INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA

NOTAS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROFESORA: LETICIA CAÑEDO SUÁREZ

1 INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD.

OBJETIVO: Aprender a calcular la probabilidad de un evento a partir de las probabilidades de otros eventos relacionados, esto se conoce como Regla de Bayes, para lo cual necesitamos aprender los conceptos básicos.

1.1 GENERALIDADES.

La teoría de la probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia los fenómenos que dependen de sucesos fortuitos conocidos también con el nombre de azarosos o aleatorios.

Un poco de historia:

Existe evidencia de la existencia de los juegos de azar desde el año 3500 AC en Egipto, pero el sustento matemático de la teoría de la probabilidad es iniciado por los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) cuando logran obtener probabilidades exactas para ciertos problemas relacionados con los juegos de dados.
A partir del siglo XVII la teoría de la probabilidad ha sido constantemente desarrollada y ampliamente aplicada en diversos campos de estudio tales como las ciencias sociales, política, publicidad y mercadotecnia, ingeniería, administración, medicina, meteorología, predicción de terremotos, comportamiento humano, diseño de sistemas de computadores, discriminación laboral, etc.

1.1.1 MODELOS PROBABILÍSTICOS Y DETERMINÍSTICOS.

Cada vez que utilizamos las matemáticas con el objeto de estudiar fenómenos observables es indispensable empezar por construir un modelo matemático para tales fenómenos. Estos pueden ser de dos tipos:

i) **Modelo determinístico**._ aquél en que las condiciones en las que se verifica un experimento determinan el resultado del mismo. Por ejemplo, supón que la relación entre una variable de respuesta y con una variable explicativa x es de la forma $y = a + bx$ con a y b desconocidas. Esto es un modelo determinístico porque no permite error en la predicción de y como función de x. Por ejemplo, la distancia recorrida verticalmente sobre el suelo por un objeto está dada por $S = -16t^2 + bV_0 t$, donde t es el tiempo y V_0 es la velocidad inicial.

ii) **Modelo probabilístico o estocástico**._ aquél que involucra cierto error que depende de cosas fortuitas por ejemplo $Y = A + Bx + \varepsilon$, donde ε es un componente aleatorio. Ejemplo: Se desea determinar cuánta lluvia caerá debido a una tormenta que pasa por una zona específica.

1.1.2 ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS.

Definición:

i) Un **experimento** es cualquier proceso cuyos resultados no se conocen de antemano con certeza.

ii) El **espacio muestral** S del experimento es la colección o conjunto de **todos** los posibles resultados del experimento.

iii) Un **evento** o **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

1._ **Experimento**: Se lanza una moneda 3 veces.
Notación: c indica que la moneda cae en cara y x indica que la moneda cae en cruz.
Espacio muestral: S ={ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xxc, xcx, xxx}
Eventos: A: caen dos caras A ={ccx, cxc, xcc}
B: cae al menos una cara B ={ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xxc, xcx}
C: a lo más una cruz C ={ccc, ccx, cxc, xcc}

2._ **Experimento**: Un vehículo llega a una intersección de carreteras y puede dar vuelta a la derecha, a la izquierda o seguir de frente.
Notación: D indica que el vehículo da vuelta a la derecha, I vuelta a la izquierda y F indica que sigue de frente.
Espacio muestral: S ={D, I, F}
Eventos: A: el vehículo sigue de frente A ={F}
B: El vehículo se detiene $B = \{\} = \varnothing$

3._ **Experimento**: Se eligen al azar tres artículos de un proceso de manufactura, se inspecciona cada uno de ellos y se clasifica como defectuoso D o bueno B.
Espacio muestral: S ={DDD, DDB, DBD, BDD, DBB, BDB, BBD, BBB}
Eventos: A: exactamente dos artículos buenos A ={DBB, BDB, BBD}
B: a lo más un artículo defectuoso B ={DBB, BDB, BBD, BBB}

4._ **Experimento**: Se lanza una moneda hasta obtener una cruz (x) o tres caras (c).
Espacio muestral: S ={x, cx, ccx, ccc}
Evento: A: al menos dos caras A ={ccx, ccc}

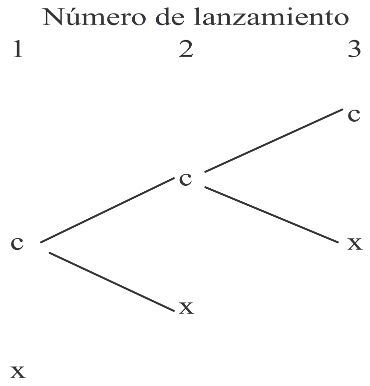


Diagrama de árbol para el problema 4.

5._ Una puerta de automóvil se ensambla con un gran número de puntos de soldadura. Después del ensamblado, se inspecciona cada punto y se cuenta el número total de defectos.
Notación: N es el número total de puntos de soldadura.
Espacio muestral: $S = \{0, 1, 2, ..., N\}$
Eventos: A: El trabajo es impecable $A = \{0\}$
B: Se tuvo un número de defectos mayor al 50% del total de puntos

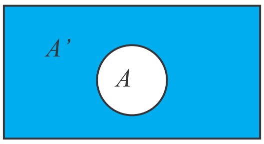
$$B = \begin{cases} \{N/2+1, N/2+2, ..., N\} & \text{con } N \text{ par} \\ \{(N+1)/2, (N+1)/2+1, ..., N\} & \text{con } N \text{ impar} \end{cases}$$

6._ Se seleccionan al azar cuatro estudiantes de una clase de química y se clasifican como masculino o femenino. Lista los elementos del espacio muestral asociado a este experimento. Define un segundo espacio muestral donde los elementos representen el número de mujeres seleccionadas.
Notación: f denota a una mujer y m a un hombre.
Espacio muestral 1: S ={ffff, fffm, ffmf, fmff, mfff, ffmm,mmff, fmmf, mffm, mfmf, fmfm, mmmf, mmfm, mfmm, fmmm, mmmm}
Espacio muestsral 2: $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Operaciones entre eventos.
Dado que los eventos son subconjuntos de elementos, todas las operaciones que conocemos para los conjuntos aplican en los eventos.

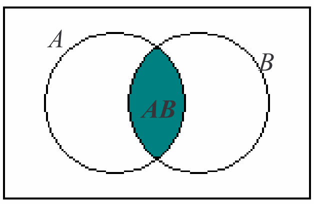
Definición:

i) El **complemento de un evento** A con respecto al espacio muestral S es el conjunto de todos los elementos de S que no están en A. Se denota como A', A^c o $\overline{A}$. $\boxed{A' = \{x \mid x \in S \text{ y } x \notin A\}}$



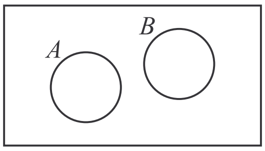
El círculo representa el evento A y la parte sombreada el complemento de A, el rectángulo Es el espacio muestral S.

ii) La **intersección de dos eventos** es el conjunto de elementos que pertenecen a los dos eventos al mismo tiempo y se escribe $\boxed{AB = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}}$

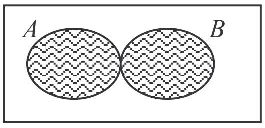


El círculo de la izquierda representa el evento A y el de la derecha el evento B, la parte sombreada es la intersección de ambos eventos y el rectángulo es el espacio muestral.

iii) Dos eventos son **excluyentes** o **disjuntos** si no se intersectan, es decir $\boxed{AB = \varnothing}$



iv) La **unión de dos eventos** es el conjunto de elementos que están en cualquiera de los dos eventos o en ambos y se denota $\boxed{AUB = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}}$



Dos leyes que serán de gran ayuda a lo largo de este curso son las llamadas Leyes de D'Morgan:

i) $(AUB)' = A'B'$ El complemento de la unión es la intersección de los complementos.

ii) $(AB)' = A'UB'$ El complemento de la intersección es la unión de los complementos.

1.1.3 Interpretación De La Probabilidad.

Frecuentista._ La probabilidad de un evento es interpretada como la frecuencia relativa con la que se obtendría ese resultado si el proceso se repitiera un gran número de veces, en condiciones similares. Por ejemplo si se lanza una moneda N veces y en exactamente n lanzamientos la moneda cae con la cara hacia arriba se tendría que la probabilidad de obtener cara está dada por $\frac{n}{N}$.

Clásica._ está basada en el concepto de resultados igualmente verosímiles, es decir se asume que cada uno de los resultados tiene la misma oportunidad de ocurrir. En el ejemplo de la moneda tenemos dos posibles resultados, cara o cruz, por lo tanto si la probabilidad de que ocurra una cara es p la probabilidad de que ocurra una cruz también es p, cumpliendo ciertas propiedades que veremos más adelante.

Subjetiva._ tiene que ver con el grado de conocimiento de la persona sobre el evento y en base a esta experiencia la persona asigna una probabilidad conveniente.

1.2 Elementos De Análisis Combinatorio.

Hay ocasiones en que no necesitamos conocer en detalle los elementos del espacio muestral más bien necesitamos saber cuantos son. Así que aprenderemos un poco sobre métodos de conteo.

1.2.1 PERMUTACIONES.

Definición: Una **permutación** es un arreglo de objetos distintos donde el orden es importante.

Una permutación difiere de otra si el orden o el contenido del arreglo es diferente.

Ejemplo._ Considerando las letras a, b, c, d:

i) Hay 4 permutaciones distintas tomando una sola letra a la vez: a, b, c, d.
ii) Hay 12 permutaciones distintas tomando 2 letras a la vez: ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.
iii) Hay 24 permutaciones distintas tomando 3 letras a la vez: abc, acb, bac, bca, cab, cba, abd, adb, bad, bda, dab, dba, bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb, acd, adc, cad, cda, dac, dca.

También se puede utilizar el método de "las casitas" para contar, si quiero ver de cuántas maneras puedo permutar 3 de 4 letras posibles, tendría que la primer letra puede ser cualquiera de las 4 originales, la siguiente puede ser cualquiera de las 3 que quedan y la última puede ser cualquiera de las 2 letras restantes, dibujo tres casitas que corresponden a las tres letras que deseo tomar y las lleno de la manera descrita, quedando

4	3	2

4x3x2 = 24 permutaciones diferentes.

En general si quiero permutar k de n elementos tendría

n	n-1	n-2	...	n-(k-1)

= $n(n\text{-}1)(n\text{-}2)...(n\text{-}k\text{+}1)$

Si multiplicamos por 1 no pasa nada, así el número de permutaciones diferentes está dado por

$$P_k^n = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)...(2)(1)}{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)...(2)(1)}$$

$$\boxed{P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

1.2.2 COMBINACIONES.

Definición: Una **combinación** es un arreglo de objetos distintos donde no importa el orden.

Una combinación difiere de otra sólo si el contenido es diferente.

Ejemplo._ Considerando nuevamente las cuatro letras a, b, c, d se tiene que:

i) Hay 4 combinaciones distintas tomando una sola letra a la vez: a, b, c, d.
ii) Hay 6 combinaciones distintas tomando 2 letras a la vez: ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc.
iii) Hay 4 combinaciones distintas tomando 3 letras a la vez: abc = acb = bac = bca = cab = cba, abd = adb = bad = bda = dab = dba, bcd = bdc = cbd = cdb = dbc = dcb, acd = adc = cad = cda = dac = dca.
iv) Sólo 1 manera de sacar las 4 letras a la vez: abcd.

Observa que teníamos 12 permutaciones tomando dos letras a la vez, pero dado que dos letras pueden cambiar el orden 2 veces, al no importar el orden para nosotros es lo mismo el par (ab) que el par (ba), dos letras dos ordenamientos, quitando las repeticiones nos quedamos con 6 combinaciones.
Teníamos 24 permutaciones tomando 3 de 4 letras, pero con las mismas 3 letras podemos hacer 3(2)(1) es igual a 6 ordenamientos diferentes, dado que ahora ya no importa el orden estos 6 arreglos son uno solo, por lo tanto quitando las repeticiones nos quedan 4 combinaciones diferentes. Siguiendo con este razonamiento llegamos a que el número de combinaciones al tomar *k* de *n* elementos esta dado por:

$$\boxed{C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Ejemplos:

1._ ¿Cuántos equipos que incluyan 2 ingenieros en electrónica y 1 ingeniero en sistemas computacionales se pueden formar si se dispone de 4 ingenieros en electrónica y 3 ingenieros en sistemas computacionales?

<u>Solución</u>

El orden no es importante por lo tanto necesitamos combinaciones

$$\binom{4}{2}\binom{3}{1} = \frac{4!}{2!(4-2)!}\frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{2!(3)(4)}{2!(2!)}\frac{2!(3)}{2!} = \underline{18 \text{ equipos.}}$$

2._ ¿Cuántas fichas tiene un domino si se usan *n* números y cada ficha es de la forma (x, y) siendo *x* y *y* no necesariamente diferentes y $(x, y) = (y, x)$?

<u>Solución</u>

El orden no importa, entonces primero necesito encontrar el número de combinaciones que tengo al tomar 2 de los *n* números y luego sumo *n* pares con números iguales, es decir los pares (1,1), (2,2), ... ,(n,n).

$$C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

El número total de fichas es entonces

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \underline{\frac{n(n+1)}{2}}$$

3._ ¿De cuántas manera se pueden formar 6 personas para subirse a un autobús si ...
a) No hay restricción alguna?
b) Si 3 personas insisten en seguir cada una de ellas a las otras?
c) Si en un determinado conjunto de 2 personas, cada una de ellas se niega a seguir a la otra?

Solución

a) Si no hay restricción alguna, cualquiera de las 6 personas puede ir en la primera posición de la fila, cualquiera de las 5 que quedan en la siguiente posición y así sucesivamente, por lo tanto el número de maneras diferentes de formar a las 6 personas es 6! = 720.

b) Consideramos a las 3 personas que quieren estar juntas como si fuera una sola y entonces tendríamos que acomodar en la fila a 4 personas (las tres que no tienen preferencia y el paquete de tres que desean estar juntas), se pueden acomodar de 4! = 24 maneras diferentes, pero dentro de cada una de estas 24 maneras las 3 personas que quieren estar juntas se pueden acomodar de 3! = 6 maneras diferentes, entonces en total hay 4!(3!) = 144 maneras diferentes de acomodar a las 6 personas con la restricción pedida.

c) Se procede similar al inciso anterior considerando que las dos personas quieren estar siempre juntas, entonces tendríamos 4 personas sin preferencia alguna y un paquete de las 2 que quieren estar juntas, pero estas dos personas se pueden acomodar de 2 maneras diferentes, entonces hay 5!(2!) = 240 maneras en que siempre están juntas, si quitamos estas al número total de maneras en que se pueden acomodar las 6 personas en la fila, me quedo con el número de maneras en que nunca están juntas estas dos personas, es decir, la solución al problema esta dada por, 720-240 = 480 maneras.

4._ El número de formas en que pueden acomodarse n objetos distintos en un círculo es $(n-1)!$

a) Presenta un argumento que justifique esta fórmula.

b) ¿De cuántas maneras pueden montarse 5 turquesas en un brazalete de plata?

Solución

a) Se fija un objeto cualquiera en una posición del circulo y de ahí se acomodan los $(n-1)$ objetos restantes.

b) 4! = 4(3)(2)(1) = 24 maneras de montar las 5 turquesas.

5._ ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos pueden formarse con los números 3, 4, 7, 8 y 9 si se desea que sean mayores que 500 y que no se repitan los dígitos?

Solución

Para que el número sea mayor que 500 debe comenzar con 7, 8 o 9 y como no se pueden repetir, el siguiente dígito puede ser cualquiera de los 4 números que quedan y el tercer dígito cualquiera de los 3 números restantes.

(3)(4)(3) = 36 números.

6._ ¿Cuántos números pares de tres dígitos se pueden formar con los números 1, 2, 5, 6, 9 si sólo es posible utilizar cada uno de estos una sola vez?

Solución

Para que el número sea par debe terminar con 0 o con par, es decir sólo hay dos opciones: 2 o 6. Los dos primeros números pueden ser entonces cualquiera de los 4 y luego cualquiera de los 3 que quedan. (4)(3)(2) = <u>24 números pares con tres dígitos no repetidos.</u>

7._ ¿Cuántos números telefónicos diferentes de siete dígitos se pueden formar si el primer dígito no puede ser cero?

Solución

No hay restricción sobre las repeticiones así que el número pedido es $\underline{9(10)^6}$

1.3 Axiomas de probabilidad.

Definición:
Sea S un espacio muestral asociado a un experimento y A un evento cualquiera de S, **la probabilidad del evento** A es una función que asigna a A un número real $P(A)$ con las siguientes propiedades:
i) $0 \le P(A) \le 1$
ii) $P(S) = 1$
iii) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son eventos mutuamente excluyentes en S entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

iv) Si $A_1, A_2, ...$ es una secuencia numerable de eventos mutuamente excluyentes en S, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Teorema._ Sean A, B y C tres eventos cualesquiera de un espacio muestral S asociado a un experimento, entonces:

i) $P(\varnothing) = 0$
ii) $P(A') = 1 - P(A)$
iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
iv) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
v) $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{k} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<r=3}^{k} P(A_i A_j A_r) + \cdots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)$
vi) Si $A \subset B$ entonces $P(A) \le P(B)$

Demostración:

i) $S \cup \varnothing = S$
$P(S \cup \varnothing) = P(S)$ pero $S\varnothing = \varnothing$

$$P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing) = P(S)$$
$$\therefore P(\varnothing) = P(S) - P(S) = 0 \quad \blacklozenge$$

ii) $S = A \cup A'$ con $AA' = \varnothing$
$$P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$
$$P(A') = P(S) - P(A)$$
$$\therefore\ P(A') = 1 - P(A) \quad \blacklozenge$$

iii) Observa que $\quad A = AB' \cup AB$ y $(AB')(AB) = \varnothing$

$\quad B = AB \cup A'B$ y $(AB)(A'B) = \varnothing$

entonces $\quad P(A) = P(AB') + P(AB) \qquad (1)$

$\quad P(B) = P(AB) + P(A'B) \qquad (2)$

También $\quad A \cup B = AB' \cup AB \cup A'B$ y los tres eventos son mutuamente excluyentes

$\quad \therefore P(A \cup B) = P(AB') + P(AB) + P(A'B) \qquad (3)$

Despejando $P(AB')$ de (1) y $P(A'B)$ de (2) y sustituyendo en (3)

$$P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(AB) + P(B) - P(AB)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad \blacklozenge$$

iv) Consideramos la unión de A y B como un solo evento y utilizamos ii) las veces que sea necesario.
$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \cup C] &= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B)C] \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P[(AC) \cup (BC)] \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - [P(AC) + P(BC) - P(ABC)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

v) Tareita. Sugerencia: Utilizar el método de inducción matemática.

vi) Observa que si $A \subset B$ entonces $B = A \cup A'B$ pero $A \cap A'B = \varnothing$

$$P(B) = P(A) + P(A'B) \quad \text{como } P(A'B) \geq 0$$

Se tiene que si $P(A'B) = 0 \quad \therefore\ P(A) = P(B)$

si $P(A'B) > 0 \quad \therefore P(A) < P(B) \quad \blacklozenge$

Recuerda: Si el conjunto A tiene a elementos se dice que la cardinalidad de A es a y se escribe $\#(A) = a$.

Definición: La probabilidad del evento A definido en el espacio muestral S está dada por

$$\boxed{P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}}$$

Ejemplos:

1._ La probabilidad de que Juan apruebe el curso de probabilidad es $\frac{2}{3}$ y la probabilidad de que apruebe el curso de estadística es $\frac{4}{9}$. Si la probabilidad de aprobar ambos cursos es $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan ...
a) Apruebe cuando menos uno de estos cursos?
b) Repruebe probabilidad?
c) Repruebe las dos materias?

Solución

Sean los eventos p: Juan aprueba el curso de probabilidad.
e: Juan aprueba el curso de estadística.

Datos: $P(p)=\frac{2}{3}$, $P(e)=\frac{4}{9}$ y $P(pe)=\frac{1}{4}$

a) $P(p\cup e)=P(p)+P(e)-P(pe)=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\underline{\frac{31}{36}}$

b) $P(p')=1-P(p)=1-\frac{2}{3}=\underline{\frac{1}{3}}$

c) $P(p'e')=P(p\cup e)'=1-P(p\cup e)=1-\frac{31}{36}=\underline{\frac{5}{36}}$

2._ Se construye un dado de manera que el 1 y el 2 ocurran con el doble de la frecuencia que se presenta el 5, el cual ocurre con una frecuencia 3 veces superior al 3, al 4 o al 6. Si se lanza una vez, encuentra la probabilidad de que:
a) El número sea par.
b) El número sea 4.
c) El número sea mayor que 4.

Solución

Si a es el número de veces que cae el número 5 tendríamos que la ocurrencia de cada cara del dado está dada por

1	2	3	4	5	6
$2a$	$2a$	$a/3$	$a/3$	a	$a/3$

Al multiplicar por 3 para evitar los quebrados, tenemos que el número total de lanzamientos es
$6a+6a+a+a+3a+a=18a$.

a) $P(par)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{6a+a+a}{18a}=\frac{8a}{18a}=\underline{\frac{4}{9}}$

b) $P(4)=\dfrac{a}{18a}=\underline{\dfrac{1}{18}}$

c) $P(5 \text{ o } 6)=P(5)+P(6)=\dfrac{3a}{18a}+\dfrac{a}{18a}=\underline{\dfrac{2}{9}}$

Observa que también pudimos razonar de la manera siguiente:

Suponemos que la probabilidad de ocurrencia del 3, del 4 y del 6 es p, entonces la probabilidad de ocurrencia del 5 es $3p$ y por lo tanto el 1 y el 2 tienen probabilidad de ocurrencia de $6p$.
Sumando la probabilidad de ocurrencia del uno al seis se obtiene la unidad, es decir

$$\begin{aligned}1&=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)\\&=6p+6p+p+p+3p+p=18p\end{aligned}$$

Entonces $p=\dfrac{1}{18}$. Así por ejemplo para resolver el inciso a) tenemos que

$$P(par)=P(2)+P(4)+P(6)=6p+p+p=8p=8\left(\frac{1}{18}\right)=\frac{4}{9}$$

3._ Se está realizando la inspección final de aparatos de televisión después del ensamble. Se identifican tres tipos de defectos como críticos, mayores y menores y una empresa de envíos por correo los clasifica en C, M o m respectivamente. Se analizan los datos con los siguientes resultados:
Aparatos que sólo tienen defectos críticos 2%.
Aparatos que sólo tienen defectos mayores 5%.
Aparatos que sólo tienen defectos menores 7%.
Aparatos que sólo tienen defectos críticos y mayores 3%.
Aparatos que sólo tienen defectos críticos y menores 4%.
Aparatos que sólo tienen defectos mayores y menores 3%.
Aparatos que tienen los tres tipos de defectos 1%.

a) ¿Qué porcentaje de los aparatos no tienen defectos?
Los aparatos con defectos críticos o mayores (o ambos) deben manufacturarse nuevamente.
b) ¿Qué porcentaje corresponde a esta categoría?

Solución

Hacer un diagrama de Venn y poner mucho cuidado con la palabra "sólo".
a) 75% no tienen defectos.
b) 18% de los aparatos deben manufacturarse nuevamente.

4._ Considera los eventos A y B tales que $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$. Determina el valor de $P(BA')$ para cada una de las siguientes condiciones: a) A y B son disjuntos, b) A está contenido en B y c) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

Solución

a) Si los eventos son disjuntos $BA'=B$ entonces $P(BA')=P(B)=\underline{\frac{1}{2}}$

b) Si $A\subset B$ entonces $P(BA')=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\underline{\frac{1}{6}}$

c) Si los conjuntos se intersectan, entonces $P(BA')=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{4-1}{8}=\underline{\frac{3}{8}}$

5._ Cuatro pelotas con los números 1, 2, 3 y 4 se colocan en una bolsa, se mezclan y se sacan una por una ¿Cuál es la probabilidad de que salgan justo en ese orden?

Solución

Primero necesito contar de cuantas manera pueden salir las 4 bolitas, como están numeradas esto ocurre de $4!=24$ maneras de las cuales sólo una de esas maneras sigue el orden deseado, por lo tanto

$$P(1,2,3,4)=\underline{\frac{1}{24}}$$

6._ En una montaña hay 5 rutas para subir y 5 rutas para bajar de la cima. ¿Cuál es la probabilidad de que dos conocidos se encuentren si uno sube y el otro baja?

Solución

El que sube puede hacerlo por cualquiera de las 5 rutas pero por cada una de estas, el que baja tiene 5 opciones también, por lo tanto el número total de maneras en que uno puede subir y el otro bajar es 25, de las cuales puede que ambos coincidan en la ruta 1, en la ruta 2, en la ruta 3, en la ruta 4 o bien en la ruta 5, por lo tanto:

$$P(coincidan)=\frac{5}{25}=\underline{\frac{1}{5}}$$

7._ Un ingeniero de una fábrica de microcircuitos inspeccionará un lote de obleas de silicio para tratar de encontrarles defectos. Supón que hay cuatro circuitos integrados defectuosos en un recipiente que contiene 20 obleas. Para esa inspección se seleccionan 2 obleas al azar. Calcula la probabilidad de que:
a) ninguna de ellas tenga defectos.
b) Por lo menos una de las 2 no tenga defectos.

Solución

a) Hay 4 defectuosas y 16 buenas de un total de 20 obleas.

El número total en que se pueden seleccionar 2 de las 20 obleas está dado por
$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{18!(19)(20)}{2!18!} = 19(10) = 190$$

Queremos que ninguna tenga defecto, por lo tanto queremos contar las maneras en que podemos seleccionar 2 de las 16 obleas buenas

$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{14!(15)(16)}{2!14!} = 15(8) = 120$, entonces.

$$P(2\text{ buenas}) = \frac{120}{190} = \frac{12}{19} = \underline{0.6316}$$

b) Por lo menos una de las 2 sin defecto, significa 1 buena o 2 buenas, ya tenemos la probabilidad de tener 2 buenas, ahora necesitamos la probabilidad de 1 buena y luego sumamos ya que estos eventos son disjuntos.

¿De cuántas maneras puedo tener 1 buena y 1 mala?

$$\binom{16}{1}\binom{4}{1} = 16(4) = 64$$

$$P(1\text{ buena}) = \frac{64}{190} = \frac{32}{95}$$

Entonces $P(\text{almenos 1 buenas}) = P(1\text{ buena}) + P(2\text{ buenas}) = \frac{32}{95} + \frac{12}{19} = \frac{32+60}{95} = \frac{92}{95} = \underline{0.9684}$

1.4 PROBABILIDAD CONDICIONAL.

La probabilidad de que ocurra un evento B cuando se sabe que ya ocurrió el evento A se denomina probabilidad condicional y se denota por $P(B \mid A)$.

Definición: La **probabilidad condicional de** B **dado** A está dada por $\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(BA)}{P(A)}}$ con $P(A) > 0$.

Observación:

1) Si $P(A)=0$ entonces la probabilidad condicional no está definida.
2) La probabilidad condicional cumple las propiedades que hemos visto para la probabilidad de un evento pero ahora el espacio muestral que antes era S se ha reducido al evento A. Así por ejemplo se tiene que:

i) $P(B \mid A)+P(B' \mid A)=1$

ii) $P(A \cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

Demostración:

i) $$P(B|A)+P(B'|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}+\frac{P(B'A)}{P(A)}=\frac{P(BA)+P(B'A)}{P(A)}=\frac{P(BA\cup B'A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1 \quad \blacklozenge$$

ii) $$P(A\cup B|C)=\frac{P[(A\cup B)C]}{P(C)}=\frac{P(AC\cup BC)}{P(C)}=\frac{P(AC)+P(BC)-P(ABC)}{P(C)}$$
$$=\frac{P(AC)}{P(C)}+\frac{P(BC)}{P(C)}-\frac{P(ABC)}{P(C)}=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$$

Ejemplos:

1._ S es la población de egresados de la primera generación de la ESCOM, se clasifican según su condición de sexo y estado de ocupación como se muestra en la tabla siguiente.

	Empleado	Desempleado	Total
Masculino	460	40	500
Femenino	140	260	400
Total	600	300	900

Se va a invitar a uno de estos egresados aleatoriamente para que dé un seminario sobre las oportunidades que los ingenieros egresados de la ESCOM tienen en el campo laboral.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el invitado sea hombre si se sabe que tiene empleo?
b) Dado que la elegida es una mujer ¿Cuál es la probabilidad de que esté desempleada?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el invitado no tenga empleo si se sabe que es un hombre?

Solución

Sean los eventos H: el elegido es un hombre, M: el elegido es una mujer, E: el elegido tiene empleo y D: el elegido está desempleado.
Observa que hay dos maneras de resolver el problema:

i) Criterio de espacio reducido._ Consiste en encontrar la probabilidad del evento de interés en base al espacio muestral reducido o condición.

a) El espacio muestral reducido se compone únicamente de los egresados empleados. De los cuales me interesan los hombres, en este espacio muestral reducido hay 460 hombres, por lo tanto,

$$P(H \mid E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30} = \underline{0.766}$$

ii) Definición de probabilidad condicional._ En base al espacio muestral original compuesto por todos los egresados de la primera generación de la ESCOM.

$$P(H \mid E) = \frac{P(HE)}{P(E)} = \frac{460/900}{600/900} = \frac{460}{600} = \frac{23}{30} = \underline{0.766}$$

b) $P(D \mid M) = \dfrac{P(DM)}{P(M)} = \dfrac{260/900}{400/900} = \dfrac{260}{400} = \dfrac{13}{20} = \underline{0.65}$

c) $P(D \mid H) = \dfrac{P(DH)}{P(H)} = \dfrac{40/900}{500/900} = \dfrac{40}{500} = \dfrac{2}{25} = \underline{0.08}$

2._ La población de la ciudad X es 40% masculina y 60% femenina. Si el 50% de los hombres fuman y 30% de las mujeres fuman. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hombre?

Solución

Sean los eventos *M*: masculino, *F*: femenino y *s*: fumador

Datos: $P(M) = 0.4$, $P(F) = 0.6$ $P(s \mid M) = 0.5$ $P(s \mid F) = 0.3$

Observa que:

i) $P(s \mid M) = \dfrac{P(sM)}{P(M)} \therefore P(sM) = P(s \mid M)P(M)$

ii) $P(s \mid F) = \dfrac{P(sF)}{P(F)} \therefore P(sF) = P(s \mid F)P(F)$

iii) $s = sM \cup sF$ por ser disjuntos tenemos que

$P(s) = P(sM) + P(sF) = P(s \mid M)P(M) + P(s \mid F)P(F)$

La probabilidad que me piden es:

$$P(M \mid s) = \frac{P(Ms)}{P(s)} = \frac{P(s \mid M)P(M)}{P(s \mid M)P(M) + P(s \mid F)P(F)} = \frac{0.5(0.4)}{0.5(0.4) + 0.3(0.6)} = \underline{0.526}$$

3._ Se tienen 2 urnas cada una con 2 cajones. La urna 1 tiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar y de esta se escoge un cajón al azar, se saca la moneda y se observa que es de oro ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la urna 2?

Solución

u_1	u_2
o	o
p	o

Sean los eventos o: la moneda es de oro, u_1: urna 1 y u_2:urna 2.

Datos:

$$P(u_1) = P(u_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(o \mid u_1) = \frac{1}{2} \text{ y } P(o \mid u_2) = 1$$

Observa que el evento "la moneda es de oro" se puede ver como la unión de los eventos "es de oro de la urna 1" y "es de oro de la urna 2", lo cual representamos mediante la expresión:

$$o = ou_1 \cup ou_2 \quad \text{es decir} \quad P(o) = P(ou_1) + P(ou_2)$$
$$= P(o \mid u_1)P(u_1) + P(o \mid u_2)P(u_2)$$

Utilizamos el hecho de que $P(o \mid u_2) = \dfrac{P(ou_2)}{P(u_2)}$ despejando $P(ou_2) = P(o \mid u_2)P(u_2)$

Entonces

$$P(u_2 \mid o) = \frac{P(u_2 o)}{P(o)} = \frac{P(o \mid u_2)P(u_2)}{P(o \mid u_1)P(u_1) + P(o \mid u_2)P(u_2)}$$

$$= \frac{1\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \underline{\frac{2}{3}}$$

4._ A un sospechoso se le aplica un suero de la verdad que se sabe es confiable en 90% cuando la persona es culpable y en 99% cuando la persona es inocente. En otras palabras, el 10% de los culpables se considera inocente cuando se usa el suero y el 1% de los inocentes se juzga culpable. Si el sospechoso se escogió de un grupo del cual sólo 5% ha cometido alguna vez un crimen y el suero indica que la persona es culpable. ¿Cuál es la probabilidad de que sea inocente?

Solución

Sean los eventos c: culpable, c': inocente,
s: se dice inocente tomando el suero s': se dice culpable tomando el suero.

Datos: $P(s \mid c) = 0.1 \quad \therefore P(s' \mid c) = 0.9$

$P(s' \mid c') = 0.01$

$P(c) = 0.05 \quad \therefore P(c') = 0.95$

$$P(c' \mid s') = \frac{P(c's')}{P(s')} = \frac{P(s' \mid c')P(c')}{P(s' \mid c')P(c') + P(s' \mid c)P(c)} = \frac{0.01(0.95)}{0.01(0.95) + 0.9(0.05)} = \underline{0.174}$$

5._ Se conduce una investigación detallada de accidentes aéreos. La probabilidad de que un accidente por falla estructural se identifique correctamente es 0.9 y la probabilidad de que un accidente que no se debe a una falla estructural se identifique en forma incorrecta como un accidente por falla estructural es 0.2. Si el 25% de los accidentes aéreos se debe a fallas estructurales, determina la probabilidad de que un accidente aéreo que se ha identificado como debido a una falla estructural en realidad haya ocurrido por una falla de este tipo.

Solución

Sean los eventos *e*: accidente por falla estructural y *E*: se identifica como falla estructural.
Datos:

$P(E \mid e) = 0.9$

$P(E \mid e') = 0.2$

$P(e) = 0.25 \quad \therefore P(e') = 0.75$

Entonces

$$P(e \mid E) = \frac{P(eE)}{P(E)} = \frac{P(E \mid e)P(e)}{P(E \mid e)P(e) + P(E \mid e')P(e')} = \frac{0.9(0.25)}{0.9(0.25) + 0.2(0.75)} = \underline{0.6}$$

6._ Dos bolas se extraen de una urna que contiene *m* bolas numeradas de 1 a *m*. Si la primera bola tiene el número 1 se conserva y se regresa en caso contrario. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída tenga el número 2?

Solución

Observa que la segunda bola puede tener el número 2 de dos maneras diferentes y excluyentes, puede que la primera tenga el número 1 y la segunda el número 2 o bien puede ser que la primera tenga un número diferente de 1 y la segunda bola tenga el número 2.

Sean los eventos:

B_1 : la primera bola tiene el número 1.

B_1' : la primera bola tiene un número diferente de 1.

b_2 :: la segunda bola tiene el número 2.

El evento de interés puede verse como la unión de dos eventos disjuntos;

$$
\begin{aligned}
b_2 &= B_1 b_2 \cup B_1' b_2 \\
P(b_2) &= P(B_1 b_2 \cup B_1' b_2) \\
&= P(B_1 b_2) + P(B_1' b_2) \\
&= P(B_1)P(b_2|B_1) + P(B_1')P(b_2|B_1') \\
&= \frac{1}{m}\frac{1}{m-1} + \frac{m-1}{m}\frac{1}{m} \\
&= \frac{1}{m(m-1)} + \frac{m-1}{m^2} \\
&= \frac{m+(m-1)^2}{m^2(m-1)} \\
&= \frac{m+m^2-2m+1}{m^2(m-1)} \qquad \therefore \ \underline{P(b_2) = \frac{m^2-m+1}{m^2(m-1)}}
\end{aligned}
$$

7._ Muestra que si A, B y C son tres eventos tales que $P(ABC) \neq 0$ y $P(C \mid AB) = P(C \mid B)$ entonces $P(A \mid BC) = P(A \mid B)$.

<u>Solución</u>

Se tienen que $P(C \mid AB) = P(C \mid B)$ usando la definición de probabilidad condicional

$$P(C \mid AB) = \frac{P(ABC)}{P(AB)} = \frac{P(BC)}{P(B)} = P(C \mid B)$$

$$\frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A \mid BC) = P(A \mid B)$$

1.5 EVENTOS INDEPENDIENTES Y REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN.

Ejemplos:

1._ Considera una caja con 4 bolitas etiquetadas del 1 al 4. Se saca una de ellas al azar y se observa el número de la etiqueta. Con los eventos A y B definidos a continuación.

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2\} \qquad P(A) = \frac{1}{2}$

$B = \{1, 3\} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$

$AB = \{1\} \qquad P(AB) = \frac{1}{4}$

Entonces $\quad P(B \mid A) = \dfrac{P(BA)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \underline{\dfrac{1}{2}}$

Observa que $\quad P(B) = P(B \mid A)$

2._ De los viajeros que llegan a un aeropuerto pequeño, 60% utilizan aerolíneas importantes, 30% viaja mediante aviones privados, y el resto usa aviones comerciales que no pertenecen a las aerolíneas importantes. De las personas que usan aerolíneas importantes 50% viaja por negocios, mientras que 60% de los pasajeros de los aviones privados y 90% de los que usan otras aeronaves comerciales también viaja por negocios. Supón que se selecciona al azar una persona que llega a este aeropuerto. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona
a) viaje por negocios?
b) Viaje por negocios en avión privado?
c) Haya viajado en avión privado dado que lo hace por negocios?

Solución

Sean los eventos

I: viaja en aerolínea importante.
p: viaja en avión privado.
c: viaja en aerolínea comercial.
n: viaja por negocios.

Datos:

$P(I) = 0.6 \qquad P(n \mid I) = 0.5$
$P(p) = 0.3 \qquad P(n \mid p) = 0.6$
$P(c) = 0.1 \qquad P(n \mid c) = 0.9$

a) La persona puede viajar por negocios en cualquiera de las tres aerolíneas, y no pude viajar en dos o más aerolíneas a la vez por lo tanto son eventos disjuntos y se tiene que:

$$\begin{aligned} P(n) &= P(nI) + P(np) + P(nc) \\ &= P(n \mid I)P(I) + P(n \mid p)P(p) + P(n \mid c)P(c) \\ &= 0.5(0.6) + 0.6(0.3) + 0.9(0.1) = \underline{0.57} \end{aligned}$$

Observa que $P(n) \neq P(n \mid I)$, $P(n) \neq P(n \mid p)$ y $P(n) \neq P(n \mid c)$

b) $P(np) = P(n \mid p)P(p) = 0.6(0.3) = \underline{0.18}$

c) $P(p \mid n) = \dfrac{P(pn)}{P(n)} = \dfrac{0.18}{0.57} = \dfrac{6}{19} = \underline{0.3158}$

Observa también que $P(p \mid n) \neq P(p)$.

Con los dos ejemplos previos hemos visto que hay casos en donde la ocurrencia de un evento no altera la ocurrencia del otro, como en el ejemplo 1, la probabilidad incondicional (en base al espacio muestral original *S*) y la probabilidad condicional (en base al espacio muestral reducido) son iguales [$P(B) = P(B \mid S) = P(B \mid A)$], si ocurre o no ocurre *A*, la probabilidad de *B* no se altera, es decir *B* no depende de *A,* cuando esto ocurre se dice que A y B son independientes.
Si en cambio la ocurrencia de uno altera la ocurrencia del otro, podemos pensar que hay una dependencia entre ellos como ocurre en el ejemplo 2, y en este caso la probabilidad incondicional y la probabilidad condicional son diferentes.

Definición: Los eventos *A* y *B* son **independientes** si $\boxed{P(B) = P(B \mid A)}$ y se escribe $A \perp B$.

Es decir, la ocurrencia de *A* no influye en la ocurrencia de *B*, pase o no pase *A* la probabilidad de *B* no cambia.

<u>**Observación**</u>: Si $A \perp B$ sabemos que $P(B) = P(B \mid A) = \dfrac{P(BA)}{P(A)} \therefore \boxed{P(BA) = P(B)P(A)}$ es decir, si *A* y *B* son eventos independientes entonces la probabilidad de la intersección de ellos es el producto de las probabilidades individuales.
Generalmente pensamos que si dos eventos son disjuntos o excluyentes entonces son independientes, pero esto no es verdad, considera el siguiente

Ejemplo:

3._ $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2\} \quad \therefore \; P(A) = \dfrac{1}{2}$

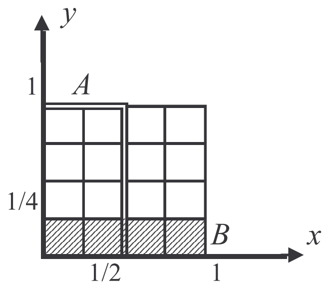
$B = \{3,4\} \quad \therefore \; P(B) = \dfrac{1}{2}$

$AB = \varnothing \;\therefore\; P(AB) = 0 \neq \dfrac{1}{4} = P(A)P(B)$ Los eventos *A* y *B* son disjuntos, pero no independientes.

Nota._ Se dice que los eventos *A*, *B* y *C* son mutuamente independientes si se cumplen todas las condiciones siguientes:
i) $P(AB) = P(A)P(B)$
ii) $P(AC) = P(A)P(C)$
iii) $P(BC) = P(B)P(C)$
iv) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

4._ Sea *S* el cuadrado $0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1,$ en el plano. Considera el espacio de probabilidad uniforme sobre el cuadrado y sean *A* y *B* los eventos:
$A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 0.5,\; 0 \le y \le 1\}$
$B = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 0.25\}$ ¿Son independientes *A* y *B*?

Solución



$AB = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 0.5,\ \ 0 \le y \le 0.25\}$

$P(AB) = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = P(A)P(B)\ \ \therefore\ \ \underline{A \perp B}$

5._ Si $A \perp B$ entonces ¿ $A' \perp B'$?

Solución

$A \perp B$ entonces $P(AB) = P(A)P(B)$

Por las Leyes de D'Morgan se tiene que

$$\begin{aligned} P(A'B') &= P(A \cup B)' \\ &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= [1 - P(A)] - P(B) + P(A)P(B) = P(A') - P(B)[1 - P(A)] \\ &= P(A') - P(B)P(A') = P(A')[1 - P(B)] = P(A')P(B')\ \ \therefore\ \ \underline{A' \perp B'} \end{aligned}$$

6._ La probabilidad de que Tomás esté vivo dentro de 20 años es de 0.7 y la probabilidad de que Nancy esté viva dentro de 20 años es 0.9. Si se asume independencia entre ambos eventos ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos esté vivo dentro de 20 años?

Solución

Sean los eventos *T*: Tomás viva dentro de 20 años y *N*: Nancy viva dentro de 20 años.

$P(T) = 0.7 \qquad P(T') = 1 - P(T) = 0.3 \qquad P(N) = 0.9 \qquad P(N') = 1 - P(N) = 0.1$

Se sabe que $T \perp N$, por lo tanto los complementos también son independientes, y entonces

$$P(T'N') = P(T')P(N') = (0.3)(0.1) = \underline{0.03}$$

7._ Si $A \perp B$ y la probabilidad de que *A* o *B* ocurran es 0.6, mientras que la probabilidad de que *A* ocurra es 0.4. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra *B*?

Solución

Datos: $A \perp B$, $P(A \cup B) = 0.6$, $P(A) = 0.4$ $P(A') = 0.6$

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$= P(A) + P(B)[1 - P(A)] = P(A) + P(B)P(A')$

Entonces $P(B) = \dfrac{P(A \cup B) - P(A)}{P(A')} = \dfrac{0.6 - 0.4}{0.6} = \dfrac{0.2}{0.6} = \underline{0.33}$

8._ Supón que A, B y C son eventos mutuamente independientes y que $P(AB) \neq 0$. Muestra que $P(C \mid AB) = P(C)$

<u>Solución</u>

$$P(C \mid AB) = \frac{P(ABC)}{P(AB)} = \frac{P(AB)P(C)}{P(AB)} = P(C)$$

9._ Supón que se lanzan 3 monedas idénticas y perfectamente balanceadas una sola vez. Sea A_i el evento de que la *i*-ésima moneda cae en cara. Muestra que los eventos A_1, A_2, A_3 son mutuamente independientes.

<u>Solución</u>

El espacio muestral del experimento es

$S =$ {xxx, xcc, cxc, ccx, xxc, xcx, cxx, ccc}

$A_1 =$ {cxc, ccx, cxx, ccc} $\quad P(A_1) = \frac{1}{2}$

$A_2 =$ {xcc, ccx, xcx, ccc} $\quad P(A_2) = \frac{1}{2}$

$A_3 =$ {xcc, cxc, xxc, ccc} $\quad P(A_3) = \frac{1}{2}$

$A_1\ A_2 =$ {ccx, ccc} $\quad P(A_1 A_2) = \frac{1}{4}$

$A_1\ A_3 =$ {cxc, ccc} $\quad P(A_1 A_3) = \frac{1}{4}$

$A_2\ A_3 =$ {xcc, ccc} $\quad P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$

$A_1\ A_2\ A_3 =$ {ccc} $\quad P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{8}$

Se tiene que $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall \quad i \neq j = 1, 2, 3.$

y $P(A_1 A_2 A_3) = \prod_{i=1}^{3} P(A_i)$ entonces <u>los tres eventos son mutuamente independientes</u>.

Usando la definición de probabilidad condicional se tiene que

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad \therefore\ P(AB)=P(A\mid B)P(B)\quad \text{y también}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\quad \therefore\ P(AB)=P(B\mid A)P(A)$$

esto se conoce como Teorema o Ley de la multiplicación de probabilidades y se puede leer como, *la probabilidad de la intersección de dos eventos es igual a la probabilidad condicional de uno de los eventos dado el otro por la probabilidad de la condición. O bien; la probabilidad de la intersección de dos eventos es igual a la probabilidad de uno de los eventos por la probabilidad condicional del otro evento dado el que ya tomamos.*

Teorema de la multiplicación $\boxed{P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A)}$

Este teorema se puede generalizar de la manera siguiente

$$\boxed{P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})}$$

<u>Demostración:</u>

$$P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2\cap\cdots A_{n-1})}{P(A_1A_2\cap\cdots A_{n-2})}\frac{P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_n)}{P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})}\quad \blacklozenge$$

Ejemplo:

10._ La probabilidad de que le apliquen rayos X a una persona que llega a su dentista es de 0.6, la probabilidad de que una persona a la que se le han aplicado rayos X tenga también caries es de 0.3, y la probabilidad de que a alguna persona a la que se le han aplicado rayos X y a la que se le ha curado una caries, se le extraiga también un diente es de 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona que visite a su dentista se le apliquen rayos X, se le cure una caries y se le extraiga un diente?

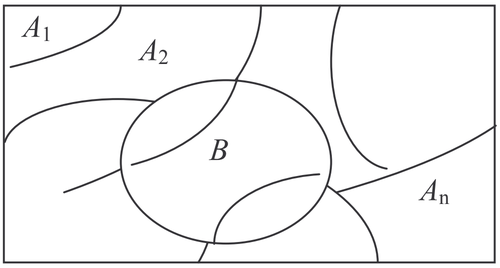
<u>Solución</u>

Sean los eventos *X*: se le aplican rayos X, *C*: tiene caries y *E*: se le extrae un diente.
Datos: $P(X)=0.6$
$P(C\mid X)=0.3$
$P(E\mid XC)=0.1$

Entonces $P(XCE)=P(X)P(C\mid X)P(E\mid XC)=0.6(0.3)(0.1)=\underline{0.018}$

1.6 TEOREMA DE BAYES.

Definición: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes, es decir $A_i A_j = \varnothing \quad \forall\ i \neq j$, tales que $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ se dice que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición de *S*.



Supón que tenemos una partición $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de *S*, un evento posible B $\ (P(B) > 0)$ y que se conocen las probabilidades $P(B \mid A_i)$ y $P(A_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Cómo encontramos $P(B)$?

Observa que $B = BS = B\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} BA_i$

Pero $BA_i \cap BA_j = \varnothing \quad \forall \quad i \neq j = 1, 2, \ldots, n$, por tratarse de una partición de *S*. Entonces:

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} BA_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

Este resultado se conoce como **probabilidad total** de B.

Si ahora tenemos interés en $P(A_i \mid B)$ procedemos usando la definición de probabilidad condicional, la Ley de la multiplicación y la probabilidad total. Así;

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)}}$$

Este resultado se conoce como **Teorema de Bayes**.

Ejemplos:

1._ Cuando los artículos llegan al final de una línea de producción, un supervisor escoge los que deben pasar por una inspección completa, 10% de todos los artículos son defectuosos, 60% de todos los artículos defectuosos y 20% de todos los artículos buenos pasan por una inspección completa. ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo
a) haya pasado por la inspección completa?
b) sea defectuoso dado que pasó por una inspección completa?

Solución

Sean los eventos $D:$ artículo defectuoso.
$I:$ inspección completa.

Datos: $P(D) = 0.1$ $\quad P(D') = 0.9$
$P(I \mid D) = 0.6$
$P(I \mid D') = 0.2$

a) La probabilidad total de evento I está dada por:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Observa que la partición en este problema se compone de dos eventos, que son el artículo es defectuoso o no defectuoso, entonces $n = 2$ y $A_1 = D$, $A_2 = D'$ y el evento de interés es que haya pasado por una inspección completa, es decir $B = I$. Sustituyendo en la ecuación para la probabilidad total del evento de interés tenemos que:

$$P(I) = \sum_{i=1}^{2} P(I \mid A_i)P(A_i) = P(I \mid D)P(D) + P(I \mid D')P(D') = 0.6(0.1) + 0.2(0.9) = \underline{0.24}$$

b) Usando el Teorema de Bayes

$$P(D \mid I) = \frac{P(I \mid D)P(D)}{P(I \mid D)P(D) + P(I \mid D')P(D')} = \frac{0.6(0.1)}{0.24} = \underline{0.25}$$

2._ En cierta región del país se sabe por experiencias pasadas que la probabilidad de elegir a un adulto de más de 40 años con cáncer es de 0.02. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique en forma correcta que una persona tiene cáncer es de 0.78 y la probabilidad de que diagnostique en forma incorrecta que una persona tiene cáncer si no lo tiene es de 0.06.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que diagnostique que una persona tiene cáncer?
b) Si el diagnóstico del doctor es que el paciente tiene cáncer. ¿Cuál es la probabilidad de que en efecto tenga la enfermedad?
c) Y ¿Cuál la probabilidad de que no la tenga?

Solución

Sean los eventos C: tiene cáncer y D: diagnostico de cáncer.

Datos: $P(C)=0.02 \quad P(C')=0.98$
$P(D \mid C)=0.78$
$P(D \mid C')=0.06$

a) Probabilidad total del evento D.

$$P(D)=P(D \mid C)P(C)+P(D \mid C')P(C')=0.78(0.02)+0.06(0.98)=\underline{0.0744}$$

b) $P(C \mid D)=\dfrac{P(D \mid C)P(C)}{P(D)}=\dfrac{0.78(0.02)}{0.0744}=\underline{0.2096}$

c) $P(C' \mid D)=\dfrac{P(D \mid C')P(C')}{P(D)}=\dfrac{0.06(0.98)}{0.0744}=\underline{0.79}$

También $P(C' \mid D)=1-P(C \mid D)=$ 1-0.2096 = $\underline{0.79}$

3._ Cinco urnas llevan los números 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente. La urna i contiene i bolas blancas y $(5-i)$ bolas negras, con i = 1,...,5. Se selecciona al azar una urna y después se sacan sin reposición dos bolas de dicha urna.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas seleccionadas sean blancas?
b) Dado que ambas bolas seleccionadas son blancas ¿Cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado la urna 3?

Solución

Sean los eventos:
u_i : urna i, con $i=1, 2,\ldots,5$.
b_1 : la primera bola es blanca
b_2 : la segunda bola es blanca.

1 blanca	2 blancas	3 blancas	4 blancas	5 blancas
4 negras	3 negras	2 negras	1 negra	0 negras
urna 1	urna 2	urna 3	urna 4	urna 5

a) Dado que la urna 1 sólo tiene una bola blanca las dos bolas pueden ser blancas sólo si provienen de cualquiera de las otras cuatro urnas, es decir, la probabilidad total del evento *dos bolas blancas* está dada por

$$b_1b_2 = b_1b_2u_2 + b_1b_2u_3 + b_1b_2u_4 + b_1b_2u_5$$

$$\therefore \quad P(b_1b_2) = \sum_{i=2}^{5} P(b_1b_2u_i) = \sum_{i=2}^{5} P(u_i)P(b_1|u_i)P(b_2|u_ib_1)$$

$$P(u_i) = \frac{1}{5}$$

$$P(b_1|\ u_2) = \frac{2}{5} \qquad P(b_2|\ u_2b_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(b_1|\ u_3) = \frac{3}{5} \qquad P(b_2|\ u_3b_1) = \frac{2}{4}$$

$$P(b_1|\ u_4) = \frac{4}{5} \qquad P(b_2|\ u_4b_1) = \frac{3}{4}$$

$$P(b_1|\ u_5) = 1 \qquad P(b_2|\ u_3b_1) = 1$$

$$P(b_1b_2) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\frac{2}{4} + \frac{4}{5}\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{1}{20}(2+6+12+20) = \frac{40}{5(20)} = \underline{\frac{2}{5}}$$

b) $P(u_3|b_1b_2) = \dfrac{P(b_1b_2|u_3)P(u_3)}{P(b_1b_2)} = \underline{\dfrac{3}{20}}$