

## 10. Análisis en el dominio de la frecuencia

Tenemos una señal de entrada senoidal  $r(t)$  con amplitud  $R$  y frecuencia  $\omega_0$  y nos interesa la salida  $y(t)$  en régimen senoidal permanente.

$$r(t) = R \sin \omega_0 t \quad (1)$$

$$y(t) = Y \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2)$$

en el dominio de la frecuencia compleja la salida es

$$Y(s) = T(s)R(s) \quad (3)$$

para el análisis en régimen senoidal permanente hacemos  $s \rightarrow j\omega$  en la ecuación (3)

$$\lim_{s \rightarrow j\omega} Y(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} T(s)R(s) = Y(j\omega) = T(j\omega)R(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = T(j\omega)R(j\omega) \quad (4)$$

escribiendo  $Y(j\omega)$  como número complejo en magnitud y fase

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega) \quad (5)$$

donde

$$|Y(j\omega)| = |T(j\omega)| |R(j\omega)| \quad (6)$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle T(j\omega) + \angle R(j\omega) \quad (7)$$

de (1), (2) y (6) tenemos que la amplitud  $Y$  de la salida senoidal es:

$$Y = R |T(j\omega_0)| \quad (8)$$

y de (1), (2) y (7) escribimos la fase de salida como:

$$\phi = \angle T(j\omega_0) \quad (9)$$

$$\phi = \angle Y(j\omega) - \angle R(j\omega) = \angle T(j\omega) \quad (10)$$

Las características de magnitud y de fase de un sistema de lazo cerrado se pueden emplear para predecir el desempeño en estado estable cuando la entrada es senoidal; así como el transitorio en el dominio del tiempo.

### Respuesta de frecuencia de sistemas de lazo cerrado

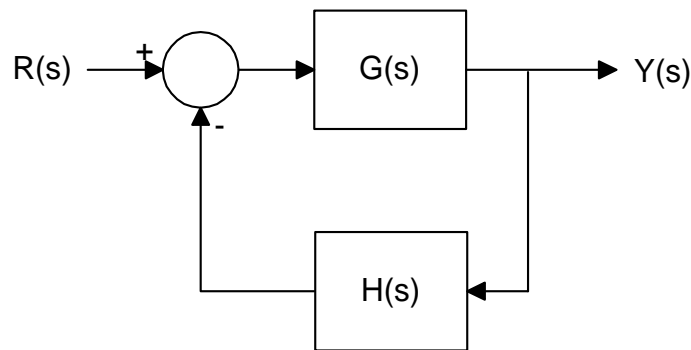


Figura 10.1: Sistema de control de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (11)$$

Si  $s \rightarrow j\omega$  para régimen senoidal permanente

$$T(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \quad (12)$$

donde la función de transferencia en régimen senoidal permanente es

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| \angle T(j\omega) \quad (13)$$

o equivalentemente como número complejo

$$T(j\omega) = \text{Re}\{T(j\omega)\} + j \text{Im}\{T(j\omega)\} \quad (14)$$

donde

$$|T(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|} \quad (15)$$

$$\angle T(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle[1 + G(j\omega)H(j\omega)] \quad (16)$$

$T(s)$  se interpreta como la función de transferencia de entrada-salida de un filtro eléctrico.

### Especificaciones en el dominio de la frecuencia

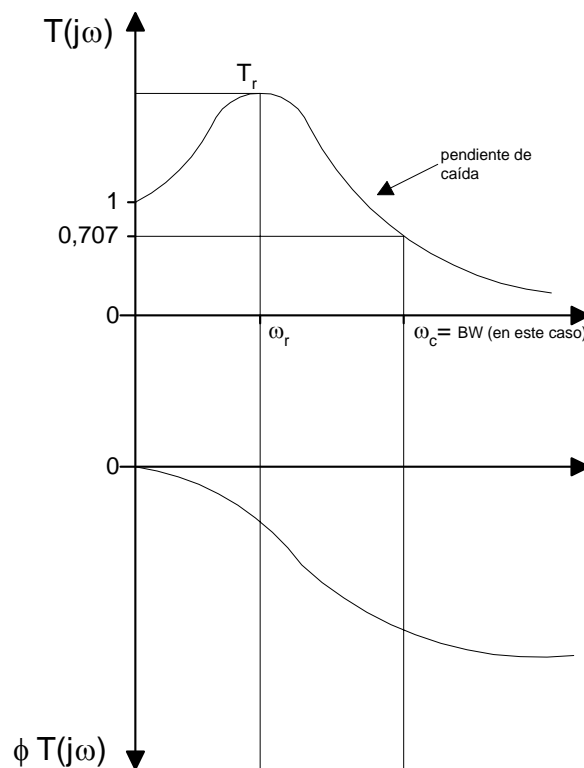


Figura 10.2: Características típicas de ganancia y fase de un sistema de control realimentado

Definiciones:

$T_r$ : Pico de resonancia, es el valor máximo de  $|T(j\omega)|$  a la frecuencia de resonancia  $\omega_r$

- Valores deseados: 1,1...1,5
- Indica la estabilidad relativa y está directamente relacionado con el sobrepaso en el tiempo

$\omega_r$ : Frecuencia de resonancia, frecuencia a la cual ocurre el pico de resonancia  $T_r$

$\omega_c$ : Ancho de banda (BW) o frecuencia a la cual la magnitud  $|T(j\omega)|$  cae al 70,7% (-3dB) de su valor a  $\omega=0$ . (BW =  $\omega_c$  pues el sistema no tiene frecuencia de corte inferior)

**$T_r$ ,  $\omega_r$  y BW para un sistema prototipo de 2° orden**

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (17)$$

**Pico de resonancia y frecuencia de resonancia**

En régimen senoidal permanente ( $s \rightarrow \omega$ )

$$\lim_{s \rightarrow j\omega} T(s) = T(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (18)$$

para simplificar hacemos

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{Frecuencia normalizada} \quad (19)$$

$$T(j\Omega) = \frac{1}{1 + j2\Omega\xi - \Omega^2} \quad (20)$$

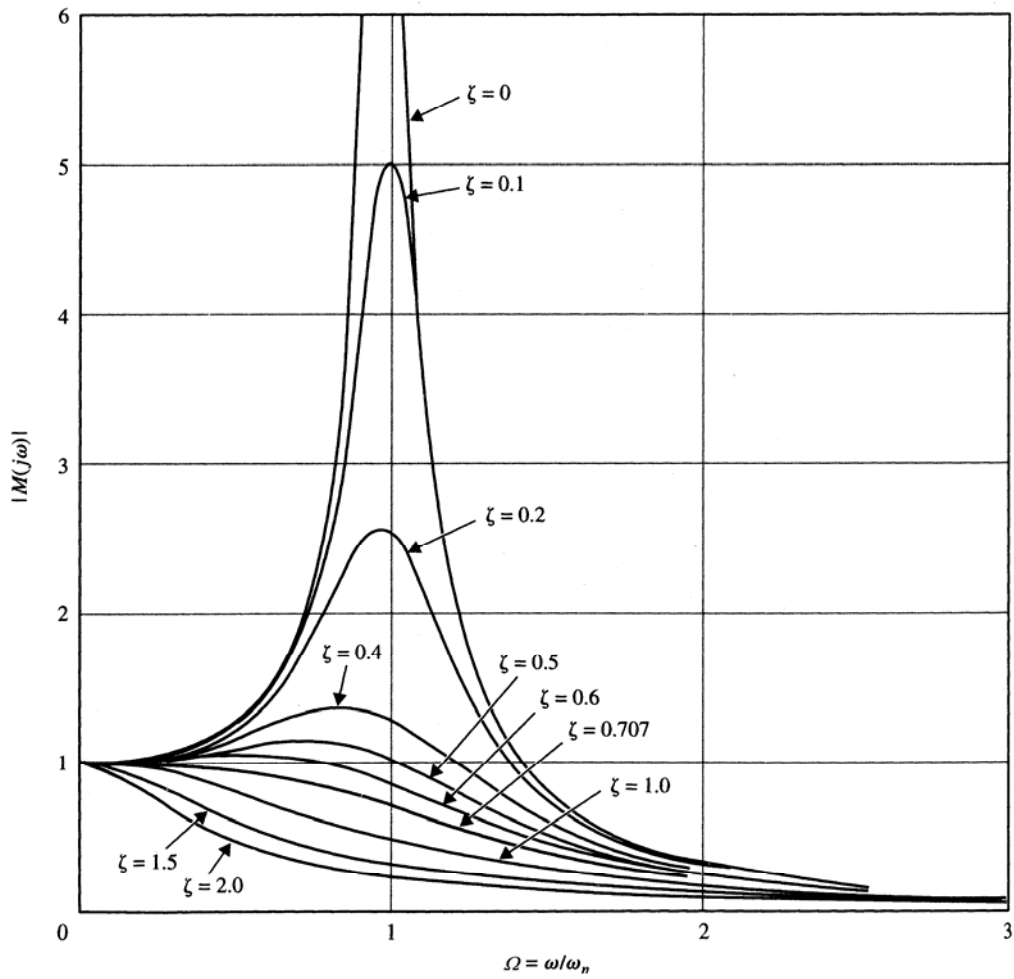


Figura 10.3: Magnitud en función de la frecuencia normalizada  $\Omega$  de un sistema de control de lazo cerrado de 2º orden.

La magnitud y fase son:

$$|T(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (21)$$

$$\angle T(j\Omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right] \quad (22)$$

para encontrar el máximo derivamos respecto a  $\Omega$  e igualamos a cero

$$\frac{d[T(j\Omega)]}{d\Omega} = 0 \quad (23)$$

$\Rightarrow \Omega_r$  : frecuencia de resonancia

$$\Omega_r = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{1-2\xi^2} \end{cases} \quad (24)$$

$$\Omega_r = \sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad \xi < 0,707 \quad (25)$$

$\Omega_r = 0$  no es un máximo verdadero si  $\xi < 0.707$

desnormalizando, de (19) y (25)

$$\omega_r = \omega_n \Omega_r$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad \xi < 0,707 \quad (26)$$

Sustituyendo

$$|T_r| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad ; \quad \xi < 0.707 \quad (27)$$

$$T(j\Omega) = \frac{1}{1+j2\Omega\xi-\Omega^2} \quad (20)$$

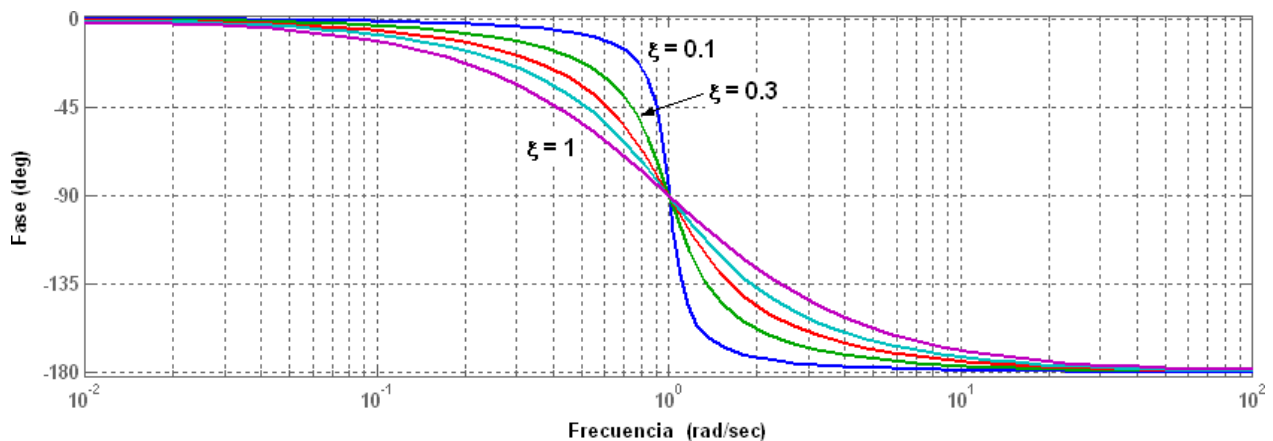


Figura 10.4: Fase normalizada de un sistema prototipo de segundo orden