12. Criterio de estabilidad de Nyquist

12.1 Gráfica de Nyquist

Gráfica de $L(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$ en coordenadas polares de $Im[L(j\omega)]$, $Re[L(j\omega)]$ con ω variando desde ∞ hasta 0.

Características:

- provee información sobre: la estabilidad relativa, el grado de inestabilidad y la estabilidad absoluta.
- proporciona información sobre las características en el dominio de la frecuencia T_r, ω_r y BW de G(s)H(s).
- es útil para sistemas con retardos puros (ec. (12.2)) que no se pueden tratar con el criterio de Routh-Hurwitz y que son difíciles de analizar con el método del lugar de las raíces.

12.2 Criterio de Nyquist

Método aproximado para conocer la localización de las raíces de la ecuación característica con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho.

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+\underbrace{G(s)H(s)}_{G_0(s)}} \qquad (12.1)$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+T_1 s)(1+T_2 s)\ldots(1+T_m s)}{s^p(1+T_a s)(1+T_b s)\ldots(1+T_n s)} e^{-T_d s} \qquad (12.2)$$

con:

T_s : coeficientes reales o complejos conjugados
T_d : retardo real

El polinomio denominador $\Delta s = 1+G(s)H(s)$ se hace igual a cero

$$\Delta s = 1+G(s)H(s) = 0 \qquad (12.3)$$

Si definimos $L(s)=G(s)H(s)$ podemos escribir

$$\Delta s = 1+L(s) = 0 \qquad (12.4)$$

donde L(s) es equivalente a $G_0(s)$ usada para el análisis del lugar de las raíces.

- Los ceros de 1+L(s) son los polos de la función de transferencia de lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica (12.4).
- Los polos de 1+L(s) son los polos de la funcion de lazo abierto.
- Los polos de 1+L(s) son los polos de L(s).

12.2.1 Encierro e inclusión

Encierro:

Un punto o una región en un plano de una función compleja se dice encerrado por una trayectoria cerrada si está dentro de la trayectoria.

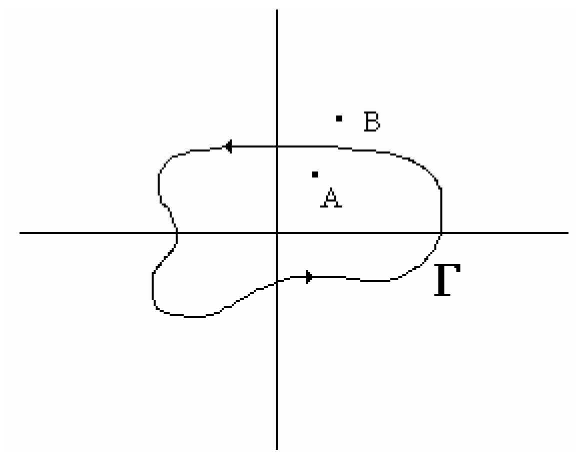
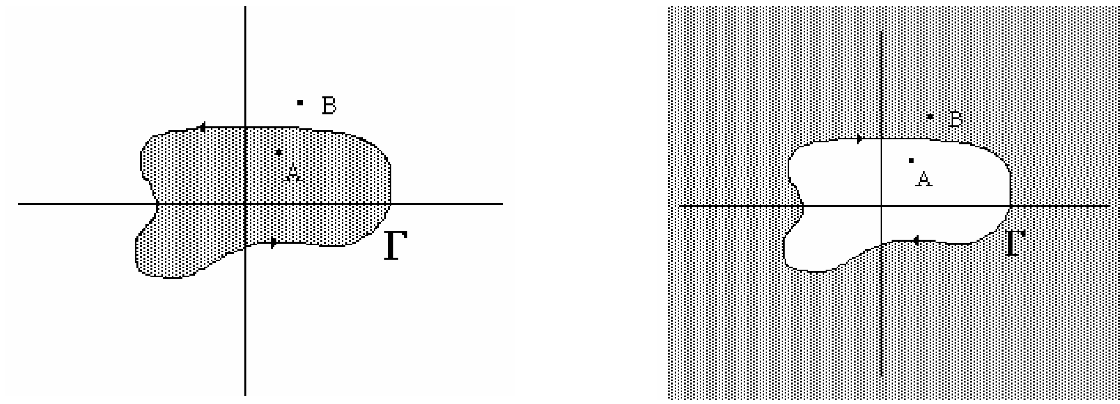


Figura 12.1: Ejemplo de encierro. A está encerrado por la trayectoria Γ en la dirección CCW. B no está encerrado por Γ.

Inclusión:

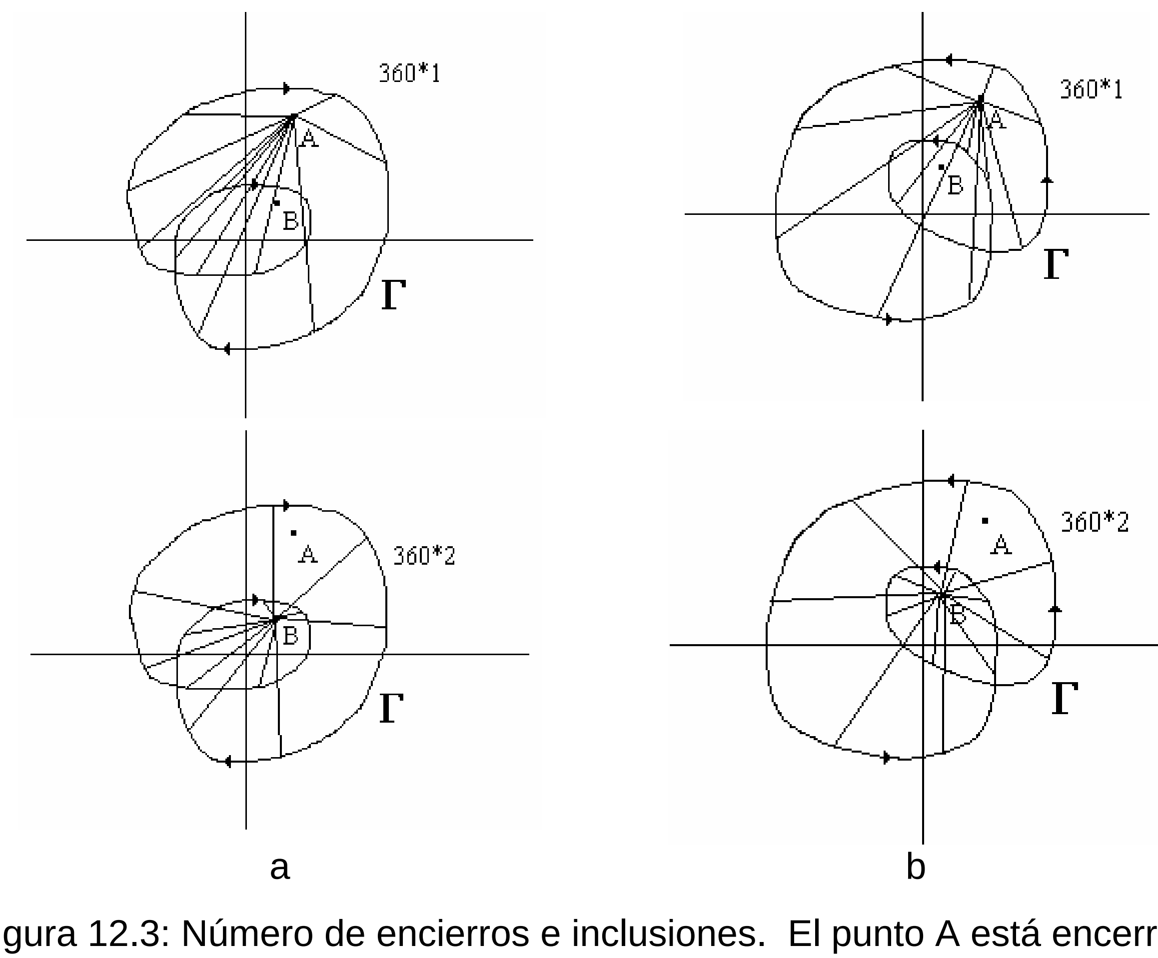
Un punto o región se dice incluido por una trayectoria cerrada si está „encerrado“ en la dirección contraria a las manecillas del reloj (CCW), o el punto o región está a la izquierda de la trayectoria cuando ésta se recorre en la dirección prescrita.



a) b)

Figura 12.2: Ejemplo de inclusión. a) A está encerrado en la dirección CCW y por lo tanto está incluido. b) B está a la izquierda en la dirección prescrita y por ello incluido.

12.2.2 Número de encierros e inclusiones



a b

Figura 12.3: Número de encierros e inclusiones. El punto A está encerrado una vez y el punto B dos veces por Γ.

N: Es el número de veces que un punto está encerrado. El valor de N se determina trazando una recta desde el punto en cuestión hasta cortar todas las veces que sea necesario la trayectoria Γ. Se suman algebráicamente las intersecciones de la recta con la trayectoria Γ.

El principio del argumento (criterio de Cauchi):

$$N = Z - P \qquad (12.5)$$

donde:

N : número de encierros del origen hechos por el lugar geométrico Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$. Por definición N es positivo para encierros en la dirección contraria a las manecillas del reloj (CCW) y negativo para encierros en la dirección del reloj (CW).

Z : número de ceros de $\Delta(s)$ encerrados por Γ_S en el plano s.

P : número de polos de $\Delta(s)$ encerrados por Γ_S en el plano s.

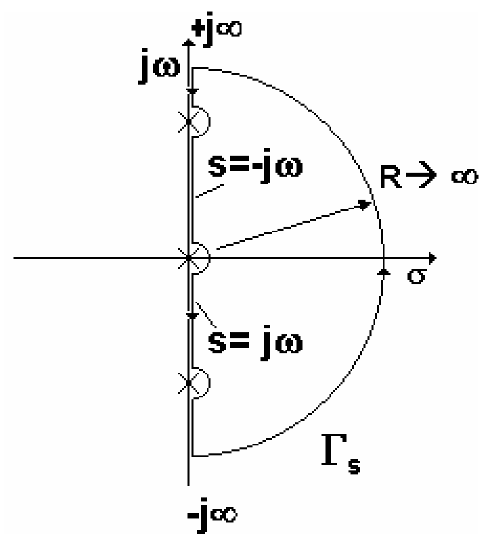


Figura 12.4: Trayectoria de Nyquist

La estabilidad del sistema de lazo cerrado puede determinarse al graficar el lugar geométrico $\Delta(s) = 1 + L(s)$ cuando s toma valores a lo largo de la trayectoria de Nyquist e investigando en comportamiento de la traza $\Delta(s)$ con respecto al punto crítico s = 0; en este caso el origen del plano $\Delta(s)$. De la gráfica en $\Delta(s)$ se infiere el comportamiento en s.

También se puede graficar en el plano L(s) y analizar el comportamiento respecto al punto crítico (-1, j0) en el plano L(s).

Para sistemas de un solo lazo L(s) = G(s)H(s), se investiga el comportamiento de la traza de G(s)H(s) con respecto al punto (-1, j0) del plano G(s)H(s).

Para aplicar el criterio de Nyquist:

a) Se define la trayectoria de Nyquist fig. (12.4)
b) Se construye la traza de L(s) en el plano L(s) (correspondiente a la trayectoria de Nyquist.
c) El valor de N, el número de encierros del punto (-1 , j0) hechos por la traza de L(s) se observa.
d) El criterio de Nyquist se obtiene de la ecuación (12.5)

$$N = Z - P \qquad (12.5 \text{ repetida})$$

donde:

N : número de encierros del punto (-1, j0) hechos por la traza de L(s)
Z : número de ceros de 1 + L(s) que están en el semiplano derecho (SPD)
P : número de polos de 1+L(s) que están en el SPD. (Polos de L(s))

Interesan Z y P

- „Para que el sistema sea estable en lazo cerrado, Z debe ser igual a cero“.

- „Para que el sistema sea estable en lazo abierto, P debe ser igual a cero“

La condición de estabilidad de acuerdo al criterio de Nyquist se establece como:

$$N = -P \qquad (12.6)$$

Esto es:

„Para que un sistema de lazo cerrado sea estable, la traza de L(s) debe encerrar al punto (-1, j0) un número de veces igual al número de polos de L(s) que están en el semiplano derecho del plano s y los encierros, si los hay, deben ser hechos en la dirección del reloj. (Si Γs está definido en sentido contrario al reloj)“

Para sistemas con fase mínima (no tienen polos ni ceros en el SPD), o sea L(s) es de fase mínima.

→ N = 0 (12.7)

„Si el punto (-1, j0) está encerrado por la traza de Nyquist, el sistema es inestable“

Ejemplo 12.1: Graficar la traza de Nyquist para el sistema con

$$L(s)=\frac{K}{s(s+2)(s+10)}$$

Pasos:

a) Hacemos s→ jω en la ecuación en términos de s

$$L(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+10)}$$

b) Con ω=0 → L(j0) = $\infty\angle -90^{o}$

c) Con ω=∞ → L(j∞) = $0\angle -270^{o}$

d) Se racionaliza L(jω) haciendo:

$$L(j\omega) * \frac{\text{complejo conj. del denominador de } L(j\omega)}{\text{complejo conj. del denominador de } L(j\omega)}$$

$$L(j\omega)=\frac{K}{j^3\omega^3+20j\omega+12j^2\omega^2}=\frac{K}{-12\omega^2+j(20\omega-\omega^3)}*\frac{-12\omega^2-j(20\omega-\omega^3)}{-12\omega^2-j(20\omega-\omega^3)}$$

$$L(j\omega)=\frac{-12\omega^2K}{144\omega^4+(20\omega-\omega^3)^2}-j\frac{(20\omega-\omega^3)}{144\omega^4+(20\omega-\omega^3)^2}$$

e) Se encuentra la intersección con el eje real haciendo que la parte imaginaria de *L(jω)* sea cero para encontrar el valor de $\omega_{\text{crítica}}$ y luego se sustituye el valor de ω (positivo) encontrado en la parte real de *L(jω)*.

$$\mathrm{Im}(L(j\omega))=-\frac{(20\omega-\omega^3)}{144\omega^4+(20\omega-\omega^3)^2}=0$$

$$(20-\omega^2)\omega=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_3=0$$

$$\omega^2=20 \Rightarrow \omega_{1,2}=\pm\sqrt{20}$$

$$\omega_{crítica}=\sqrt{20}$$

Evaluando en la parte real de *L(jω)* para encontrar el punto de intersección sobre el eje real.

$$\mathrm{Re}(L(j\omega))\Big|_{\omega_{crítica}}=\left.\frac{-12\omega^2K}{144\omega^4+(20\omega-\omega^3)^2}\right|_{\omega_{crítica}}=\left.\frac{-K}{12\omega^2}\right|_{\omega_{crítica}}$$

$$\mathrm{Re}(L(j\omega))\Big|_{\omega_{crítica}}=\frac{-K}{12\left(\sqrt{20}\right)^2}=\frac{-K}{240}$$

Si evaluamos para encontrar el valor de K que hace que la parte real sea exactamente -1, esto es en el punto -1+j0

$$\mathrm{Re}(L(j\omega))=-1=\frac{-K}{240} \quad\Rightarrow\quad K=240$$

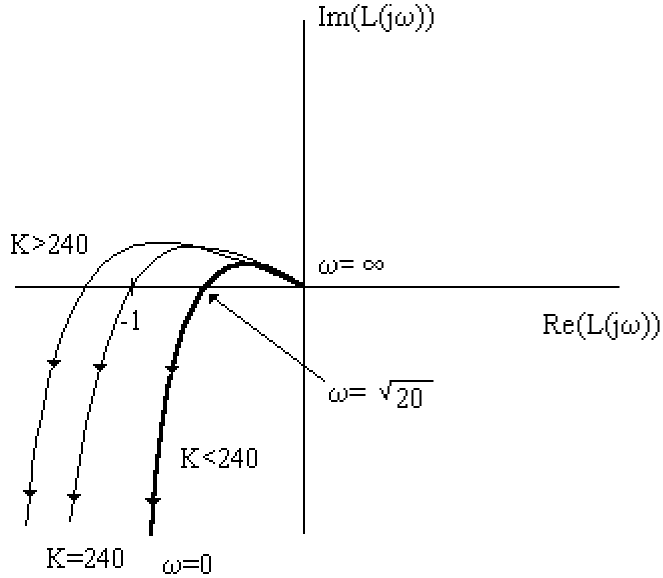


Figura 12.5: Traza de Nyquist para el sistema con $L(s)=\dfrac{K}{s(s+2)(s+10)}$

El sentido de la traza en en plano L(s) va de $\omega = \infty$ a $\omega = 0$ que corresponde con la parte superior de la trayectoria de Nyquist Γ_s en el plano s.

La traza para K < 240 no encierra el punto (-1, j0); pues éste se encuentra a la derecha al ser recorrida la traza en la dirección prescrita (de $\omega = \infty$ a $\omega = 0$).

La traza para K > 240 encierra el punto (-1, j0); pues éste se encuentra a la izquierda al ser recorrida la traza en la dirección prescrita.

Estos mismos resultados se pueden obtener si realizamos un análisis utilizando el método de Routh-Hurwitz.

$$L(s)=\frac{K}{s(s+2)(s+10)}=\frac{K}{s^3+12s^2+20s}$$

Encontramos el polinomio característico

$$1+L(s)=1+\frac{K}{s^3+12s^2+20s}=\frac{s^3+12s^2+20s+K}{s^3+12s^2+20s}$$

$$p(s)=s^3+12s^2+20s+K$$

Ya que todos los coeficientes existen y son positivos, tenemos que construir el arreglo de Routh:

s^3	1	20	0
s^2	12	K	0
s^1	(240-K)/12	0	
s^0	K		

Para que el sistema sea estable, todos los coeficientes de la columna izquierda deben ser positivos, por lo tanto la primera condición es que K > 0.

Si deseamos encontrar el valor de K que coloca los polos sobre el eje imaginario, esto es equivalente a que al traza de Nyquist pase por el punto crítico (-1+j0); entonces, debemos tener una fila de ceros y un polinomio divisor; por lo que hacemos:

$$\frac{240-K}{12}=0 \quad \Rightarrow \quad K=240$$

El polinomio divisor, de orden par, lo encontramos en la fila inmediata superior a la fila de ceros y lo igualamos a cero para encontrar el valor crítico de s, cuando la ganancia K = 240.

$$12s^2+K\Big|_{K=240}=0$$

$$s_{1,2}=\sqrt{\frac{-K}{12}}\Bigg|_{K=240}=\sqrt{-20}=\pm j\sqrt{20}$$

$$L(s)\Big|_{K=240,\, s=j\sqrt{20}}=\frac{240}{\left(j\sqrt{20}\right)^3+12\left(j\sqrt{20}\right)^2+j20\sqrt{20}}=\frac{240}{-j20\sqrt{20}-240+j20\sqrt{20}}$$

$$L(s)\Big|_{K=240,\, s=j\sqrt{20}}=-1$$

Margen de ganancia y margen de fase

Es posible encontrar con ayuda de la traza de Nyquist el margen de fase y el margen de ganancia. Sea „**a**“ la distancia desde el origen al punto de intersección de la traza de Nyquist con la parte negativa del eje real, entonces el margen de ganancia MG es:

$$MG = 20 \log (1/a) \qquad (12.7)$$

y el margen de fase es el ángulo que hay que rotar la traza de Nyquist para que ésta atraviese el punto (1, j0) cuando la magnitud de la traza es uno.

En la gráfica de la figura 12.6 puede observarse que la traza no encierra al punto (-1+j0) y por lo tanto el sistema es estable; además, el valor de **a** es aproximadamente 0.75 y por lo tanto MG = 20 log (1/0.75) = 2.5 dB y finalmente el margen de fase es de aproximadamente 55°.

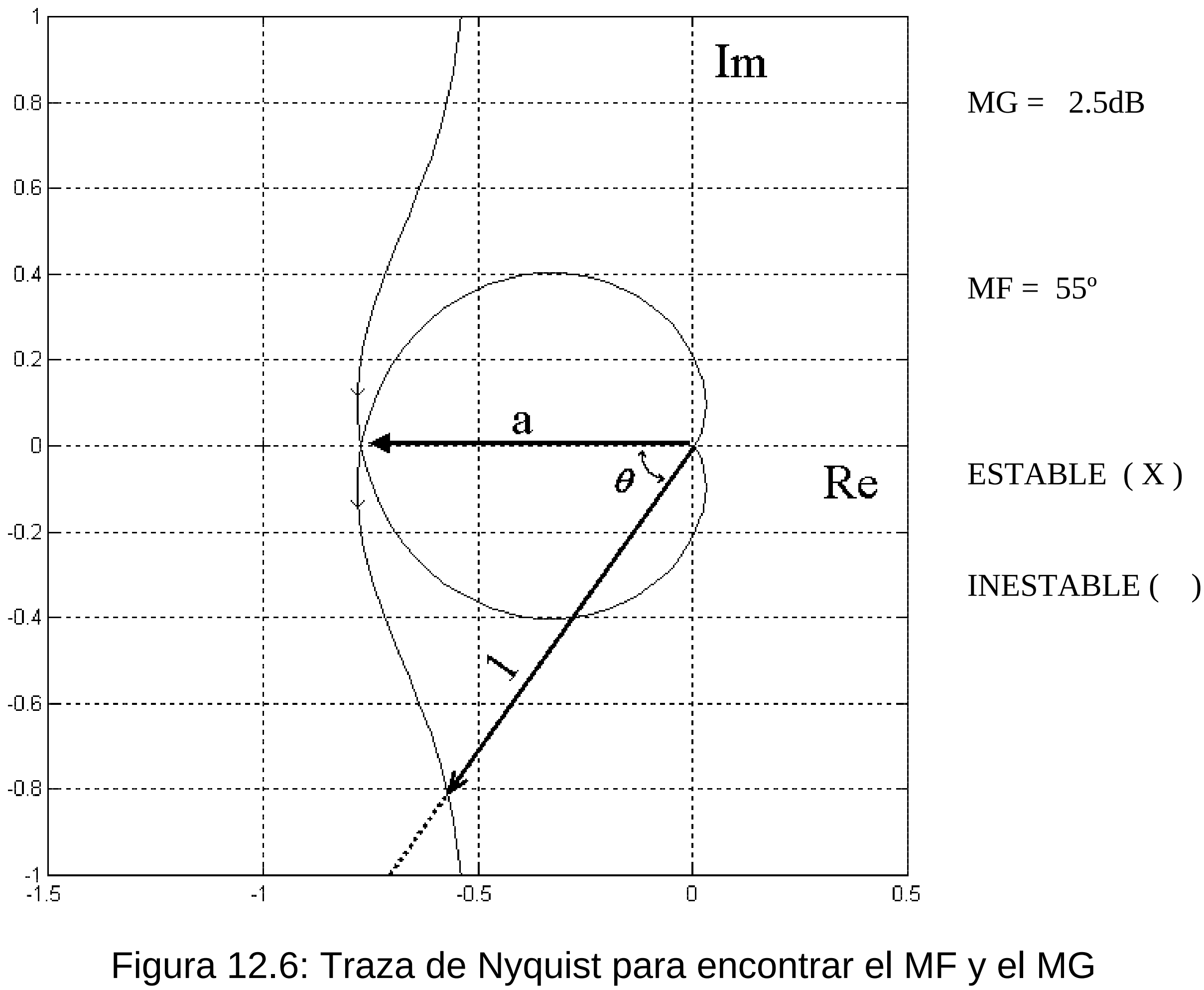


Figura 12.6: Traza de Nyquist para encontrar el MF y el MG