

## 8. Prueba de estabilidad de lazo cerrado de circuitos de regulación

$$Y(s) = G_R(s)R(s) + G_D(s)D(s) \quad (1)$$

Para  $D(s) = 0$

$$G_R(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} ; G(s)K(s) = G_0(s) \quad (2)$$

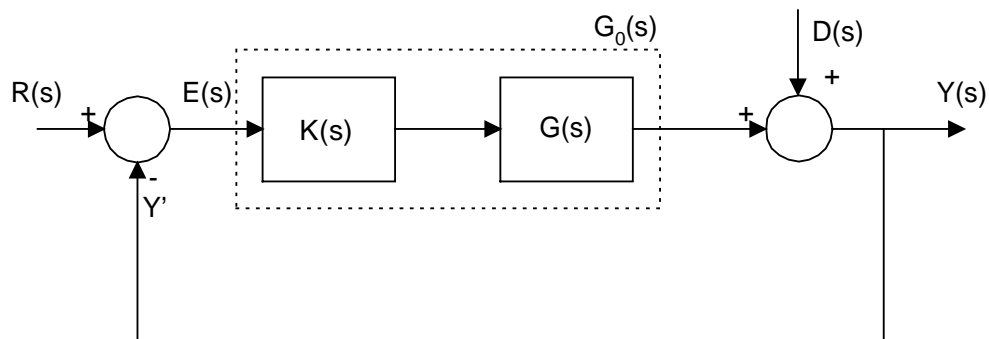


Figura 8.1: Sistema de control de lazo cerrado con perturbación

$$G_0(s) = G(s) K(s) \quad (3)$$

para  $R(s)=0$

$$G_D(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

$$G_D(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \quad (4)$$

$$\text{con } G_D(s) + G_R(s) = 1$$

ambas  $G_D(s)$  y  $G_R(s)$  tienen el mismo denominador

hacemos:

$$F(s) = 1 + G_0(s) \quad (5)$$

„Los polos  $\bar{P}_i$  de lazo cerrado del sistema son los ceros de  $F(s)$ “

La ecuación característica es

$$1 + G_0(s) = 0 \quad (6)$$

Asumimos que  $G_0(s)$  es de orden  $n$  y el lazo cerrado posee  $n$  polos  $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n$  que son diferentes de los polos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  de la función de lazo abierto. En general  $G_0(s)$  para un sistema con realimentación no unitaria es la ganancia de lazo  $K(s)G(s)H(s)$ .

Para que el sistema sea estable debe cumplirse que:

$$\operatorname{Re}\{\overline{p}_i\} < 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

### El lugar de las raíces

$$1 + K(s)G(s) = 0 \quad (8)$$

Asumimos que un parámetro de ganancia  $K$  puede ser modificado y escribimos  $K(s)$  como:

$$K(s) = K \hat{K}(s)$$

### Ecuación característica reescrita

$$1 + K \hat{K}(s)G(s) = 1 + K \hat{G}_0(s) = 0 \quad (9)$$

### Definición:

El lugar de las raíces es el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica (9) en el plano complejo. El lugar de las raíces representa la dependencia de las raíces del factor de amplificación  $K$ .

Ejemplo 8.1: Graficar el lugar de las raíces para el sistema descrito por la función  $G_0(s)$ .

$$G_0(s) = K \frac{(s+1)}{s(s+2)(s^2+12s+40)}$$

$$G_0(s) = K \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+6+j2)(s+6-j2)}$$

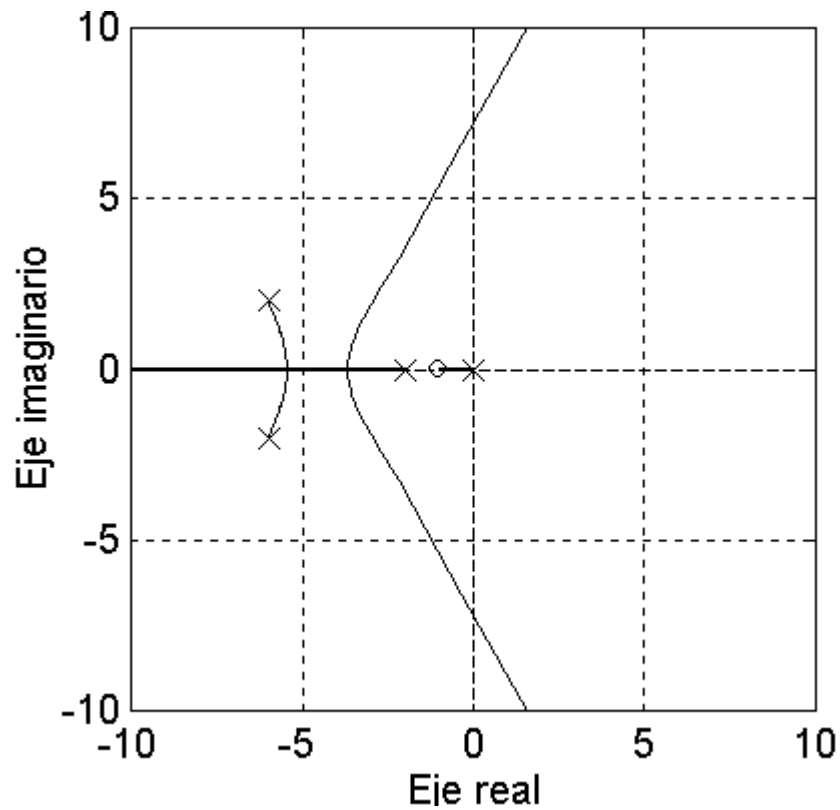


Figura 8.2: Lugar de las raíces para el ejemplo 8.1.

Los polos cruzan el eje imaginario para un valor de **K** cercano a 641.

### Propiedades y reglas de construcción para el lugar de las raíces

Partimos de una representación de  $G_O(s)$  de la forma:

$$G_O(s) = K \hat{G}_O(s) = K \frac{s^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (10)$$

$$= K \frac{\prod_{i=1}^q (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (11)$$

$$= K \frac{\prod_{i=1}^q |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} e^{j \left( \sum_{i=1}^q \phi_{zi} - \sum_{i=1}^n \phi_{pi} \right)} \quad (12)$$

donde:  $\phi_{zi}$  : argumento del número complejo (s-z<sub>i</sub>)  
 $\phi_{pi}$  : argumento del número complejo (s-p<sub>i</sub>)

a partir de (9) y (12) tenemos

$$\frac{\prod_{i=1}^q |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{K} \quad \text{Condición de amplitud} \quad (13) \text{ y}$$

$$\left( \sum_{i=1}^q \phi_{zi} - \sum_{i=1}^n \phi_{pi} \right) = (2 \cdot l + 1)\pi \quad \text{Condición de fase} \quad (14)$$

donde i entero = 0,1,2,3,...

$$1 + K \hat{K}(s)G(s) = 0 \quad (9 \text{ repetida})$$

$$K \hat{K}(s)G(s) = \underbrace{-1}_{1 \angle 180^\circ}$$

Geométricamente, las ecuaciones (13) y (14) significan que la distancia de un punto s del plano complejo a todos los polos y ceros deben cumplir la condición (13) y las direcciones especificadas por los ángulos  $\phi_{zi}$  y  $\phi_{pi}$  deben cumplir la condición (14).

Estas condiciones pueden ser utilizadas para probar si un punto „s“ del plano complejo está o no sobre el lugar de las raíces.

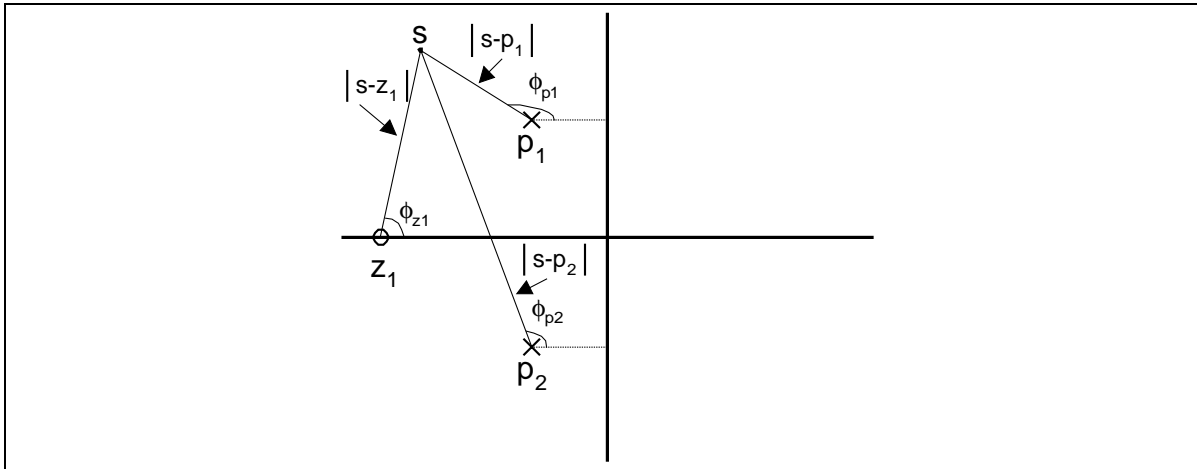


Figura 8.3: Representación gráfica de las condiciones (13) y (14)

## Reglas para trazar el lugar de las raíces

### Simetría

Las raíces de la ecuación característica están sobre el eje real o son complejas conjugadas. Ya que las raíces pertenecen al lugar de las raíces, este es simétrico respecto al eje real.

### Astas

De (9) y (11) escribimos

$$K \prod_{i=1}^q (s - z_i) + \prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0 \quad (15)$$

- Para  $K=0$ , los polos  $p_i$  de lazo abierto son el lugar de las raíces.
- Cuando  $K \rightarrow \infty$ , los ceros  $z_i$  de lazo abierto pertenecen al lugar de las raíces.

Esto significa:

El lugar de las raíces consta de „n“ astas que comienzan en los polos de lazo abierto  $p_i$ , de los cuales  $q$  astas terminan en los ceros de lazo abierto de  $z_i$  y  $(n-q)$  astas terminan en infinito.

## Asíntotas

Las astas que no terminan en ceros pueden aproximarse por medio de rectas, para valores muy grandes de  $K$ . Si analizamos lo que sucede para los puntos del plano  $s$  con valores muy grandes de „ $s$ “. En (9) hacemos  $|s| \rightarrow \infty$ .

$$1 + K \lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{G}_0(s) = 0 \quad (16)$$

$$1 + \frac{K}{s^{n-q}} = 0$$

Para valores muy grandes de „ $s$ “ y de  $K$  todos los puntos cumplen la condición de amplitud y para pertenecer al lugar de las raíces se requiere únicamente que cumplan la condición de fase.

Evaluando la condición de fase

$$(q - n) \arg(s) = (2 \cdot l + 1)\pi$$

los ángulos aproximados de las asíntotas son:

$$\phi_{\text{asíntota}} = \frac{180^\circ + l \cdot 360^\circ}{(n - q)} ; \quad l = 0, 1, 2, \dots, (n - q - 1) \quad (17)$$

## Centroide de las asíntotas

El centroide de las asíntotas es el punto del eje real donde las asíntotas convergen y se calcula con:

$$\text{centroide} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^q z_i}{n - q} = \frac{b_{q-1} - a_{n-1}}{(n - q)} \quad (18)$$

Ejercicio 8.1: Calcular y graficar los ángulos de las asíntotas para valores de  $(n - q) = 1$ ,  $(n - q) = 2$ ,  $(n - q) = 3$  y  $(n - q) = 4$ .

## Lugar de las raíces sobre el eje real

### Regla

„Todos los puntos del eje real que tienen un número impar de polos y ceros reales de lazo abierto a la derecha pertenecen al lugar de las raíces.“

### Puntos de unión sobre el eje real

Si se encuentra un asta entre dos polos reales entonces se encuentra al menos un punto de unión entre ellos.

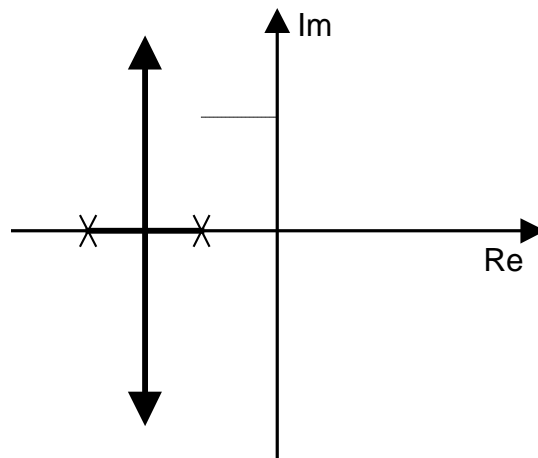


Figura 8.4: Punto de unión de polos sobre el eje real

Si se encuentra un asta entre dos ceros reales, entonces existe al menos un punto de unión entre ellos.

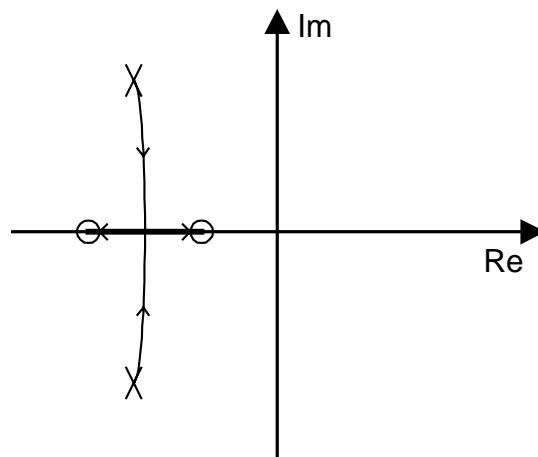


Figura 8.5: Punto de unión de ceros sobre el eje real

La ecuación (19) nos proporciona los puntos de unión en el eje real. Esta condición es necesaria pero no es suficiente y tenemos que probar además la condición de fase.

$$\frac{dG_o(s)}{d(s)} = 0 \quad (19)$$

Si se encuentra un asta entre un polo y cero sobre el eje real, entonces o no hay un punto de unión o estos se dan en pares.

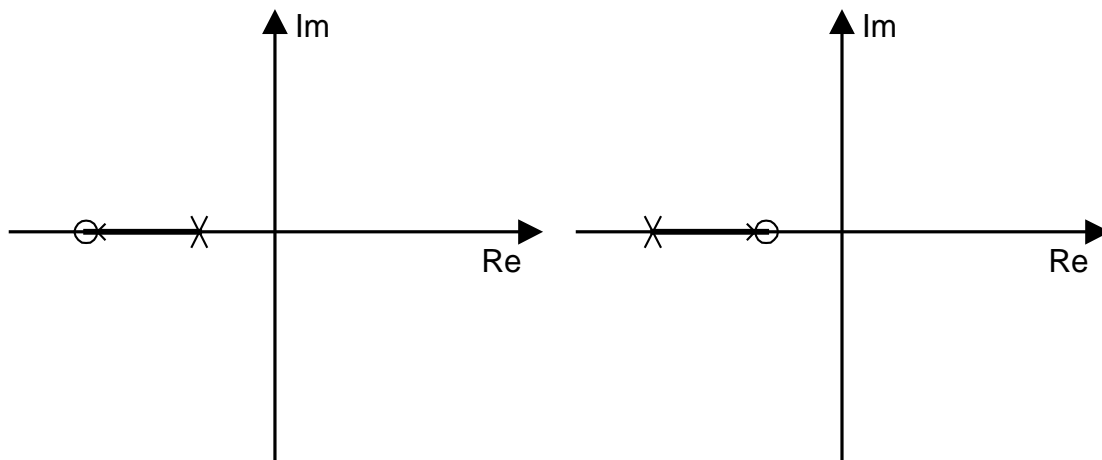


Figura 8.6: Astas entre polos y ceros en el eje real

### Ángulos de partida y de llegada para polos y ceros conjugados

El ángulo de la tangente al lugar de las raíces cerca de un polo o cero es llamado ángulo de partida o ángulo de llegada, respectivamente.

### Ángulos de partida

Los ángulos de partida se determinan evaluando la condición de fase y usando un punto muy cercano al polo como se muestra en la figura 8.7.

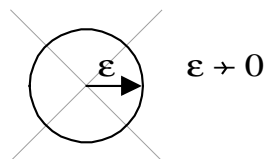


Figura 8.7: Punto muy cercano al polo o cero para determinar los ángulos de partida y llegada



De la ecuación (14) y llamando  $\phi_{px}$  el ángulo de partida, que es el ángulo desde el polo hasta el punto muy cercano a éste, usado como punto de prueba.

$$\left( \sum_{i=1, i \neq x}^n \phi_{p_i} + \phi_{p_x} \right) - \sum_{i=1}^q \phi_{z_i} = (2 \cdot l + 1)\pi \quad (20)$$

Tenemos que para un polo simple con  $l=0$  el ángulo de partida en grados es:

$$\phi_{p_x} = 180^\circ + \sum_{i=1}^q \phi_{z_i} - \sum_{i=1, i \neq x}^n \phi_{p_i} \quad (21)$$

Para ángulos múltiples de partida se debe de evaluar la ecuación (20) para otros valores de „l“ y el ángulo  $\phi_{px}$  se multiplica por el número de polos repetidos „m“ como se muestra en la ecuación 22.

$$\phi_{p_x} = \frac{(2l + 1)\pi + \sum_{i=1}^q \phi_{z_i} - \sum_{i=1, i \neq x}^n \phi_{p_i}}{m} \quad (22)$$

### Ángulos de Llegada

Los ángulos de llegada a los ceros se calculan similarmente a los ángulos de partida. Si llamamos  $\phi_{zx}$  al ángulo de llegada, tenemos para un cero simple con  $l=0$ :

$$\sum_{i=1}^n \phi_{p_i} - \left( \sum_{i=1, i \neq x}^q \phi_{z_i} + \phi_{z_x} \right) = 180^\circ$$

$$\phi_{z_x} = -180^\circ - \sum_{i=1, i \neq x}^q \phi_{z_i} + \sum_{i=1}^n \phi_{p_i} \quad (23)$$

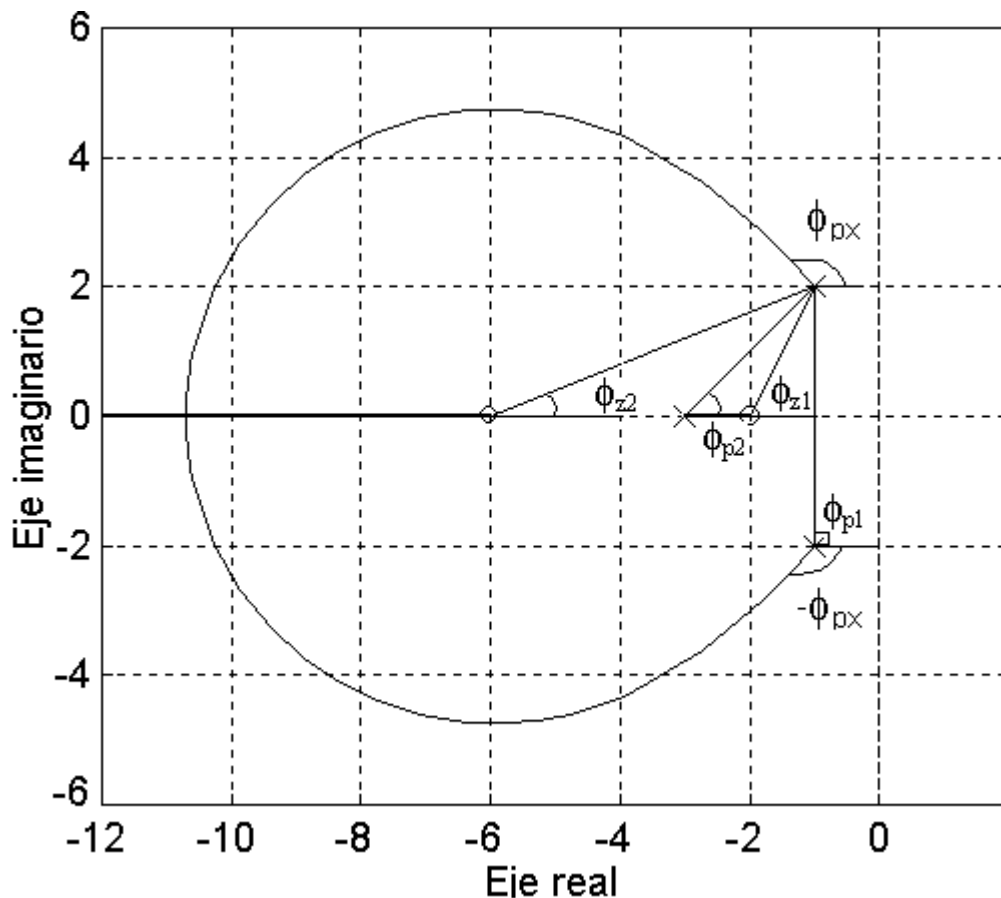
Para ceros múltiples podemos calcular los ángulos de llegada si tomamos en cuenta las múltiples contribuciones de  $\phi_{zx}$  y evaluamos para otros valores de „l“; de forma similar a como se hizo para los ángulos múltiples de partida en la ecuación (22).

Ejemplo 8.2: Graficar el lugar de las raíces para el sistema que tiene la ganancia de lazo  $G_o(s)$  dada a continuación:

$$G(s)H(s) = \frac{(s^2 + 8s + 12)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 5)}$$

Los ceros están en -2 y -6; los polos en -3 y  $1 \pm j2$ .

Solución:



Los ángulos de los polos y ceros al punto cercano al polo  $p_3$  son:  
 $\phi_{z1}=63.43^\circ$ ,  $\phi_{z2}=21.8^\circ$ ,  $\phi_{p1}=90^\circ$  y  $\phi_{p2}=45^\circ$

Por lo que los ángulos de partida  $\phi_{px}$  son de  $\pm 130.24^\circ$ .

El punto de unión en el eje real está en -10.7