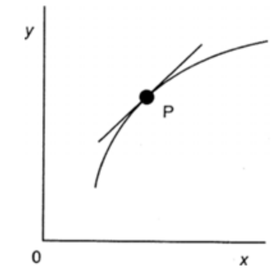
Análisis de Sistemas Lineales

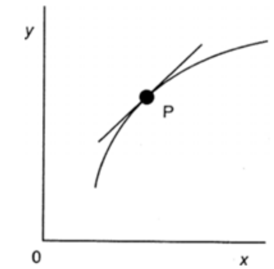
Linealización

Contenido



- Linealización de una función de una variable
- Linealización de una función de dos variables
- Linealización de un sistema de ecuaciones
- Ejemplos y ejercicios

Linealización de $y = f(x)$

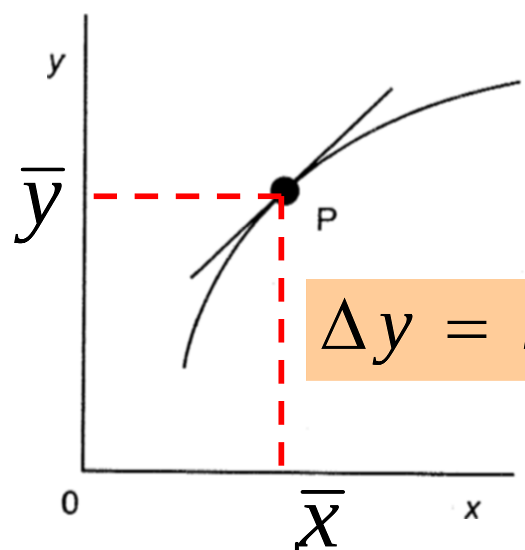


Desarrollamos en serie de Taylor

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \cdots$$

Evaluando $\quad y = f(x)\big|_{x=\bar{x}}$

tenemos $\quad \bar{y} = f(\bar{x})$

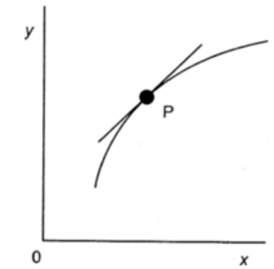


$$\Delta y = m \, \Delta x$$

Sustituyendo, despreciando los términos de orden superior y despejando obtenemos:

$$y - \bar{y} = \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) = m(x - \bar{x}) \, , \quad m = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}}$$

Ejercicio: Termopar

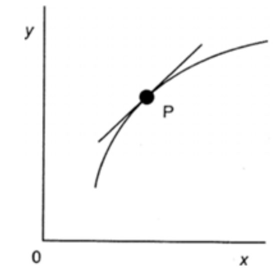


La relación entre la f.e.m. ***E***, producida por un termopar y la temperatura ***T*** es la siguiente:

$$E = a \cdot T + b \cdot T^2$$

donde ***a*** y ***b*** son constantes. Linealice esta ecuación para un punto de operación cuya temperatura es $\boldsymbol{T_0}$.

Solución: Termopar



$$E = f(T) = a \cdot T + b \cdot T^2$$

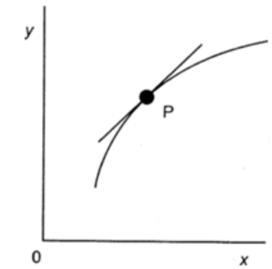
Calculando la serie de Taylor alrededor del punto $\boldsymbol{T_0}$.

$$E = f(T) = E_0 + \frac{d[a \cdot (T - T_0) + b \cdot (T - T_0)^2]}{dT} + \cdots$$

$$E = E_0 + (a + 2bT_0)(T - T_0)$$

con $$E_0 = f(T_0) = a \cdot T_0 + b \cdot T_0^{\,2}$$

Linealización de y = f(x,z)



Desarrollamos en serie de Taylor

$$y = f(x,z) = f(\bar{x},\bar{z}) + \left[\frac{\partial f\,(x-\bar{x})}{\partial x} + \frac{\partial f\,(z-\bar{z})}{\partial z}\right] +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f\,(x-\bar{x})^2}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f\,(x-\bar{x})(z-\bar{z})}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f\,(z-\bar{z})^2}{\partial z^2}\right] + \cdots$$

Evaluando $y = f(x,z)\Big|_{x=\bar{x},\, z=\bar{z}}$ tenemos $\bar{y} = f(\bar{x},\bar{z})$

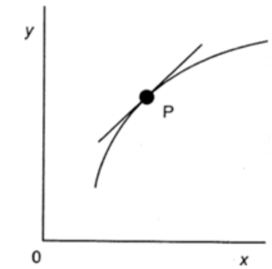
Sustituyendo, despreciando los términos de orden superior por pequeños y despejando obtenemos:

$$y - \bar{y} = \frac{\partial f\,(x-\bar{x})}{\partial x} + \frac{\partial f\,(z-\bar{z})}{\partial z} = a(x-\bar{x}) + b(z-\bar{z})$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\bar{x},\, z=\bar{z},\, y=\bar{y}} \quad \text{y} \quad b = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{x=\bar{x},\, z=\bar{z},\, y=\bar{y}}$$

$$\Delta y = a\Delta x + b\Delta z$$

Ejemplo: Válvula



En una válvula de control, con C = cte., el área ***A*** no es constante y el caudal es una función no lineal de Δp

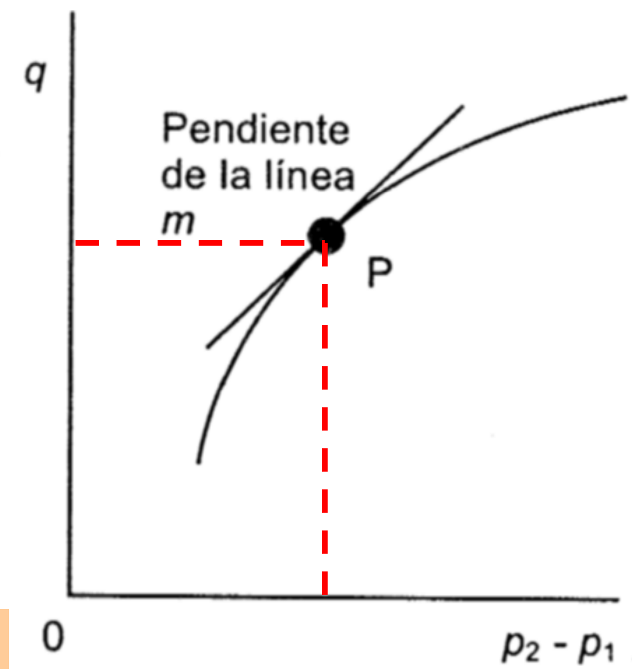
$$q = C \cdot A \sqrt{(p_1 - p_2)}$$

Con los valores del punto de operación: q_0, p_{01}, p_{02}, A_0

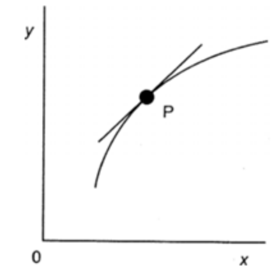
$$q_0 = C \cdot A_0 \sqrt{(p_{01} - p_{02})}$$

La solución debe tener la forma

$$q = q_0 + a \cdot \Delta A + b \cdot \Delta(p_1 - p_2)$$



Ejemplo: Válvula (2)



Partimos de la ecuación

$$q = f(A,(p_1 - p_2)) = C \cdot A\sqrt{(p_1 - p_2)}$$

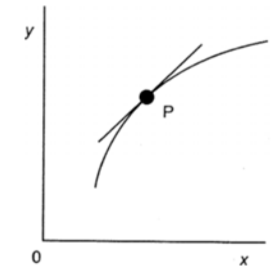
Desarrollamos en serie de Taylor alrededor del punto de operación dado y despreciando términos

$$q = q_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial A}\right|_{A_0,\, p_{01}-p_{02}} \Delta A + \left.\frac{\partial f}{\partial (p_1 - p_2)}\right|_{A_0,\, p_{01}-p_{02}} \Delta(p_1 - p_2)$$

obtenemos:

$$q = q_0 + C\sqrt{p_{01} - p_{02}} \cdot \Delta A + \frac{CA_0}{2\sqrt{p_{01} - p_{02}}}\Delta(p_1 - p_2)$$

Linealización de un sistema de ecuaciones (2)



Un sistema no lineal en forma matricial

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t)\right] \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\cdot\mathbf{r}(t)$$

con

$\mathbf{x}(t)$: vector de estado (nx1)

$\mathbf{r}(t)$: vector de entradas (mx1)

$\mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t),\mathbf{r}(t)\right]$: vector función (nx1)

$\mathbf{x}_0(t)$: trayectoria de operación nominal con entrada $\mathbf{r}_0(t)$

$\mathbf{r}_0(t)$: entrada nominal

Ejemplo

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2{}^2$$

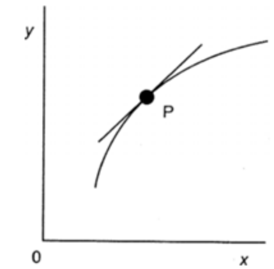
No lineal

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) = x_1 + u(t) \qquad y = x_1$$

Expandiendo en serie de Taylor alrededor de x(t)=**x**$_0$(t), **con i = 1,2,…,n**

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x},\mathbf{r})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{r}_0} (x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x},\mathbf{r})}{\partial r_j}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{r}_0} (r_j - r_{0j})$$

Linealización de un sistema de ecuaciones (2)



Hacemos

$$\Delta x_j = x_j - x_{0j}$$

$$\Delta r_j = r_j - r_{0j}$$

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{0i}$$

Con

$$\dot{x}_{0i} = f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0)$$

Sustituyendo lo anterior y despejando obtenemos

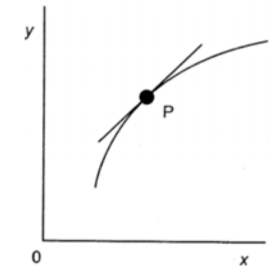
$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0} \Delta x_j + \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial r_j}\right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0} \Delta r_j$$

Que podemos escribir en la forma matricial conocida

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^* \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}^* \cdot \Delta \mathbf{r}$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

Linealización de un sistema de ecuaciones (3)



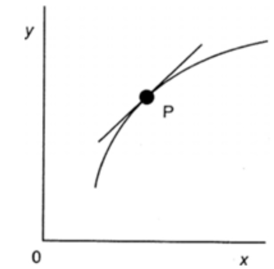
Con

$$\mathbf{A}^* = \left[a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{r}_0} \right] \quad \text{y} \quad \mathbf{B}^* = \left[b_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{r}_0} \right]$$

En forma desarrollada

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \\ \vdots \\ \Delta\dot{x}_n \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{r}_0} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} + \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r_m} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{r}_0} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \vdots \\ \Delta r_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Péndulo



La componente del peso en la dirección tangente $-mg \cdot sen(\theta)$

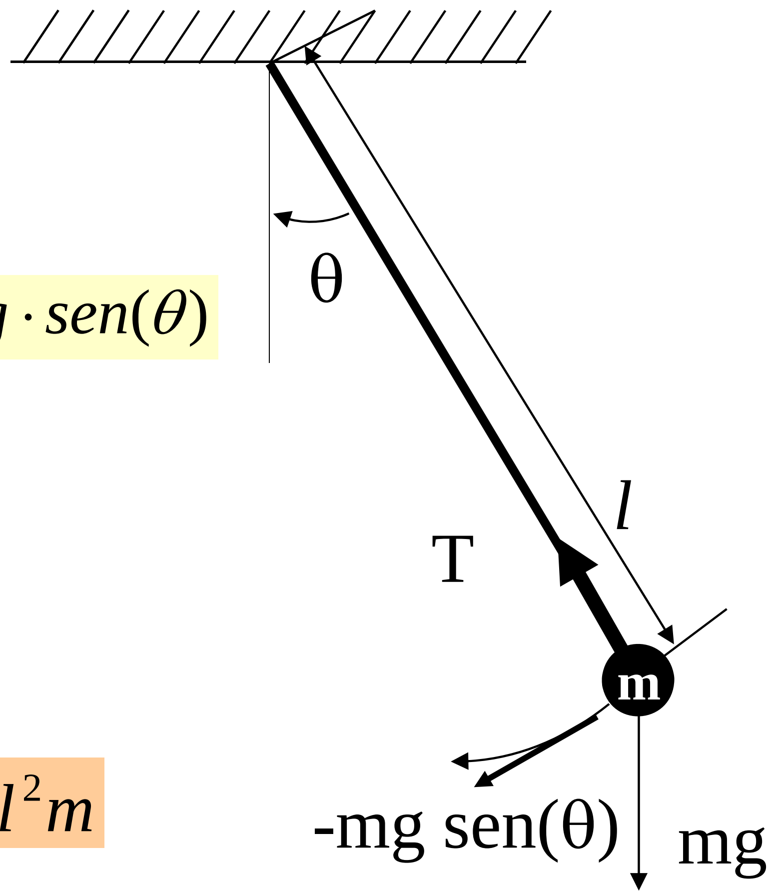
El momento de esta fuerza alrededor del punto de pivote $-lmg \cdot sen(\theta)$

El equilibrio de momentos alrededor del punto de pivote

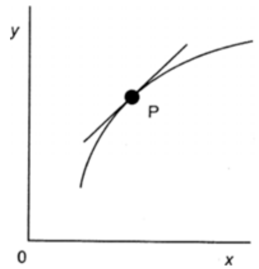
$$J\ddot{\theta} = -lmg \cdot sen(\theta)$$

El momento de la masa ***m*** alrededor del punto de pivote $J = l^2 m$

$$\ddot{\theta} = \frac{-lmg \cdot sen(\theta)}{J} = \frac{-lmg \cdot sen(\theta)}{l^2 m} = \frac{-g}{l} sen(\theta)$$



Ejemplo: Péndulo (2)



Definimos las variables

$$y = x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

Escribimos las funciones

$$\dot{x}_1 = f_1 = 0x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2 = \frac{-g}{l} sen(\theta) = \frac{-g}{l} sen(x_1) + 0x_2$$

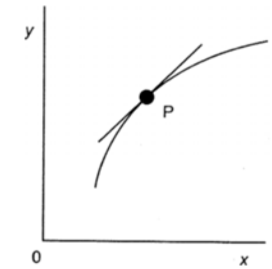
Linealizando para valores muy pequeños de θ, x_{01}=0

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=x_{01}} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l}\cos(x_{01}) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta\mathbf{x}, \qquad \Delta y = [1 \quad 0] \cdot \Delta\mathbf{x}$$

Ejemplo 2: Levitador magnético

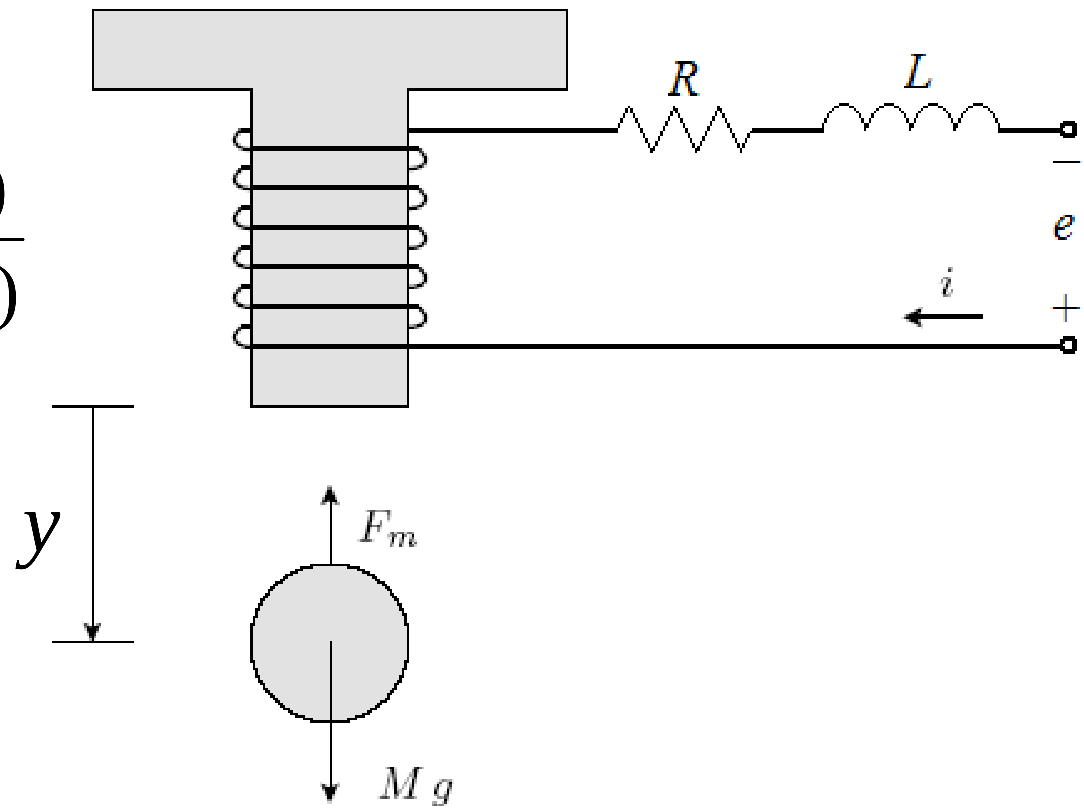


- Aplicando Newton

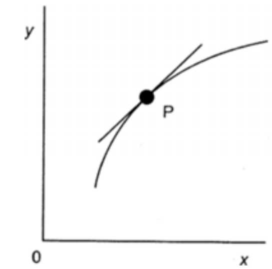
$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - k\frac{i^2(t)}{y^2(t)}$$

- Aplicando Kirchhoff

$$e(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$



Ejemplo 2: Modelo del sistema



- Ecuaciones y variables de estado:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = i(t)$$

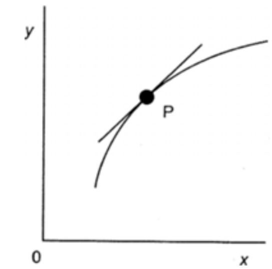
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0x_1(t) + x_2(t) + 0x_3(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0x_1 + 0x_2(t) + g - \frac{k}{M}\frac{x_3^2(t)}{x_1^2(t)}$$

no lineal

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = 0x_1(t) + 0x_2(t) - \frac{R}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

Ejemplo 2: Linealización



- Valores iniciales

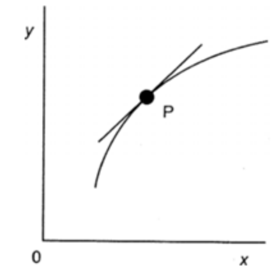
$$y_0(t) = x_{01}(t) = \text{constante}$$

$$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0$$

$$x_{03}(t) = \sqrt{\frac{Mg}{k}} \cdot x_{01}$$

$$\frac{d^2 x_{01}(t)}{dt^2} = 0$$

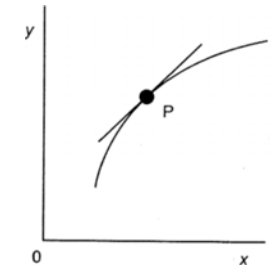
Ejemplo 2: Modelo linealizado en variables de estado



$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2g}{x_{01}} & 0 & \dfrac{-2\sqrt{\dfrac{kg}{M}}}{x_{01}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} e(t)$$

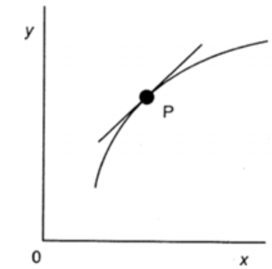
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Resumen



- En la naturaleza, la mayoría de procesos son no lineales
- Se puede crear un modelo lineal de los procesos no lineales, a través de una aproximación llamada linealización
- El proceso de linealización produce un modelo útil, si se restringe el funcionamiento del sistema a los alrededores de un punto de operación.

Referencias



- Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.

- Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4ª Ed., Madrid.

- Ogata, Katsuhiko. „**Dinámica de Sistemas**“, Prentice Hall, 1987, México.