11. Gráficas de Bode

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+\underbrace{G(s)H(s)}_{G_0(s)}} \qquad (1)$$

$$G_0(s) = K\,\hat{G}_0(s) \qquad (2)$$

$$\lim_{s \to j\omega} G_0(s) = K\,\hat{G}_0(j\omega) \qquad (3)$$

Si deseamos encontrar el punto en el cual los polos se encuentran sobre el eje imaginario.

<u>La condición de ganancia</u>

$$0 \leq K \leq 1$$

$$\left|K\,\hat{G}_0(j\omega)\right| \quad = \quad 1 \qquad (4)$$

Si K>0

$$\left|\hat{G}_0(j\omega)\right| \quad = \quad \frac{1}{K}$$

<u>La condición de fase</u>

$$\angle\left[K\hat{G}_0(j\omega)\right] = 180º \qquad (5)$$

„El sistema es inestable si la magnitud de la ganancia es mayor que uno a una frecuencia en la que la fase del sistema sea de 180º "

$$\left|\hat{G}_0(j\omega)\right| \quad = \quad \frac{1}{K} > 1 \qquad \text{y} \qquad \angle\hat{G}_0(j\omega) = 180^\circ$$

Margen de Ganancia

El margen de ganancia se define como la ganancia de amplitud necesaria para hacer GH=1 cuando la fase del sistema $\angle \hat{G}_0(j\omega) = 180°$.

$$\mathrm{MG} = 0 - \hat{G}_0(j\omega)\Big|_{\angle \hat{G}_0(j\omega)=180°}$$

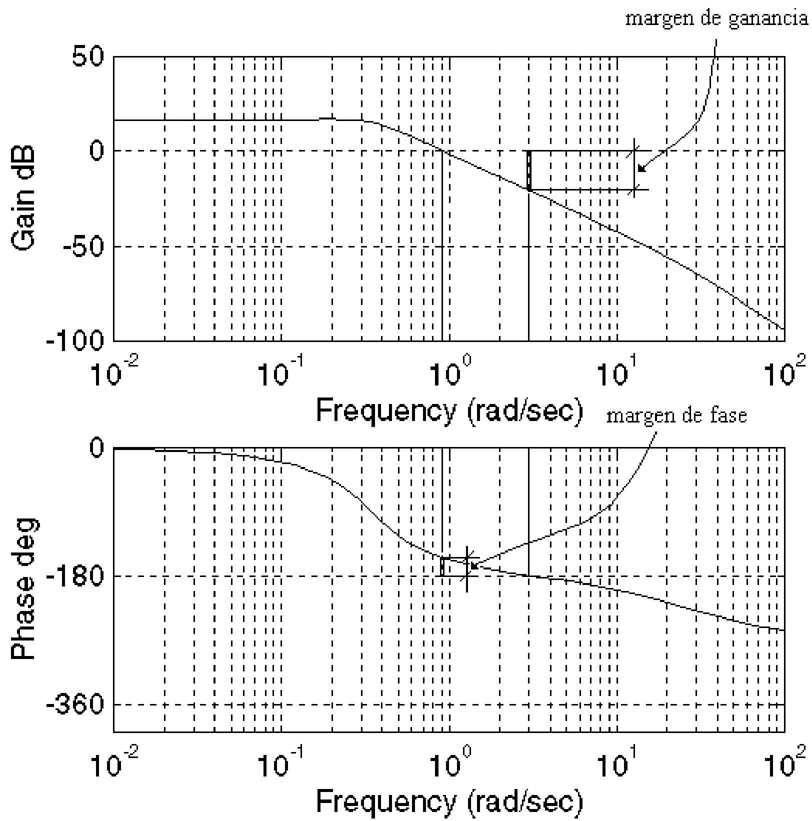


Figura 11.1: Márgenes de ganancia y fase en la gráfica de Bode

Margen de fase

Es la diferencia hacia ±180° de la fase del sistema a una ganancia de 0dB. Si hay cruces múltiples de ±180° entonces, el margen de ganancia es la menor de las posibilidades.

$$MF = 180 + \angle\overbrace{GH}^{G_0}\Big|_{\underbrace{GH}_{G_0}=1\equiv 0dB}$$

Para que un sistema sea estable debe cumplirse que:

„los márgenes de fase y de ganancia deben ser positivos según las definiciones“.

Ventajas de las Gráficas de Bode

- La gráfica se puede aproximar por segmentos de recta.

- Los cruces de ganancia y fase asi como de los márgenes de ganancia y fase se determinan más fácilmente que en una traza de Nyquist.

- Para los propósitos de diseño es fácil visualizar el efecto de añadir controladores y sus parámetros se visualizan mejor que sobre una gráfica de Nyquist.

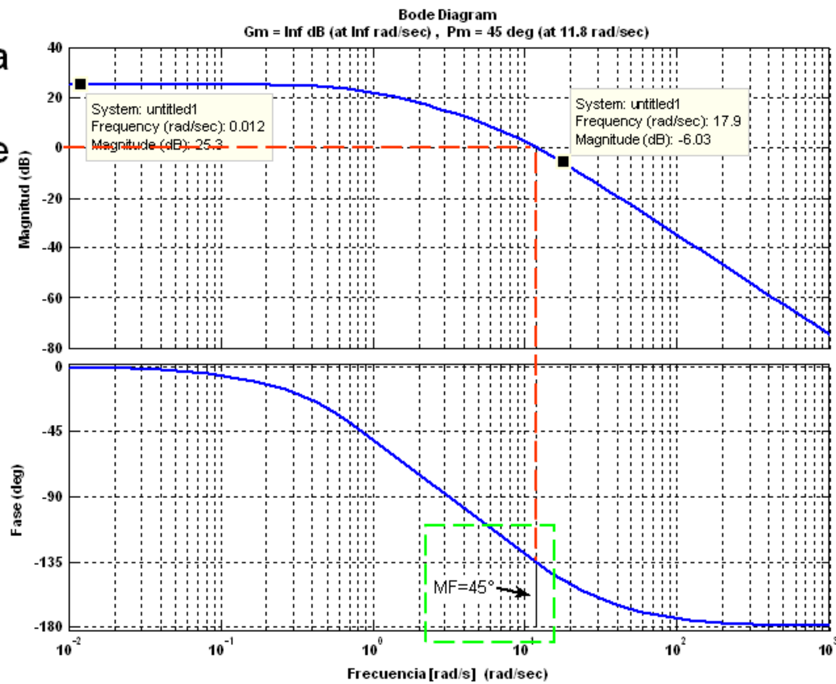
NOTA: Para más detalles sobre Bode y otros métodos de análisis descargue el ***ctm*** o Tutor de Control en Matlab de la dirección: **http://www.ie.itcr.ac.cr/einteriano/analisis/ctm**, o en línea directamente en: **http://www.engin.umich.edu/group/ctm/**

Ejemplo 1: Margen de ganancia y margen de fase

Estabilidad: Si la frecuencia de cruce de la ganancia es menor que la frecuencia de cruce de la fase (esto es, $\omega_{cg} < \omega_{cf}$), entonces el sistema en lazo cerrado será estable. Esto equivale a que los márgenes de ganancia y de fase sean positivos.

Margen de fase = 45°

El sistema es estable en LC



Ejemplo 1: Ancho de banda y tiempo de subida

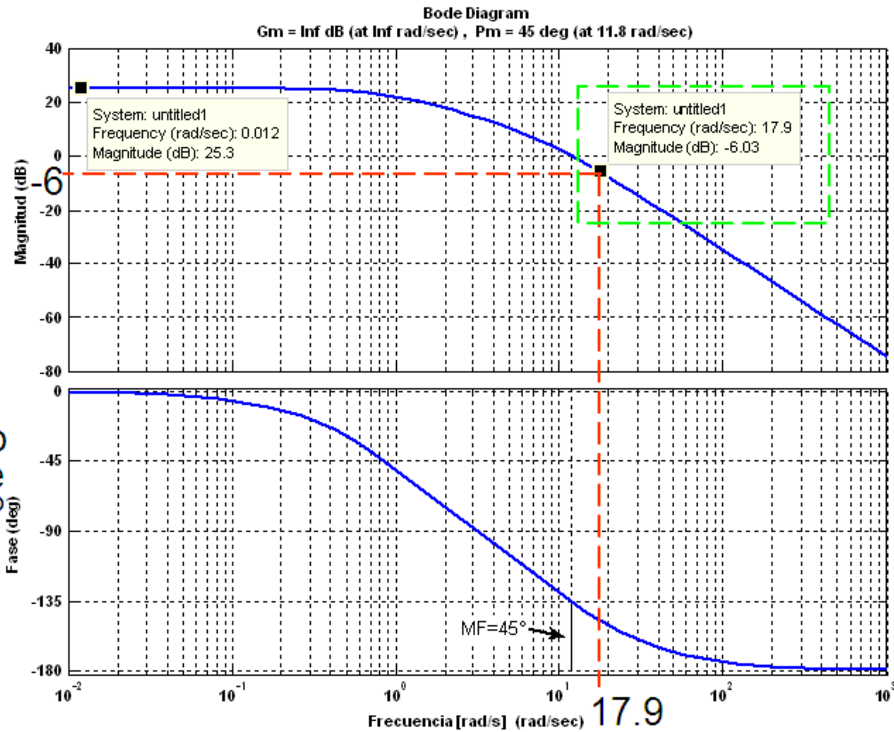
Ancho de banda: Se define como la frecuencia a la cual la respuesta de magnitud de **lazo cerrado** es igual a **-3dB**.

Si usamos una aproximación a un sistema de segundo orden, el ancho de banda BW de lazo cerrado es igual a la frecuencia en la cual la respuesta de magnitud de **lazo abierto** se encuentra entre **-6 y -7.5dB**; asumiendo que la fase de lazo abierto se encuentra entre -135º y -225º

Ancho de banda = 17.9 rad/s

Tiempo de subida:

$t_r \geq 1.8/BW = 1.8/17.9 = 0.1s$



Ejemplo 1: Error de estado estacionario para sistema tipo 0

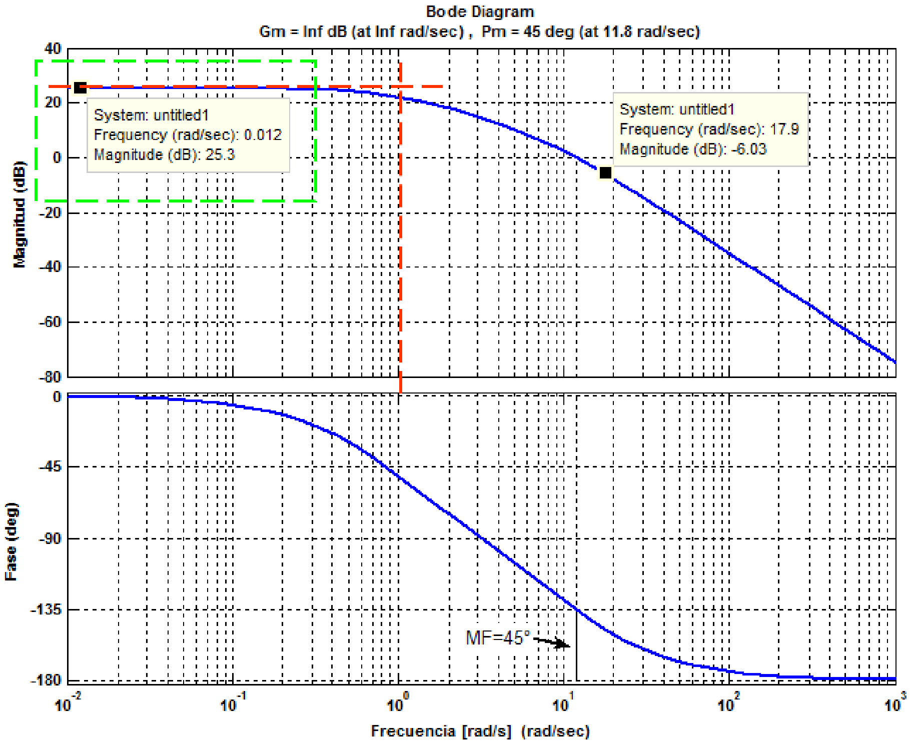
Error de estado estacionario: El valor en dB de los coeficientes de error (Kp, Kv y Ka, dependiendo del tipo de sistema) se obtienen leyendo la intersección de la recta en ω = 1 con la asíntota de la curva de magnitud a ω = 0.

Kp_{dB} = 25.3 dB

Kp = 18.41

e_{ss} =1/(1+Kp)

e_{ss}=1/(1+18.41) = 5.15%



Ejemplo 1: Respuesta de lazo cerrado ante escalón con t_r y e_{ss}

Tiempo de subida: Es el tiempo entre el 10% y el 90% del valor final de la respuesta

$t_r \geq 1.8/BW$

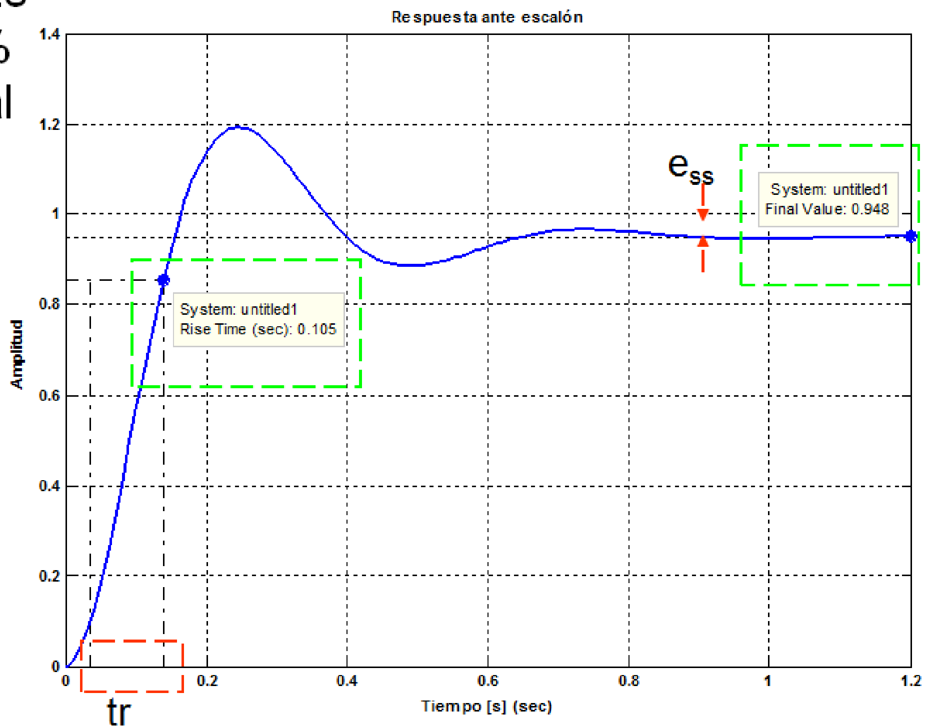
$t_r \geq 1.8/17.9 = 0.1s$

Error de estado estacionario:

$e_{ss} = 1/(1+Kp)$

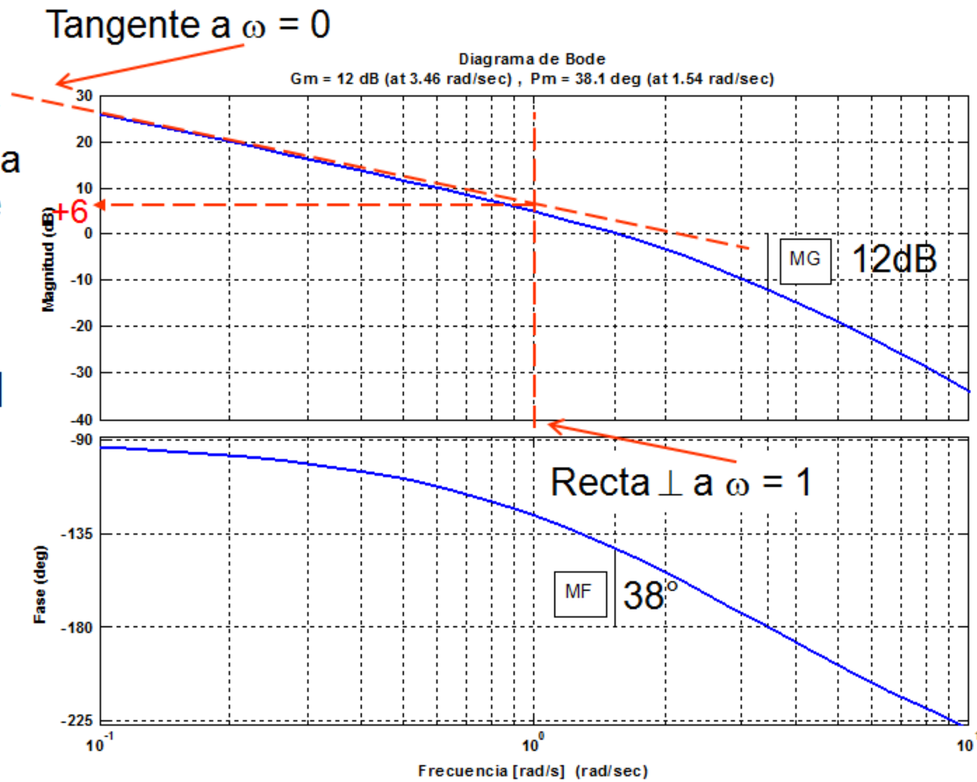
$e_{ss} = 1/(1+18.41)$

$e_{ss} = 5.15\%$



Ejemplo 2: Error de estado estacionario para sistema tipo 1

Para sistemas tipo 1 y superiores, trazamos la tangente a la curva de ganancia a ω = 0 y la recta perpendicular al eje de la frecuencia a ω = 1 y leemos K_V[dB] de la intersección.



$$K_V = 10^{\left(\frac{+6dB}{20dB}\right)}$$

$$K_V = 2$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Resumen de fórmulas:

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} \qquad t_{S2\%} \geq \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln M}{\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{\ln M}{\pi}\right)^2}}$$

$$\zeta \cong \frac{MF}{100}, \mathrm{MF} \leq 60° \qquad \omega_n \cong BW$$

Tipo de sistema	**0**	**1**	**2**
Coeficiente	K_P	K_V	K_a
e_{SS}	$e_{SS} = \frac{A}{1+K_P}$	$e_{SS} = \frac{A}{K_V}$	$e_{SS} = \frac{A}{K_a}$