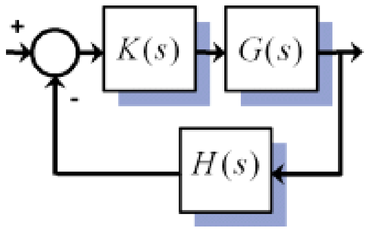
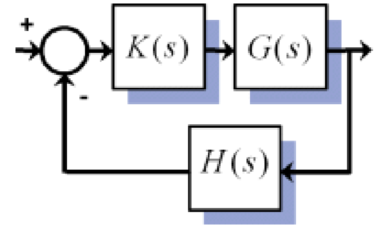
Análisis de Sistemas Lineales

Problemas resueltos



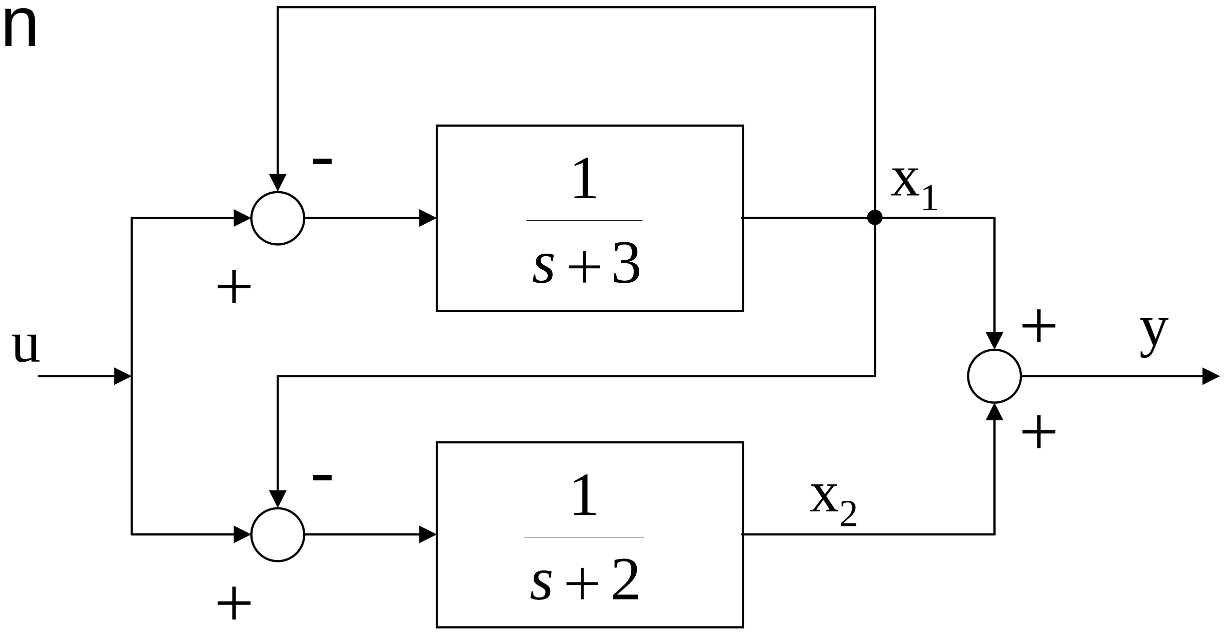
Contenido

- Relación entre modelos
- Modelado en variables físicas y de fase
- Modelado y linealización
- Álgebra de bloques
- Linealización
- Polinomio y valores característicos
- Función de transferencia del sistema en variables de estado
- Transformaciones de similitud



Relación entre modelos

Escriba el modelo en variables de estado



$$X_1 = \frac{U - X_1}{s+3}$$

$$sX_1 + 3X_1 = U - X_1$$

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + 0x_2 + u$$

$$X_2 = \frac{U - X_1}{s+2}$$

$$sX_2 + 2X_2 = U - X_1$$

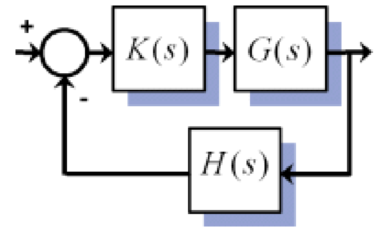
$$\dot{x}_2 = -x_1 + -2x_2 + u$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Modelado en variables de fase



Escriba el modelo en variables de estado para la siguiente ecuación diferencial

$$2\dddot{z} + 3\ddot{z} + 4\dot{z} + 6z = -2\ddot{u} + 10\dot{u} - 4u$$

Dividimos entre 2, el coeficiente de z^n, y escribimos el modelo

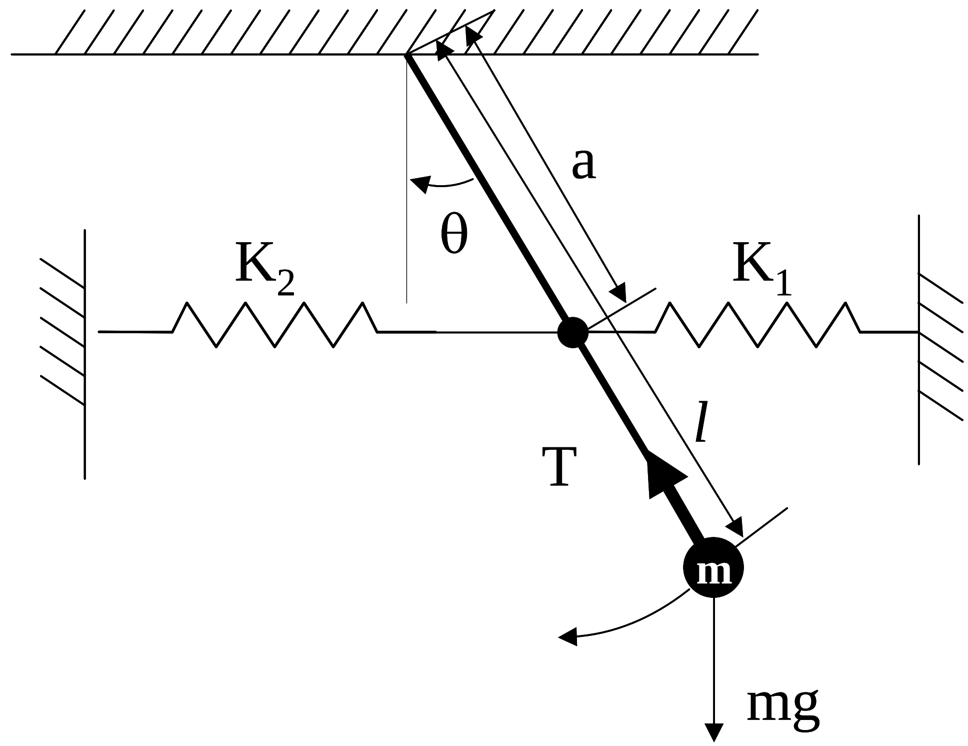
$$\dddot{z} + 1.5\ddot{z} + 2\dot{z} + 3z = -\ddot{u} + 5\dot{u} - 2u$$

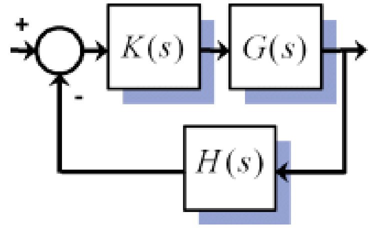
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1.5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Péndulo con restricción

Encuentre las ecuaciones no lineales para el péndulo mostrado en la figura y linealice el sistema para valores pequeños del ángulo θ. Escriba el modelo linealizado en variables de estado. La masa **m** está suspendida del techo por una barra indeformable de longitud ***l***, sujeta a la distancia **a** por medio de dos resortes con constantes $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$.





Péndulo con restricción (2)

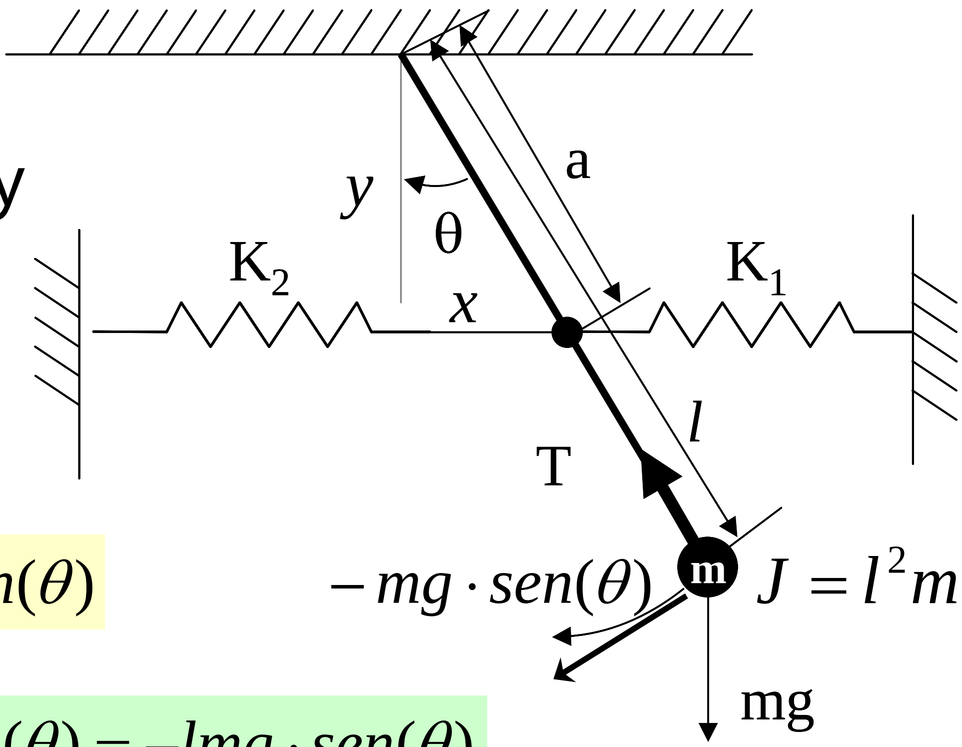
El desplazamiento en el eje x

$$x = a \cdot sen(\theta)$$

El brazo de palanca en el eje y

$$y = a \cdot \cos(\theta)$$

El equilibrio de momentos alrededor del punto de pivote



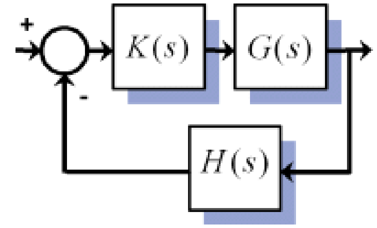
$$J\ddot{\theta} + K_1 \cdot x \cdot y + K_2 \cdot x \cdot y = -lmg \cdot sen(\theta)$$

$$l^2 \cdot m \cdot \ddot{\theta} + (K_1 + K_2) \cdot a \cdot sen(\theta) \cdot a\cos(\theta) = -lmg \cdot sen(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{l} sen(\theta) - \frac{(K_1 + K_2) \cdot a^2 \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta)}{l^2 m}$$

$$C = \frac{(K_1 + K_2) \cdot a^2}{l^2 m}$$

Péndulo con restricción (3)



Definimos las variables

$$y = x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

Escribimos las funciones

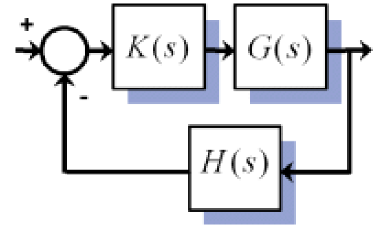
$$\dot{x}_1 = f_1 = 0x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = f_2 = \frac{-g}{l} sen(x_1) - C \cdot sen(x_1) \cdot \cos(x_1) + 0x_2$$

Linealizando para valores muy pequeños de θ, $x_{01}= 0$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l}\cos(x_{01}) - C \cdot [\cos^2(x_{01}) - sen^2(x_{01})] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

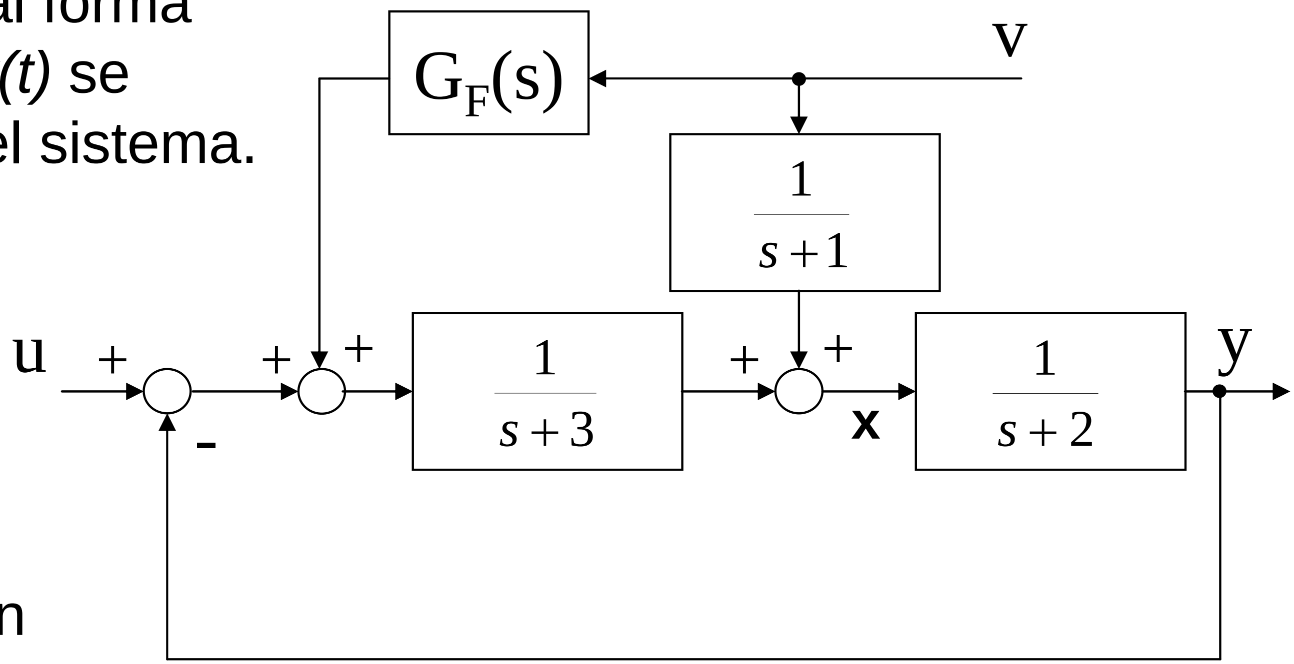
Obtenemos:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} - \frac{(K_1 + K_2) \cdot a^2}{l^2 m} & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta\mathbf{x}$$
$$y = [1 \quad 0] \cdot \Delta\mathbf{x}$$



Álgebra de bloques

Encuentre $G_F(s)$ de tal forma que la influencia de *v(t)* se cancele a la salida del sistema.



Hacemos:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

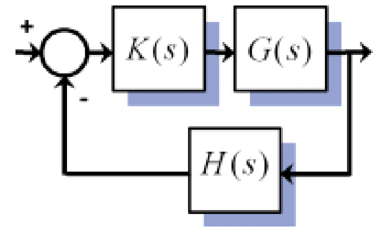
$$G_2(s) = \frac{1}{s+3}$$

Por superposición con

u(t) = 0 y *y(t)* =0

$$X(s) = V(s)[G_1(s) + G_F(s)G_2(s)] = 0$$

$$G_F(s) = \frac{-G_1}{G_2}, \quad G_F(s) = \frac{-(s+3)}{s+1}$$



Linealización

Linealice el modelo para el punto de operación x_{02}=1, $\frac{dx_1}{dt}=0$ y r_0 = R

$$\frac{dx_1}{dt} = 2 * x_1 + x_2^3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = sen(x_1) + x_2 + r^2$$

$$y = x_2$$

$$\Rightarrow 0 = 2 * x_{01} + x_{02}^3, \text{ y por lo tanto } x_{01} = -0.5$$

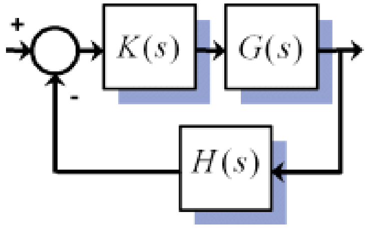
$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, r_0} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, r_0} \Delta r$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3x_{02}^2 \\ \cos(x_{01}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2r_0 \end{bmatrix} \cdot \Delta r$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0.877 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2R \end{bmatrix} \cdot \Delta r$$

$$\Delta y = [0 \quad 1] \cdot \Delta\mathbf{x}$$

Polinomio característico



Encuentre el polinomio característico para el sistema en variables de estado mostrado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -65 & -82 & -16 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

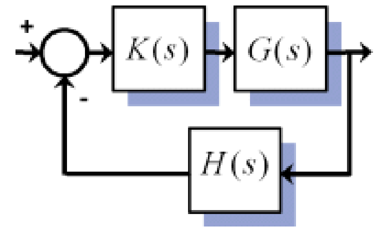
Por inspección tenemos

$$G(s) = \frac{s+4}{s^4 + 2s^3 + 16s^2 + 82s + 65}$$

El polinomio característico

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 16s^2 + 82s + 65$$

Función de transferencia



Encuentre la función de transferencia $G_E(s)$ para la planta dada en variables de estado. Finalmente encuentre la función de transferencia $T(s)$ a partir de $G_E(s)$ usando realimentación unitaria

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

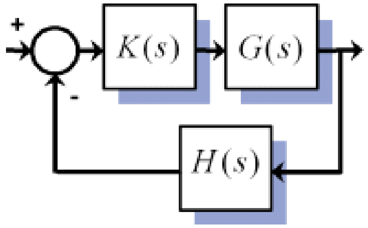
$$G_E(s) = c^T \cdot [sI - A]^{-1} \cdot b$$

$$G_E(s) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot [sI - A]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G_E(s) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} (s-5) & 11 \\ -4 & (s+10) \end{bmatrix}}{s^2 + 5s - 6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5s+7}{(s+6)(s-1)}$$

$$T(s) = \frac{G_E(s)}{1 + G_E(s)} = \frac{5s+7}{s^2 + 10s + 1}$$

Transformaciones de similitud



Convierta el sistema dado a la forma canónica diagonal.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Las transformaciones

$$\dot{\hat{x}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{b} \cdot u$$

$$y = \hat{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$\hat{b} = \mathbf{V}^{-1} \cdot b$$

$$\hat{c} = c \cdot \mathbf{V}$$

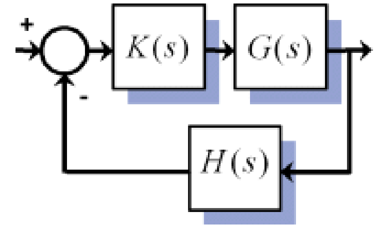
Los valores propios

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

Transformaciones de similitud (2)



El cálculo de los vectores propios de la matriz de transformación **V**

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 6 & -5\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 6 & -5\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$-2v_{11}+v_{21}=0$$

$$\text{con } v_{21}=1, \Rightarrow v_{11}=0.5$$

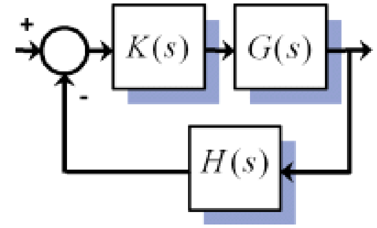
$$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -6 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$-3v_{12}+v_{22}=0$$

$$\text{con } v_{22}=1, \Rightarrow v_{12}=1/3$$

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Transformaciones de similitud (3)



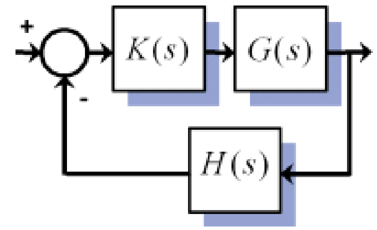
La transformación a diagonal usando la matriz **V**

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{b} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c} = c \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot u$$

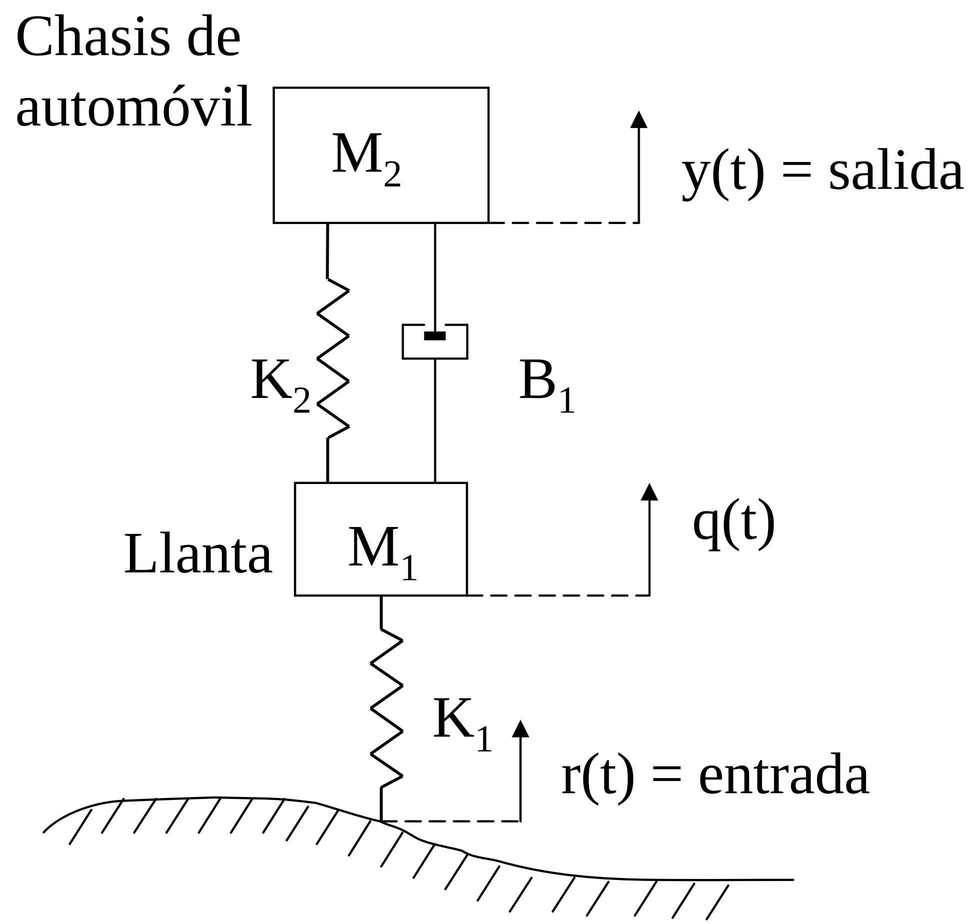
$$y = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

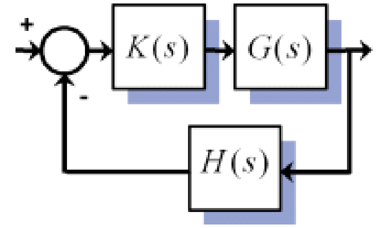


Modelado en variables físicas

Se muestra un sistema de suspensión de un automóvil. M_1 es la masa de la llanta, M_2 es ¼ de la masa del chasis del automóvil, K_1 es la constante elástica de la llanta y K2 es la constante elástica del resorte de suspensión y B_1 es la constante del amortiguador. La entrada ***r(t)*** es el nivel de la calle y la salida ***y(t)*** es la posición vertical del chasis del automóvil respecto a algún punto de equilibrio. Encuentre el modelo en variables de estado para el sistema mostrado en la figura.

Utilice y(t) = x3 y q(t) = x1.

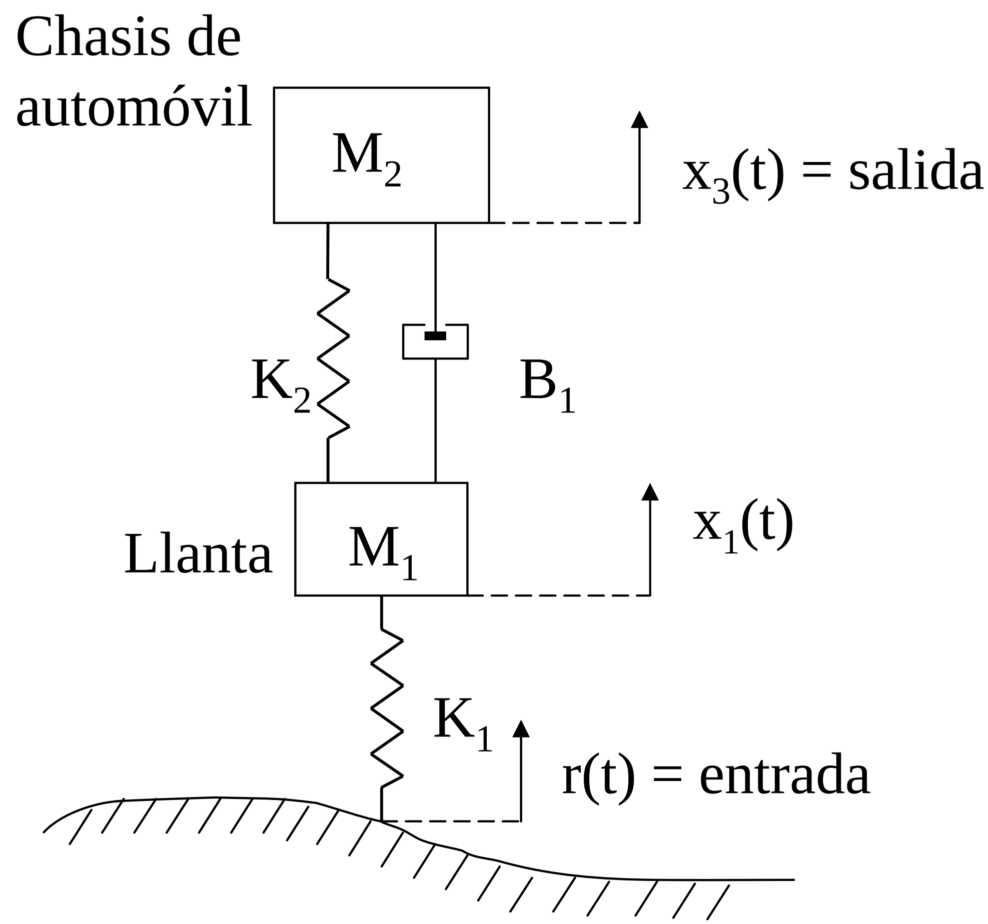




Modelado en variables físicas (2)

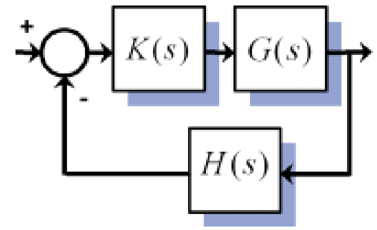
Definiendo las variables a usar:

$$x_1 = q(t)$$
$$\dot{x}_1 = \dot{q}(t) = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{q}(t)$$
$$x_3 = y(t)$$
$$\dot{x}_3 = \dot{y}(t) = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \ddot{y}(t)$$



$$\dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$
$$\dot{x}_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4$$

Modelado en variables físicas (2)



Sumando fuerzas en cada masa

$$M_1\ddot{x}_1 + B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + K_2(x_1 - x_3) + K_1(x_1 - r) = 0$$

$$M_1\dot{x}_2 + B_1(x_2 - x_4) + K_2(x_1 - x_3) + K_1(x_1 - r) = 0$$

$$M_2\ddot{x}_3 + B_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + K_2(x_3 - x_1) = 0$$

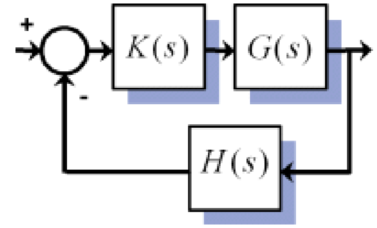
$$M_2\dot{x}_4 + B_1(x_4 - x_2) + K_2(x_3 - x_1) = 0$$

Distribuyendo, despejando y ordenando las ecuaciones

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{K_1 + K_2}{M_1}\right)x_1 - \frac{B_1}{M_1}x_2 + \frac{K_2}{M_1}x_3 + \frac{B_1}{M_1}x_4 + \frac{K_1}{M_1}r$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_2}{M_2}x_1 + \frac{B_1}{M_2}x_2 - \frac{K_2}{M_2}x_3 - \frac{B_1}{M_2}x_4$$

Modelado en variables físicas (3)



Finalmente, escribiendo las ecuaciones de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{K_1 + K_2}{M_1}\right) & -\dfrac{B_1}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & \dfrac{B_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{B_1}{M_2} & -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{B_1}{M_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K_1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$