

9. Especificaciones en el dominio del tiempo

En capítulos anteriores se ha estudiado la respuesta de estado estable de los sistemas lineales (cuando $t \rightarrow \infty$), estudiaremos ahora la respuesta transitoria. La respuesta transitoria es importante pues tanto la amplitud como la duración de dicha respuesta deben de mantenerse dentro de límites tolerables o prescritos.

La respuesta transitoria generalmente se caracteriza con una señal escalón unitario $r(t)=\sigma(t)$ como entrada y la respuesta del sistema lineal se llama respuesta al escalón unitario $h(t)$.

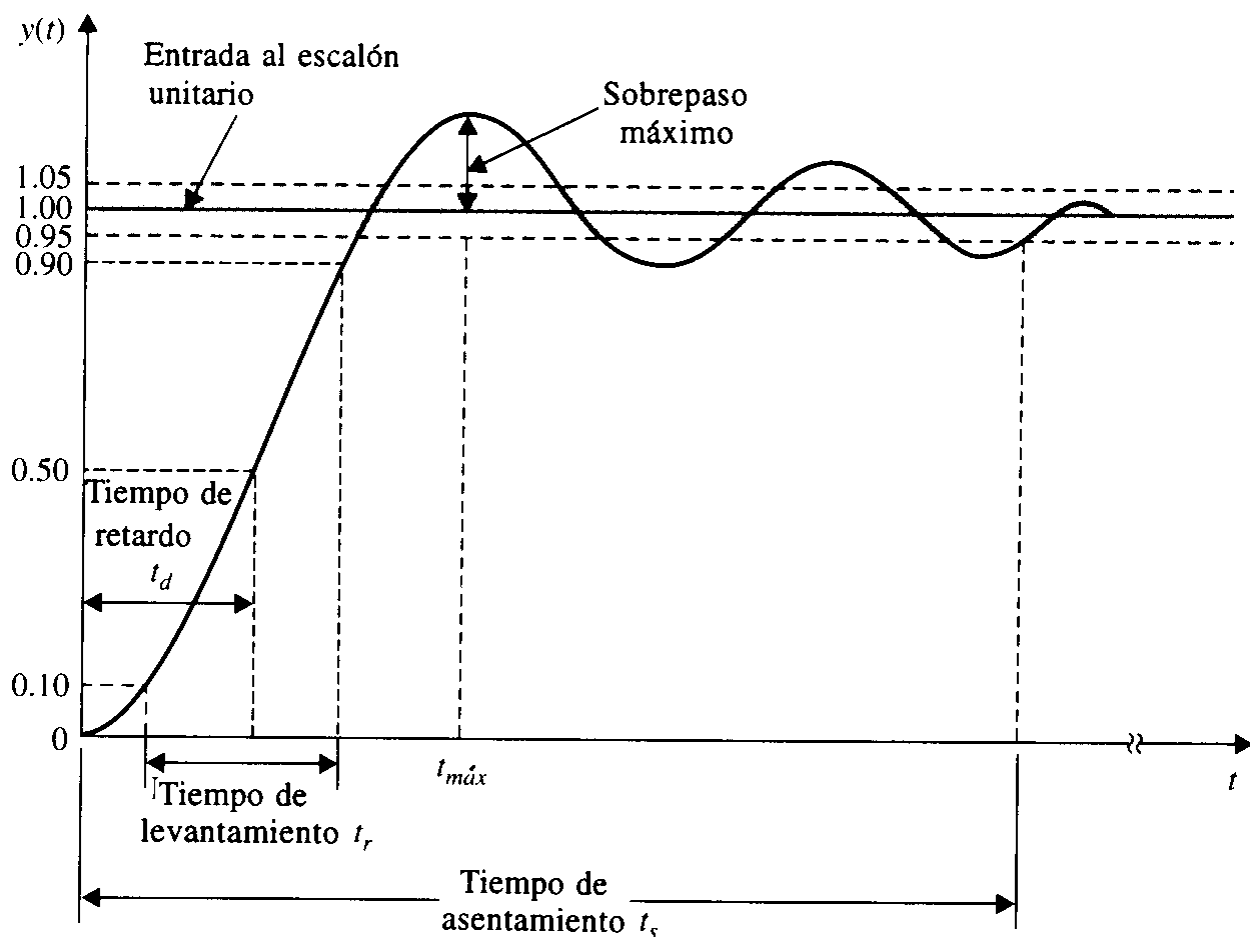


Figura 9.1: Respuesta típica al escalón unitario de un sistema de control

9.1 Criterios de desempeño de un sistema de control referidos a la respuesta al escalón unitario.

9.1.1 Sobrepasso máximo M

Sea $y(t)=h(t)$ la respuesta de un sistema al escalón unitario. El sobrepasso máximo M es:

$$M = \text{Máx}(y(t)) - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \quad (1)$$

Asumiendo que el máximo de $y(t)$ es mayor que el valor de estado estacionario $K_s = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Como porcentaje se define el porcentaje máximo de sobrepasso:

$$\text{porcentaje máx. de sobrepasso} = \frac{M}{K_s} \cdot 100\% \quad (2)$$

Un sobrepasso grande es generalmente indeseable. Para fines de diseño el sobrepasso se da como una especificación en el dominio del tiempo; pero se convierte comúnmente al dominio de la frecuencia.

9.1.2 Tiempo de retardo t_d

Es el tiempo que tarda la respuesta al escalón en alcanzar el 50% de su valor final.

9.1.3 Tiempo de subida t_r

Se define como el tiempo que tarda la respuesta al escalón en cambiar desde el 10% al 90% de su valor final.

9.1.4 Tiempo de estabilización t_s

Es el tiempo requerido para que la respuesta al escalón disminuya y se mantenga dentro de un porcentaje específico de su valor final. Cifras de uso corriente son 5% y 2%.

9.2 Respuesta transitoria de un sistema prototipo de segundo orden.

Sea $T(s)$ La función de transferencia de un sistema prototipo de segundo orden, donde ω_n y ξ son constantes reales.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3)$$

La salida $Y(s)$ ante una entrada escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s}$ será:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4)$$

y en el dominio del tiempo $y(t)$ será:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1} \xi); t \geq 0 \quad (5)$$

9.2.1 Factor de amortiguamiento relativo y factor de amortiguamiento

Las raíces del polinomio característico son:

$$\left. \begin{aligned} s_1, s_2 &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ &= -\alpha \pm j\beta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \xi\omega_n \\ \beta &= \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

con

$\beta = \omega$: frecuencia de amortiguamiento

ω_n : frecuencia natural no amortiguada

α : factor de amortiguamiento o constante de amortiguamiento

ξ : factor de amortiguamiento relativo = $\frac{\alpha}{\omega_n}$

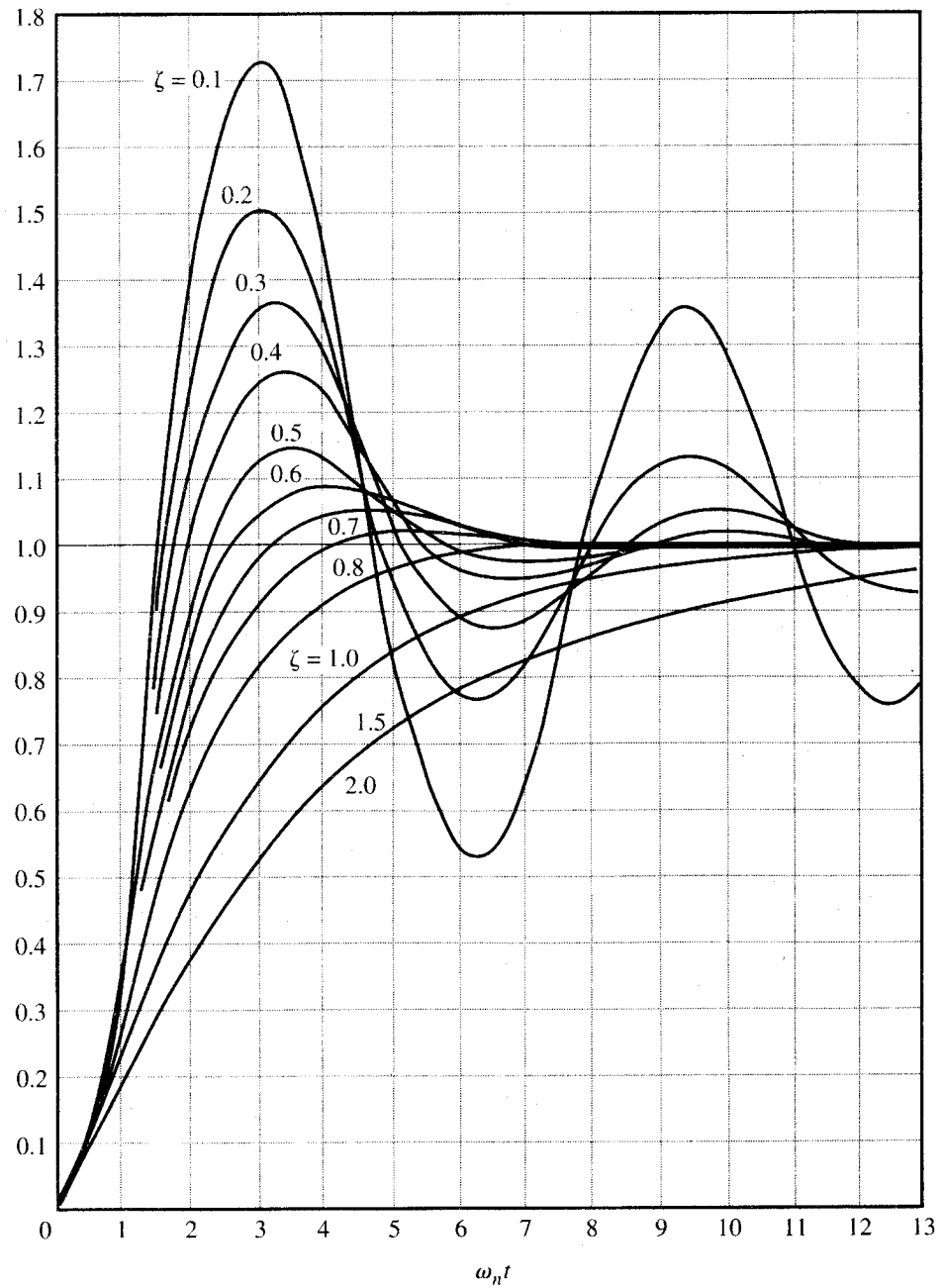


Figura 9.2: Respuesta al escalón unitario del sistema prototipo de segundo orden para diferentes valores de ξ

9.2.2 Casos

a) Raíces iguales : sistema críticamente amortiguado

$$\sqrt{1-\xi^2} = 0$$

$$\rightarrow s_1 = s_2 = -\xi\omega_n$$

y como $\xi=1$ entonces

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

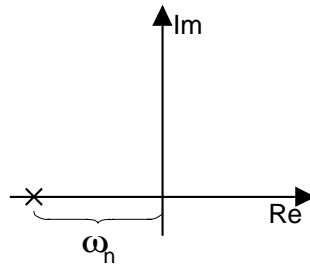


Figura 9.3: Sistema críticamente amortiguado

b) Las raíces son complejas conjugadas: subamortiguado

$$s_1, s_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi < 1$$

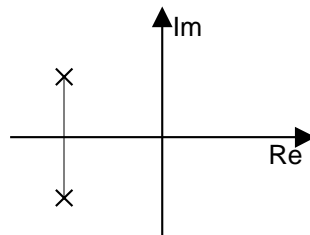


Figura 9.4: Sistema subamortiguado

c) Las raíces son reales y diferentes: sobreamortiguado, $\xi > 1$

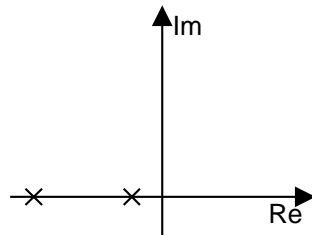


Figura 9.5: Sistema sobreamortiguado

9.2.3 Frecuencia natural no amortiguada ω_n

Cuando $\xi=0 \rightarrow \alpha=0$ y las raíces de la ecuación característica son imaginarias (se encuentran sobre el eje imaginario). La respuesta según (5) es senoidal.

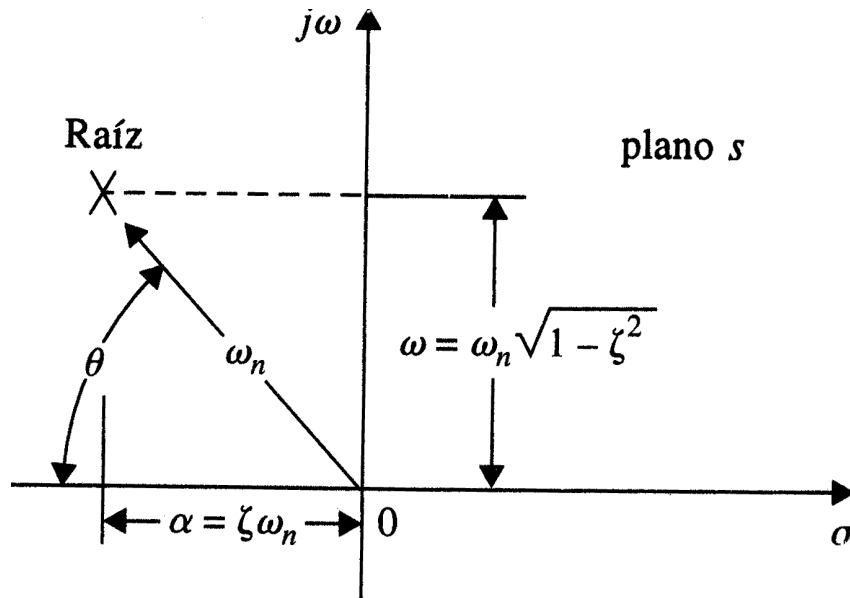


Figura 9.6: Relación entre las raíces de la ecuación característica del sistema prototipo de 2º orden y los parámetros α , ξ , ω_n , ω .

α : Parte real de las raíces. $\alpha = \xi \omega_n$

ω : Parte imaginaria de las raíces

ω_n : Distancia radial del origen del plano s a las raíces

ξ : Coseno del ángulo formado entre la parte negativa del eje real y la línea radial de las raíces.

$$\xi = \cos \theta \quad (8)$$

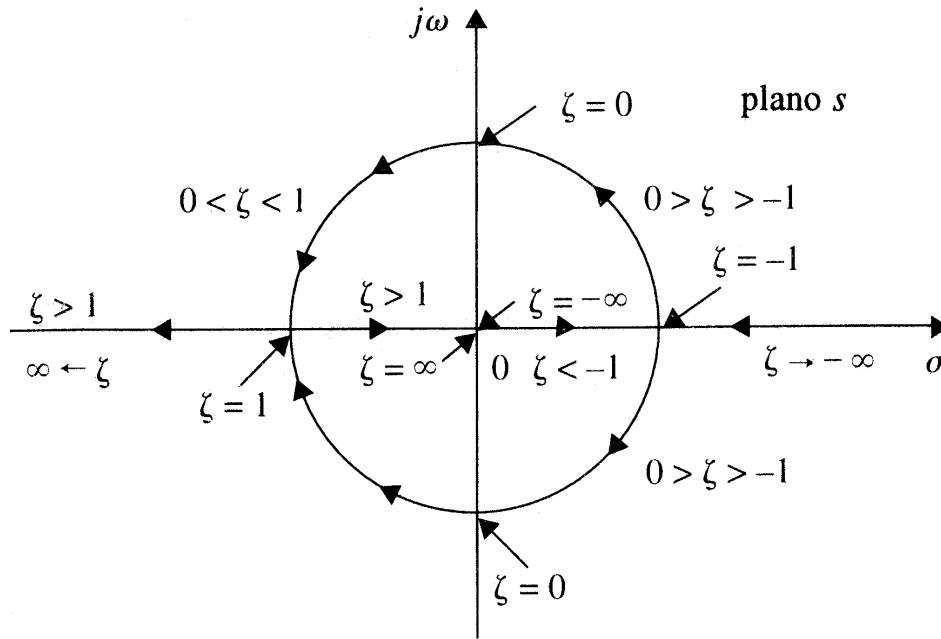


Figura 9.7 Lugar de las raíces para el prototipo de segundo orden, cuando ω_n se mantiene constante y se varía ξ de $-\infty$ a $+\infty$

9.2.4 Sobrepaso máximo

Es conveniente en sistemas de control poder definir los parámetros de funcionamiento del sistema para poder dimensionar el controlador. Uno de los parámetros en el dominio del tiempo más usado es el sobrepaso máximo. Para relacionar el sobrepaso máximo con los valores de ξ y ω_n se deriva la ecuación (5) respecto al tiempo para encontrar los valores de t en los cuales se produce el máximo, obteniéndose:

$$t_{\max} \cong \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (9)$$

evaluando la ecuación (5) para t_{\max}

$$y(t)|_{\max \text{ o } \min} = 1 + (-1)^{n-1} e^{\frac{-n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad ; n=1, 2, \dots \quad (10)$$

y asumiendo que el máximo se produce cuando $n=1$ se tiene:

$$\text{sobrepaso máximo} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (11)$$

y el porcentaje de sobrepaso máximo es:

$$\text{porcentaje de sobrepaso máximo} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} * 100\% \quad (12)$$

De (11) se tiene que el sobrepaso máximo es función únicamente del factor de amortiguamiento relativo ξ . La ecuación (12) se muestra en la figura 9.8 para una referencia rápida.

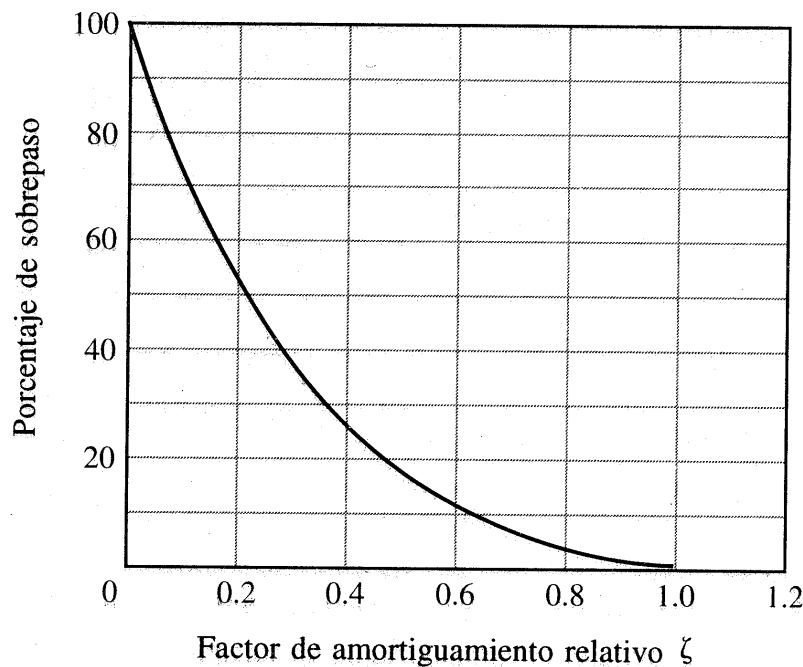


Figura 9.8: Porcentaje de sobrepaso en función de ξ para el sistema prototipo de 2º orden.

9.2.5 Tiempo de estabilización o tiempo de asentamiento

En la figura 9.2 se puede observar que para cuando $0 < \xi < 0.69$, la respuesta al escalón tiene un sobrepaso máximo mayor al 5%, y la respuesta puede entrar en la banda de 0.95 a 1.05 ya sea desde lo alto o desde el fondo. Cuando $\xi > 0.69$ el sobrepaso es menor del 5% y la respuesta puede entrar en la banda de 0.95 a 1.05 sólo desde el fondo. El

tiempo de asentamiento tiene una discontinuidad en $\xi = 0.69$.

Es difícil obtener una solución analítica para exacta para el tiempo de estabilización t_s ; por ello se aproxima t_s para los dos casos con las ecuaciones (13) y (14) a continuación:

$$t_s \cong \frac{3.2}{\xi \omega_n}; \quad 0 < \xi < 0.69 \quad (13)$$

$$t_s \cong \frac{4.5\xi}{\omega_n}; \quad \xi > 0.69 \quad (14)$$

En la figura 9.9 se muestran los valores reales de $\omega_n t_s$ en función de ξ así como las aproximaciones dadas por las ecuaciones (13) y (14).

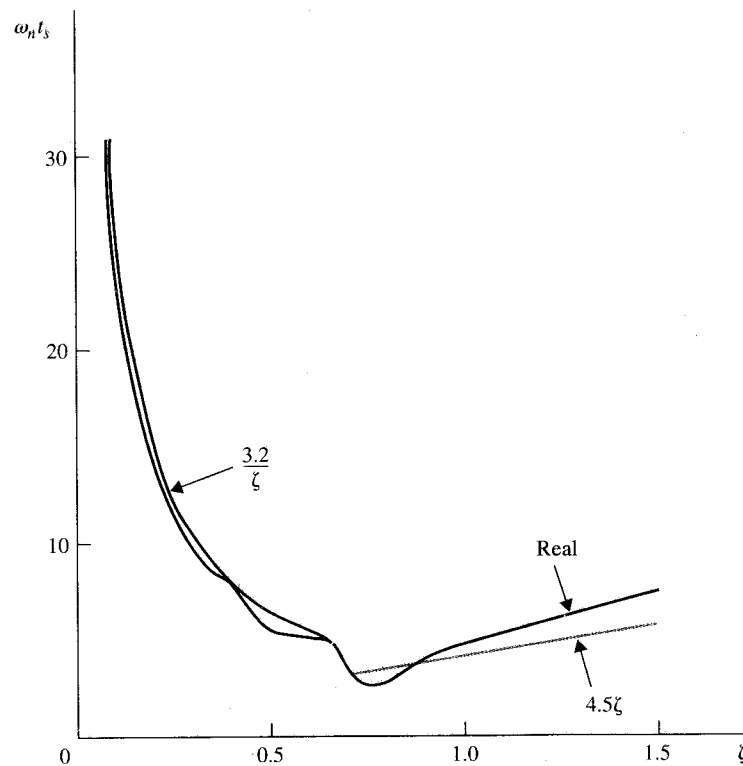


Figura 9.9: Tiempo de estabilización en función de ξ para el sistema prototipo de 2º orden.