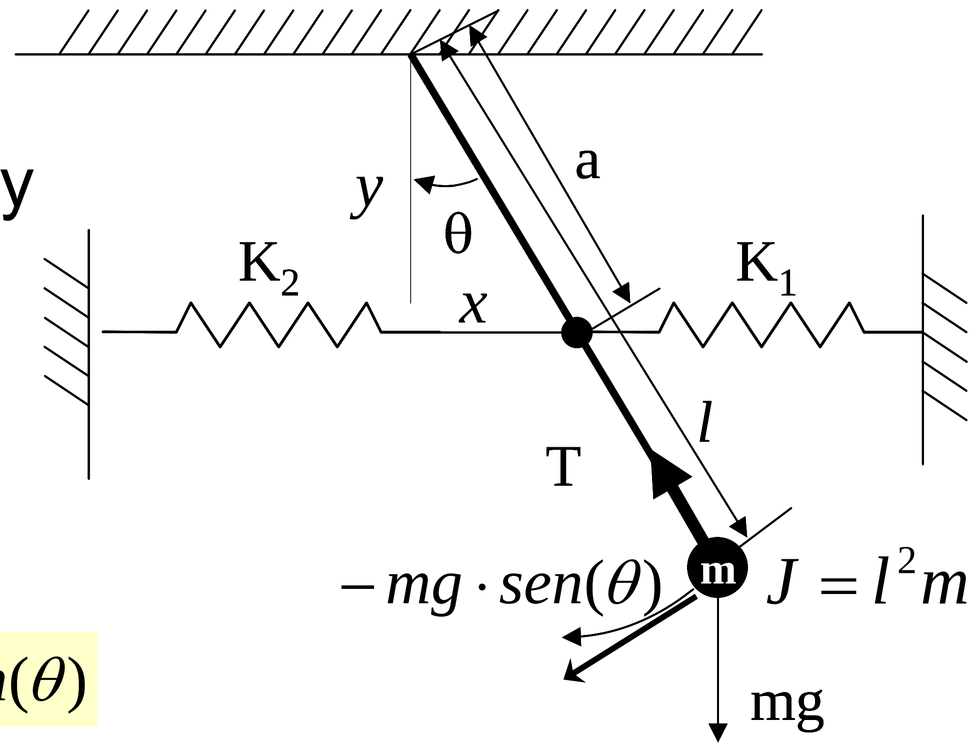
El desplazamiento en el eje x

$$x = a \cdot sen(\theta)$$

El brazo de palanca en el eje y

$$y = a \cdot \cos(\theta)$$

El equilibrio de momentos alrededor del punto de pivote



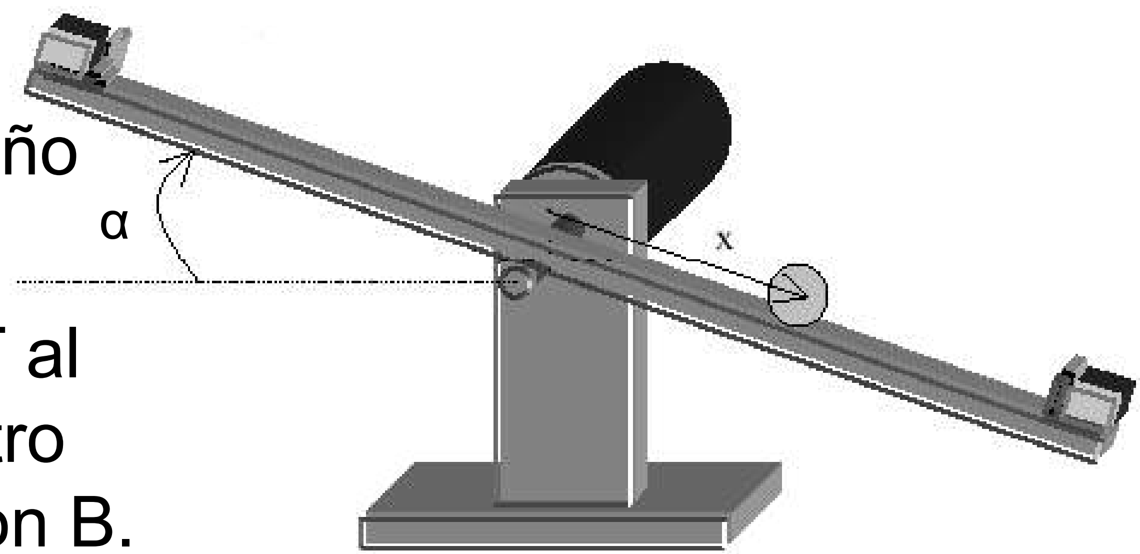
$$J\ddot{\theta} + K_1 \cdot x \cdot y + K_2 \cdot x \cdot y = -lmg \cdot sen(\theta)$$

$$l^2 \cdot m \cdot \ddot{\theta} + (K_1 + K_2) \cdot a \cdot sen(\theta) \cdot a\cos(\theta) = -lmg \cdot sen(\theta)$$

Ejercicio 2: Barra y bola

Consideraciones

- La bola NO rueda, sino, simplemente se desliza SIN fricción por la barra.
- El ángulo α es pequeño
- Se aplica un torque T al eje conectado al centro de la barra con fricción B.



Referencias

- Ogata, Katsuhiko. „**Dinámica de Sistemas**“, Prentice Hall, 1987, México.
- Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.
- Alciatore G., David; Histand B., Michael. **Introduction to mechatronics and measurement systems**. 2ª Ed., McGraw Hill, USA, 2003.