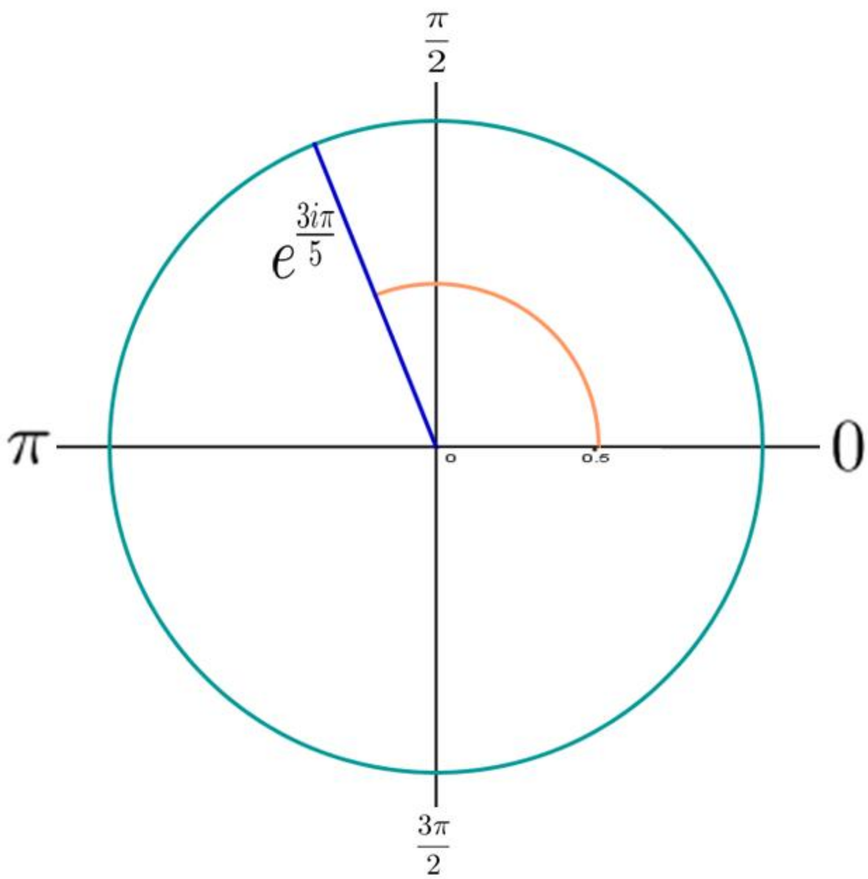
Apuntes Matemáticas Avanzadas

Pérez Susano Juan Emmanuel y Reyes Romero Carlos Adrián

12 de noviembre de 2012



Profesor: Miguel Olvera Aldana

Materia: Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Grupo: 2CM2

Índice

1. Introducción a variable compleja

Los números complejos son isomorfos a $\mathbb{R}^2$. Forma de Euler: $z = |z|\, e^{i\theta}$, si $z = a + ib$ entonces para obtener la forma de Euler de un número complejo necesitamos obtener $|z|$ y θ los cuales se obtienen de la siguiente manera:

$|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$; $\theta = arctan \frac{b}{a}$ $Nota:$ $|z|$ es el módulo del número z $Nota:$ b y a son el Cateto Opuesto y el cateto Adyacente, respectivamente

Demostración de la Forma de Euler
Ejercicio Comprobar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

Solución: Sabemos lo siguiente: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^n}{n!}) \ldots (1)$
$\mathrm{sen} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1!}) \ldots (2)$
$\cos = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2n!}) \ldots (3)$

Después decimos que x $\equiv i\theta$ por lo que tendremos $e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots$ si hacemos una pequeña agrupación podemos verlo de la siguiente manera
$e^{i\theta} = (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots)$ Ahora lo veremos como sumatorias
$e^{i\theta} == \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n \cdot \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}) \cdot i + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n \cdot \theta^{2n}}{(2n)!})$
Como podemos ver se parecen mucho a una función seno y una función coseno por lo tanto
$e^{i\theta} = i\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta$
Por lo tanto tenemos que
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ que es lo que queríamos comprobar

2. Operaciones de números complejos

Sean $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Entonces:

Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ Como podemos observar se hace la suma de la parte real y de la parte imaginaria por separado. La resta se hace la misma forma, restando las partes reales y las partes imaginarias.

Por conveniencia, en multiplicación y división se lleva a la forma de Euler para realizar las operaciones, de esta manera operamos multiplicando o dividiendo los módulos de los números complejos y sumando o restando los argumentos de las exponenciales, dependiendo cual sea el caso.

Sean entonces $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ & $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$

Producto: $z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \cdot |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Cociente: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ Forma general de hacer una mutiplicación y división.

Ejercicios. Realice las siguientes operaciones indicadas:

1. $(3 + 2i) + (-7 - i) = -4 + i$

2. $(8 - 6i) - (2i - 7) = 8 - 6i - 2i - 7 = 15 - 8i$

3. $(6 < 45°) + (7 < 30°) = [6 \cos 45° + 7 \cos 30°] + i[6 \operatorname{sen} 45° + 7 \operatorname{sen} 30°]$

$= [6(\frac{1}{\sqrt{2}}) + 7(\frac{\sqrt{3}}{2})] + i[6(\frac{1}{\sqrt{2}}) + 7(\frac{1}{2})] = (\frac{6\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{6\sqrt{2}+7}{2})$

4. $5e^{i\frac{\pi}{3}} + 7e^{i\frac{\pi}{4}} = 5[\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}] + 7[\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}]$

$= 5 \cos\frac{\pi}{3} + 5i \sin\frac{\pi}{3} + 7 \cos\frac{\pi}{4} + 7i \sin\frac{\pi}{4} = 5(\frac{1}{2}) + 5i(\frac{1}{2}) + 7(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 7i(\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2} + i\frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}[(5 + 7\sqrt{2}) + i(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})] = (\frac{5+7\sqrt{2}}{2}) + i(\frac{5\sqrt{3}+7\sqrt{2}}{2})$

5. $(2-i)(3-2i) = Z_1 * Z_2 = |Z_1||Z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
$|Z_1| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
$|Z_2| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$\theta = \arctan\frac{C.O}{C.A} = \arctan\frac{y}{x}, \theta_1 = \arctan\frac{-1}{2}, \theta_2 = \arctan\frac{2}{-3}$
$|Z_1||Z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = (\sqrt{5})(\sqrt{13})e^{i(\arctan\frac{-1}{2}+\arctan\frac{2}{3})} = \sqrt{65}e^{i[\pi-\arctan\frac{-1}{2}-\arctan\frac{2}{3}]}$

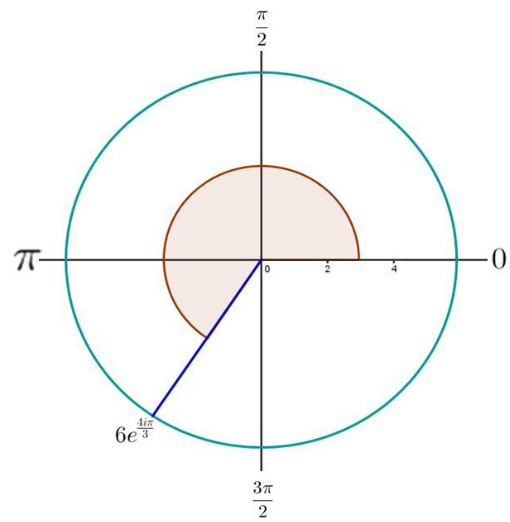
6. $(-1+2i)(7-5i) \longrightarrow (-1,2)(7,-5)$
$Z_1 * Z_2 = |Z_1||Z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = (\sqrt{5}\cdot\sqrt{74})e^{i(\arctan(-2)+\arctan(\frac{-5}{7}))}$
$= \sqrt{5\cdot 74}e^{i(\arctan(-2)+\arctan(\frac{-5}{7}))} = \sqrt{370}e^{i(\arctan(-2)+\arctan(\frac{-5}{7})}$

7. $\frac{3-2i}{-1+i} = \frac{|3-2i|}{|-1+i|}e^{i(\theta_1\theta_2)} = \frac{3x-2y}{-x+y}$
$|Z_1| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$|Z_2| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$
$\theta = \arctan\frac{y}{x}, \theta_1 = \arctan\frac{-2}{3}, \theta_2 = \arctan\frac{1}{-1} = \arctan -1$
$= \frac{|3-2i|}{|-1+i|}e^{i(\arctan\frac{-2}{3}+\arctan -1)} = \sqrt{\frac{13}{2}}e^{i(\arctan\frac{-2}{3}+\arctan(-1))}$

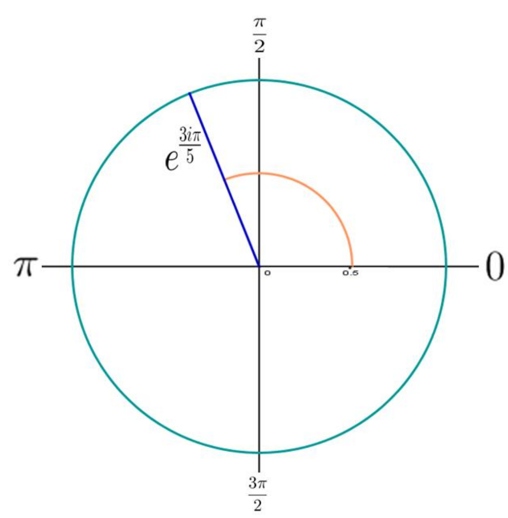
8. $\frac{5i+5}{3-4i} = \frac{|5+5i|}{|3-4i|}e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
$|Z_1| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$
$|Z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25}$
$\theta_1 = \arctan\frac{5}{5} = \arctan 1 = \arctan\frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\arctan\frac{4}{3}$
$\frac{5+5i}{2i-1} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}}e^{i(\arctan 1+\arctan 2)} = \sqrt{\frac{50}{5}}e^{i(\arctan 1+\arctan 2)} = \sqrt{10}e^{i(\arctan 1-\arctan 2)}$

3. Representación gráfica de un Número Complejo

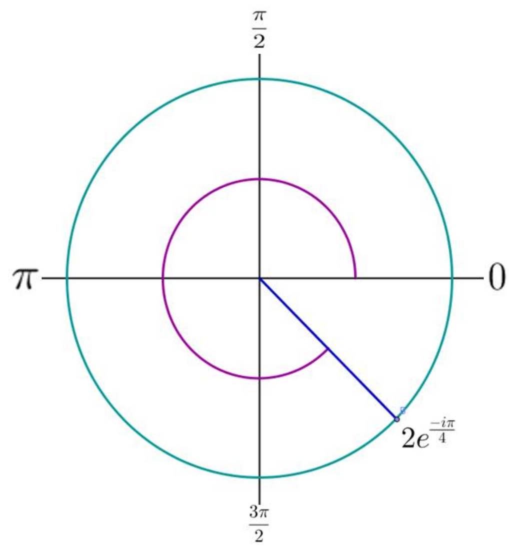
Representar en forma gráfica las siguientes expresiones:
a) Ejercicio $6cis240 \Rightarrow 6\cos(240°) + i\sin(240°)$
Nota: cis es una forma abreviada de escribir $cos\theta + isen\theta$ Solución



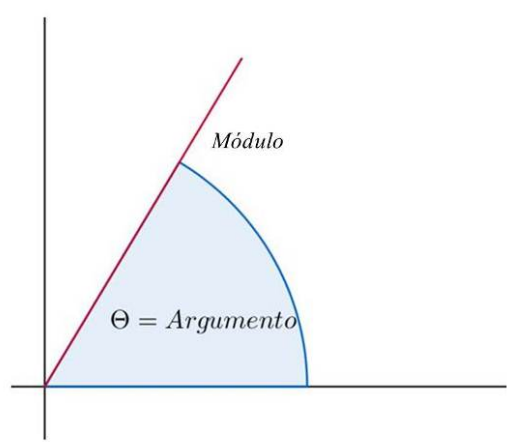
b) Ejercicio $e^{i\frac{3\pi}{5}}$
Solución



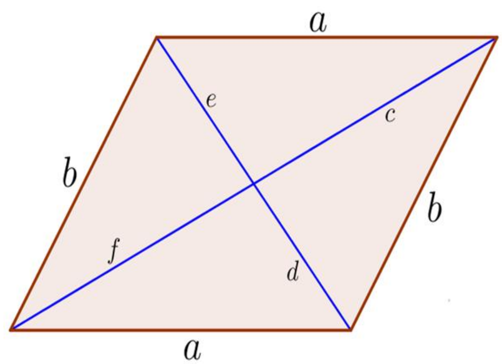
c) Ejercicio $\quad e^{-i\frac{\pi}{4}}$
Solución



Si $Z \in \mathbb{C} \Longrightarrow Z = a + ib$ y $\|Z\| \equiv$ módulo $= \sqrt{a^2 + b^2}$

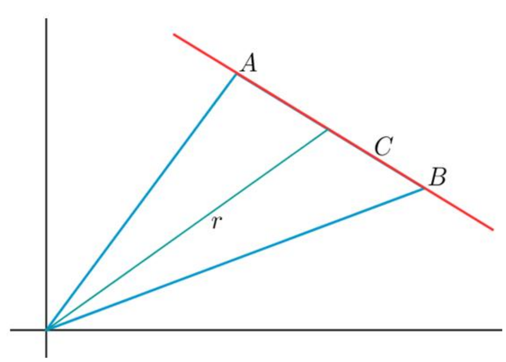


Ejercicio: Demostrar de que las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre si.
Solucion: Podemos ver gráficamente el paralelogramo de la siguiente manera



Recordemos que los paralelogramos son cuadriláteros, lo que quiere decir que la suma de sus ángulos interiores dará 360°:
$\vec{b} + \vec{d} = a$
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$
$\vec{e} = \alpha\vec{d}$
$\vec{f} = \beta\vec{c}$
$\vec{e} = \vec{f} - \vec{b}$
$\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \beta(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b}$
$-\alpha\vec{b} - \beta\vec{b} + \vec{b} - \beta\vec{a} + \alpha\vec{a} = \vec{0}$
$\vec{b}(-\alpha + \beta + 1) + \vec{a}(-\beta + \alpha) = \vec{0} - 0\vec{a} + 0\vec{b}$
$\alpha + \beta = 1, \alpha - \beta = 0, \alpha = \beta, \alpha = \frac{1}{2} = \beta$
$\therefore$ se bisectan.

Ejercicio. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos dados $A(X_1, Y_1)$ y $B(X_2, Y_2)$
Solución:



$A(X_1, Y_1)$
$B(X_2, Y_2)$

$\vec{f}(t) = \vec{\alpha} + t\vec{\beta}$
$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$
$\vec{r} = (X, Y) \Longrightarrow$ NOTA:este vector es el único que puede tener estos valores,porque es el vector de posición $\vec{l} = \alpha\vec{C}$
$\vec{A} + \vec{l} = \vec{r}$
$\vec{l} = \vec{r} - \vec{A}$
$\alpha\vec{C} = \vec{r} - \vec{A}$
$\alpha(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{r} - \vec{A}$
$\alpha\vec{B} - \alpha A = \vec{r} - \vec{A}$
$\vec{r} = \alpha\vec{A} + \vec{A} + \alpha\vec{B}$
$\vec{r} = A + \alpha(\vec{B} - \vec{A})$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es: $\vec{f}(t) = \vec{A} + \vec{t}(B)$.

Combinación Lineal
$Z_1 = |Z_1|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ y además $Z_2 = |Z_2|(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$
$\rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1||Z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$
$|Z_1||Z_2|cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)]$
$|Z_1||Z_2|cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)$

Ejercicio. Demostrar mediante inducción matemática que $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$

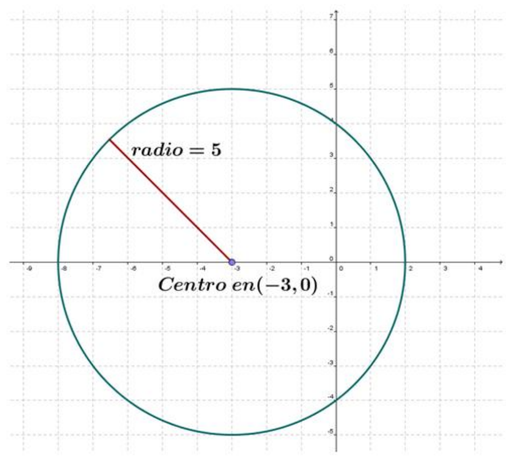
Solución
I. Comprobar para $n = 1$ se cumple.
II. Suponer cierto para cualquier $n = k \longrightarrow (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^k = \cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta$

III. Demostrar que es valido para $n = k + 1 \longrightarrow (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{k+1}$
$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$
$= \cos k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta\cos\theta + i^2\,\mathrm{sen}\,k\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$
$= (\cos k\theta\cos\theta - \mathrm{sen}\,k\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + i(\cos k\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,k\theta\cos\theta)$
$= \cos(k\theta + \theta) + i\,\mathrm{sen}\,(k\theta + \theta) = \cos[\theta(k+1)] + i\,\mathrm{sen}\,[\theta(k+1)] = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{k+1}$
$\therefore (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$

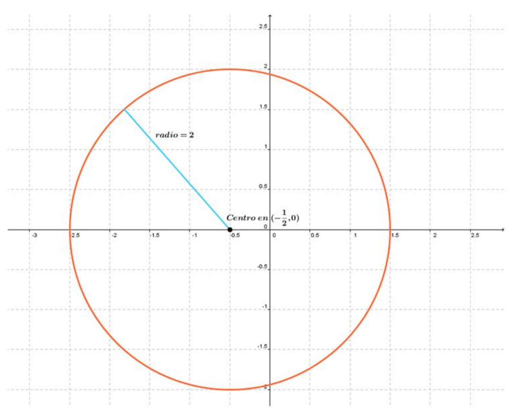
4. Lugares geométricos

El lugar geométrico de un número complejo es una representación de este número en el plano complejo.

Ejercicio 1: Dibujar el lugar geométrico de $|z+3| = 5$



Si $z = x + iy \Rightarrow |x + iy + 3| = \sqrt{(x+3)^2 + (y)^2} = 5$
Elevado al cuadrado
$(x+3)^2 + y^2 = 25$
$\therefore$ obtenemos una circunferencia de radio 5 con centro en (-3,0)
Ejercicio 2: Dibujar el lugar geométrico de $|2z+1| > 4$



$|2(x+iy)+1| = |2x+1+2iy|$
$|2(x+iy)+1| = \sqrt{(2x+1)^2 + (2y)^2} > 4$
Elevado al cuadrado
$(2x+1)^2 + 4y^2 > 16$
$(4x^2 + 4x + 1 + 4y^2) > 16$
$(4x^2 + 4x + 4y^2) > 15$

Dividido entre 4
$x^2 + x + y^2 > \frac{15}{4}$
$(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{15}{4} + \frac{1}{4}$
$(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{16}{4} = 4$
$(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 > 4$

5. Raíces complejas

Ejercicio : Encontrar las raíces de $z^2 + 1 = 0$
Factorizando la ecuación: $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$. Por tanto, podemos decir que sus raíces son i y $-i$

Ejercicio: Encontrar las raíces de: $z^3 + 1 = 0$
Solución
Factorizando la ecuación: $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$. Utilizamos la fórmula general para conocer las raíces de potencias cuadradas: $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, podemos decir que sus raíces son -1 , $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicio: Encontrar las raíces de $5z^2 + 2z + 10 = 0$
Solución $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(5)(10)}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{-196}}{10} = \frac{-2 \pm 14i}{10} = \frac{-1 \pm 7i}{5}$
$\therefore$ podemos decir que sus raíces son $\frac{-1+7i}{5}$ y $\frac{-1-7i}{5}$.

6. Raíz n-ésima de la unidad

Para el cálculo de raices complejas de la unidad, utilizamos la ecuación de Moivre: $w_k = |z|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n})$ Para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$, donde n es la potencia de la variable, y por tanto, el número de raíces a obtener.

Ejercicio: Encontrar las raíces de $z^4 + 1 = 0$

Solución
Sean entonces: $n = 4$; entonces $|z|^{\frac{1}{n}} = |-1|^{\frac{1}{4}} = 1$ y $\theta = \pi$ $w_{k1} = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$
$w_{k2} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$
$w_{k3} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$
$w_{k4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Ejercicio: Encontrar las raíces de $(2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{2}}$

Solución
Sean entonces: $n = 2$ entonces $|z|^{\frac{1}{n}} = |2\sqrt{3} - 2i|^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ y $\theta = \arctan -\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{6}$
$w_{k1} = 2(\cos\frac{\frac{-\pi}{6}}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{-\pi}{6}}{2}) = 2(\cos\frac{-\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{-\pi}{12}) = 2e^{-i\frac{\pi}{12}}$
$w_{k2} = 2(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{11\pi}{6}}{2}) = 2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}) = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Ejercicio: Encontrar las raíces de $(-4 + 4i)^{\frac{1}{5}}$

Solución
Sean entonces: $n = 5$
entonces $|z|^{\frac{1}{n}} = |-4 + 4i|^{\frac{1}{2}} = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{5}} = \sqrt{2}$ y $\theta = \arctan\frac{-4}{4} = \frac{3\pi}{4}$
$w_{k1} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{3\pi}{4}}{5}) = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{20}) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{20}}$
$w_{k2} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{11\pi}{4}}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{11\pi}{4}}{5}) = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{20}) = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{20}}$
$w_{k3} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{19\pi}{4}}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{19\pi}{4}}{5}) = \sqrt{2}(\cos\frac{19\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{19\pi}{20}) = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{20}}$
$w_{k4} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{27\pi}{4}}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{27\pi}{4}}{5}) = \sqrt{2}(\cos\frac{27\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{27\pi}{20}) = \sqrt{2}e^{i\frac{27\pi}{20}}$
$w_{k5} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{35\pi}{4}}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{35\pi}{4}}{5}) = \sqrt{2}(\cos\frac{35\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{35\pi}{20}) = \sqrt{2}e^{i\frac{35\pi}{20}}$

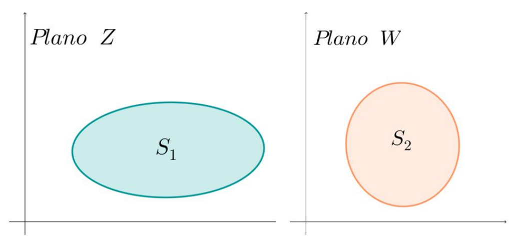
7. Funciones de Variable Compleja

Una función es una relación de correspondencia entre 2 conjuntos donde a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo uno de la imagen, donde: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
Donde u y v son la parte Real e Imaginaria de la función compleja, respectivamente y ambas dependen de las variables x y y.

Definición 1. Sea D un subconjunto no-vacío de los números complejos. Si z representa cualquier punto de D, entonces z es llamada variable compleja y D dominio de definición de z.

Definición 2. Una función de variable compleja f es una correspondencia que se establece entre dos conjuntos S_1 y S_2 de tal manera que a cada elemento $z \in S_1$ se le asigna un valor $w \in S_2$ y se escribe: $w = f(z)$

El conjunto S_1 es llamado dominio(o dominio de la definición) de f; el conjunto de valores f(z) para cada $z \in S_1$ es llamado rango de f.



$z = x + iy$ y $f(z) = u + iv$
En este caso, denotamos a u como la parte real de w; y a v como la parte imaginaria de w

Para las funciones de variable compleja no podremos trazar su gráfica ya que para representar la variable independiente, z=x+iy, se requerirían dos ejes(para su parte real e imaginaria) y para la variable dependiente,$w = u + iv$, también se requerirían dos ejes(para su parte real e imaginaria).

En general, dado $z \in S_1$ veremos que tanto u como v dependen de z .En este caso siempre escribiremos:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Ejercicio: Sean $f(z) = z^2$. Dado cualquier complejo siempre es posible calcular su cuadrado, de manera que el dominio de f son todos los complejos. Como $z = x + iy$ $w = f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ $u(x, y) = x^2 - y^2$ $v(x, y) = 2xy$

Sea n un entero positivo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes complejas. un polinomio de variable compleja es una función de la forma: $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$

En este caso se dice que el polinomio es de grado n. Para darle más generalidad a la definición, podemos decir que el grado de un polinomio de variable compleja depende de la potencia más grande en el mismo.

El dominio de cualquier polinomio de variable compleja es $\mathbb{C}$ (todos los complejos).

Una función racional se define como el cociente de dos polinomios:
$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0}$

El dominio de una función racional son todos los complejos excepto los puntos donde $Q(z) = 0$ puesto que la función racional se vería indefinida.
$D_R = \mathbb{C} \diagdown \{z | Q(z) = 0\}$

8. Función Exponencial

Sea $f(z) = e^z \forall z \in \mathbb{C}$, tal que $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$, esta expresión es posible dado que: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$
Usando la forma de Euler para e^{iy}: $e^z = e^x(cosy + iseny)$
Ejercicio: Demostrar que $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$ con $k \equiv$ número par

Solución:
$e^{i(\theta+k\pi)} = e^{i\theta ik\pi} = e^{i\theta}(\cos k\pi + i \sin k\pi)\ e^{i\theta}(1 + 0) = e^{i\theta}$

Definición: $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Ejercicio: Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, calcular $u(x, y)$ & $v(x, y)$
para $\sin z$ y $\cos z$ $f(z) = \operatorname{sen} z \longrightarrow z = x + iy$
$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy$
$\cos iy = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y$
$\sin iy = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2i} = i \operatorname{senh} y$
$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$
$\therefore u(x, y) = \sin x \cosh y \quad \& \quad v(x, y) = \cos x \operatorname{senh} y$

$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$
$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
$\therefore u(x, y) = \cos x \cosh y \quad \& \quad v(x, y)$
$= -\sin x \sinh y$

Si $f(z) = \cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2}$
$\frac{e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}$
$\cos y\frac{e^x+e^{-x}}{2} + i\sin y\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$\cos y\cosh x + i\sin y\sinh x$
$u(x,y) = \cos y\cosh x \quad \& \quad v(x,y) = \sin y\sinh x$

Si $f(z) = \sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2i} = \frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{2i}$

$-i(\frac{e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2})$
$-i(\cos y\frac{e^x-e^{-x}}{2} + i\sin y\frac{e^x+e^{-x}}{2})$
$-i(\cos y \operatorname{senh} x + i \operatorname{sen} y\cosh x)$
$u(x,y) = \cos y\cosh x \quad yv(x,y) = \operatorname{sen} y \operatorname{senh} x$

9. Función logaritmo

Definición: Si $z \in \mathbb{C}$,entonces $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

Ejercicio: Calcular $\ln(-1)$
Solución
$\ln(-1) = \ln|-1| + i\pi = \ln 1 + i\pi = i\pi$

Propiedad: Sea $\ln e^z = z$, entonces $e^{\ln z} = z$

Ejercicio: Calcular $(1+i)^{300i}$
Solución
$e^{\ln(1+i)^{300i}} = e^{300i\ln(1+i)} = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = e^{300i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})}$
$e^{300i\ln\sqrt{2}}e^{-\frac{300\pi}{4}} = e^{-75}(\cos 300\ln\sqrt{2} + i\sin 300\ln\sqrt{2})$
$= e^{-75\pi}(\cos 150\ln 2 + i\sin 150\ln 2)$

Ejercicio: Demostrar que $\arcsin z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$
Solución
Sea $w = \arcsin z$
entonces $\sin w = z$; y $z = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$,
entonces $2iz = e^{iw} - e^{-iw}$ $(e^{iw} - e^{-iw} - 2iz)e^{iw} = e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = (e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$
$e^{iw} = \frac{2iz\pm\sqrt{-4z^2+4}}{2} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$
$\ln e^{iw} = \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$
$iw = \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$
$\therefore w = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$

10. Límites

Comúnmente los decimos que son Valores de aproximación de una función. Sea $w = f(x)$ una función univaluada en D_f, se dice que el límite de $f(z)$ cuando z de aproxima a z_0 es un w_0 y se denota:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

Sí $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0$ Tal que $|f(z) - w_0| < \epsilon$ cuando $0 < |z - z_0| < \delta$
Si no se cumplen las condiciones, el límite no existe. Sí el límite de $f(z)$ existe, cuando z tiende a z_0, para cualquier valor de ϵ siempre será posible determinar un valor δ de tal manera que al aplicarle la función f a todos los puntos que están en la δ-vecindad son puntos en ϵ-vecindad.

Teorema. Sí $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe, entonces tiene un valor único.
Teorema. Sea $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función definida en un dominio D_f excepto posiblemente en z_0, entonces:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0 \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} u(x,y) = u_0 \quad \& \quad \lim_{z \to z_0} v(x,y) = iv_0$$

Ejercicio. Calcula $\lim_{z \to 1} \frac{(z^2+z-2)(z+3i)}{(z-1)}$
Solución
$\lim_{z \to 1} \frac{(z^2+z-2)(z+3i)}{(z-1)} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)(z+2)(z+3i)}{(z-1)} = \lim_{z \to 1}(z+2)(z+3i) = 3(1+3i) = 3+9i$

Ejercicio. Calcula $\lim_{z \to i} \frac{z^2-z(2+i)+2i}{(z-i)}$
Solución
$\lim_{z \to i} \frac{z^2-z(2+i)+2i}{(z-i)} = \lim_{z \to i} \frac{z^2-2z+iz+2i}{(z-i)} = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)(z-2)}{(z-i)} = \lim_{z \to i}(z-2) = i-2$

Ejercicio. Calcula $\lim_{z \to i} z\overline{z}$
Solución
$\lim_{z \to i} z\overline{z} = \lim_{z \to i}(i)(-i) = \lim_{z \to i} -i^2 = 1$

Ejercicio. Calcula $\lim_{z \to i} \frac{z[z^2+z(2-i)-2i]}{z-i}$
Solución
$= \lim_{z \to i} \frac{z^3+z^2(2-i)-2iz}{z-i} = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)(z^2+2z)}{z-i} = \lim_{z \to i} z^2+2z = i^2+2i = -1+2i$

11. Demostración de existencia de Límites

Dado $\epsilon > 0 \quad \wedge \quad \exists \delta > 0 \quad \longrightarrow \quad |f(z) - L| < \epsilon \quad \& \quad |z - z_0| < \delta$, cuando

$$\lim_{z \to z_0} \quad f(z) = L$$

exista.

Ejercicio. Demostrar que $\lim_{z \to i} z + 4 = 4 + i$
Solución
Sea $|f(z) - L| = |(z + 4) - (4 + i)| = |z - i| < \epsilon \quad \& \quad |z - z_0| = |z - i| < \delta$
Entonces podemos decir que $\epsilon = \delta$. Por lo tanto el límite existe.

Ejercicio. Demostrar que $\lim_{z \to 2i} \frac{z^4+4}{z-2i} = 4i$
Solución
Desarrollando tenemos que
$\lim_{z \to 2i} \frac{z^4+4}{z-2i} = \lim_{z \to 2i} \frac{(z+2i)(z-2i)}{z-2i} = \lim_{z \to 2i} z + 2i = 4i$
Sea $|f(z) - L| = |(z + 2i) - (4i)| = |z - 2i| < \epsilon \quad \& \quad |z - z_0| = |z - 2i| < \delta$
Entonces podemos decir que $\epsilon = \delta$
$\therefore$ el límite existe.

Ejercicio. Calcular el límite, sí existe, de $\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$
$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x \to 0 y \to 0} \frac{x-iy}{x+iy} = \lim_{x \to 0 y \to 0} \frac{x-iy}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \lim_{x \to 0 y \to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i \lim_{x \to 0 y \to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Para evaluar el límite, hacemos aproximaciones.
x) $\lim_{x = 0 y \to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i \lim_{x \to 0 y \to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$

y) $\lim_{x \to 0 y = 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i \lim_{x \to 0 y \to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$

Como los límites son diferentes, entonces el límite de la función no existe.

12. Demostración Epsilon-Delta

Ejercicio. Hallar el límite de la función $f(z)$, sí existe.

$f(z) = \frac{z(z^2+(2-i)z-2i)}{z-i}$ para $z = i$ cuando $z \longrightarrow i$

Solución: $f(z) = \frac{z(z^2+(2-i)z-2i)}{z-i} = \frac{(z-i)(z^2+2z)}{z-i} = z^2 + 2z$

$\lim_{z\to i} z^2 + 2z = \lim_{z\to i} i^2 + 2i = -1 + 2i$

Verificar la existencia del límite obtenido, utilizando la definición:
$|f(z) - L| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |x_1 - x_0| < \delta \; |f(z) - L| = |(z^2 + 2z) - (2i - 1)| = |z - i||z + 2 + i|$

*Utilizando la desigualdad del triángulo:
$|a + b| < |a| + |b| \; |z + 2 + i| < |z| + |2 + i| < |z| + 3 \quad \Longrightarrow \quad |z| > |z| - |i| < |z - i|$
$\Longrightarrow \quad |f(z) - (2i - 1)| < |z - i|(|z| + 3)$
$|f(z) - (2i - 1)| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |z - i| < 1$sí$|z > 2| \quad \Longrightarrow \quad \delta = \min(1, \epsilon)$

$\therefore$ el límite existe.

13. Álgebra de Límites

Supongamos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1 \quad \& \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$$

- Suma $\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = w_1 + w_2$

- Producto $\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot \lim_{z\to z_0} g(z) = w_1 w_2$

- Cociente $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2}$, sí $w_2 \neq 0$

- Sea k una constante compleja. Entonces $\lim_{z\to z_0} kf(z) = kw_1$

14. Derivada de una Función Compleja

Sea $w = f(z)$ una función continua, suave y univaluada en un dominio D_f y $z_0 \in D_f$. Se dice que $w = f(z)$ es derivable en z_0 sí existe:

$$f(z)\frac{d}{dz} = f'(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

Teorema. Si $f(z)$ es derivable en z_0 entonces es continua en ese punto z_0.

Ejercicio. Demostrar que sí $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$

Solución:
$f(z+\Delta z) = (z+\Delta z)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} z^{n-r}\Delta z^r$
$f(z+\Delta z) = z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}z^{n-3}\Delta z^3 + \cdots$
$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + (\frac{n(n-1)}{2})z^{n-2}\Delta z^2 + (\frac{n(n-1)(n-2)}{6})z^{n-3}\Delta z^3 + \cdots}{\Delta z}$
$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{nz^{n-1}\Delta z}{\Delta z} + \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(\frac{n(n-1)}{2})z^{n-2}\Delta z^2}{\Delta z} + \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(\frac{n(n-1)(n-2)}{6})z^{n-3}\Delta z^3}{\Delta z} + \cdots$

Excepto el primer límite, todos los demás son cero.
$\therefore f'(z) = nz^{n-1}$

Ejercicio: Sea $f(z) = |z|^2$
Sostenemos que $f(z)$ es derivable en cero y que $f'(z) = 0$.
Demostrar que no es derivable para ningún otro punto.

Solución
Sea $f'(z) = |z|^2 = z\overline{z}$
Entonces: $f'(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z\overline{z}-z_0\overline{z_0}}{z-z_0}$
$\lim_{a\to a_0\, b=b_0} \frac{(a_0^2+b^2)-(a_0^2+b_0^2)}{(a_0-ib)-(a_0-ib_0)} = \frac{(b_0+b_0)(b_0-b_0)}{i(b_0-b_0)} = -2ib_0$
$\lim_{a=a_0\, b\to b_0} \frac{(a^2+b_0^2)-(a_0^2+b_0^2)}{(a_0-ib_0)-(a-ib_0)} = \frac{(a_0+a_0)(a_0-a_0)}{(a_0-a_0)} = 2a_0$

Los límites son diferentes, por lo tanto, no es derivable en un punto $z_0 \neq 0$.
Excepto el primer límite, todos los demás son cero $\quad\therefore\quad f'(z) = nz^{n-1}$

Ejemplo: Sea $f(z) = |z|^2$. Sostenemos que $f(z)$ es derivable en cero y que $f'(z) = 0$. Demostrar que no es derivable para ningún otro punto.

Solución:

Sea $f'(z) = |z|^2 = z\overline{z}$. Entonces:

$$f'(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z\overline{z}-z_0\overline{z_0}}{z-z_0}$$

$$\lim_{\substack{a\to a_0\\ b=b_0}} \frac{(a_0^2+b^2)-(a_0^2+b_0^2)}{(a_0-ib)-(a_0-ib_0)} = \frac{(b_0+b_0)(b_0-b_0)}{i(b_0-b_0)} = -2ib_0$$

$$\lim_{\substack{a=a_0\\ b\to b_0}} \frac{(a^2+b_0^2)-(a_0^2+b_0^2)}{(a_0-ib_0)-(a-ib_0)} = \frac{(a_0+a_0)(a_0-a_0)}{(a_0-a_0)} = 2a_0$$

Los límites son diferentes, por lo tanto, no es derivable en un punto $z_0 \neq 0$.

15. Fórmulas de Derivación

Sean $f(z)$ & $g(z)$ funciones derivables en S, tal que $S \subset \mathbb{C}$

- $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f(z)\frac{d}{dz} + g(z)\frac{d}{dz}$
- $\frac{d}{dz}[f(z) \cdot g(z)] = f(z)\frac{dg(z)}{dz} + g(z)\frac{df(z)}{dz}$
- $\frac{d}{dz}[\frac{f(z)}{g(z)}] = \frac{g(z)\frac{df(z)}{dz} - f(z)\frac{dg(z)}{dz}}{[g(z)]^2}$
- Sí $F(z) = (f \circ g)(z) = f[g(z)] \quad \& \quad w = g(z) \Rightarrow \frac{dF(z)}{dz} = \frac{df(w)}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}$
- Sí $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$
- Sí $f(z) = z$, entonces $f'(z) = 1$

16. Continuidad

Una $f(z)$ es continua en todo punto, en particular en $z = 0$, sí y solo sí se cumplen las 3 condiciones siguientes:

- $z_0 \in D_f$
- $$\lim_{z \to z_0} \quad f(z) \quad = \quad f(z_0)$$
- $$\lim_{z \to z_0} \quad f(z) \quad \text{Existe}$$

Ejemplo: Sea $f(z) = 2x + ix^2$. Determinar si $f(z)$ es continua en $z_0 = 1 + i$, $D_f = \mathbb{C}$
Solución

1. $z_0 \in D_f$, ya que $1 + i$ está conformado por una parte real (1) y una parte imaginaria (i)
2. Si tomamos en cuenta que $z = x + iy$, donde: $x \quad \& \quad y = 1$
   $$\lim_{z \to 1+i} \quad f(z) \quad = \quad 2 + i$$
3. $f(1 + i) = 2 + i$
   $$\lim_{z \to 1+i} \quad f(z) \quad = \quad f(1 + i)$$

   Se dice que un límite existe si el límite de la función en z_0 es igual a $f(z_0)$

Cumple las 3 condiciones $\therefore$ la función es continua en z_0

17. Condiciones de Cauchy-Riemann

Teorema. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función derivable en z_0. Entonces las primeras derivadas parciales de u y v respecto a x y y existen en z_0 y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Y además la derivada $f'(z)$ en z_0 se puede escribir como:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \quad \text{ó} \quad f'(z_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

Teorema. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sí las primeras derivadas parciales de u y v respecto a x y y existen y son continuas, y además satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces la derivada de $f(z_0)$ existe.

Ejemplo. Encuentre u & v tales que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Determine cuando se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el dominio dado.
Solución:

Sea $f(z) = z - i \ D_f = \mathbb{C}$
$\Rightarrow \quad f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$
$\rightarrow \quad f(x + iy) = (x + iy) - i = x + i(y - 1)$
Dónde: $\quad u(x, y) = x \quad \& \quad v(x, y) = y - 1$
$\rightarrow \quad u_x = 1 \quad \& \quad v_y = 1 \quad \rightarrow \quad u_x = v_y$

Como podemos observar, y como hemos visto en cursos pasados, éstos resultados se parecen mucho al Teorema de Green (Cálculo Vectorial) y el método de resolución por Diferenciales exactas (Ecuaciones Diferenciales). Con lo cual podemos observar la secuencia de de los cursos.

Ejemplo. Encuentre la forma de las ecuaciones de Cauchy-Riemann cuando la variable independiente z se encuentra en su forma polar.
Solución:
Sea $z = r(\cos\theta + i \sin\theta) x = r\cos\theta y = r\sin\theta r = \sqrt{x^2 + y^2}\theta = \arctan\frac{y}{x}$

$u_x(r, \theta) = u_r r_x + u_\theta \theta_x \quad \& \quad u_y(r, \theta) = u_r r_y + u_\theta \theta_y$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\arctan\frac{y}{x}}{\partial x}=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{y(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x}))}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial\arctan\frac{y}{x}}{\partial y}=\frac{\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{\frac{1}{x}(\frac{\partial}{\partial y}y)}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{r}\cos\theta$$

Usando las condiciones de Cauchy-Riemann: $u_x=v_y$

$$u_x=u_r(\cos\theta)+u_\theta(-\frac{1}{r}\sin\theta)\quad\&\quad v_y=v_r(\sin\theta)+v_\theta(\frac{1}{r}\cos\theta)$$

$$u_r(\cos\theta)+u_\theta(-\frac{1}{r}\sin\theta)=v_r(\sin\theta)+v_\theta(\frac{1}{r}\cos\theta)$$

$$\cos\theta(u_r-\frac{v_\theta}{r})-\sin\theta(v_r-\frac{u_\theta}{r})=0$$

Al ser linealmente independientes, entonces $\theta\neq 0 \quad \& \quad u_x=v_y\iff\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=0$, dónde $\alpha,\beta\neq 0$. Entonces:

$$u_r=\frac{v_\theta}{r}\quad\&\quad -v_r=\frac{u_\theta}{r}$$

Análogamente para las condiciones $u_y=-v_x$

$$u_y=u_r\operatorname{sen}\theta+u_\theta\frac{cos\theta}{r}\quad\&\quad v_x=v_r\operatorname{sen}\theta-v_\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$u_r\operatorname{sen}\theta+u_\theta\frac{cos\theta}{r}=-v_r\cos\theta+v_\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$u_r\operatorname{sen}\theta-v_\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}=-v_r\cos\theta-u_\theta\frac{cos\theta}{r}$$

Agrupando términos iguales:

$$(u_r-\frac{v_\theta}{r})\operatorname{sen}\theta=-(v_r+\frac{u_\theta}{r})\cos\theta$$

Igualando con 0:

$$(u_r-\frac{v_\theta}{r})\operatorname{sen}\theta+(v_r+\frac{u_\theta}{r})\cos\theta=0$$

De ésta forma obtenemos las expresiones:

$$u_r-\frac{v_\theta}{r}=0\quad\&\quad v_r+\frac{u_\theta}{r}=0$$

$$\therefore u_r=\frac{v_\theta}{r}\quad\&\quad -v_r=\frac{u_\theta}{r}$$

18. Función Analítica

Una función es analítica en un punto z_0 sí existe una vecindad centrada en z_0 donde la función es derivable.

Teorema. Sí una función es analítica, entonces satisface las condiciones de Cauchy-Rienmann.
Demostración: Como $f(z)$ es analítica, el límite debe existir independientemente de como Δz tiende a cero. Tomamos la definición de $f'(z)$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y)+iv(x+\Delta x, y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

Tenemos dos casos: Cuando $\Delta x = 0 \quad \& \quad \Delta y \to 0$. Y el otro caso cuando $\Delta x \to 0 \quad \& \quad \Delta y = 0$.

a) Cuando $\Delta x = 0 \quad \& \quad \Delta y \to 0$. Entonces:

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

b) Cuando $\Delta x \to 0 \quad \& \quad \Delta y = 0$. Entonces:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x} + i(\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

De donde $f(z)$ no es analítica, a menos que esos dos límites sean iguales. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \text{ó} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Las ecuaciones obtenidas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, una función $f(z)$ que es analítica, satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.

19. Función Armónica

Una función es armónica sí cumple que $\nabla^2\Psi = 0$, entonces se dice que:

$$\nabla^2\Psi = \nabla \cdot \nabla\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$$

Ejemplo: Demostrar que sí $f(z) = z^2 + 2iz$, entonces u & v son armónicas.
Solución: Sea $z = x + iy$, entonces:

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 + 2i(x+iy) = x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix - 2y = (x^2 - y^2 - 2y) + i(2xy + 2x)$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y \quad \& \quad v(x,y) = 2xy + 2x$$

Verificamos que se cumplan las condiciones:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 - y^2 - 2y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 - y^2 - 2y) = 0$$

$$v_{xx} + v_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2xy + 2x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2xy + 2x) = 0$$

Se cumple la condición, $\therefore$ es armónica.

20. Integral de Línea

Una integral de línea se define con la siguiente fórmula:

$$\int_c f(z)dz \quad \text{donde C es la curva a analizar}$$

Ejemplo: Evaluar $\int_c (x+y)dx + (x-y)dy$ tal que $C:(0,0)(1,0)(0,1)$
Solución: Ya que $\int_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$ Calculamos cada una de las integrales.
Para C_1 : x va a ir cambiando, por lo que $dx \neq 0$, $y=0$, $dy=0$

$$\int_{c_1} = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Para $C_2 : x = 1-t \therefore dx = -dt, \quad y = t \therefore dy = dt, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{c_2} = \int_{c_2} xdx + ydy = \int_0^1 -(1-t+t)dt + (1-t-t)dt = -\int_0^1 dt + \int_0^1 1-2tdt = -t^2|_0^1 = -1$$

Para C_3 : y va a ir cambiando, por lo que $dy \neq 0$, $x=0$, $dx=0$

$$\int_{c_3} = \int_1^0 -ydy = \frac{-y^2}{2}|_1^0 = \frac{1}{2}$$

Como $\int_c$ es la suma de las integrales, entonces $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
Sí C es una curva suave, a pedazos, y f es una función continua sobre C , entonces la integral $\int_c f(z)dz$ existe.

Las integrales de linea complejas tienen algunas propiedades establecidas para las integrales de linea de campos vectoriales.

Teorema. Sí C es una curva suave parametrizada por $z(t)$, donde t es el parametro, $a \leq t \leq b$ y f es continua en C , entonces:

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

Ejemplo: Calcular la integral $\int_c \overline{z}dz$ sí C es el segmento de recta que une los puntos $(0,4i)$
Solución: Sean $f(z) = \overline{z} z(t) = it$ para $0 \leq t \leq 4 f(z(t)) = \overline{it} = -it z'(t) = i$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_0^4 -itidt = \int_0^4 tdt = \frac{t^2}{2}|_0^4 = 8$$

Ejemplo: Calcular la integral $\oint_c \overline{z}dz$ sí C es la circunferencia dada por $|z|=1$
Solución: Sean $f(z) = \overline{z} z(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi z'(t) = ie^{it} f(z(t)) = e^{-it}$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = it|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

Ejemplo: Calcular la integral $\oint_c \frac{1}{z} dz$ sí C es la circunferencia dada por $|z| = 1$
Solución: Sean $f(z) = \frac{1}{z} z(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi z'(t) = ie^{it} f(z(t)) = \frac{1}{e^{it}}$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = it|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

Ejemplo: Calcular la integral $\oint_C \frac{1}{z^n} dz$ sí C es la circunferencia dada por $|z| = 1$
Solución: Sean $f(z) = \frac{1}{z^n} z(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi z'(t) = ie^{it} f(z(t)) = \frac{1}{e^{nit}}$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{nit}} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{-it(n-1)}$$

$$= \frac{i}{-i(n-1)} e^{-it(n-1)}|_0^{2\pi} = \frac{1}{(n-1)}(1-1) = 0$$

21. Teorema de Cauchy

Supóngase que una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D y que la derivada de f es continua en el dominio. Entonces, para cualquier curva cerrada simple C:

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

Demostración: Para realizar esta demostración nos basaremos en el Teorema de Green, que dice:

$$\iint_R (\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y})\partial A$$

Entonces tenemos que: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \& \quad dz = dx + idy$

$$\oint_c f(z)dz = \oint udz - vdy + i\oint vdx + udy = \iint_R (-V_x - U_y)dA + i\iint_R (U_x - V_y)dA$$

Como la función es analítica, satisface las condiciones de Cauchy-Rieman. Por lo tanto:

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

21.1. Teorema Fundamental

Sea D_f un dominio simplemente conexo y F una función analítica en el dominio D_f y sea f la derivada de F respecto a t para z que pertenece al dominio.

$$\frac{dF}{dz} = f(z)$$

Y sea C una curva suave en el dominio D en un punto inicial z_1 y en un punto final z_0. Entonces la integral se expresa como:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Demostración: La función $f(z)$ respecto a t se expresa como $f(z(t)) = \frac{dF(z(t))}{dz}$ Entonces:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z(t))z'tdt$$

Si tomamos $f(z(t)) = \frac{dF(z(t))}{dz} \quad \& \quad z'(t) = \frac{dz}{dt}$ Entonces:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dF(z(t))}{dz}\frac{dz(t)}{dt}dt = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dF(z(t))}{dt}dt = \int_{z_1}^{z_2} dF(z(t)) = F(z(t))|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$

Ejemplo: Calcular la integral $\int_i^{1+i} \ln(z)dz$.
Solución: $z\ln(z) - z|_i^{1+i}$

$$= (1+i)\ln(1+i) - (1+i) - i\ln(i) - i = (1+i)(\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}) - 1 + i - i(\ln(1) + i\frac{\pi}{2}) - i$$

$$= (\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} - 1) + i(\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4})$$

Ejemplo: Calcular la integral $\int_c f(z)dz$ sí $f(z) = 1$ & C es la circunferencia con centro en $(1, i)$ y radio 1 .
Solución: $C : |z - (1+i)| = 1 z(t) = e^{it} - (1-i) f'(z(t)) = ie^{it} 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_c f(z)dz = \int_0^{2\pi} ie^{it}dt = e^{it}|_0^{2\pi} = e^{2\pi i} - e^0 = 0$$

Ejemplo: Calcular la integral cerrada $\oint_c \frac{dz}{z^2+1}$ sí $f(z) = 1$ & $C : z = |3|$.
Solución: Sean $z(t) = 3e^{it}$ para $0 \le t \le 2\pi z'(t) = 3ie^{it}$.
Separamos en fracciones parciales: $\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{z+i} - \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{z-i}$

$$= \frac{1}{2i}\ln(z+i)|_0^{2\pi} - \frac{1}{2i}\ln(z-i)|_0^{2\pi} = \frac{1}{2i}\ln(3e^{it}+i)|_0^{2\pi} - \frac{1}{2i}\ln(3e^{it}-i)|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\ln(3e^{2\pi i}+i) - \ln(3e^0)+i)}{2i} - \frac{\ln(3e^{2\pi i}+i) - \ln(3e^0)+i)}{2i} = \frac{\ln(i) - \ln(i)}{2i} - \frac{\ln(i) - \ln(i)}{2i} = 0$$

Ejemplo: Calcular la integral $\oint_c \frac{1}{z}dz$ sí C es la circunferencia dada por $|z| = 5$.
Solución: Sean $z(t) = 5e^{it}$ para $0 \le t \le 2\pi z'(t) = 5ie^{it} f(z(t)) = \frac{1}{5e^{-it}}$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{5e^{-it}}5ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} ie^{2it}dt = \frac{1}{2}e^{2it}|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi i} - e^0}{2} = 0$$

21.2. Ejercicios de Integración

1. Calcular $\int_c f(z)dz$ Sí: $f(z) = Re\{z\}$ Donde C es el segmento de recta que va de 1 a $2+i$.

Solución
Obtenemos la ecuación paramétrica de la recta: $x - 1 = y = t \longrightarrow x = t+1$ & $y = t$.

$$\int xdx = \int x(dx + idy) = \int xdx + i\int xdy = \int_0^1 (t+1)dt + i\int_0^1 (t+1)dt$$

$$= (\frac{t^2}{2} + t)|_0^1 + i(\frac{t^2}{2} + t)|_0^1 = \frac{3}{2} + i\frac{3}{2}$$

2. $\int_c -i \cos z$ Con C: Cualquier curva suave a pedazos de 0 a $-2+i$.
Solución

$$= -i \int_0^{-2+i} \cos z = -i \sin z|_0^{-2+1} = -i[\sin -2+i - \sin 0] = -i(\sin i \cos -2 + i \sin -2 \cos i)$$

$$= \sin -2 \cosh 1 - i \sinh 1 \cos 2$$

3. $\int_c \sinh z$ Con C: Elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = 8$ de $-4i$ a $2\sqrt{2}$.
Solución
Obtenemos los límites de integración: $\frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{y+4i}{4i} = t \quad \longrightarrow \quad x = 2\sqrt{2}t \quad \& \quad y = 4it - 4i$.

$$\int_{2\sqrt{2}}^{4i} \sinh z = -\cosh z|_{2\sqrt{2}}^{4i} = \cosh 2\sqrt{2} - \cosh 4i = \cosh 2\sqrt{2} - \cos 4$$

21.3. Fórmula Integral de Cauchy

Teorema. Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D_f. Sea z_0 un punto cualquiera en el dominio D_f y C una curva cerrada simple en D_f que encierra a z. Entonces:

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Demostración: Sea $\oint \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \quad \& \quad \oint \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$

$$\oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) \int \frac{dz}{z-z_0} + \int \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$$

$$= 2\pi i f(z_0) + \int \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$$

Ahora solo queda demostrar que $\int \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$ es cero:
Como f es continua en $z_0 \quad \longrightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \& \quad |z - z_0| < \delta$
Entonces podemos decir: $|z - z_0| = \rho \quad \longrightarrow \quad |\oint \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz| < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon$
Y siendo ϵ un valor arbitrario, podemos decir que es cero y queda demostrado el Teorema.

Ejemplo: Evaluar la integral $\oint_c \frac{e^z \sin z^2}{z-2} dz$ C : Toda curva simple que no pase por 2.
Solución: Con la definición de C, tenemos dos posibles casos. Que C contenga a 2, o no.

a) C no contiene a 2. Por el Teorema de Cauchy: $\oint \frac{e^z \sin z^2}{z-2} dz = 0$
Es 0 porque de otro modo se llegaría a una indefinición.
b) C contiene a 2. En este caso cumple con nuestro Teorema Integral de Cauchy, y tenemos:

$$\oint \frac{e^z \sin z^2}{z-2} dz = 2\pi i[f(z_0)] = 2\pi i[e^2 \sin 4] = 2\pi i e^2 \sin 4$$

21.4. Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas Superiores

Teorema. Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D_f y $z_0 \in D_f$. Entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en z_0. Además, la enésima derivada en z_0 está dada por:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Ejemplo: Evaluar la integral $\oint_c \frac{2 \sin z^2}{(z-1)^4} dz$ C : Una curva cerrada que no pasa por 1.
Solución: Con la definición de C, tenemos dos posibles casos. Que C contenga a 1, o no.

a) C no contiene a 1. Por el Teorema de Cauchy: $\oint \frac{2 \sin z^2}{(z-1)^4} dz = 0$
b) C contiene a 1. En este caso cumple con nuestro Teorema Integral de Cauchy para Derivadas Superiores, y tenemos:

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \quad \longrightarrow \quad \oint \frac{2 \sin z^2}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)|_{z_0}$$

Sean: $z_0 = 1 n = 3 f(z) = 2 \sin z^2$

$$f'(z) = 4z \cos z^2 \quad \longrightarrow \quad f''(z) = 4(\cos z^2 - 2z^2 \sin z^2) \quad \longrightarrow \quad f'''(z) = -8z(3 \sin z^2 + 2z^2 \cos z^2)$$

$$\oint \frac{2 \sin z^2}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!}[-8z(3 \sin z^2 + 2z^2 \cos z^2)]|_{z=1} = \frac{8\pi i}{3}(3 \sin 1 + 2z^2 \cos 1)$$

21.5. Más Ejercicios de Integración

Evalúe las siguientes integrales.

1. $\oint \frac{2z^3}{(z-2)^2} dz$, C: Rectángulo con vértices en $(4-i), (4+i), (-4-i), (-4+i)$

Solución:
Sea: $f(z) = 2z^3 \quad \longrightarrow \quad f''(z) = 6z^2$ & Polo en $z_0 = 2$ que está dentro C. & $n = 1$

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{2\pi i}{1!} 6z^2|_{z=2} = 2\pi i(24) = 48\pi i$$

2. $\oint \frac{ie^z}{(z-2+i)^4} dz$, C: Circunferencia dada por $|z| = 2$.
Solución:
La función tiene Polo en $z = 2 - i$, y como $|z - (2 - i)| > 2$, el polo se encuentra fuera de C.

$$\text{Por el Teorema de Cauchy: } \oint \frac{ie^z}{(z-2+i)^4} dz = 0$$

3. $\oint \frac{3\sin 3z}{(z+4)^3} dz$, C: Triángulo con vértices en $(0), (-1-8i), (1-8i)$
Solución:
La función tiene Polo en $z = -4$, y el polo se encuentra fuera de C.

$$\text{Por el Teorema de Cauchy: } \oint \frac{3\sin 3z}{(z+4)^3} dz = 0$$

4. $\oint \frac{2z\cosh z}{z-(2-4i)} dz$, $C : |z + 1 + 2i| = 1$
Solución:
La función tiene Polo en $z = 2 - 4i$, y el polo se encuentra fuera de C.

$$\text{Por el Teorema de Cauchy: } \oint \frac{2z\cosh z}{z-(2-4i)} dz = 0$$

22. Residuos

Supongamos que z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$ y r la distancia desde z_0 a la singularidad más próxima de $f(z)$ distinta de z_0 misma.

Sean C_1 y C_2 círculos concéntricos con centro en z_0 y de radios $r_1 < r_2 < r$, entonces la región anular formada por los círculos C_1 y C_2 dada por $f(z)$ se puede escribir como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n} \text{donde:} n \in \mathbb{N} \quad \text{y:}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz, b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} f(z)dz$$

Note que C_1 solo encierra la singularidad z_0 de $f(z)$. El valor de b_1 es llamado Residuo de $f(z)$ en z_0 y se denota como:

$$\text{Res}[f(z), z_0] \text{ó} \text{Res}(z_0)$$

El Residuo se obtiene mediante la fórmula:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \cdot [f(z)(z-z_0)^m]|_{z=z_0}$$

22.1. Teorema del Residuo

Sea C un contorno simple y cerrado, y $f(z)$ una función analítica dentro y sobre C, excepto en un número finito de puntos $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ contenidos en el interior de C, entonces la integral de $f(z)$ se expresa como:

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots)$$

Y también se puede expresar como:

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[f(z), z_k]$$

Donde el contorno es recorrido en sentido positivo (se dice que es sentido positivo cuando el sentido es antihorario).

Ejemplo: Usando el Teorema del Residuo, evaluar la integral $\oint \frac{z^4}{(z-1)^4}dz$, C : Encierra a 1
Solución: La función tiene un único polo en $z_0 = 1$ & $m = 4$. Calculamos el residuo:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \cdot [f(z)(z-z_0)^m]|_{z=z_0} = \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3}{dz^3}(\frac{z^4}{(z-1)^4} \cdot (z-1)^4)|_{z=1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3}{dz^3}(z^4)|_{z=1} = \frac{1}{6}24z|_{z=1} = 4$$

$$\oint \frac{z^4}{(z-1)^4}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i\text{Res}[f(z), 1] = 8\pi i$$

Ejemplo: Usando el Teorema del Residuo, evaluar la integral $\oint \frac{\sin 2z}{(z-i)^3}dz$ $\quad ,C$: Encierra a i

Solución: La función tiene un único polo en $z_0 = i$ $\quad \& \quad$ $m = 3$. Calculamos el residuo:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\cdot[f(z)(z-z_0)^m]|_{z=z_0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dz^2}(\frac{\sin 2z}{(z-i)^3}\cdot(z-i)^3)|_{z=i}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{d^3}{dz^3}\sin 2z|_{z=i} = \frac{1}{2}(-4\sin 2z)|_{z=i} = -2\sin 2i = -2i\sinh 2$$

$$\oint \frac{\sin 2z}{(z-i)^3}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i\text{Res}[f(z), i] = 2\pi i(-2i\sinh 2) = 4\pi\sinh 2$$

23. Integral de Variable Real

Ejemplo 1: Evalúe la integral en variable compleja y en variable real: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1+\frac{1}{4}\cos\theta}$

Solución a) Variable Compleja

Sean $z = e^{i\theta}, |z| = 1, dz = ie^{i\theta}d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\&\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

Entonces:

$$\oint f(z)dz = \oint \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{1+\frac{1}{8}(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz} = -4i\oint \frac{z^2+1}{z(z^2+8z+1)}dz = -4i\oint \frac{z^2+1}{z[z-(4+\sqrt{15})][z-(4-\sqrt{15})]}dz$$

Por Teorema de los Residuos: $\oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(i) + \text{Res}(4-\sqrt{15})]$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} = (\frac{z^2+1}{[z-(4+\sqrt{15})][z-(4-\sqrt{15})]})|_{z=0} = \frac{1}{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})} = \frac{1}{16+4\sqrt{15}-4\sqrt{15}-15} = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=4-\sqrt{15}} = (\frac{z^2+1}{z[z-(4+\sqrt{15})]})|_{z=4-\sqrt{15}} = \frac{16-8\sqrt{15}+15+1}{(4-\sqrt{15})[4-\sqrt{15}-4-\sqrt{15}]} = \frac{32-8\sqrt{15}}{30-8\sqrt{15}} = 1-\frac{2}{30-8\sqrt{15}}$$

$$-4i\oint f(z)dz = -4i(2\pi i\{[\text{Res}(i)+\text{Res}(4-\sqrt{15})]\}) = -8\pi i^2(2-\frac{2}{8\sqrt{15}}) = 8\pi(1-\frac{4}{\sqrt{15}})$$

b) Variable Real

Utilizamos un cambio de variable $u = \tan(\frac{\theta}{2})$, $du = \frac{1}{2}\sec^2(\frac{\theta}{2})$

$$\text{Entonces: } \sin x = \frac{2u}{u^2+1} \quad , \quad \cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1} \quad , \quad dx = \frac{2du}{u^2+1}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2(1-u^2)}{(u^2+1)^2(\frac{1-u^2}{4(u^2+1)}+1)}du = \int_0^{2\pi} \frac{8-8u^2}{3u^4+8u^2+5}du = -8\int_0^{2\pi} \frac{1-u^2}{3u^4+8u^2+5}$$

$$= -8\int_0^{2\pi} \frac{4}{3u^2+5} - \frac{1}{u^2+1}du = 8\int_0^{2\pi} \frac{du}{u^2+1} - 32\int_0^{2\pi} \frac{du}{3u^2+5} = 8\arctan u|_0^{2\pi} - 32\frac{\arctan\sqrt{\frac{3}{5}}u}{\sqrt{15}}|_0^{2\pi}$$

$$= 8\arctan\tan(\frac{\theta}{2})|_0^{2\pi} - 32\frac{\arctan\sqrt{\frac{3}{5}}\tan(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{15}}|_0^{2\pi} = 4\theta|_0^{2\pi} - 32[\frac{\arctan\sqrt{\frac{3}{5}}\tan\pi}{\sqrt{15}} - \frac{\arctan\sqrt{\frac{3}{5}}\tan 0}{\sqrt{15}}]$$

$$= 8\pi - \frac{32}{\sqrt{15}}\pi = 8\pi(1-\frac{4}{\sqrt{15}})$$

Ejemplo 2: Evalúe la integral: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$

Solución: Sean $z = e^{i\theta}, |z| = 1, dz = ie^{i\theta}d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \& \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

Entonces:

$$\oint f(z)dz = \oint \frac{1}{2-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz} = -i\oint \frac{2z}{z(-z^2+4z-1)}dz = 2i\oint \frac{dz}{[z-(2+\sqrt{3})][z-(2-\sqrt{3})]}$$

Por Teorema de los Residuos: $\oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(2-\sqrt{3})]$

$$\underset{z=2-\sqrt{3}}{\text{Res}} = (\frac{1}{[z-(2+\sqrt{3})]})|_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Entonces: $\quad 2i\oint f(z)dz = 2i[2\pi i(\text{Res}(2-\sqrt{3}))] = -4\pi i^2(\frac{\sqrt{3}}{6}) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

23.1. Integrales Impropias de Variable Real

Ejemplo: Evalúe la integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$
Solución:
Sean: $\quad x \equiv z$ Entonces: $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^3+1} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{[z+1][z-(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})][z-(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})]}$
Por Teorema de los Residuos: $\oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(-1)+\text{Res}(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})]$

$$\underset{z=-1}{\text{Res}} = (\frac{1}{[z-(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})][z-(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})]})|_{z=-1} = \frac{1}{(-\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})(-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\underset{z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{\text{Res}} = (\frac{1}{[z+1][z-(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})]})|_{z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{(\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})(i\sqrt{3})} = \frac{1}{\frac{3i\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3i\sqrt{3}-3}$$

$$\frac{2}{3i\sqrt{3}-3}\cdot\frac{-3i\sqrt{3}-3}{-3i\sqrt{3}-3} = \frac{-6i\sqrt{3}-6}{-27i^2+9} = \frac{-6i\sqrt{3}-6}{36} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{6}$$

Entonces: $\quad \oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(-1)+\text{Res}(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})] = 2\pi i[\frac{1}{3}+(-\frac{1}{6}-\frac{i\sqrt{3}}{6})]$

$$= 2\pi i(\frac{1}{6}-\frac{i\sqrt{3}}{6}) = \frac{\pi}{3}(1+\sqrt{3})$$

Ejemplo: Evalúe la integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$
Solución:
Sean: $\quad x \equiv z$ Entonces: $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+4)^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$
Por Teorema de los Residuos: $\oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(2i)]$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} = \frac{d}{dz}(\frac{1}{(z+2i)^2})|_{z=2i} = (\frac{-2}{(z+2i)^3})|_{z=2i} = \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{-i}{32}$$

Entonces: $\displaystyle \oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(2i)] = 2\pi i(\frac{-i}{32}) = \frac{\pi}{16}$

Ejemplo: Evalúe la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

Solución:

Sean: $x \equiv z$ Entonces: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+z+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{[z-(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})][z-(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})]}$

Por Teorema de los Residuos: $\oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})]$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = (\frac{1}{z-(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})})\Big|_{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

Entonces: $\displaystyle \oint f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})] = 2\pi i(\frac{-i}{\sqrt{3}}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

24. Series de Laurent

La Serie de Laurent de una función Compleja $f(z)$ es su representación en forma de Serie de Potencias, la cual incluye términos en grado negativo. Esta serie se puede usar para expresar funciones complejas en casos donde la expansión de la serie de Taylor no es aplicable o no se puede acoplar, cabe destacar que el término más importante es el primer término negativo, ya que a partir de éste se puede verificar el teorema del Residuo.

Una serie de Laurent centrada alrededor de un punto C es una serie de la forma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-c)^k \text{Donde} \quad a_k, c, z \in \mathbb{C}$$

Se define con respecto a un punto particular C y un camino de integración γ. El camino de integración debe de estar dentro del disco donde $f(z)$ es una función holomorfa.

Toda serie de Laurent tiene vinculada una función cuyo dominio es el conjunto de los puntos donde $\mathbb{C}$ es convergente. Esta función es analítica dentro de una corona D inversamente, toda función en una corona es igual a la única Serie de Laurent.

Ejemplo: Desarrolle $\frac{1}{z^2(z+1)}$ en serie de Laurent en $z=0 \quad y \quad z=-1$.
Solución
Primer caso. $z=0$ Entonces $z^2|_{z=0}=0$

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = (\frac{1}{z^2})(\frac{1}{z+1}) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-2}$$

Segundo caso. $z=-1$ Entonces $(z+1)|_{z=-1}=0$

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = (\frac{1}{z^2})(\frac{1}{z+1}) = (\frac{1}{z+1})(\frac{1}{[1-(z+1)]^2}) = (\frac{1}{z+1})[1^{-2} - (-2)(z+1) + \ldots]$$

$$\frac{1}{z+1} + 2 + 3(z+1) + 12(z+1)^2 + \cdots$$

Ejemplo: Desarrolle $\frac{1}{z^2+1}$ en serie de Laurent alrededor de $-i$.
Solución:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{i}{2}(\frac{1}{z+i}) - \frac{i}{2}(\frac{1}{z-i}) = \frac{i}{2}[\frac{1}{2i(1+\frac{z-i}{2i})}] - \frac{i}{2}(\frac{1}{z-i})$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n - \frac{i}{2}(\frac{1}{z-i}) \quad \text{Tal que} \quad |\frac{z-i}{2i}| < 1 \quad \text{ó} \quad 0 < |z-i| < 2$$

Ejemplo: Desarrolle $\frac{1}{(z+1)(z-3i)}$ en serie de Laurent alrededor de -1.

Solución:

Separamos en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(z+1)(z-3i)} = (\frac{1}{-1-3i})(\frac{1}{z+1}) + (\frac{1}{1+3i})(\frac{1}{z-3i})$$

De la expresión anterior, deseamos obtener la Serie de Laurent de $(\frac{1}{z-3i})$

$$\frac{1}{z-3i} = \frac{1}{z+1-1-3i} = \frac{1}{(-1-3i)(1+\frac{z+1}{-1-3i})} = \frac{1}{(-1-3i)}\frac{1}{(1+\frac{z+1}{-1-3i})}$$

$$= \frac{1}{(-1-3i)}[\frac{1}{-1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z+1}{-1-3i})^n]$$

$$= (\frac{1}{-1-3i})(\frac{1}{z+1}) - (\frac{1}{(1+3i)^2})[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{1+3i})^n]\text{Tal que}|\frac{z+1}{1+3i}| < 1 \quad \text{ó} \quad 0 < |z+1| < \sqrt{10}$$

24.1. Demostración del Teorema del Residuo

Sea la integral de contorno $I = \oint_c f(z)dz$ donde $f(z)$ tiene un número finito de singularidades en $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dentro del contorno cerrado C. Entonces:

$$\oint_c f(z)dz = \oint_{\gamma 1} f(z)dz + \oint_{\gamma 2} f(z)dz + \ldots + \oint_{\gamma n} f(z)dz$$

Supóngase $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_1$, entonces se puede representar mediante una Serie de Laurent:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_m(z-z_0)^m$$

Esta serie es válida en el anillo $r_i < |z-z_i| < R_i$. Sí la curva C está totalmente contenida en este anillo, entonces, por el Teorema de Cauchy:

$$\oint_c f(z)dz = \oint_{\gamma i} f(z)dz$$

Al estar en el interior del anillo de convergencia, se sustituye la expansión en Serie de Laurent de $f(z)$ y se obtiene que:

$$\oint_{\gamma i} f(z)dz = \oint_{\gamma}[\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_m(z-z_0)^m]$$

$$= a_{-m}\oint_{\gamma i}\frac{dz}{(z-z_0)^m} + \ldots + a_{-1}\oint_{\gamma i}\frac{dz}{(z-z_0)} + a_0\oint_{\gamma i}dz + a_1\oint_{\gamma i}(z-z_0)dz + \ldots + a_m\oint_{\gamma i}(z-z_0)^m dz$$

Debemos notar que solo $a_{-1}\oint_{\gamma i}\frac{dz}{(z-z_0)}$ se encuentra dentro de C, por lo que el valor de dicha integral es $2\pi i$; todas las demás son cero, por el Teorema de Cauchy:

$$\oint_{\gamma i} f(z)dz = 2\pi i(a_{-1}) = 2\pi i(\text{ residuo en } z = z_0)$$

$$\therefore \quad \oint_{\gamma i} f(z)dz = 2\pi i(a_{-1}) = 2\pi i[\sum_{k=1}^{n} Res(z_k)]$$

25. Anexos

25.1. Biografía de Leonhard Euler

Fue el hijo de un pastor calvinista llamado Paul Euler y su mujer Margarite Brucker, la hija de otro pastor. Tuvo 2 hermanas: Anna María y María Magdalena. Poco después de que se nace Leonhard, su familia se traslada a la ciudad de Riehen.

Su padre era amigo de la familia Bernoulli; de la cual formaba parte Johann Bernoulli, para lo cual ya era considerado el mayor matemático europeo y gran influencia del pequeño Leonhard.

Para su educación formal, Leonhard fue enviado de regreso a Basilea a vivir con su abuela materna, y a la edad de 13 años se matriculo de la universidad de Basilea. Para 1723 recibiría el titulo de maestro de filosofía. En ese entonces ya recibía lecciones particulares de su ídolo Johann Bernoulli todos los sábados por la tarde.

En 1726 Leonhard finalizó su doctorado con una tesis sobre la propagación del sonido con tan solo 19 años. Y un año después participo en el concurso de la academia de las ciencias francesa para encontrar la mejor forma posible de ubicar un mástil en un buque. Quedó en segundo lugar, pero ganaría ese concurso mas tarde 12 veces.

En 1727 la emperatriz de Rusia Catalina I lo invitó a formar parte de la academia de ciencias de San Petersburgo, lugar donde también trabajaban los 2 hijos de Johann: Daniel y Nicolas Bernoulli. Cuando Nicolas muere de apendicitis, Daniel recomienda a Leonhard para tomar el lugar de su fallecido hermano. Para noviembre de 1926 Leonhard acepta el puesto, aunque retrasó su salida a San Petersburgo por buscar inútilmente un puesto de profesor en la universidad de Basilea.

Llego Leonhard a la capital Rusa el 17 de mayo de 1727 y fue ascendido desde su puesto en el departamento médico de la academia hasta un puesto en el departamento de matemáticas trabajando con Daniel. Euler aprendió ruso y se estableció en San Petersburgo. Llegó a tomar un trabajo adicional como medico de la Armada Rusa.

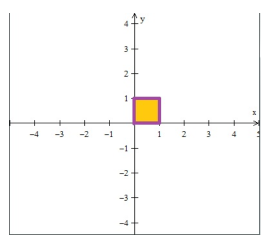
El 7 de enero de 1734 Leonhard se casa con Katharina Gsell, hija de un pintor de la academia. El matrimonio dio 13 hijos, pero solo 5 llegaron a la edad adulta.Para 1735 Leonhard sufre una fiebre que casi lo mata y perdió 3 años después la vista de su ojo derecho. Pero prefirió echarle la culpa a un problema de cartografía urgente que le dejaron en la academia y que el resolvió en 3 días. La vista de ese ojo empeoró a lo largo de su estancia en Alemania, hasta el punto de que Federico hacía referencia a él como el Cíclope. Euler más tarde sufrió cataratas en su ojo sano, el izquierdo, lo que le dejó prácticamente ciego pocas semanas después de su diagnóstico. A pesar de ello, parece que sus problemas de visión no afectaron a su productividad intelectual, dado que lo compensó con su gran capacidad de cálculo mental y su memoria fotográfica.

El 18 de septiembre de 1783 Euler falleció en la ciudad de San Petersburgo tras sufrir un accidente cerebrovascular, y fue enterrado junto con su esposa en el Cementerio Luterano ubicado en la isla de Vasilievsky. Sus restos fueron trasladados por los soviéticos al Monasterio de Alejandro Nevski.

26. Anexos.Anexos

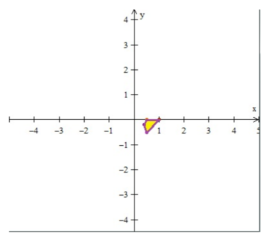
Ejercicio: Obtenga la serie de Laurent de la siguiente expresion $\frac{1}{z(z-3)}$ $\quad , |z-3| > 3$
Solución
Primero observaremos nuestra expresion como:
$\frac{A}{z} + \frac{B}{z-3}$
Ahora tenemos un par de valores que no conocemos para lo cual los obtendremos acontinuacion
A=$\frac{1}{z(z-3)}z|_{z=0} = -\frac{1}{3}$
B=$\frac{1}{z(z-3)}(z-3)|_{z=3} = \frac{1}{3}$
Una vez que los tenemos los sustituimos en nuestras expresión anterior
$= -\frac{1}{3z} + \frac{1}{3(z-3)}$
Acomodamos la expresión a como mas nos convenga usarla
$= \frac{1}{3(z-3)} - \frac{1}{3z}$
$= \frac{1}{3(z-3)} - \frac{1}{3}(\frac{1}{(z-3)+(3)})$
$= \frac{1}{3(z-3)} - \frac{1}{3}(\frac{1}{(z-3)(1+\frac{3}{z-3})})$
Y finalmente obtenemos nuestra serie
$= \frac{1}{3(z-3)} - \frac{1}{3(z-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{3}{z-3})^n$

Ejercicio: Un cuadro S en (0,0),(1,0),(1,1) y (0,1).Determine la region en el plano ω a la que se lleva S mediante la transformación $f(z) = \frac{1}{z+1}$



Solución
Sabemos que z=x+iy
entonces
$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{x+iy+1} = \frac{1}{(x+1)+iy}$
Multiplicamos por el complejo conjugado
$\frac{1}{(x+1)+iy}(\frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy})$
$= \frac{(x+1)-iy}{(x+1)^2+y}$
Ahora obtenemos nuestra $u(x,y)$ y $v(x,y)$ de la expresión anterior
$u(x,y) = \frac{(x+1)}{(x+1)^2+y}$
$v(x,y) = \frac{-y}{(x+1)^2+y}$
Ahora tomaremos nuestros puntos dados en nuestra de nuestra oracion inicial
Para (0,0)
$u(x,y) = 1$ & $v(x,y) = 0$

Para (1,0)
$u(x,y) = \frac{1}{2}$ & $v(x,y) = 0$
Para (1,1)
$u(x,y) = \frac{2}{5}$ & $v(x,y) = -\frac{1}{5}$
Para (0,1)
$u(x,y) = \frac{1}{2}$ & $v(x,y) = -\frac{1}{2}$



Demostrar que $\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$

Solución

Sabemos que $z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

Sustituyendo:

$$\frac{dz^n}{dz} = \frac{d[r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)]}{dz}$$

La expresión que resulta al sustituir el valor de z^n es una combinación lineal de la forma $u_x + iv_x$, por lo que se toma la siguiente expresión:

$$u_r \cos\theta + u_\theta \frac{-\operatorname{sen}\theta}{r} + i[v_r \cos\theta + v_\theta \frac{-\operatorname{sen}\theta}{r}]...(1)$$

Los valores de $u_r, \quad u_\theta, \quad v_r, \quad v_\theta$ son los siguientes:

$$u_r = nr^{n-1}\cos n\theta \qquad u_\theta = -nr^n \operatorname{sen} n\theta$$

$$v_r = nr^{n-1}\operatorname{sen} n\theta \qquad v_\theta = nr^n \cos n\theta$$

Sustituyendo dichos valores en (1)

$$= nr^{n-1}\cos n\theta \cos\theta + \frac{nr^n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen}\theta}{r} + i[nr^{n-1}\operatorname{sen} n\theta \cos\theta - \frac{nr^n \cos n\theta \operatorname{sen}\theta}{r}]$$

Sabemos que $\frac{r^n}{r} = r^{n-1}$, de éste modo podemos factorizar a nr^{n-1}

$$\Rightarrow nr^{n-1}[\cos n\theta \cos\theta + \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen}\theta + i(\operatorname{sen} n\theta \cos\theta - \cos n\theta \operatorname{sen}\theta)]$$

Por las propiedades de la suma de los ángulos en senos y cosenos, sabemos que:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \quad \& \quad \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b)$$

Aplicando las propiedades anteriores:

$$\Rightarrow nr^{n-1}(\cos(\theta(n-1)) + i\operatorname{sen}(\theta(n-1))) = nz^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

Calcular la serie de Laurent de la siguiente función, en la región anular indicada:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)} \quad \text{En} \quad a) 0 < |z| < 3$$

Solución:
Usando fracciones parciales:

$$\frac{1}{z(z-3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-3} \Rightarrow Az - 3A + Bz \Rightarrow Az + Bz = 0z \quad \& \quad -3A = 1 \therefore A = -\frac{1}{3} \quad \& \quad B = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto nuestra función queda de la siguiente forma:

$$f(z) = -\frac{1}{3z} + \frac{1}{3(z-3)}$$

Para la primera parte de la desigualdad $0 < |z|$, la primera parte de la función ya tiene una forma similar a la deseada por lo que trabajaremos con la segunda parte:

$$\frac{1}{3(z-3)} = \frac{1}{3z(1-\frac{3}{z})} = \frac{1}{3z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n \therefore -\frac{1}{3z} + \frac{1}{3z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

Para $|z| < 3$

$$-\frac{1}{3z} + \frac{1}{3(z-3)} \Rightarrow -\frac{1}{3z} + \frac{1}{-9(1-\frac{z}{3})} \Rightarrow -\frac{1}{3z} - \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$\therefore$ La serie resultante es: $-\frac{1}{3z} - \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{1}{3z} + \frac{1}{3z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n$