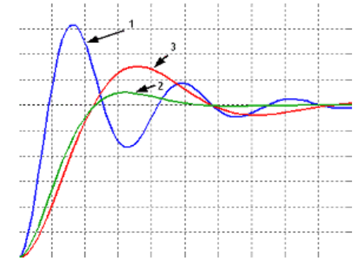
Análisis de Sistemas Lineales

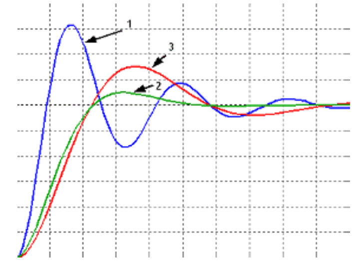
Comportamiento de los sistemas de primer y segundo orden

Contenido



- Funciones típicas del comportamiento dinámico de transmisión en el dominio de t
  - Respuesta al escalón
  - Respuesta al impulso
- Respuesta de lazo cerrado de los sistemas de 1er y 2° orden
- Región deseada en el plano s
- Ejemplo
- Resumen
- Referencias

La respuesta forzada

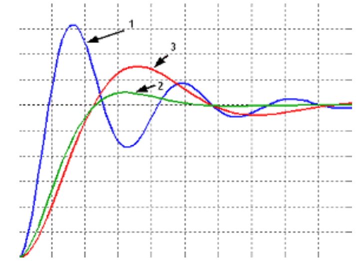


y(t) = f(**u**(t)); $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

- La salida, cuando las condiciones iniciales son cero

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u}(t)$$

La respuesta ante escalón



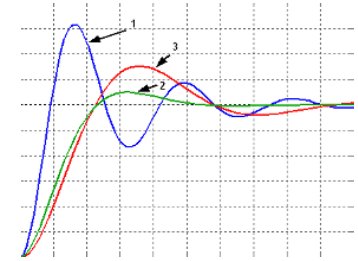
$$\sigma(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

- La respuesta ante el escalón $u(t) = u_0\sigma(t)$

$$\mathbf{y}(t)=\int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}_0 d\tau+\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_0 \qquad \boldsymbol{\varphi}(t)=\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$$

- Si $u_0 = 1$; la respuesta al escalón se llama $\mathbf{h}(t)$
  - $\sigma(t)$: Escalón unitario
  - $\mathbf{h}(t)$: Respuesta al escalón unitario
  - $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t)$

La respuesta ante escalón unitario



$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{B}\,d\tau + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \mathbf{D}$$

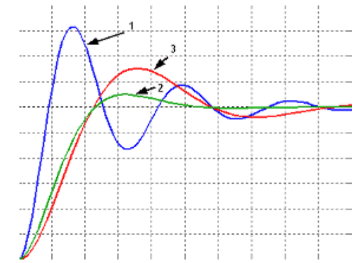
$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

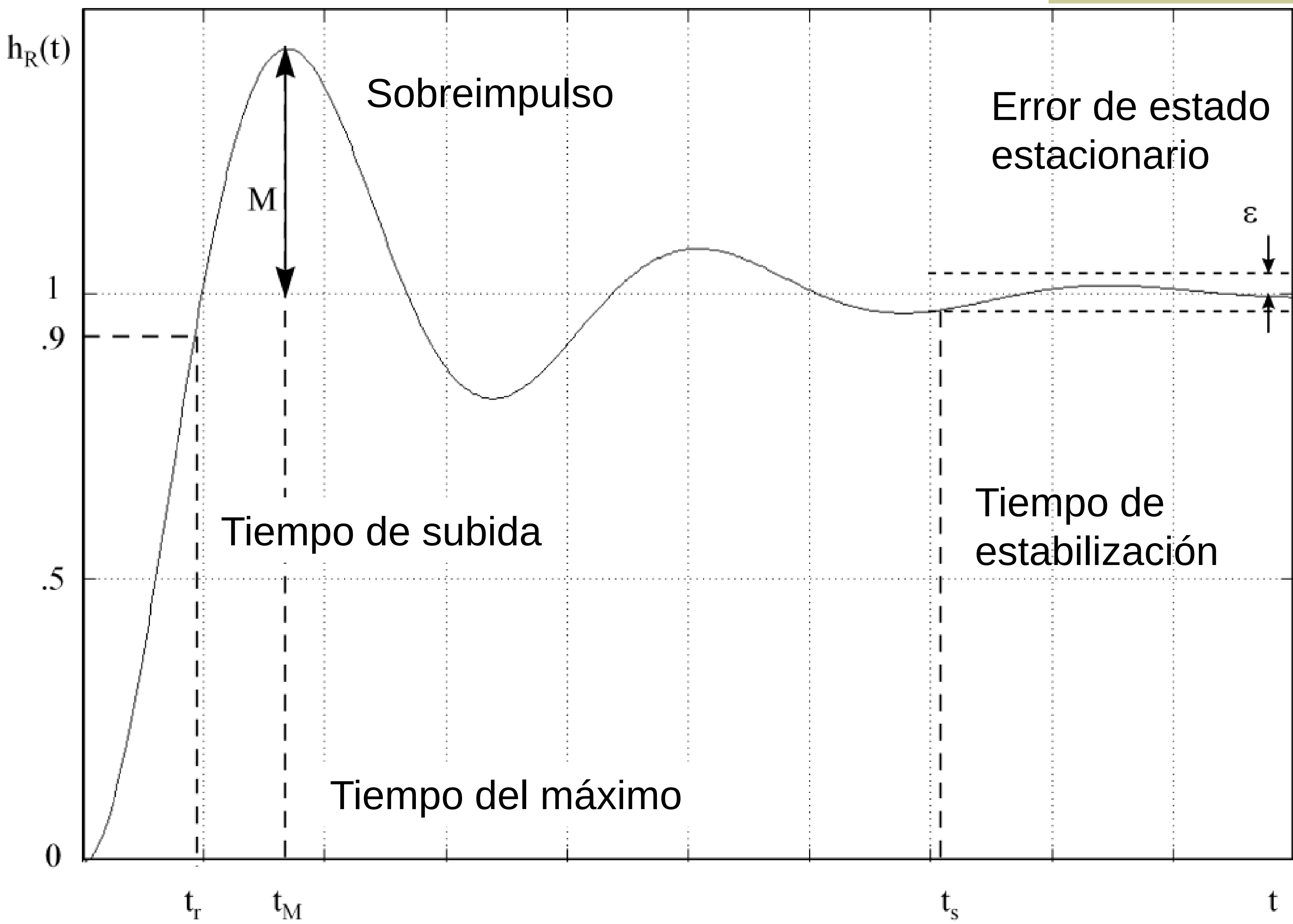
- La ganancia estática

$$\mathbf{K_s} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{h}(t)$$

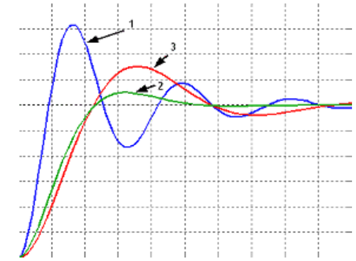
$$\mathbf{K_s} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

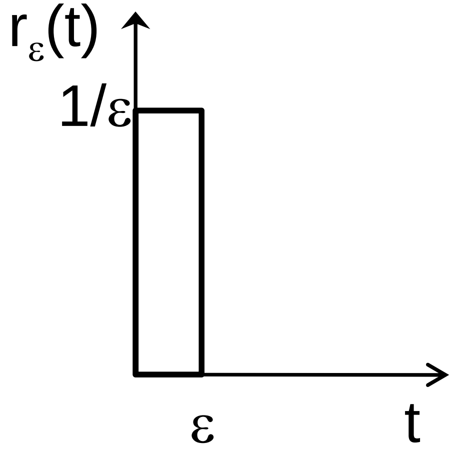
Parámetros importantes de la respuesta ante un escalón





El impulso de Dirac





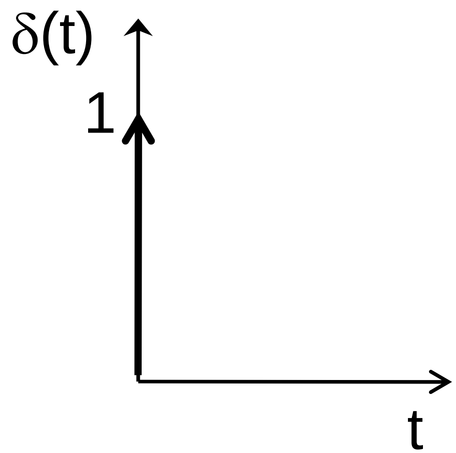
$$r_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Definición y propiedades del impulso de Dirac $\delta(t)$:

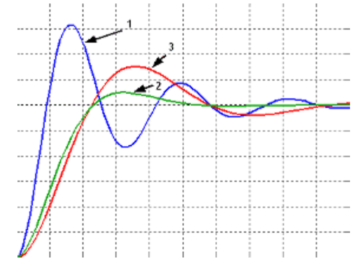
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1$$

$$\int_0^t \delta(\tau)\,d\tau = \sigma(t)$$



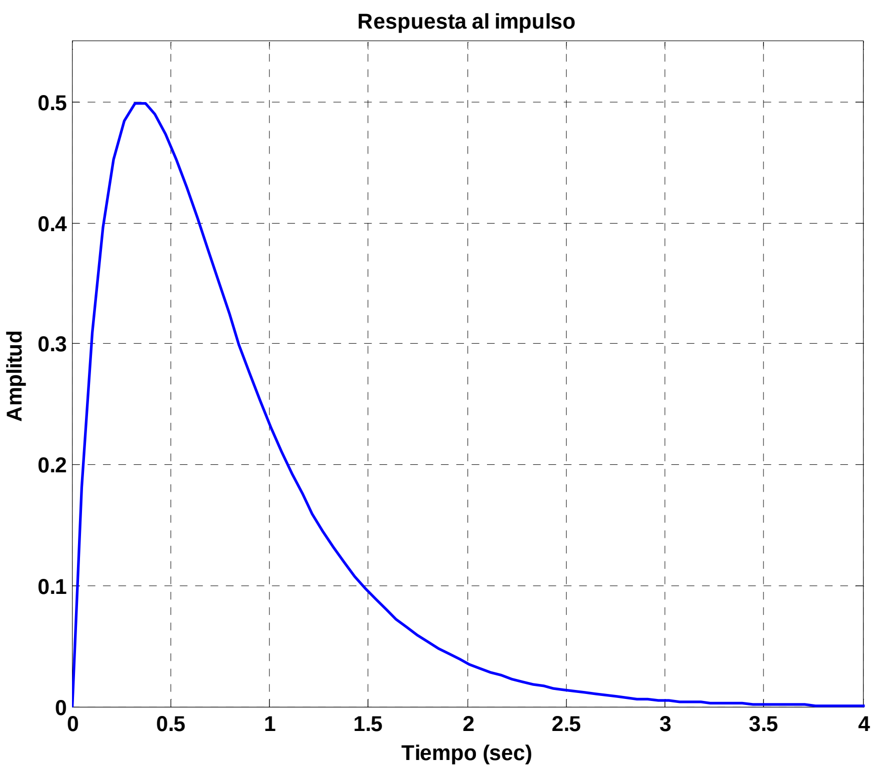
Respuesta al impulso unitario



- **u**(*t*) = δ(*t*)
- **y**(*t*) = **g**(*t*)

$$\mathbf{g}(t) = \int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t)$$

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t)$$

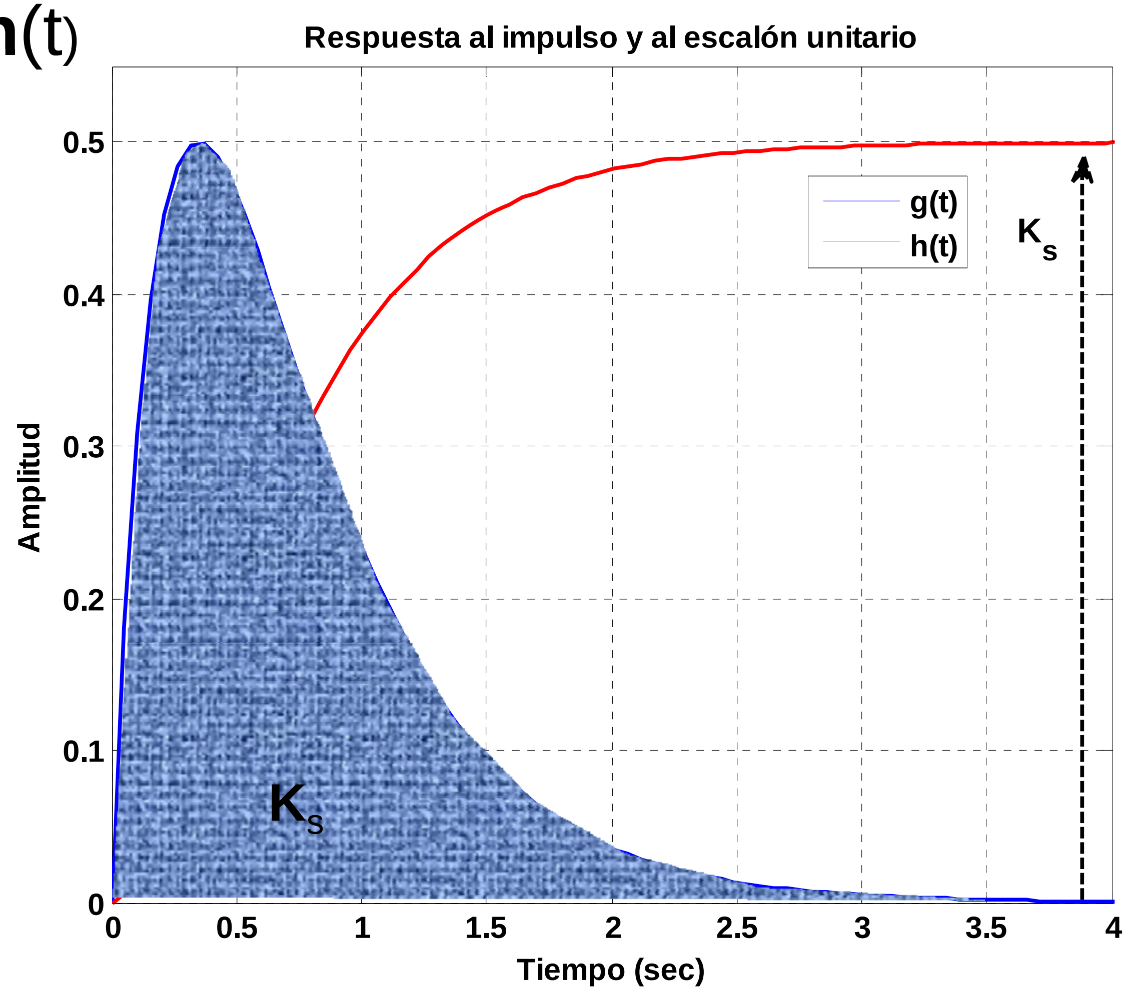


- Cuando **D** es cero, la respuesta al impulso no contiene la parte impulsiva

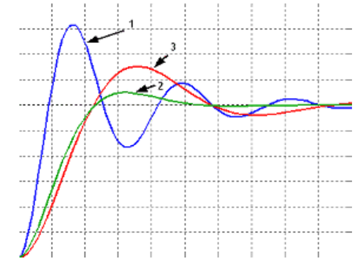
Relación entre respuesta al escalón y al impulso unitarios

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(\tau)\,d\tau$$

$$\mathbf{K_s} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{h}(t) = \int_0^\infty \mathbf{g}(\tau)\,d\tau$$



Relación entre respuesta al escalón y al impulso unitario



- De la respuesta al impulso

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{B} = \mathbf{g}(t) - \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t)$$

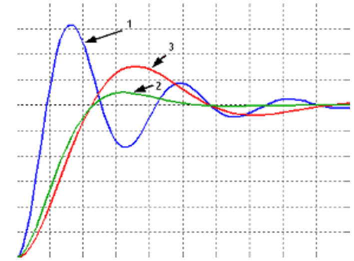
- Sustituimos en

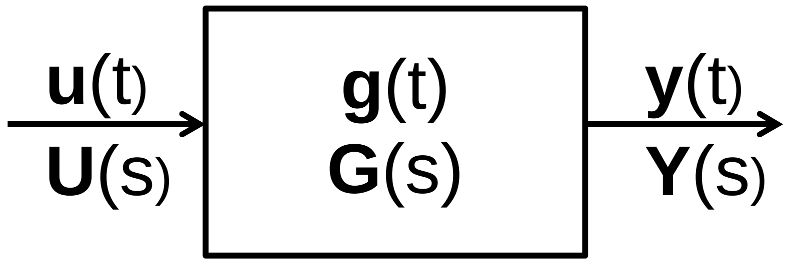
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x_0} + \int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x_0}}_{\substack{\textit{respuesta}\\ \textit{natural}}} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)\,d\tau}_{\substack{\textit{respuesta}\\ \textit{forzada}}}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x_0} + \mathbf{g}(t) * \mathbf{u}(t)$$

Cálculo de la respuesta en el tiempo con G(s)





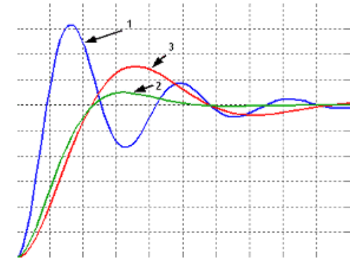
$$\mathbf{h}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\mathbf{G}(s)\cdot\frac{1}{s}\right\}$$

$$\mathbf{K_s} = \lim_{t\to\infty}\mathbf{h}(t) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s\mathbf{G}(s)}{s}\right) = \mathbf{G}(0)$$

- El valor inicial $h(0^+)$

$$\mathbf{h}(0^+) = \lim_{t\to 0^+}\mathbf{h}(t) = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{s\mathbf{G}(s)}{s}\right) = \mathbf{G}(\infty)$$

Pasos para el cálculo de la respuesta en el tiempo con G(s)



1. Cálculo de la transformada de Laplace de la entrada

$$\mathbf{U}(s) = \mathscr{L}\{u(t)\}$$

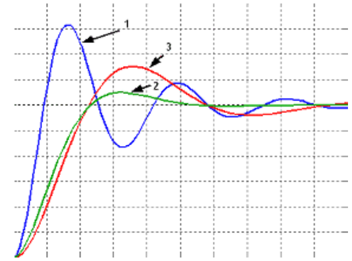
2. Convolución en el dominio de la frecuencia

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

con $$\mathbf{G}(s) = \mathscr{L}\{\mathbf{g}(t)\}$$

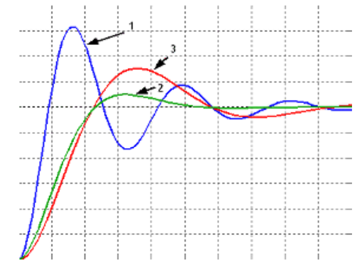
3. Transformada inversa de Laplace

$$\mathbf{y}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{Y}(s)\}$$



La respuesta de lazo cerrado en el tiempo

Introducción

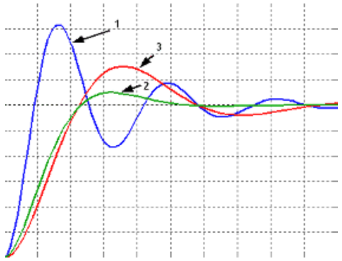


Encontraremos las relaciones entre las principales características de la respuesta en el tiempo del sistema de lazo cerrado:

- sobreimpulso
- tiempo de subida
- tiempo de estabilización
- error de estado estacionario

y la ubicación de los polos en el plano complejo.

Sistemas de primer orden



- La respuesta total tiene una parte natural y otra forzada.

$$\frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_0 \cdot u$$

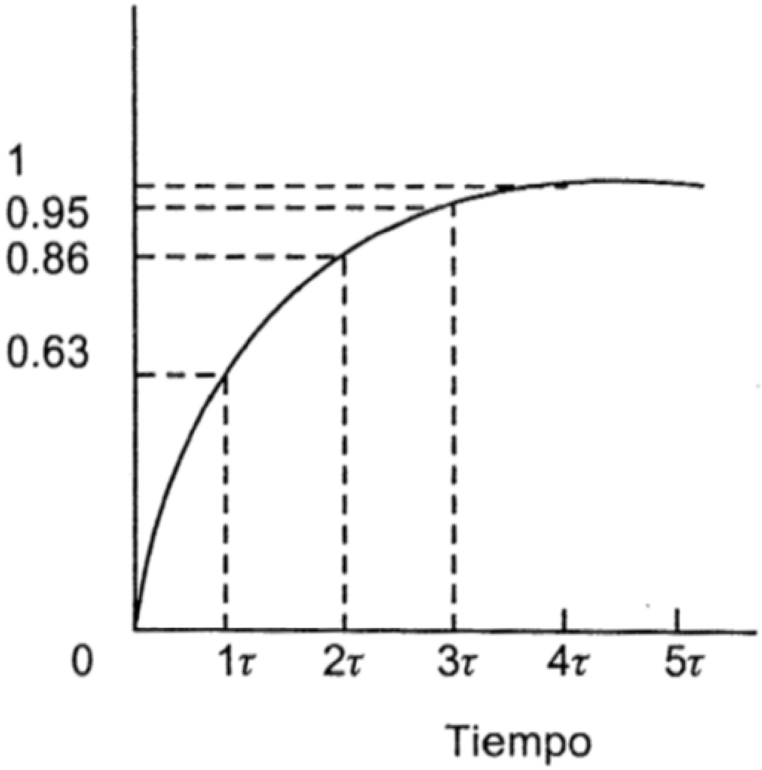
Ecuación de primer orden

- Con una entrada escalón u = σ

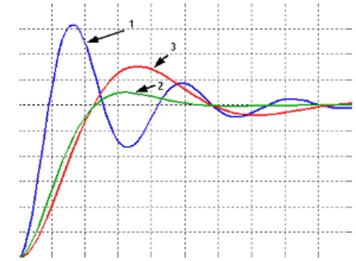
$$y = Ae^{-a_0 t} + \frac{b_0}{a_0}$$

- Si y = 0 para t = 0

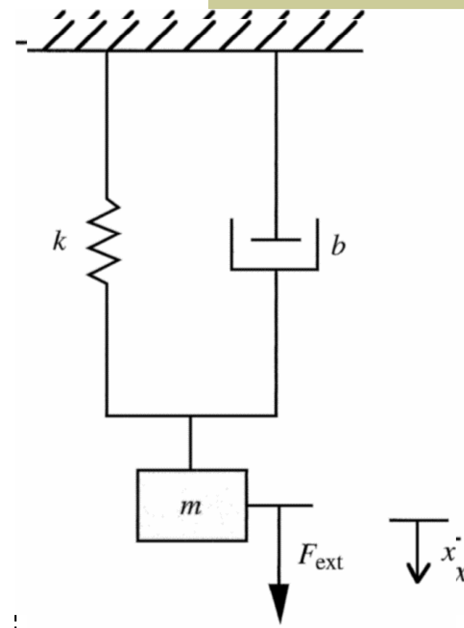
$$y = \frac{b_0}{a_0}(1 - e^{-a_0 t})$$



Sistemas de segundo orden



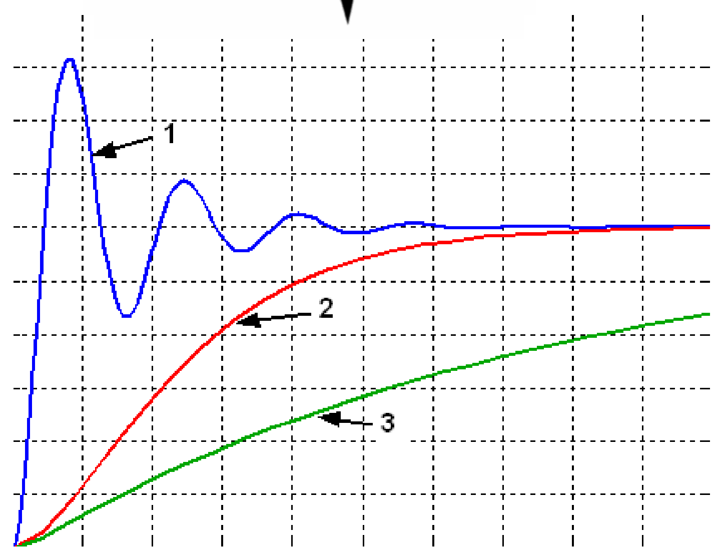
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+k\cdot x=F$$



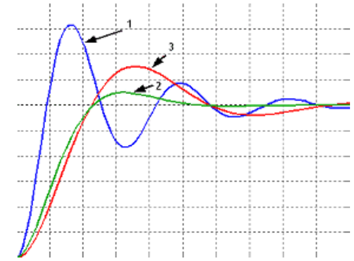
Dependiendo del valor de las raíces del polinomio característico (polos); el sistema puede tener tres tipos de comportamiento:

$$s=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

1. Subamortiguado (ζ<1)
2. Críticamente amortiguado (ζ=1)
3. Sobreamortiguado (ζ>1)



Relación entre el comportamiento temporal y la ubicación de los polos

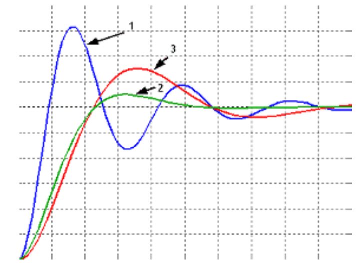


- Para establecer esta relación se parte de que el sistema posee en lazo cerrado un comportamiento aproximado al de un sistema prototipo de segundo orden.

$$\hat{G}_R = \frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n\ s + \omega_n^{\ 2}}$$

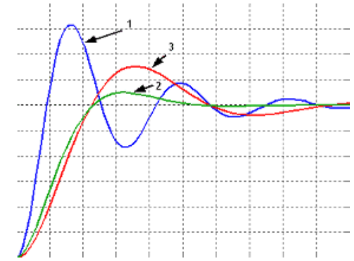
- La aproximación es buena cuando el sistema en lazo cerrado posee un par de polos dominantes.

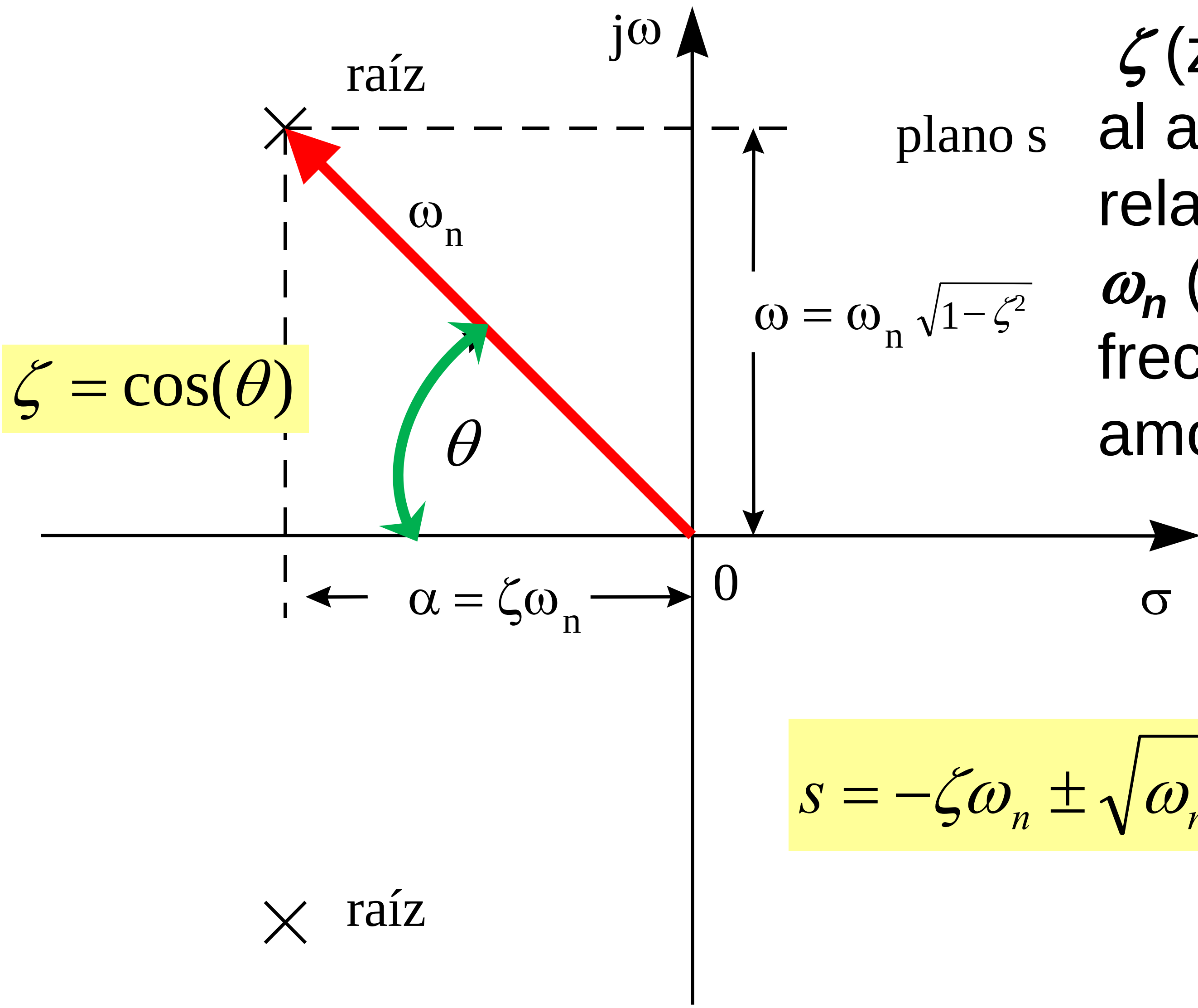
Polos dominantes



- Polos dominantes:
  - Caracterizan fuertemente la respuesta transitoria
  - Se encuentran cerca del eje imaginario y por ello tienen constantes de tiempo mayores que otros polos
- Polos no dominantes:
  - Tienen poca influencia en la respuesta transitoria
  - Sus constantes de tiempo son muy pequeñas, al menos 7 veces menores, comparadas con la de los polos dominantes.

Ubicación de los polos del sistema de segundo orden en el plano s



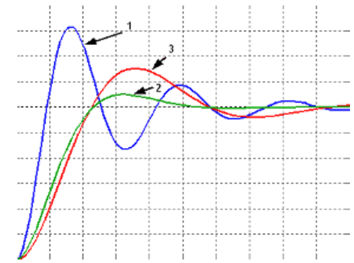


ζ (zeta): Representa al amortiguamiento relativo.

$\boldsymbol{\omega_n}$ (omega_n): Es la frecuencia natural no amortiguada.

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\omega_n{}^2(\zeta^2 - 1)}$$

La respuesta ante escalón



- Aplicamos el escalón R(s) = u_0/s

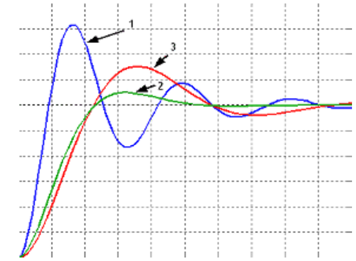
$$Y(s) = R(s)G_R(s) = \frac{u_0}{s} \cdot \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + {\omega_n}^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = u_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + {\omega_n}^2}\right\}$$

$$y(t) = u_0\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot sen(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \theta)\right]$$

$$\theta = \cos^{-1}(\zeta)$$

Encontrando el máximo



- Derivamos *y*(t) e igualamos a cero, para encontrar los tiempos de mínimos y máximos.

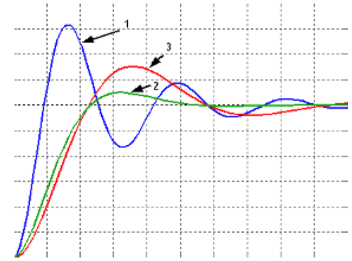
$$\dot{y}(t) = u_0 \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cdot sen(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t) = 0$$

- La soluciones, están dadas por: $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t = n\pi$

- El máximo es el primero que se produce, n = 1, t = T_m

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Encontrando el sobreimpulso



- Evaluando *y*(t) en T_m obtenemos el máximo

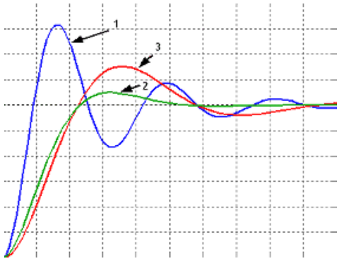
$$y(t)_{máx} = u_0\left(1 + e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}\right)$$

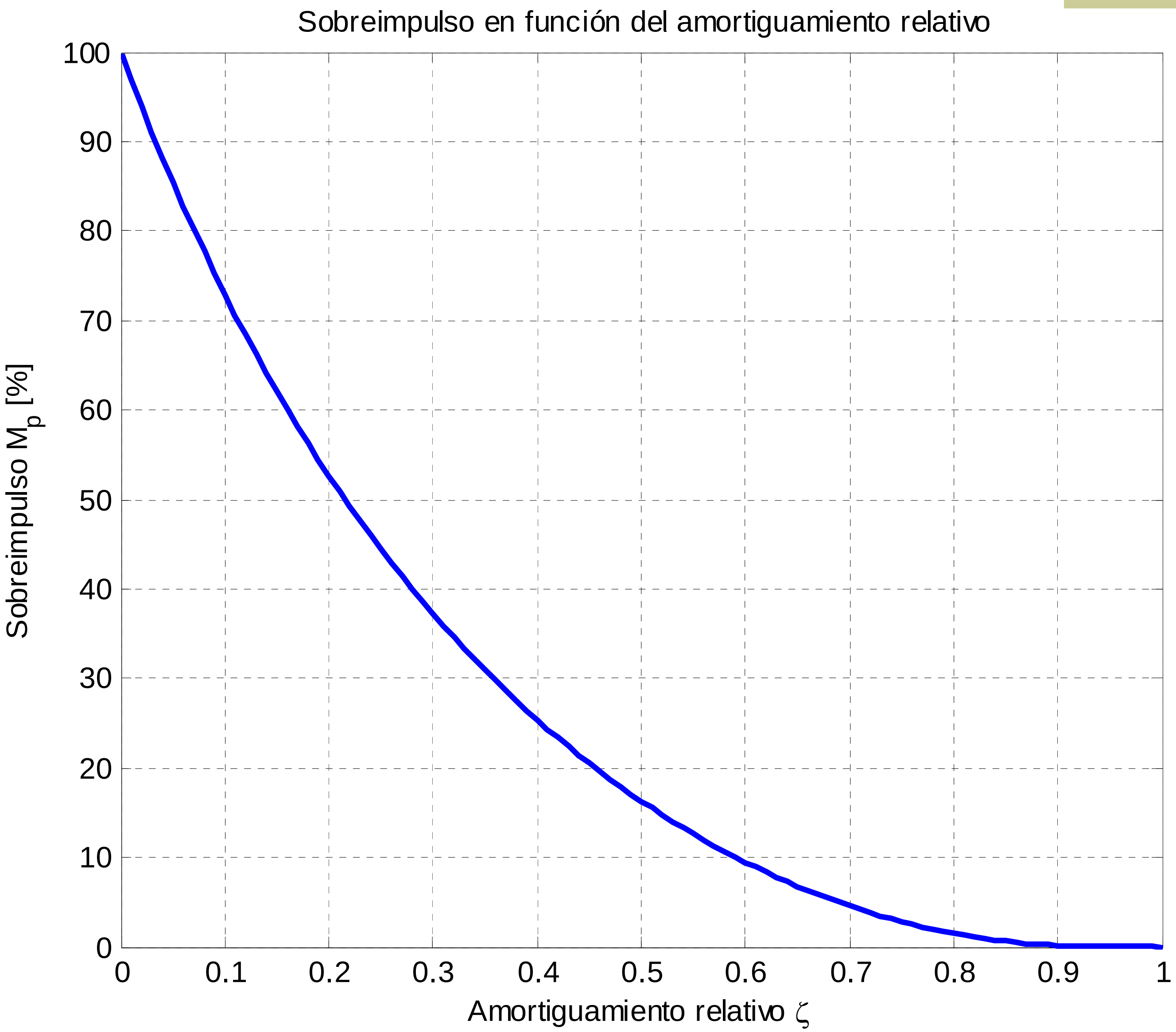
- El sobreimpulso está definido como:

$$M_P = \frac{y(t)_{máx} - \lim\limits_{t\to\infty} y(t)}{\lim\limits_{t\to\infty} y(t)} = \frac{1 + e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} - 1}{1}$$

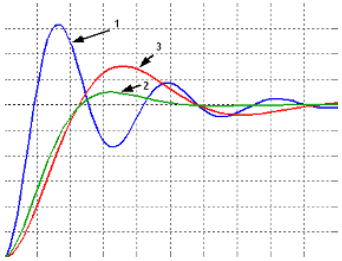
$$\boxed{M_P = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}}$$

Sobreimpulso vrs. ζ





Encontrando el tiempo de estabilización



- El tiempo de estabilización del 2%, cuando la respuesta se mantiene dentro del 2% del valor final

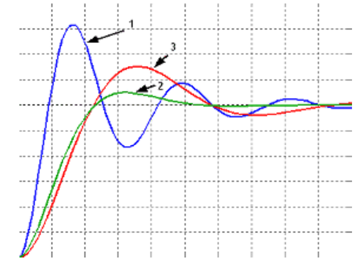
$$y(t_{s2\%}) < \lim_{t\to\infty} y(t) \pm 2\%$$

$$e^{-\zeta\omega_n t_{s2\%}} < 0.02$$

- Se obtiene $\zeta\omega_n t_{s2\%} \cong 4$

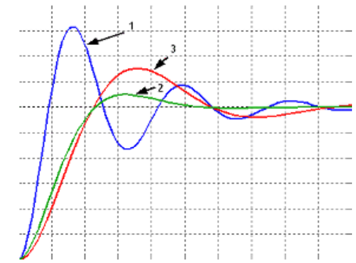
$$\boxed{t_{s2\%} = \frac{4}{\zeta\omega_n}}$$

Fórmulas



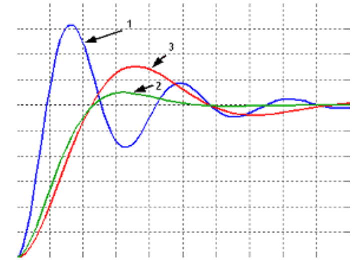
$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\omega_n{}^2(\zeta^2 - 1)}$	Raíces
$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$; $\zeta < 1$	Raíces
$M_P = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$	Sobreimpulso
$\zeta = \sqrt{\dfrac{\left(\frac{\ln M_P}{\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{\ln M_P}{\pi}\right)^2}}$	Amortiguamiento relativo

Fórmulas (2)



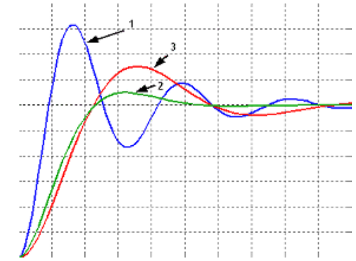
$t_{s2\%} = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$	Tiempo de estabilización 2%
$t_{s5\%} = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}$	Tiempo de estabilización 5%
$t_r = \dfrac{2.5\zeta + 0.8}{\omega_n}$	Tiempo de subida
$t_r = \dfrac{1.8}{\omega_n}$	Tiempo de subida

Resumen dinámica de 2° orden



Valores de ζ	Comportamiento del sistema	Raíces de la ecuación característica	Respuesta en el tiempo
$0 < \zeta < 1$	Subamortiguado	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot sen(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \theta)$
$\zeta = 1$	Críticamente amortiguado	$s_{1,2} = -\omega_n$	$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(1+\omega_n t)$
$\zeta > 1$	Sobreamortiguado	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$	$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right]$
$\zeta = 0$	No amortiguado	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$	$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$
$\zeta < 0$	Amortiguado negativamente	$s_{1,2} = \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	---------------------

Ubicación de los polos de lazo cerrado ante variación de ζ con ω_n constante

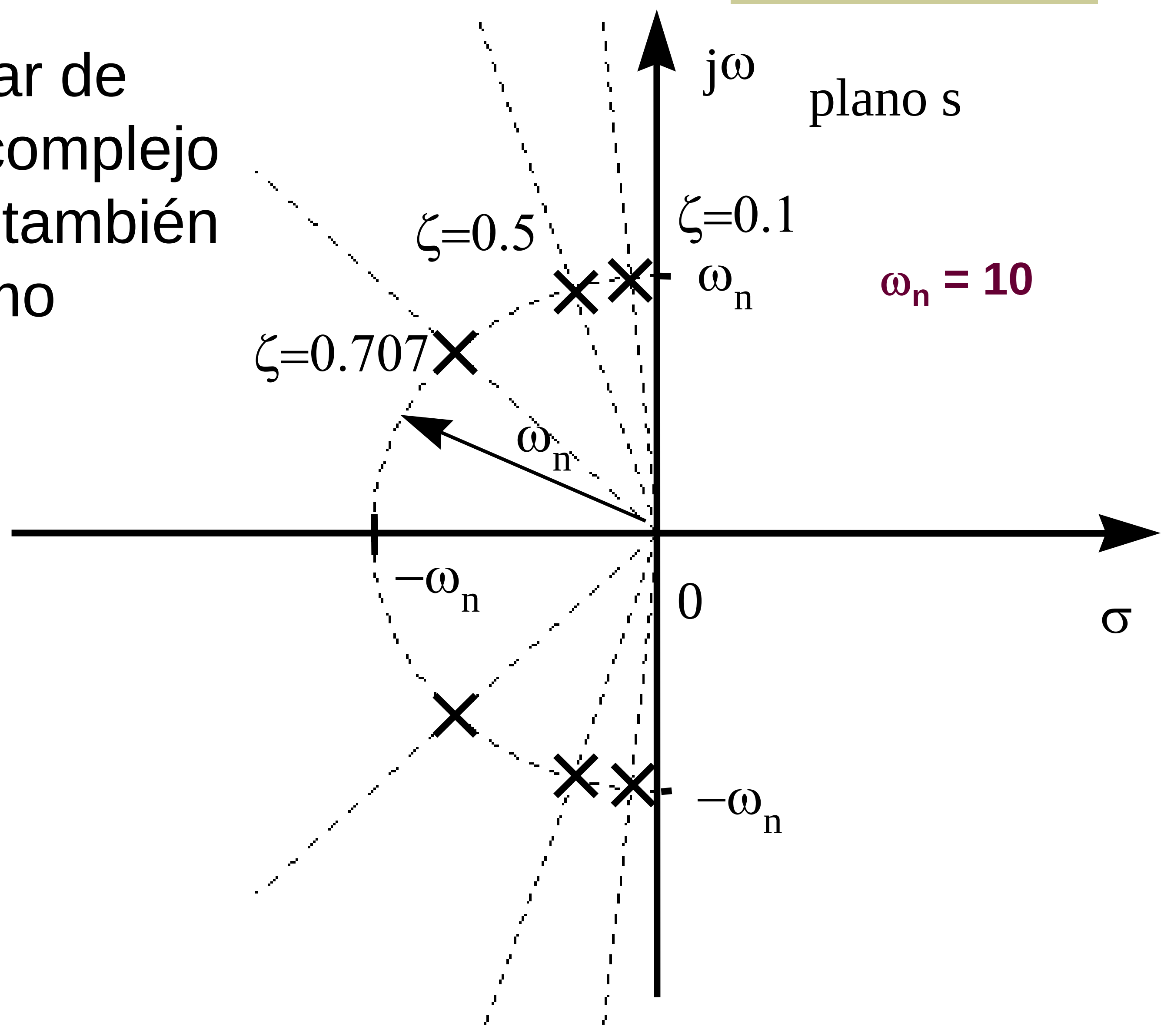


La ubicación del par de polos en el plano complejo puede expresarse también en forma polar como

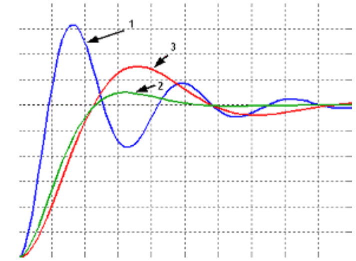
$$s_{1,2} = \omega_n \angle \pm \theta$$

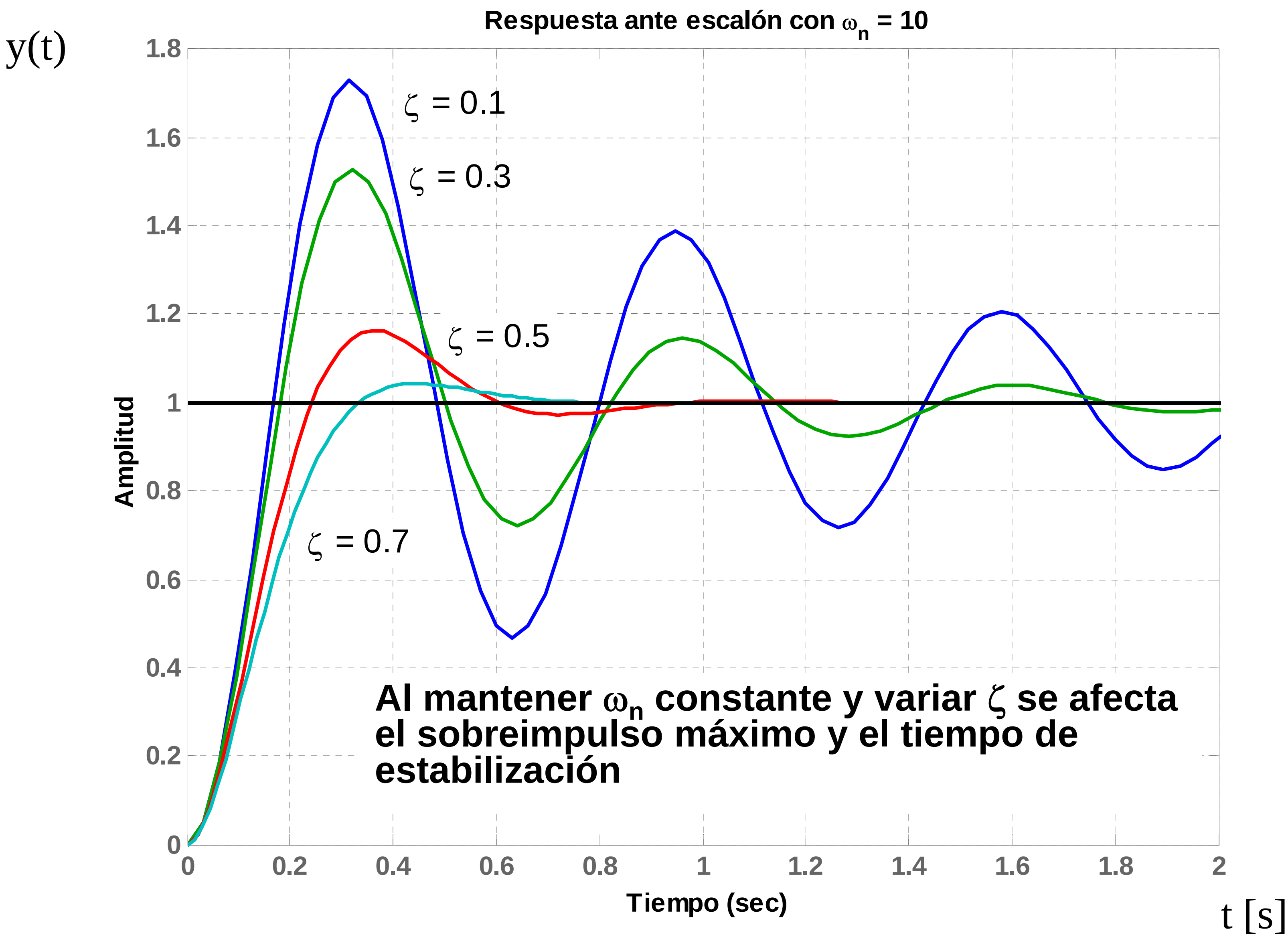
con

$$\zeta = \cos(\theta)$$

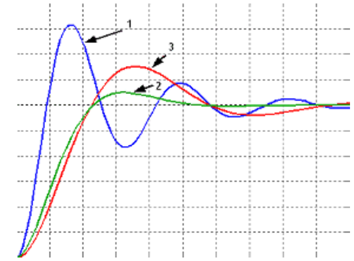


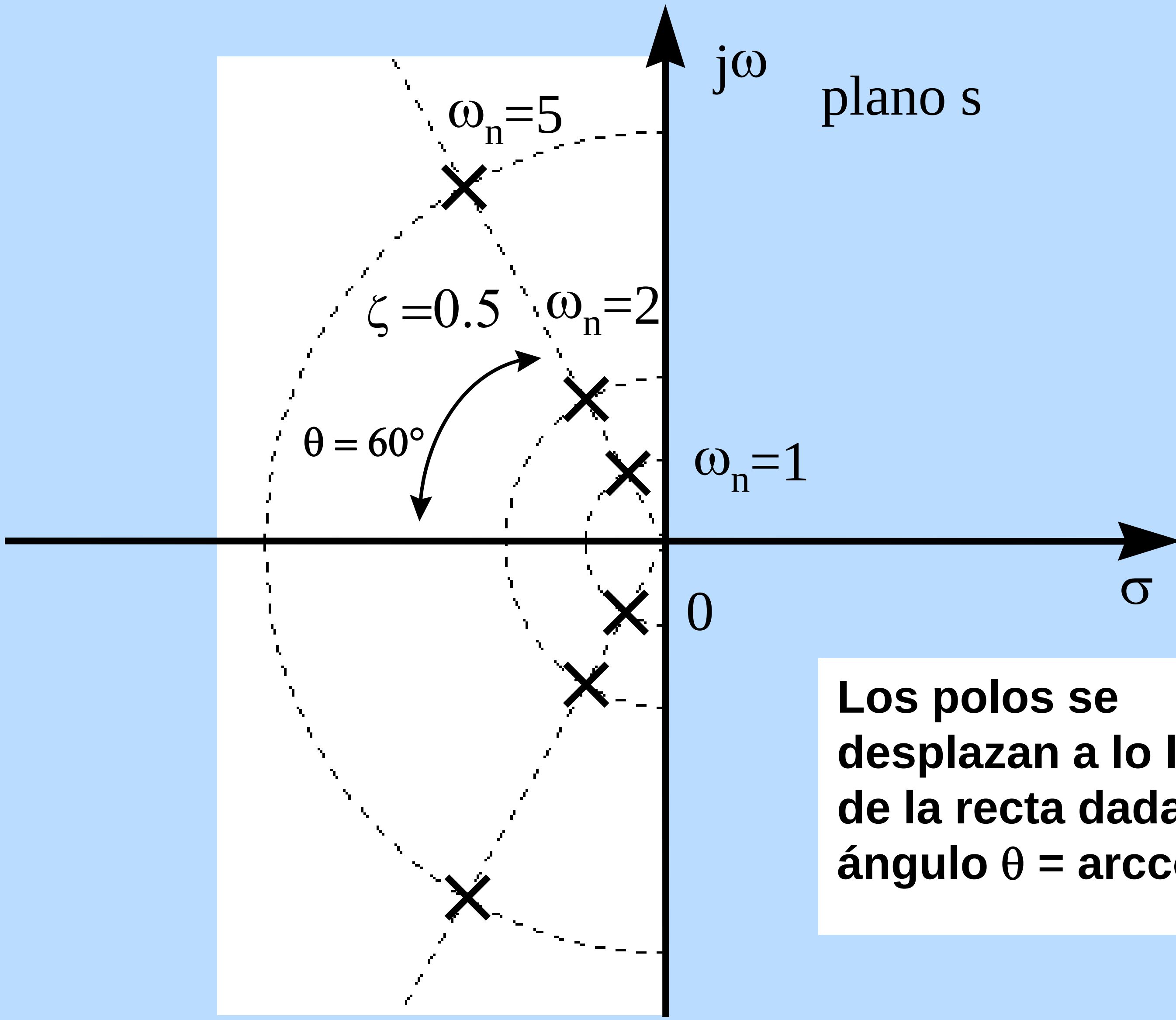
Respuesta al escalón unitario ante variación de ζ con ω_n cte.





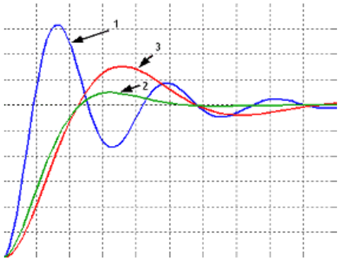
Ubicación de los polos de lazo cerrado ante variación de ω_n con ζ constante

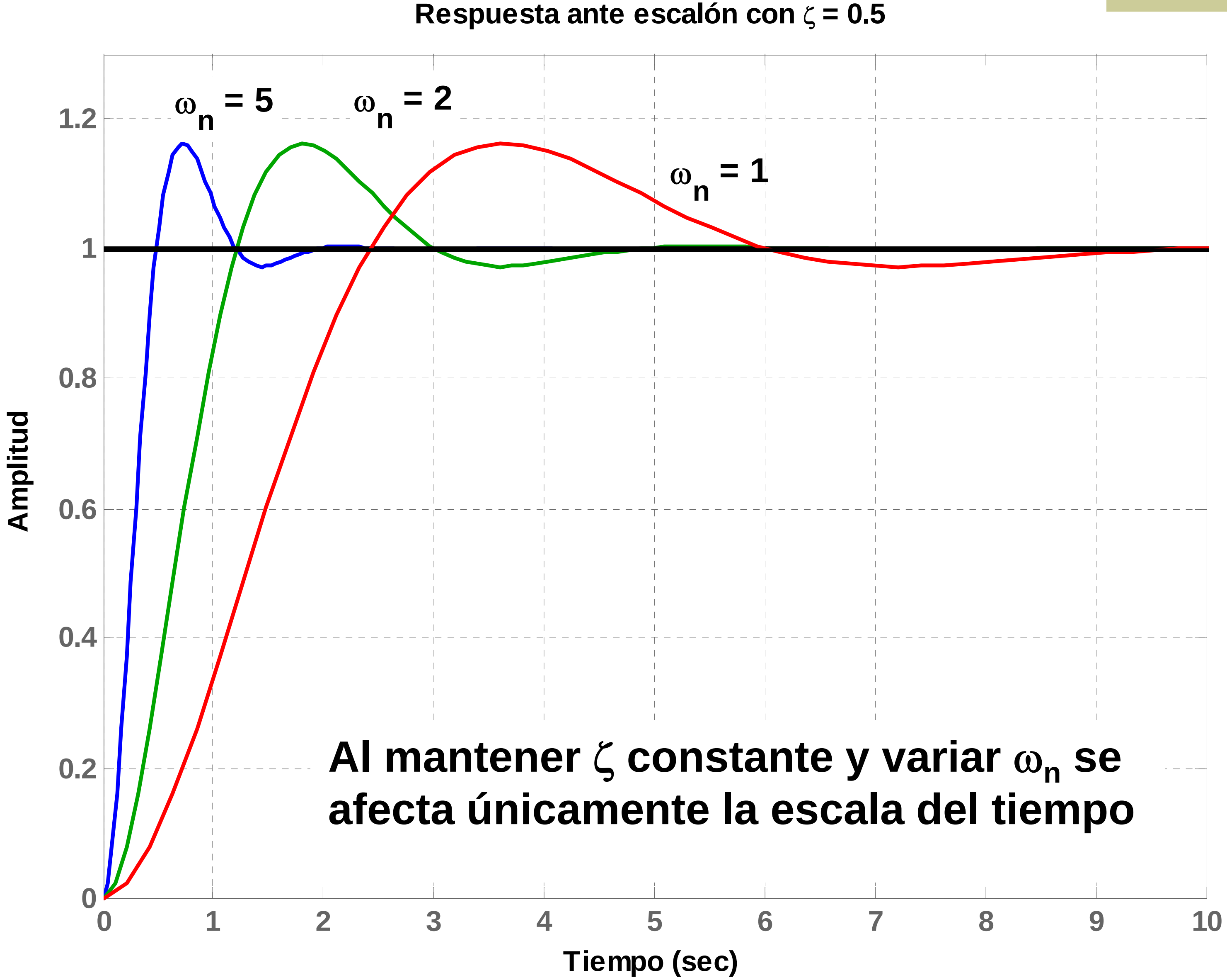




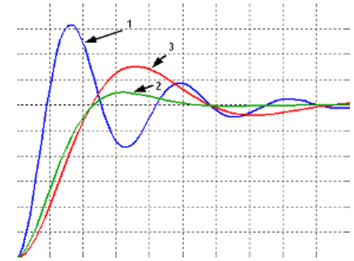
Los polos se desplazan a lo largo de la recta dada por el ángulo θ = arccos(ζ).

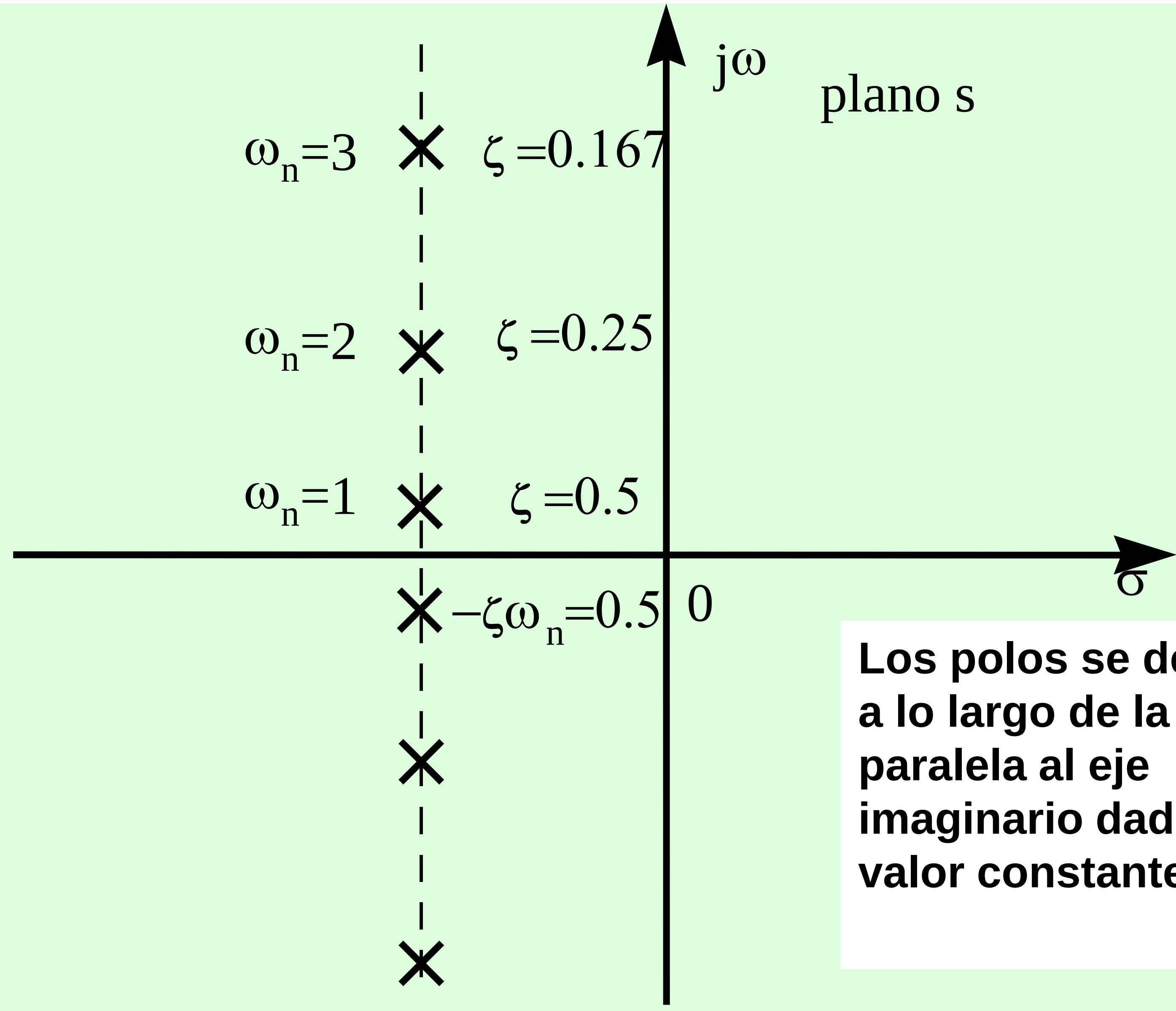
Respuesta al escalón unitario ante variación de ω_n con ζ constante





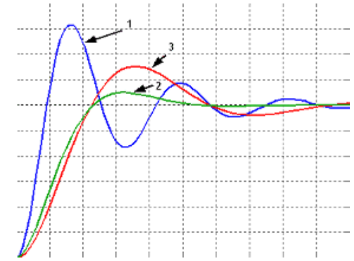
Ubicación de los polos de lazo cerrado ante variación de ζ y ω_n



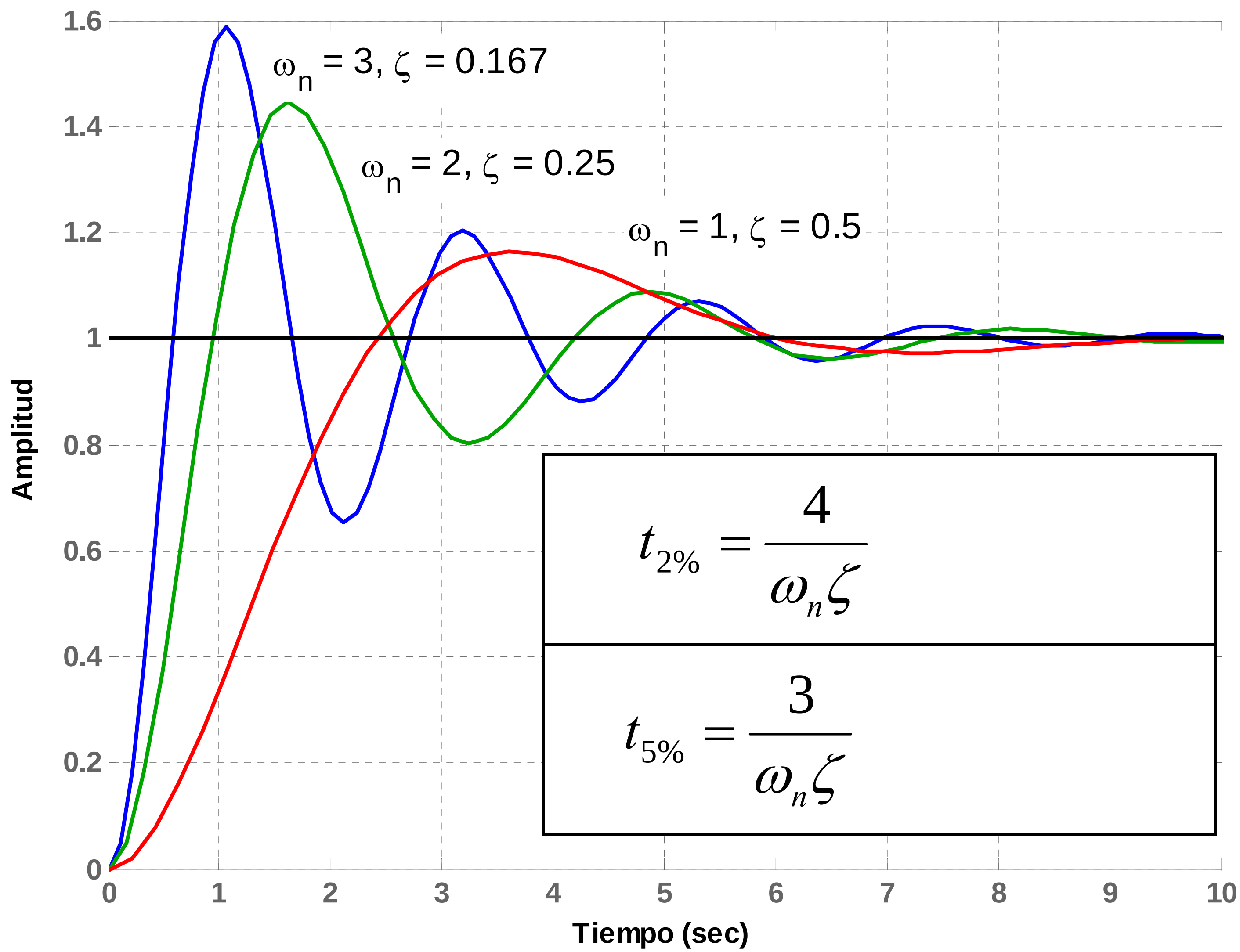


Los polos se desplazan a lo largo de la recta paralela al eje imaginario dada por el valor constante - ζ ω_n.

Respuesta al escalón unitario ante variación de ζ y ω_n



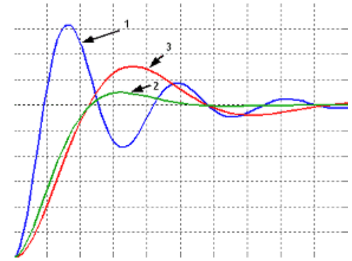
Respuesta ante escalón con $\zeta\omega_n$ = 0.5

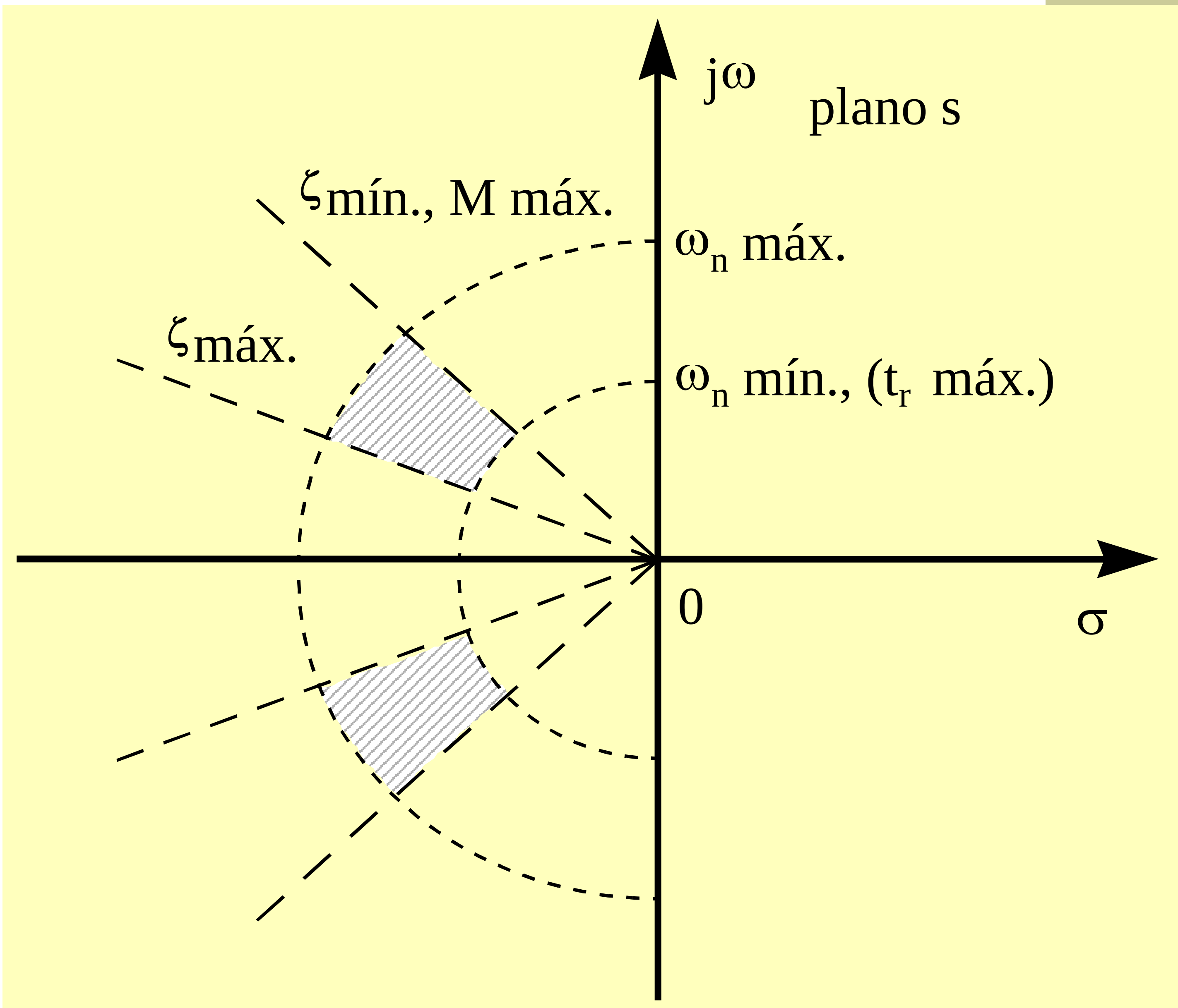


$$t_{2\%} = \frac{4}{\omega_n \zeta}$$

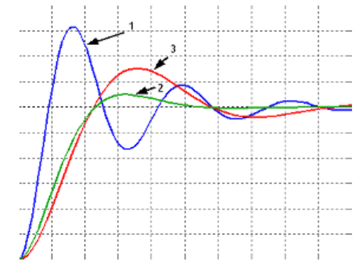
$$t_{5\%} = \frac{3}{\omega_n \zeta}$$

Regiones para la ubicación deseada del par de polos dominantes de la función de lazo cerrado





Ejemplo: Función



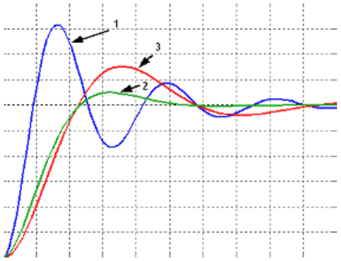
- Tenemos un sistema de lazo abierto Go(s), con ganancia variable K, realimentado unitariamente

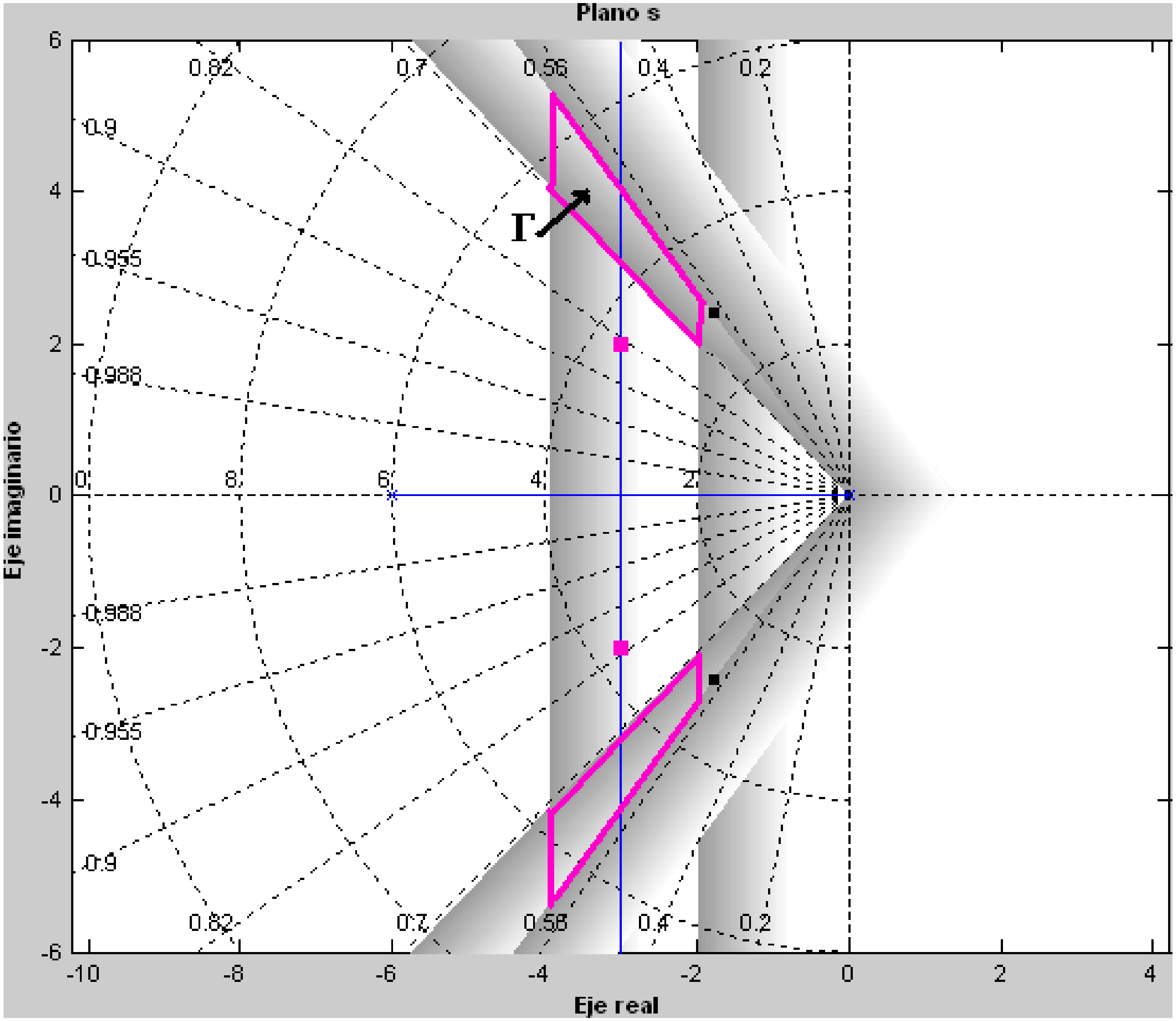
$$G_O(s) = K\frac{13}{s(s+6)}$$

$$T(s) = \frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} = \frac{13*K}{(s^2+6s+13*K)}$$

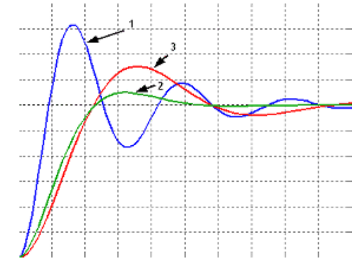
- Las condiciones son
  - $5\% \leq M_P \leq 10\%$
  - $1s \leq t_S \leq 2s$

Ejemplo: Región buscada





Ejemplo: Encontrando K



- Se puede encontrar el valor de K que hace que los polos de lazo cerrado de T(s) se encuentren en la región deseada.

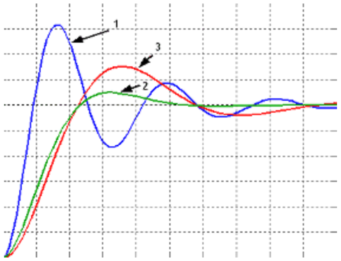
$$T(s) = \frac{13*K}{(s^2 + 6s + 13*K)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\ s + \omega_n^2}$$

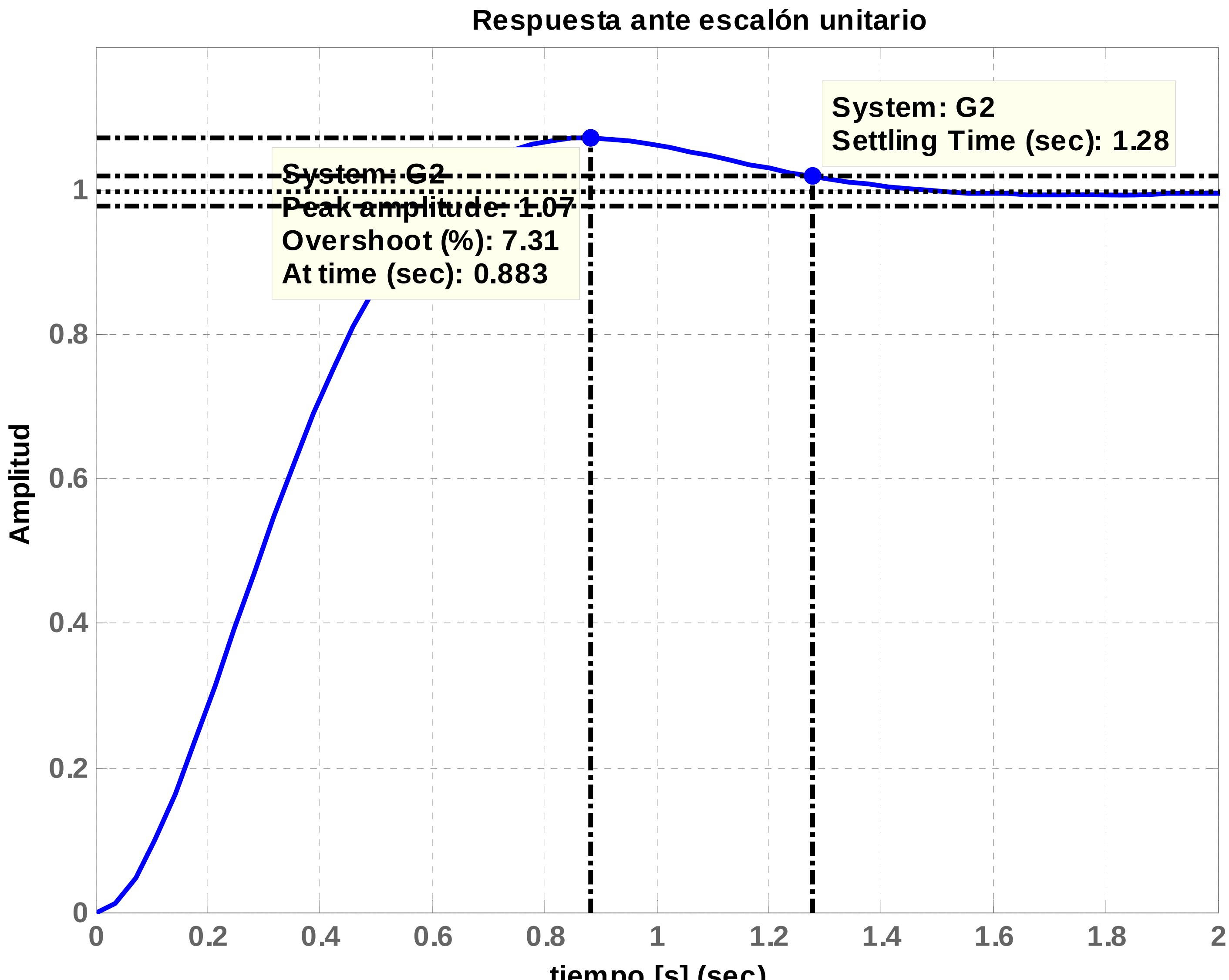
$$2\zeta\omega_n = 6, \quad \text{y}\ \omega_n^2 = 13*K$$

- Escogemos un punto $s_1 = -3 + j3.6$ en el centro de la región Γ deseada, que posee los valores $\zeta\omega_n = 3$, $\omega_n = 4.69$ y $\zeta = 0.64$; entonces:

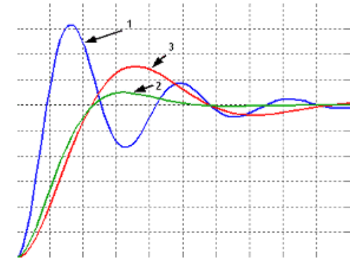
$$K = \frac{\omega_n^2}{13} = 1.69$$

Respuesta del sistema K = 1.69



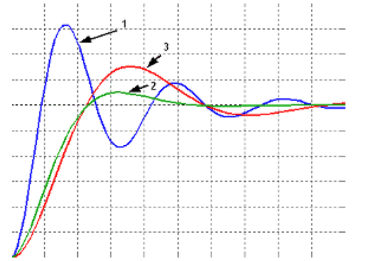


Resumen



- El sobreimpulso depende exclusivamente del amortiguamiento relativo ζ.
- El tiempo de estabilización depende del producto $\zeta\omega_n$.
- La aproximación es válida para sistemas de orden superior si se cuenta con polos dominantes

Referencias



- Dorf, Richard, Bishop Robert. „**Sistemas de control moderno**“, 10ª Ed., Prentice Hall, 2005, España.