2. Variables de Estado

Ejemplo 2.1: Sistema eléctrico

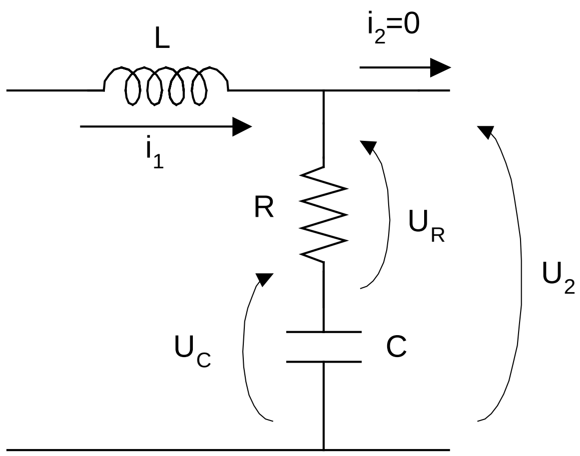

Figura 2.1: Diagrama eléctrico para modelado en variables de estado físicas

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito

$i_1 \circlearrowright \sum U = 0$

$$-U_1 + L\frac{di_1}{dt} + U_2 = 0 \qquad (A)$$

$$\sum i = 0$$

$$i_1 = i_3$$

$i_2 \circlearrowright \sum U = 0$

$$U_2 - \frac{1}{C}\int_0^t i_1 \, dt - U_c(0) - Ri_1 = 0 \qquad (B)$$

Obtener **n** ecuaciones diferenciales de orden 1

Variables I_1, U_2

$$\frac{dI_1}{dt} = f(I_1, U_2, U_1)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = f(I_1, U_2, U_1)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{U_2}{L}+\frac{U_1}{L} \qquad (1) \quad [\text{Salio de (A)}]$$

$$\frac{dU_2}{dt}-\frac{I_1}{C}-R\frac{dI_1}{dt} = 0 \qquad (2) \quad [\text{Salio de (B)}]$$

Sustituyendo $\frac{dI_1}{dt}$ en (2)

$$\frac{dU_2}{dt} = R\frac{U_1}{L}-R\frac{U_2}{l}+\frac{1}{C}I_1$$

Ordenando las expresiones

$$\frac{dI_1}{dt} = 0\cdot I_1-\frac{1}{L}U_2+\frac{1}{L}U_1$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{C}I_1-\frac{R}{L}U_2+\frac{R}{L}U_1$$

$$x = \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dU_2}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dU_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix}U_1 \qquad (4)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix}U_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = U_2$$

$$y = C^T x+d\,u$$

Figura 2.2: Modelo en variables de estado físicas

Descripción general del modelado en variables de estado

Ecuaciones generales del modelo en variables de estado

$$\dot{x} = Ax + bU_1 \qquad (5)$$
$$y = C^T x + dU_1 \qquad (6)$$

Descripción en variables de estado

A	matriz nxn
b	vector nx1
c	vector nx1 ; C^T vector 1xn
d	escalar
x	vector nx1

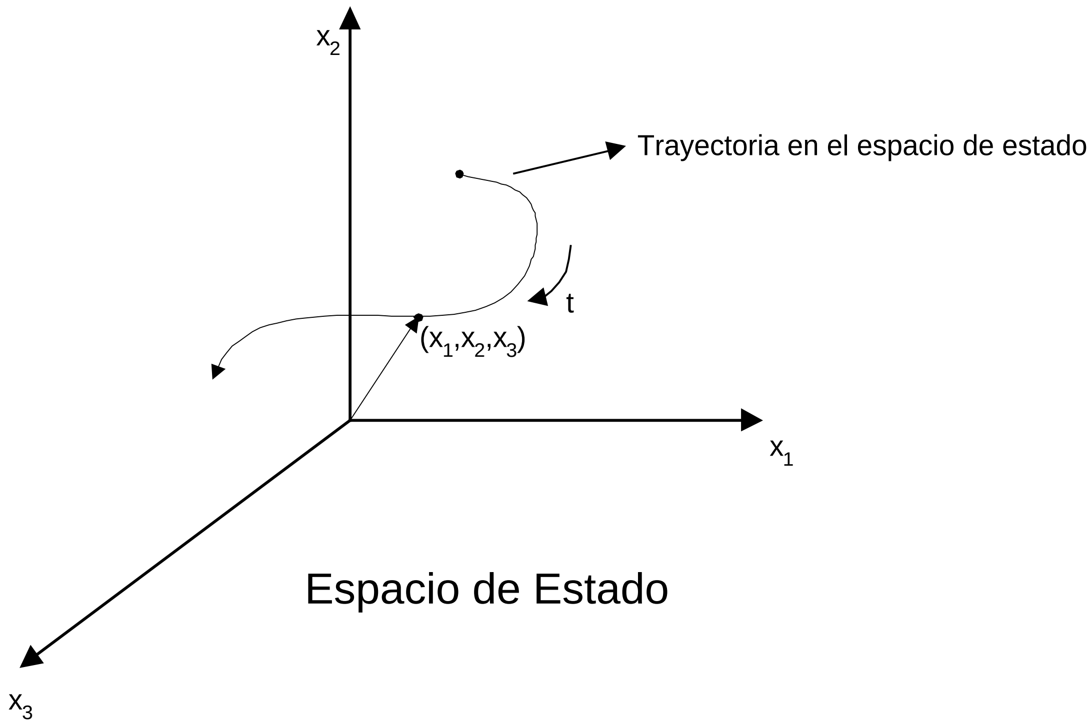

Figura 2.3: El espacio de estado

Espacio de estado : Espacio vectorial n-dimensional

Trayectoria: Curva o lugar en el cual el punto descrito por las variables en x se desplaza dependiendo del tiempo.

Matrices y vectores de la representación en variables de estado

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

y : combinación lineal de las entradas y el vector de estado

x_0 = x(0) Describe el estado que el sistema posee en $t = 0$. Esto vale para cualquier tiempo $\bar{t}$ si conocemos $x(\bar{t})$ y $u(t)$ $\forall\ t > \bar{t} \Rightarrow y(t)\ \forall\ t > \bar{t}$ puede ser calculada.

<u>Definición</u> :

Un vector x es un vector de estado de un sistema si para un tiempo cualquiera $t \geq 0$ los valores $x_i(0)$ de los elementos de x para el tiempo 0, junto con la variación de u(t) para $0 \leq \tau \leq t$ determinan inequívocamente la variable de salida y(t). Las componentes de $x_i(t)$ de x se llaman variables de estado.

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad (5)$$
$$y = C^T x + du \qquad (6)$$

$x(0) = x_0$

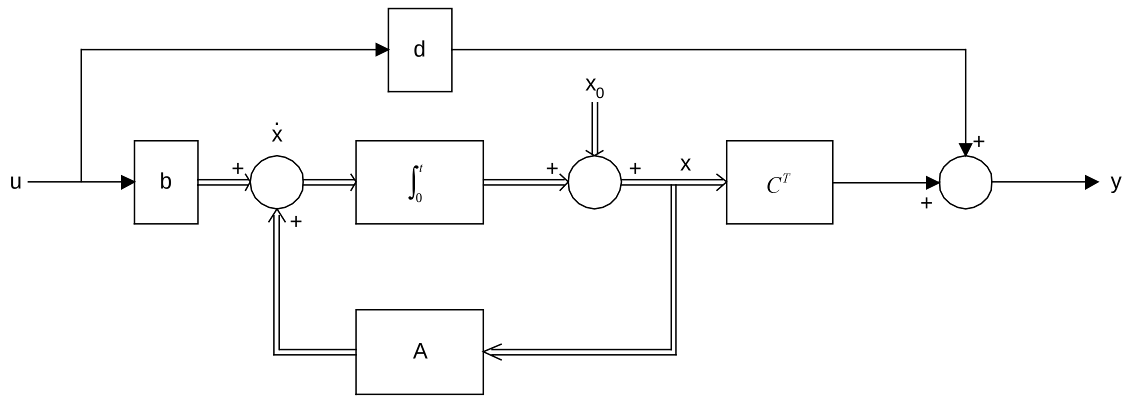

Figura 2.4: Estructura de la representación en variables de estado

Tabla 2: Variables físicas usadas dependiendo del tipo de sistema

Variables	-Sistemas eléctricos	- Corrientes - Tensiones
	-Sistemas mecánicos	- Posición - Velocidad - Aceleración

Ejemplo 2.2: Motor CD controlado por armadura modelado en variables de estado.

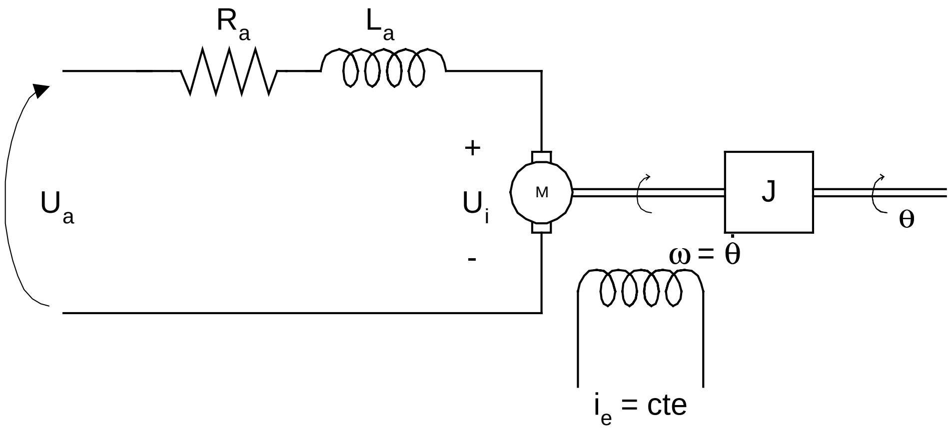

Figura 2.5: Motor CD controlado por armadura

Definición de las variables de estado a usar:

$$i_a, \theta, \dot{\theta}$$

Ecuaciones

$x_1 = \theta(t)$ (salida)

$x_2 = \dot{\theta}(t)$

$x_3 = i_a(t)$

$x_2 = \dot{x}_1$

Se tenía anteriormente

$$\begin{aligned} Ua(t) &= L_a \frac{di_a}{dt} + R\, i_a(t) + U\, i(t) \\ J\ddot{\theta} &= M(t) - \beta\dot{\theta}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + x_2 + 0x_3 \\ \dot{x}_2 &= 0x_1(t) - \frac{B}{J}x_2(t) + \frac{C\phi_e}{J}x_3(t) \\ \dot{x}_3 &= 0x_1(t) - C\frac{\phi_e}{L_a}x_2(t) - \frac{R_a}{L_a}x_3(t) + \frac{u(t)}{L_a} \end{aligned}$$

$$y = x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{C\phi_e}{J} \\ 0 & -\frac{C\phi_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + 0u$$

Modelado usando variables de fase

Variables de fase: cuando las variables son la salida y sus derivadas

1er. Caso q=0, ecuación diferencial ordinaria de orden **n**

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = b_0\, u(t)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} = \dot{x}_1 \\ x_3 &= \ddot{y} = \dot{x}_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} = \dot{x}_{n-1} \end{aligned}$$

definición de las variables de fase usadas

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 + \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n + 0u \\ \dot{x}_2 &= 0x_1 + 0x_2 + x_3 + \cdots + 0x_n + 0u \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots - x_n + 0u \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 + a_2x_3 + \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$ Matriz de Frobenius

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$d = 0$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + 0u$$

Figura 2.6: Modelo en variables de estado usando variables de fase

Ejercicio 2.1: Modelar usando variables de estado físicas.

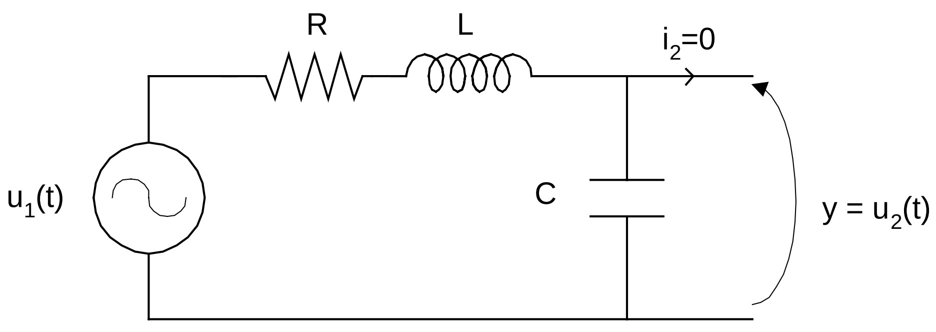

Figura 2.7: Circuito eléctrico para el ejercicio 2.1

Representación de la estructura de un sistema de orden 2

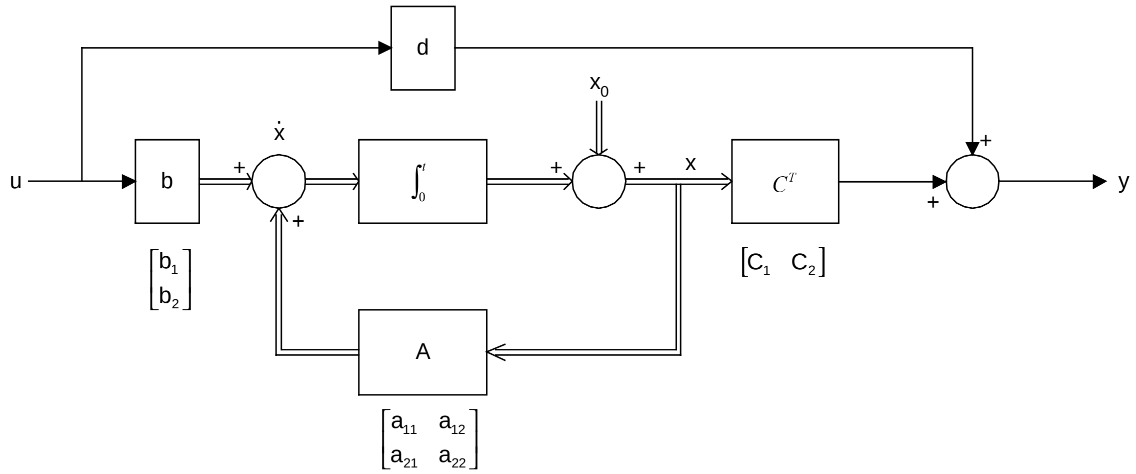

Figura 2.8: Estructura en diagrama de bloques de un sistema de 2^{do} orden

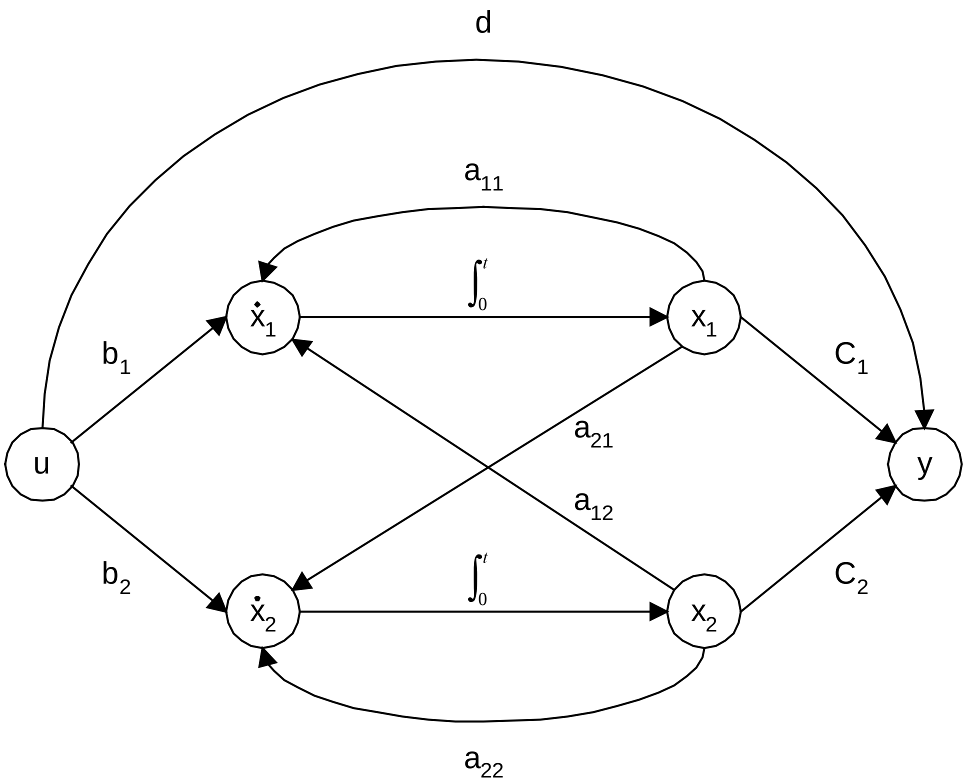

Figura 2.9: Estructura en diagrama de flujo de señales para sistemas de 2^{do} orden