Cálculo de la respuesta en el tiempo ante un escalón unitario

Encuentre y escriba la respuesta ante escalón *h(t)* y su valor final cuando el tiempo ***t*** tiende a infinito.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} * x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * x$$

Procedemos a borrar las variables y a declarar las matrices del sistema

```
clear all
A = [-1 1;-4 -5];
B = [0;1];
C = [1 2];
D = 0;
```

Creamos un sistema en variables de estado con esas matrices

```
sys1 = ss(A,B,C,D);
```

La ecuación para el cálculo de h(t) es:

$$h(t) = CA^{-1}e^{At}B + Ks$$

con $Ks = -CA^{-1}B + D$

Iniciamos el cálculo de φ(t) definida como $L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ definiendo las variables simbólicas a usar y calculamos el argumento ***x*** de la transformada inversa

```
syms s t
x = s*eye(2)-A

x =
[ s+1,  -1]
[   4, s+5]
```

Calculamos la inversa de la matriz con la definición inv(A) = adj(A)/det(A) para lo cual primero calculamos el determinante que llamaremos ***delta*** y luego la adjunta para finalmente calcular el cociente

```
delta = det(x)
delta = factor(delta)

delta =
s^2+6*s+9
delta =
```

```
(s+3)^2

invx = adj(x)/delta

invx =
[ (s+5)/(s+3)^2,     1/(s+3)^2]
[    -4/(s+3)^2, (s+1)/(s+3)^2]
```

También podemos calcular la inversa de la matriz ***x*** directamente con la función "inv(A)" de Matlab

```
inv(x)

ans =
[ (s+5)/(s^2+6*s+9),     1/(s^2+6*s+9)]
[    -4/(s^2+6*s+9), (s+1)/(s^2+6*s+9)]

fi = ilaplace(invx)

fi =
[ (2*t+1)*exp(-3*t),       t*exp(-3*t)]
[    -4*t*exp(-3*t), (1-2*t)*exp(-3*t)]
```

También podemos calcular la matriz ***fi*** directamente con ayuda de la función matriz exponencial "expm" de Matlab.

```
expm(A*t)

ans =
[ 2*t*exp(-3*t)+exp(-3*t),             t*exp(-3*t)]
[          -4*t*exp(-3*t), exp(-3*t)-2*t*exp(-3*t)]
```

Luego calculamos Ks

```
Ks = -C*inv(A)*B+D

Ks =
    0.3333
```

Finalmente calculamos h(t)

```
ht = simplify(C*inv(A)*fi*B+Ks)

ht =
t*exp(-3*t)-1/3*exp(-3*t)+1/3
```

Reescribiendo, la solución h(t) es entonces:

$$h(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) + te^{-3t}$$

Para terminar obtenemos la gráfica de la respuesta ante el escalón unitario para el sistema

```
step(sys1)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Amplitud')
title('Respuesta ante escalón')
```

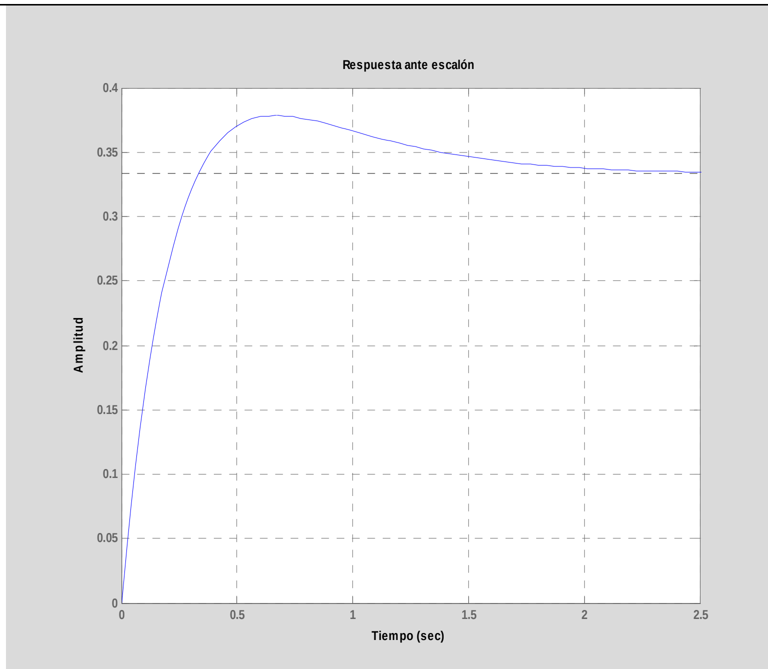

Figura 1: Respuesta ante escalón unitario

Otra forma de obtener la respuesta en el tiempo ***h(t)*** es utilizando la transformada inversa de Laplace para H(s) según $h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\{G(s)U(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$ con

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

```
Gs = simplify(C*inv(s*eye(2)-A)*B+D)

Gs =
(2*s+3)/(s^2+6*s+9)
```

La función de transferencia G(s) también puede ser obtenida directamente, aunque no de forma simbólica como

```
tf(sys1)


Transfer function:
   2 s + 3
-------------
s^2 + 6 s + 9
```

Calculamos finalmente la transformada inversa de Laplace y simplificamos el resultado

```
simplify(ilaplace(Gs/s))
```

```
ans =
t*exp(-3*t)-1/3*exp(-3*t)+1/3
```

También podemos obtener la transformada inversa de Laplace descomponiendo el argumento en fracciones parciales usando la función ***residue*** de Matlab.

```
[num,den] = numden(Gs/s)
[R,P,K]=residue(sym2poly(num),sym2poly(den))
```

```
num =
2*s+3
den =
(s^2+6*s+9)*s
R =
   -0.3333
    1.0000
    0.3333
P =
    -3
    -3
     0
K =
     []
```

Las fracciones parciales son

```
f1 = R(1)/(s-P(1))
f2 = R(2)/(s-P(2))^2
f3 = R(3)/(s-P(3))
```

```
f1 =
-1/3/(s+3)
f2 =
1/(s+3)^2
f3 =
1/3/s
```

La respuesta ***h(t)*** puede calcularse transformando al dominio del tiempo cada fracción y sumando

```
ht = ilaplace(f1) + ilaplace(f2) + ilaplace(f3)
```

```
ht =
t*exp(-3*t)-1/3*exp(-3*t)+1/3
```

Como puede observarse, el resultado es exactamente el mismo resultado obtenido antes.