

Análisis de Sistemas Lineales

Modelado en variables de fase

Contenido

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Modelado en variables de fase

- Caso 1: Sin derivadas de la función de entrada
- Caso 2: Caso general
- Ejemplos y ejercicios

Modelo en variables de fase para el caso 1, $q = 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- Es un modelo en variables de estado, en el cual se cumplen ciertas condiciones:
 - Como primera variable se escoge siempre la salida del sistema.
 - La variable i se escoge como la primera derivada de la variable $(i-1)$ desde $i = 2$ hasta $i = n$.
- Esto tiene como resultado que las variables de estado son la salida y sus derivadas y que se pierda a veces su significado físico.
 - **¿Cuál es el significado físico de la segunda derivada de la aceleración?**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Variables de fase: Caso $q = 0$ (1)

Partimos de una ecuación diferencial de orden n que no tiene derivadas de la función de excitación; $q = 0$.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u(t)$$

Que tiene la función de transferencia $Y(s)/U(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0]}$$

Variables de fase: Caso $q = 0$ (2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Asignamos las variables de fase

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{y}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 = \dddot{y}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$

$$\dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Variables de fase: Caso $q = 0$ (3)

Despejamos $d^n y / dt^n$ y sustituimos las variables de fase

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} - a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} - \cdots - a_1 \frac{dy}{dt} - a_0 y + b_0 u(t)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \dot{x}_n = -a_{n-1} x_n - a_{n-2} x_{n-1} - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u(t)$$

Escribimos en forma extendida y ordenamos

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 + \cdots + 0x_{n-1} + 0x_n$$

$$\dot{x}_2 = 0x_1 + 0x_2 + x_3 + \cdots + 0x_{n-1} + 0x_n$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_{n-1} + x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n + b_0 u(t)$$

Variables de fase: Caso $q = 0$ (4)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Escribimos las ecuaciones en forma matricial, que es conocida como la forma canónica controlable FCC

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \cdot \mathbf{x}$$

Ejemplo 1: Caso $q = 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Escriba la forma canónica controlable o FCC para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 4u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Modelo en variables de fase para el caso con derivadas, $q < n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- Es un modelo en variables de estado, en el cual se cumplen ciertas condiciones:
 - Existen derivadas de la función de entrada; pero, la función de transferencia es estrictamente propia
 - La salida del sistema es en general una función lineal de las variables de estado y no está asociada a la primera variable de estado únicamente.
- Esto tiene como resultado que las variables de estado no tengan un significado físico.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Variables de fase: Caso $q < n$ (1)

Partimos de una ecuación diferencial de orden n que tiene derivadas de la función de excitación con $q < n$.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Encontramos la función de transferencia $Y(s)/U(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0]}{[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0]}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Variables de fase: Caso $q < n$ (2)

Multiplicamos la función de transferencia por $X(s)/X(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0]}{[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0]} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

Separamos en dos ecuaciones el numerador y el denominador

$$Y(s) = [b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0] \cdot X(s)$$

$$U(s) = [s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0] \cdot X(s)$$

Variables de fase: Caso $q < n$ (3)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Asignamos las variables de fase

$$x_1 = x$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{x}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 = \dddot{x}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

$$\dot{x}_n = \frac{d^n x}{dt^n}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Variables de fase: Caso $q < n$ (4)

Regresamos al dominio del tiempo

$$y(t) = b_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

$$u(t) = \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x$$

Despejamos $d^n x/dt^n$ y sustituimos las variables de fase

$$y(t) = b_{n-1}x_n + b_{n-2}x_{n-1} + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_1x_2 - a_0x_1 + u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Variables de fase: Caso $q < n$ (5)

Ordenamos y escribimos las ecuaciones en forma extendida

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \cdots + 0x_{n-1} + 0x_n$$

$$\dot{x}_2 = 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + \cdots + 0x_{n-1} + 0x_n$$

$$\dot{x}_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + \cdots + 0x_{n-1} + 0x_n$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \cdots + 0x_{n-1} + x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n + u(t)$$

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + \cdots + b_{n-2}x_{n-1} + b_{n-1}x_n$$

Variables de fase: Caso $q < n$ (6)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Escribimos las ecuaciones en forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Ejemplo 2: Caso $q < n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Escriba la forma canónica controlable o FCC para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = \dot{u} + 2u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = [2 \quad 1 \quad 0] \cdot \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Ejemplo 3: Caso $q < n$

Escriba el modelo en variables de estado para la siguiente ecuación diferencial

$$2\ddot{z} + 3\ddot{z} + 4\dot{z} + 6z = -2\ddot{u} + 10\dot{u} - 4u$$

Dividimos entre 2, el coeficiente de z^n , y escribimos el modelo

$$\ddot{z} + 1.5\ddot{z} + 2\dot{z} + 3z = -\ddot{u} + 5\dot{u} - 2u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1.5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Modelo en variables de fase para el caso general con derivadas, $q = n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$
$$c_n \frac{d^n u}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + c_{n-2} \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} + \cdots + c_1 \frac{du}{dt} + c_0 u$$

- El sistema es bipropio y se descompone a través de fracciones parciales en un sistema estrictamente propio + una constante K.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0]}{[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0]} + K$$

- Se procesa de manera normal la parte estrictamente propia como en el caso en el que $q < n$ y la constante K será el escalar d.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Variables de fase: Caso $q = n$ (6)

Escribimos las ecuaciones en forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \cdot \mathbf{x} + K \cdot u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Ejemplo 4: Caso $q = n$

Escriba el modelo en variables de estado para la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{z} + 15\dot{z} + 74z = \ddot{u} + 6\dot{u} + 11\dot{u} + 6u$$

Descomponemos en fracción estrictamente propia + una constante K

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[-9s^2 - 63s - 114]}{[s^3 + 15s^2 + 74s + 120]} + 1$$

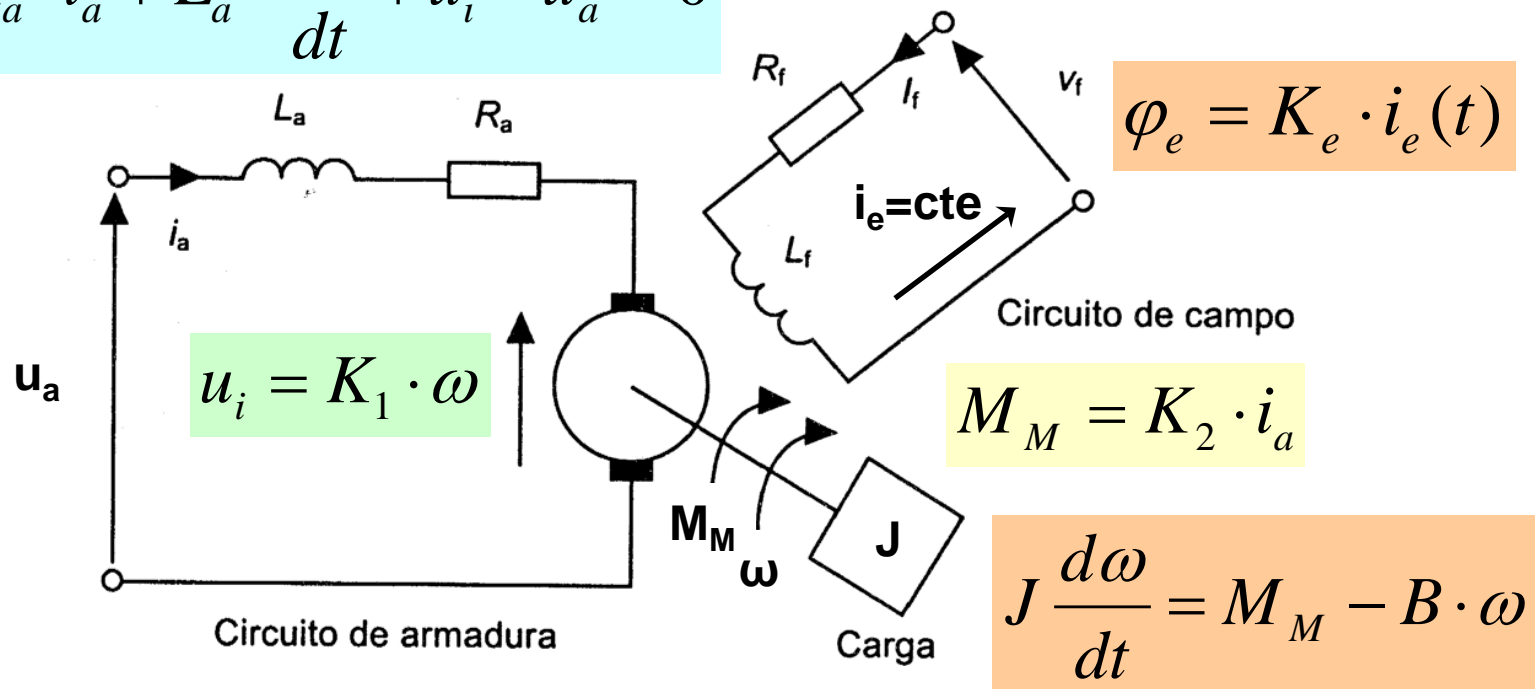
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -120 & -74 & -15 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [-114 \quad -63 \quad -9] \cdot \mathbf{x} + u$$

Ejercicio: Encuentre el modelo en variables de fase

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + u_i - u_a = 0$$



Motor controlado por armadura (salida = ω).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Solución al ejercicio

- Sustituyendo M_M y despejando obtenemos la corriente.

$$i_a = \frac{J}{K_2} \frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{K_2} \cdot \omega$$

- Derivamos una vez respecto al tiempo.

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{J}{K_2} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{B}{K_2} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

- En la ecuación del circuito de campo vamos a eliminar la variable corriente y su derivada.

$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + K_1 \cdot \omega = u_a$$

Solución al ejercicio

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

- Obtenemos una ecuación con solamente la velocidad como variable y la entrada u_a .

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left[\frac{J \cdot R_a + B \cdot L_a}{J \cdot L_a} \right] \cdot \frac{d\omega}{dt} + \left[\frac{K_1 K_2 + B \cdot R_a}{J \cdot L_a} \right] \cdot \omega = \frac{K_2}{J \cdot L_a} u_a$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_1 K_2 + B \cdot R_a}{J \cdot L_a} & -\frac{J \cdot R_a + B \cdot L_a}{J \cdot L_a} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_2}{J \cdot L_a} \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Referencias

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

-
- Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.