5. Funciones típicas del comportamiento dinámico de transmisión (en el ámbito del tiempo).

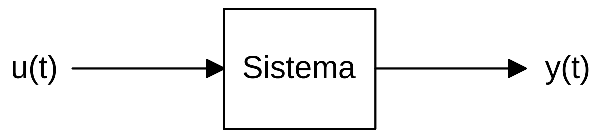


Figura 5.1: Sistema dinámico en el ámbito del tiempo

$$y(t) = f\big(u(t)\big) \qquad x_0 = 0$$

La salida, cuando las condiciones iniciales son cero es:

$$y(t) = \int_0^t c^T \phi(t-\tau) b u(\tau) d\tau + d u(t) \qquad (1)$$

La función escalón está definida como:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Respuesta al escalón

$$u(t) = u_0 \sigma(t) \qquad ; \qquad u_0 = \text{amplitud del escalón}$$

de (1), $y(t) = \left(\int_0^t c^T \phi(t-\tau) b d\tau + d \right) u_0 \quad ; \quad \phi(t) = e^{At}$ (3)

Si $u_0 = 1$; entonces, la respuesta al escalón se llama h(t).

$u_0 = 1$ escalón unitario

h(t) : respuesta al escalón unitario

y(t) = h(t)

$$h(t) = \int_0^t c^T \phi(t - \tau) b d\tau + d$$

$$h(t) = c^T A^{-1} e^{A\tau} b \Big|_{\tau = 0}^{\tau = t} + d \qquad (4)$$

$$h(t) = c^T A^{-1} e^{At} b - c^T A^{-1} b + d \qquad (5)$$

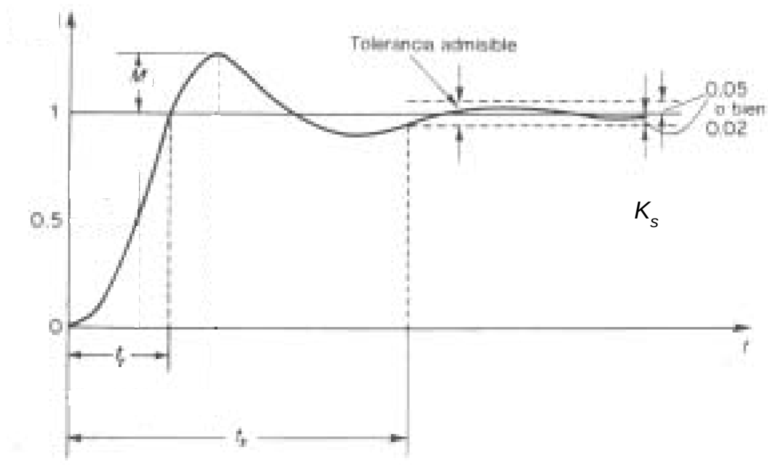


Figura 5.2: h(t) de un sistema de 2° orden

K_s : Ganancia estática
t_s : Tiempo de estabilización
t_r : Tiempo de subida
M : Sobreimpulso (%)

Ganancia estática del sistema:

$$K_s = \lim_{t \to \infty} h(t)$$

de (5) $$K_s = -c^T A^{-1} b + d \qquad (6)$$

El impulso unitario o impulso de Dirac

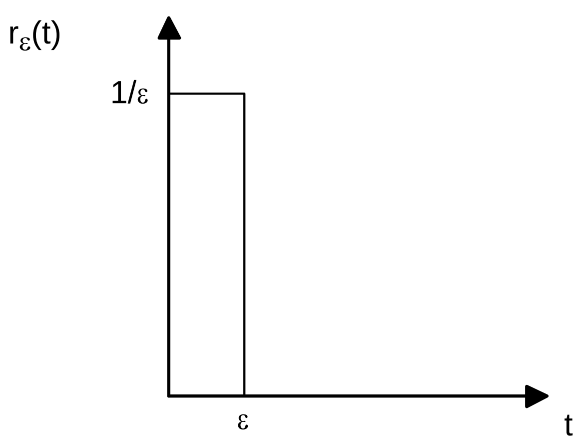


Figura 5.3: Definición del impulso de Dirac

$$r_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El área bajo la curva $r_\varepsilon(t)$ vale 1.

Definimos es impulso de Dirac como:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon(t) \qquad (7)$$

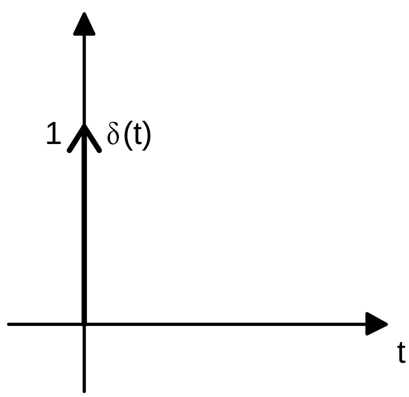


Figura 5.4: El impulso de Dirac

$$\delta(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0$$

Propiedades del impulso de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$

$$\int_0^t \delta(\tau)\, d\tau = \sigma(t) \qquad (8)$$

Respuesta al impulso unitario.

de la ecuación (1):

$y(t) = g(t)$: respuesta al impulso

y

$$g(t) = c^T\phi(t)b + d\delta(t) \qquad (9)$$

Ya que para la mayoría de los sistemas el escalar d es cero; entonces, las respuestas al impulso no contienen la parte impulsiva.

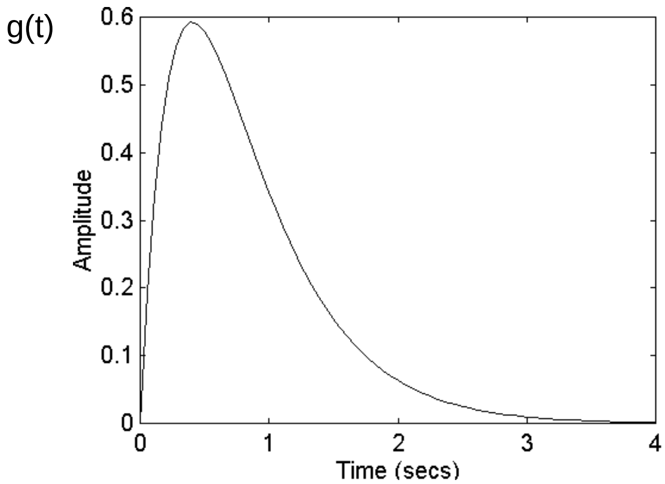


Figura 5.5: Respuesta al impulso de un sistema de segundo orden.

Relación entre la respuesta al escalón y al impulso

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau \qquad (10)$$

por lo que la ganancia estática del sistema K_s, es : $K_s = \lim_{t\to\infty} h(t)$

$$K_s = \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau \qquad (11)$$

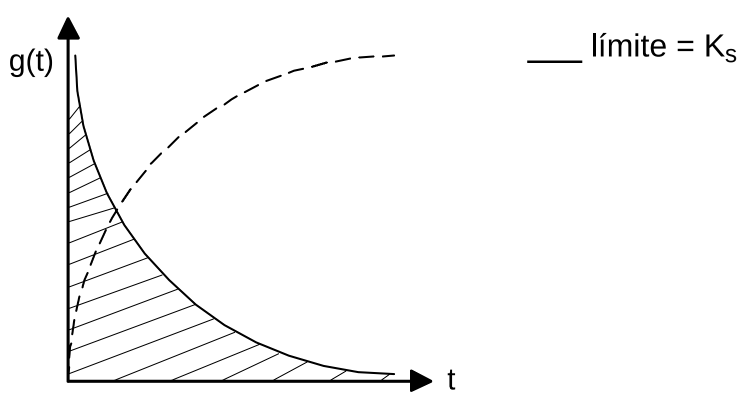


Figura 5.6: g(t) y h(t) de un sistema de primer orden

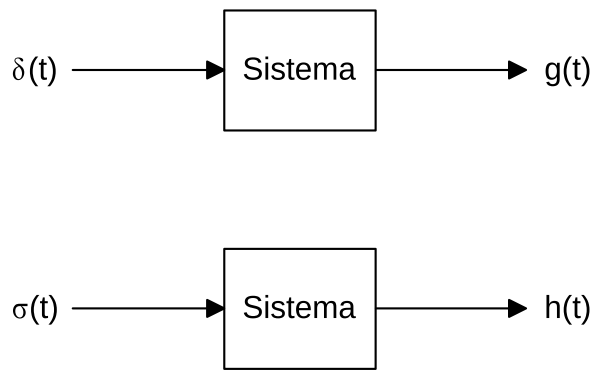


Figura 5.7: Respuesta al impulso g(t) y al escalón h(t)

Podemos escribir la ecuación de salida utilizando la respuesta al impulso g(t).

de (9) $\quad c^T \phi(t)\, b = g(t) - d\, \delta(t),$

y sustituyendo en la ec. (14) de la página 43; tenemos, después de simplificar:

$$y(t) = \underbrace{c^T \phi(t) x_0}_{\text{respuesta natural}} + \underbrace{\int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau}_{\text{Respuesta forzada}}$$

$$g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \qquad (12)$$

$$y(t) = c^T \phi(t) x_0 + g(t) * u(t) \qquad (13)$$

Ejemplo 5.1: Encontrar la respuesta al impulso y al escalón unitario

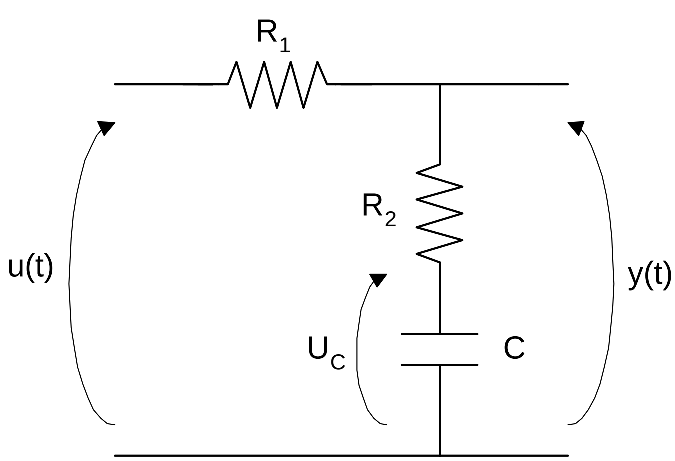


Figura 5.8: Circuito eléctrico para el ejemplo 5.1

$$\dot{x} \quad = \quad -\frac{1}{C(R_1+R_2)}x(t)+\frac{1}{C(R_1+R_2)}u(t)$$

$$y(t) \quad = \quad \frac{R_1}{R_1+R_2}x(t)+\frac{R_2}{R_1+R_2}u(t)$$

$$h(t) \quad = \quad c^T A^{-1} e^{At} b - c^T A^{-1} b + d \qquad \text{(5 de nuevo)}$$

$$g(t) \quad = \quad c^T e^{At} b + d\delta(t) \qquad \text{(9 de nuevo)}$$

$$h(t) \quad = \quad \int_0^t g(\tau)\,d\tau \qquad \text{(10 de nuevo)}$$

$$g(t) \quad = \quad \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot e^{-\frac{1}{C(R_1+R_2)}t}\cdot\frac{1}{C(R_1+R_2)}+\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\delta(t)$$

$$g(t) \quad = \quad \frac{R_1}{C\left(R_1+R_2\right)^2}\cdot e^{-\frac{1}{C(R_1+R_2)}t}+\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\delta(t)$$

$$h(t) = -\frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot C(R_1+R_2)\cdot e^{-\frac{1}{C(R_1+R_2)}t}\cdot\frac{1}{C(R_1+R_2)}+\frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot C(R_1+R_2)\cdot\frac{1}{C(R_1+R_2)}+\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$h(t) \quad = \quad \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{C(R_1+R_2)}t}\right)+\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\sigma(t)$$

<u>Cálculo de la salida del sistema con ayuda de la función de transferencia $G_p(s)$</u>

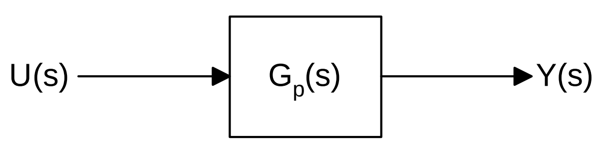


Figura 5.9: Relación entrada salida $G_p(s)$

$G_p(s)$: función de transferencia

$u(t)$: entrada

Pasos:

1. Cálculo de la transformada de Laplace de la entrada

$$U(s) : \mathcal{L}\left\{u(t)\right\}$$

2. Realizamos la convolución en el dominio del tiempo como una multiplicación en el dominio de la frecuencia:

$$Y(S) = G_p(s)U(s)$$

3. Encontramos la respuesta en el tiempo calculando la transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$

Respuesta al escalón, $x_0 = 0$

$$y(t) = g(t) * u(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} \cdot \mathcal{L}\left\{u(t)\right\}$$

$$G(s) \bullet\!\!-\!\!-\!\!\circ g(t)$$

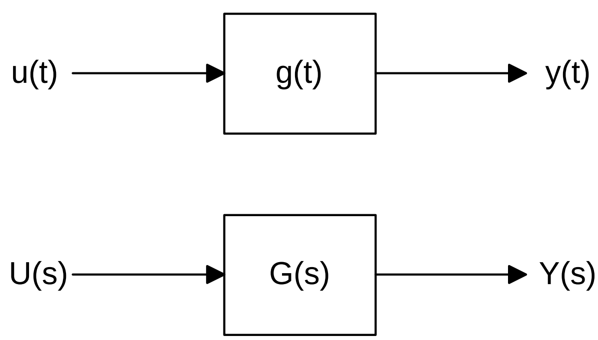


Figura 5.10: Sistema en el dominio del tiempo y en de la frecuencia compleja

→ La función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso

$$h(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}G(s)$$

La ganancia estática $K_s = h(\infty)$ se obtiene con el teorema del valor final

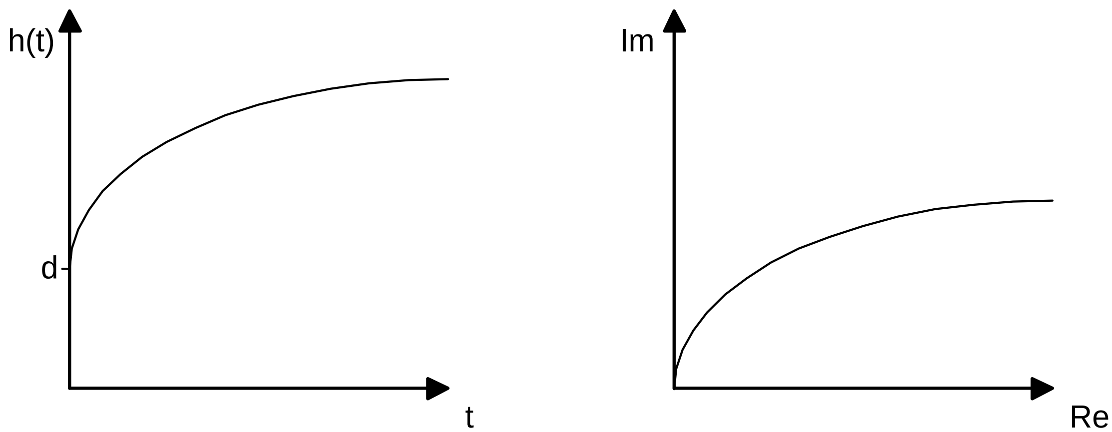
$$K_s = \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0}\left(s\frac{G(s)}{s}\right) = G(0)$$

$$K_s = \lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

El valor inicial $h(0^+)$ lo calculamos con ayuda del teorema del valor inicial

$$h(0^+) = \lim_{t \to 0^+} h(t) = \lim_{s \to \infty} \left(s \frac{G(s)}{s} \right) = G(\infty)$$

Los sistemas con $h(0^+) \neq 0$ se denominan sistemas „con capacidad de salto“



$h(0^+)=d$ $h(0^+)=0$

Figura 5.11: Respuesta al escalón h(t) para un sistema con capacidad de salto (izq.) y otro sin ésta (der.)

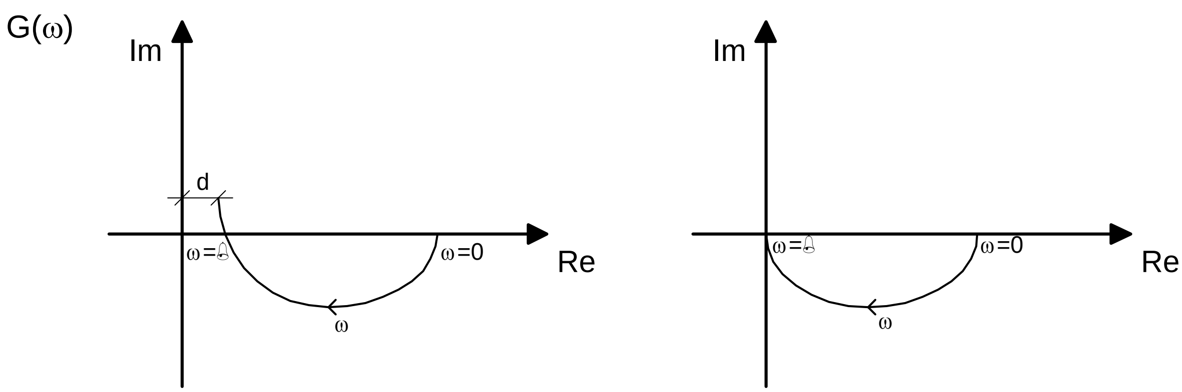


Figura 5.12: Lugar de G(ω) para un sistema con capacidad de salto (izq.) y otro sin ésta (der.)

$$G(\omega) = \lim_{s \to \omega} G(s) \qquad (14)$$

Ejercicio 5.1:

Calcule $h(0^+)$ del modelo

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + bu \\ y &= c^T\underline{x} + du \end{aligned}$$

También, Ejercicio #5, Práctica 4