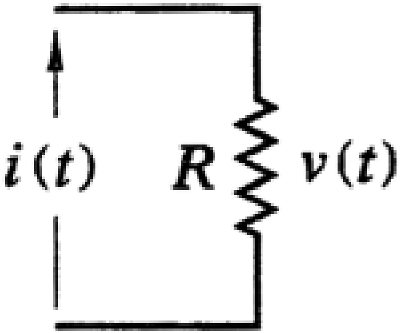
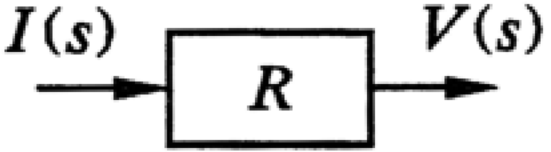
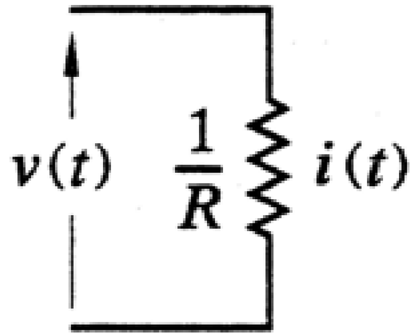




$$v(t) = Ri(t)$$

$$V(s) = RI(s)$$



$$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

$$I(s) = \frac{1}{R} V(s)$$

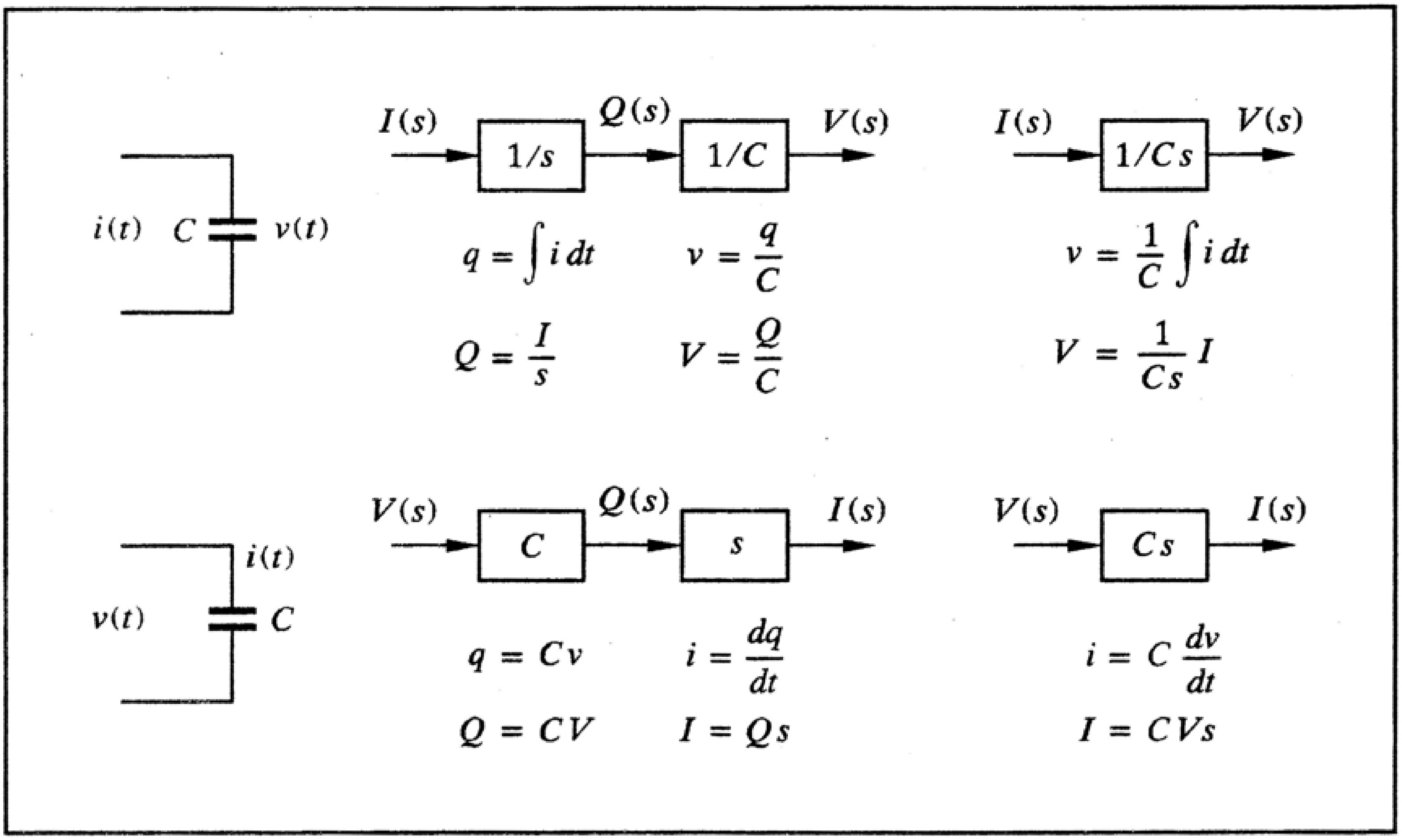


Fig. 3.2 Diagrama de bloques de una capacidad. Relación entre variables

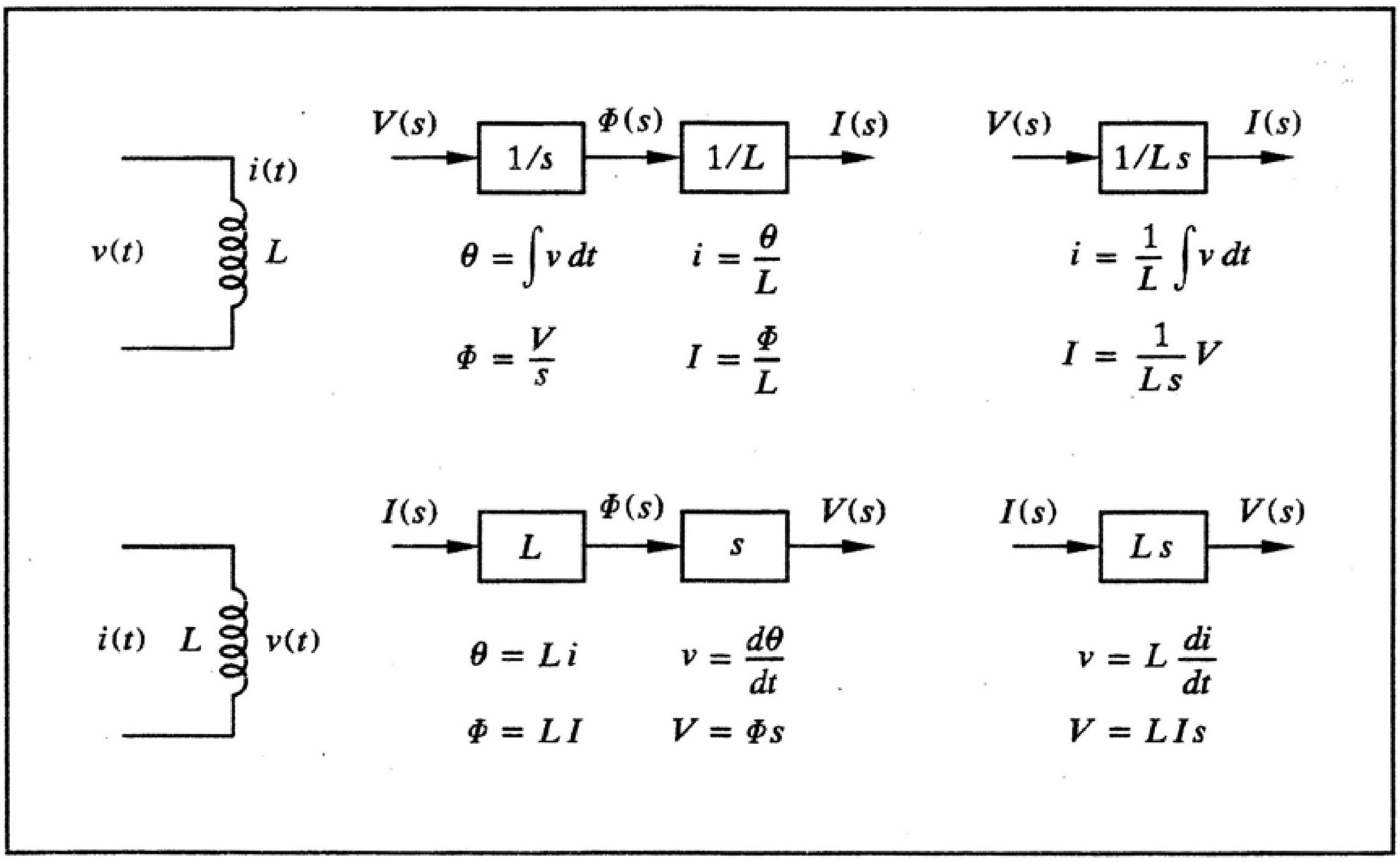


Fig. 3.3 Diagrama de bloques de una inductancia. Relación entre variables

La figura 3.3 representa el componente *inertancia* en la versión eléctrica inductancia, y sus correspondientes diagramas de bloques, así como las relaciones entre las variables corriente y tensión. Se ha detallado la variable intermedia *flujo magnético* Φ (carga inercial), como integración de la diferencia de potencial $V(s)$, en un bloque $[1/s]$, o como efecto de la intensidad $I(s)$ en un bloque $[L]$.

El lector evitará la confusión que pueden causar los símbolos Φ y θ, utilizados para el flujo magnético de una autoinducción, y para el flujo en términos genéricos, cuando se describía el parámetro inertancia. En una resistencia eléctrica (resistor) el flujo correspondería a la intensidad de corriente. El flujo magnético de una autoinducción se corresponde con la carga inercial en la descripción genérica de inertancia.

3.4 Analogías

Dos componentes o sistemas serán *análogos* si están descritos por ecuaciones de equilibrio con la misma forma matemática; es decir, por expresiones idénticas en las que solamente cambian los nombres o símbolos de los parámetros y las variables.

Veamos unos ejemplos, agrupados según los cuatro tipos de parámetros, en donde se ha incluido la función temporal y su transformada.

Resistencia o conductancia		
Fricción viscosa	**Resistencia**	**Resorte**
$v(t) = \frac{1}{B} f(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$d(t) = \frac{1}{K} f(t)$
$V(s) = \frac{1}{B} F(s)$	$I(s) = \frac{1}{R} V(s)$	$D(s) = \frac{1}{K} F(s)$
B = Coef. fricc. viscosa v, V = Velocidad f, F = Fuerza	R = Resistencia i, I = Intensidad v, V = Tensión	K = Constante elástica d, D = Desplazamiento f, F = Fuerza

Capacidad		
Nivel en tanque	**Condensador**	**Autoinducción**
$n(t) = \frac{1}{A} \int q \, dt$	$v(t) = \frac{1}{C} \int i \, dt$	$i(t) = \frac{1}{L} \int v \, dt$
$N(s) = \frac{1}{A s} Q(s)$	$V(s) = \frac{1}{C s} I(s)$	$I(s) = \frac{1}{L s} V(s)$
A = Área del tanque n, N = Nivel q, Q = Caudal aporte neto	C = Capacidad v, V = Tensión i, I = Intensidad	L = Inductancia i, I = Intensidad v, V = Tensión

Inertancia		
Masa	**Autoinducción**	**Condensador**
$f(t) = M\dfrac{dv}{dt}$	$v(t) = L\dfrac{di}{dt}$	$i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$
$F(s) = MsV(s)$	$V(s) = LsI(s)$	$I(s) = CsV(s)$
M = Masa f, F = Fuerza v, V = Velocidad	L = Inductancia v, V = Tensión i, I = Intensidad	C = Inductancia i, I = Intensidad v, V = Tensión

No debería sorprender hallar incluido en el grupo de parámetros del tipo capacidad una autoinducción, o que en el tipo inertancia se encuentre un condensador. Es la función matemática la que clasifica el componente, porque ésta define su comportamiento, que es justamente lo que se está tipificando. Obsérvese que un mismo componente responde según una ecuación de diferente forma, dependiendo de qué variables se consideren como de entrada y salida.

Veamos como los elementos *ficción viscosa, resorte, masa, autoinducción* y *condensador* pueden pertenecer a cada uno de los cuatro tipos de parámetros, sin más que asignar diferentes variables de entrada y salida.

	ELEMENTO				
Parámetro	Fricc. visc.	Resorte	Masa	Autoinduc.	Condensador
Resistencia	$v = \dfrac{1}{B}f$	$x = \dfrac{1}{K}f$	$a = \dfrac{1}{M}f$	$i = \dfrac{1}{L}\Phi$	$v = \dfrac{1}{C}q$
Conductanc.	$f = Bv$	$f = Kx$	$f = Ma$	$\Phi = Li$	$q = Cv$
Capacidad	$x = \dfrac{1}{B}\int f\,dt$	$f = K\int v\,dt$	$v = \dfrac{1}{M}\int f\,dt$	$i = \dfrac{1}{L}\int v\,dt$	$v = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$
Inertancia	$f = B\dfrac{dx}{dt}$	$v = \dfrac{1}{K}\dfrac{df}{dt}$	$f = M\dfrac{dv}{dt}$	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$
Parámetro: *Variables*: $\left\{\right.$	B = Coef. fricc. v = Velocidad f = Fuerza x = Recorrido	K = Const. elást. x = Recorrido f = Fuerza v = Velocidad	M = Masa a = Aceleración f = Fuerza v = Velocidad	L = Inductancia i = Intensidad Φ = Flujo magn. v = Tensión	C = Capacidad v = Tensión q = Carga i = Intensidad

Así pues, llamando x a la entrada del componente o bloque, e y a la salida del mismo, tendremos, para resumir, la siguiente tabla de expresiones para cada tipo de componente, en la que se han omitido las notaciones (t) y (s).

Parámetro		**Ecuación de equilibrio**		**Transmitancia**
Tipo	Valor	Temporal	Laplaciana	$G = Y/X$
Resistencia	R	$y = R\,x$	$Y = R\,X$	$G = R$
Conductancia	$1/R$	$y = \frac{1}{R}x$	$Y = \frac{1}{R}X$	$G = \frac{1}{R}$
Capacidad	C	$y = \frac{1}{C}\int x\,dt$	$Y = \frac{1}{C\,s}X$	$G = \frac{1}{C\,s}$
Inertancia	L	$y = L\frac{dx}{dt}$	$Y = L\,s\,X$	$G = L\,s$

A continuación se presenta una tabla de analogías de variables y parámetros, entre distintos sistemas físicos y tecnológicos.

	SISTEMA					
	Eléctrico (Voltaje)	**Eléctrico** (Corriente)	**Mecánico** (Traslación)	**Mecánico** (Rotación)	**Fluidos**	**Térmico**
Potencial	Tensión	Intensidad	Fuerza	Par (torsión)	Presión	Temperatura
Flujo	Intensidad	Tensión	Velocidad	Velocid. ang.	Caudal	Flujo calorif.
Carga	Carga eléctr.	Flujo magn.	Desplazam.	Angulo	Cantidad	Cant. calor
Resistencia	Resistencia	Conductanc.	Coef. fric. visc.	Coef. fric. visc.	Resistencia	Resistencia
Conductanc.	Conductanc.	Resistencia	Inverso " "	Inverso " "	Inverso "	Conductanc.
Capacidad	Capacidad	Inductancia	Const. elástica	Cte. elást. rot.	Volum., área	Capac. calor.
Inertancia	Inductancia	Capacidad	Masa	Mom. inercia	Inercia	(No tiene)

Quizás en este capítulo habría que dedicar unas pocas líneas a las *constantes*. En honor a su grandeza hay que mencionarlas: el número *Pi* (π) y el número *e* lideran, sin duda, los fundamentos de las Matemáticas; pero le siguen una miríada de constantes universales, de gran importancia, utilizadas por diversas ciencias. Lo demás... son variables o parámetros.

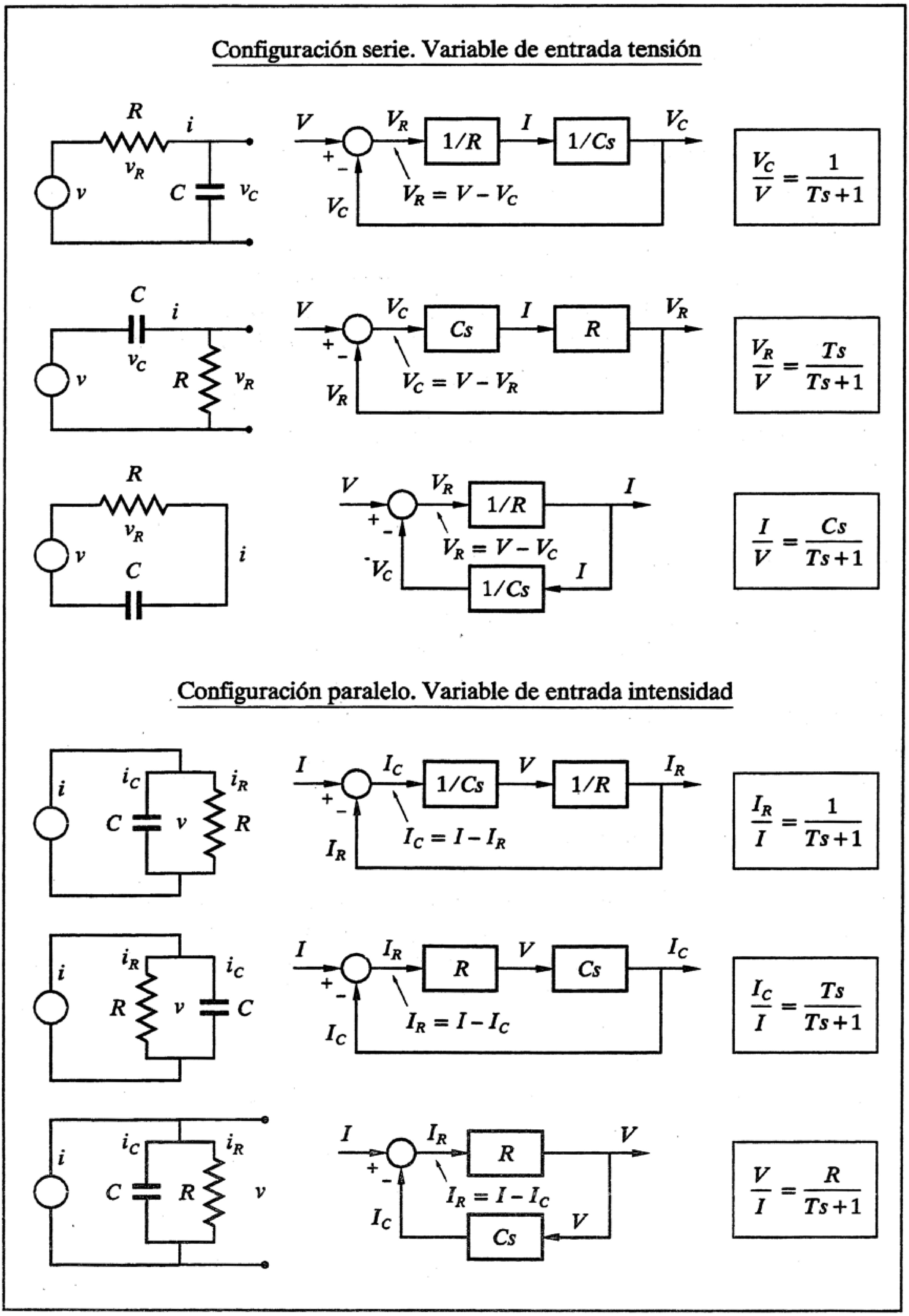


Fig. 4.4 Retardos de primer orden formados por combinaciones R-C

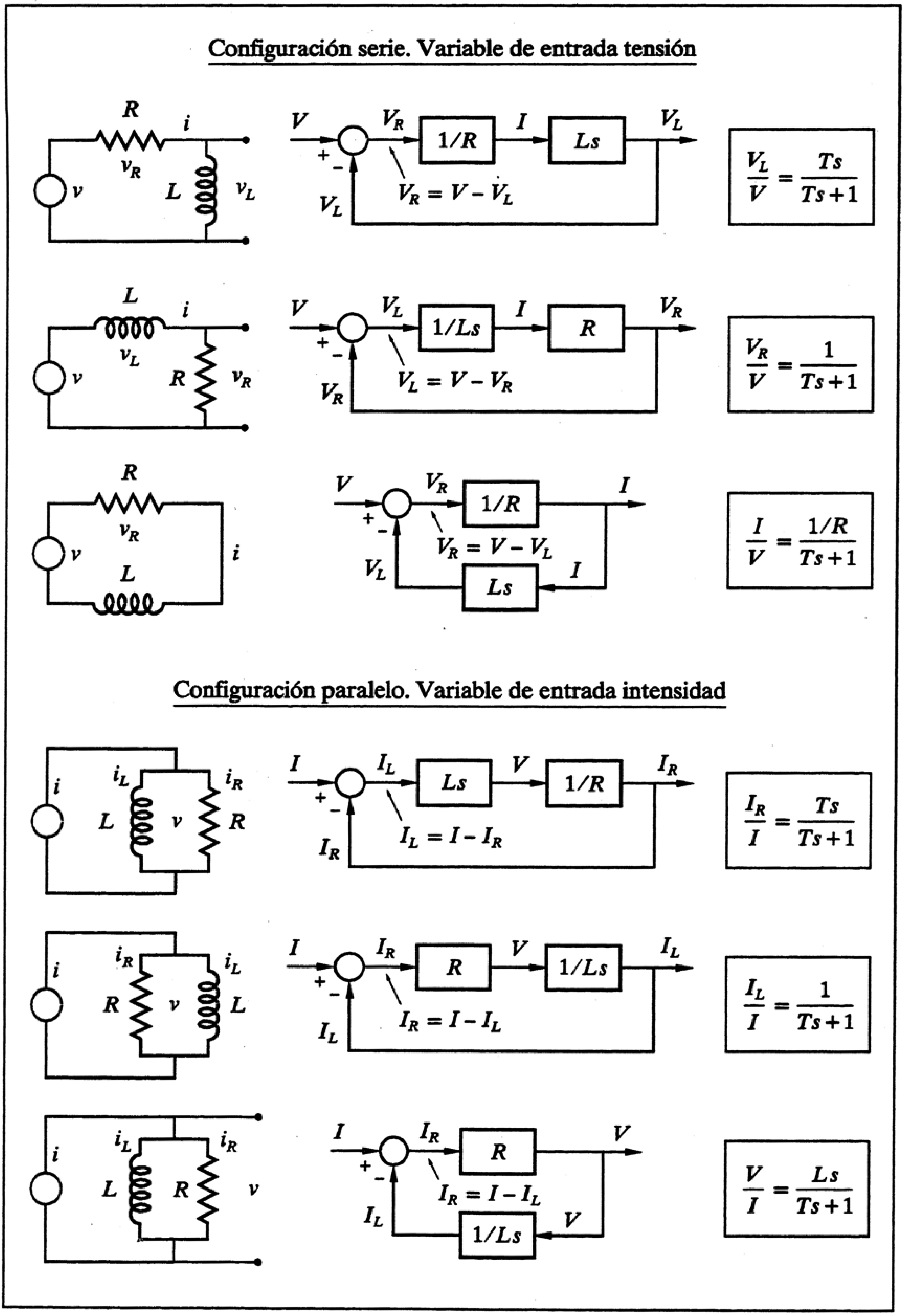


Fig. 4.5 Retardos de primer orden formados por combinaciones R-L

3-5 SISTEMAS ANÁLOGOS

Los sistemas que pueden representarse mediante el mismo modelo matemático pero que son diferentes físicamente se llaman sistemas *análogos*. Así pues, los sistemas análogos se describen mediante las mismas ecuaciones diferenciales o integrodiferenciales o conjuntos de ecuaciones.

El concepto de sistema análogo es muy útil en la práctica por las siguientes razones.

1. La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede aplicarse directamente al sistema análogo en otro campo.

2. Puesto que un tipo de sistema puede ser más fácil de manejar experimentalmente que otro, en lugar de construir y estudiar un sistema mecánico (o sistema hidráulico, sistema neumático, etc.), podemos construir y estudiar su análogo eléctrico, porque los sistemas eléctricos o electrónicos son en general, mucho más fáciles de tratar experimentalmente. (En particular, las computadoras analógicas electrónicas son bastante útiles para simular sistemas mecánicos tanto como otros sistemas físicos. Para la simulación por computadora analógica electrónica, véase la Sec. 7-7.)

Esta sección expone analogías entre sistemas mecánicos y eléctricos, sin embargo, es aplicable a cualquier otro sistema, y las analogías entre sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, neumáticos y térmicos se exponen en los capítulos 4, 5 y 7.

Analogías mecánico-eléctricas. Los sistemas mecánicos pueden estudiarse mediante el uso de sus análogos eléctricos, los cuales pueden construirse más fácilmente que los modelos del sistema mecánico correspondiente. Hay dos analogías eléctricas para los sistemas mecánicos: la analogía fuerza-tensión y la analogía fuerza-corriente.

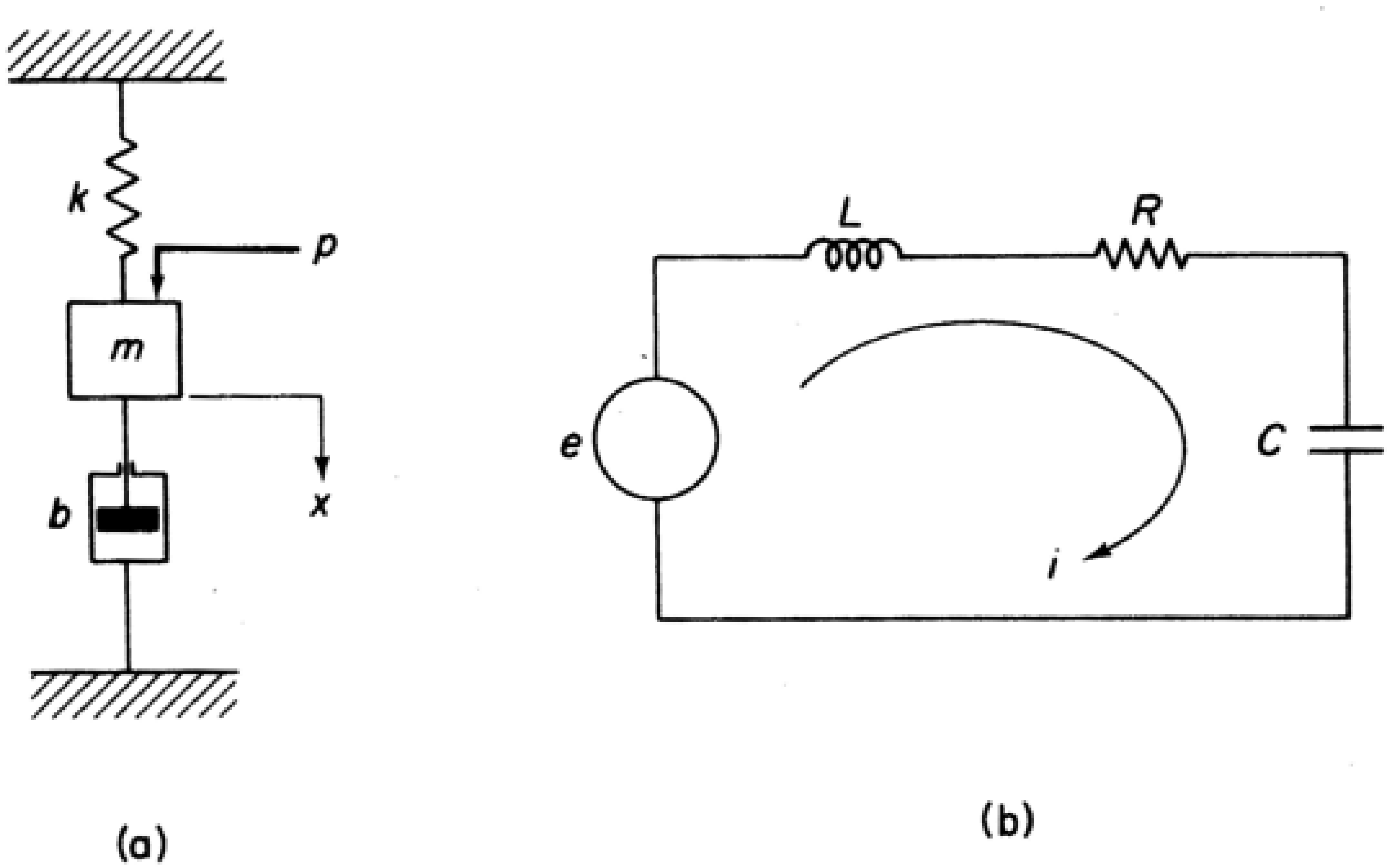


Fig. 3-30. Sistemas mecánico y eléctrico análogos.

Analogía fuerza-tensión. Considérese el sistema mecánico de la Fig. 3-30(a) y el sistema eléctrico de la Fig. 3-30(b). La ecuación del sistema para el primero es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = p \tag{3-19}$$

en tanto que la ecuación del sistema para el sistema eléctrico es

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e$$

En términos de la carga eléctrica q la última ecuación se hace

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e \tag{3-20}$$

Comparando las Ecs. (3-19) y (3-20), vemos que las ecuaciones diferenciales de los dos sistemas son idénticas. Así pues, estos dos sistemas son sistemas análogos. Los términos que ocupan las posiciones correspondientes en las ecuaciones diferenciales se llaman *cantidades análogas*, una lista de ellas aparece en la tabla 3-1. Aquí la analogía se llama *analogía fuerza-tensión* (o analogía masa-inductancia).

Tabla 3-1. ANALOGÍA FUERZA-TENSIÓN

Sistemas mecánicos	Sistemas eléctricos
Fuerza p (par T)	Tensión e
Masa m (momento de inercia J)	Inductancia L
Coeficiente de fricción viscosa b	Resistencia R
Constante de resorte k	Recíproco de la capacitancia, $1/C$
Desplazamiento x (desplazamiento angular θ)	Carga q
Velocidad $\dot{x}$ (velocidad angular $\dot{\theta}$)	Corriente i

Analogía fuerza-corriente. Otra analogía entre los sistemas eléctricos y mecánicos se basa en la analogía fuerza-corriente. Considérese el sistema mecánico mostrado en la Fig. 3-31(a). La ecuación del sistema puede obtenerse como

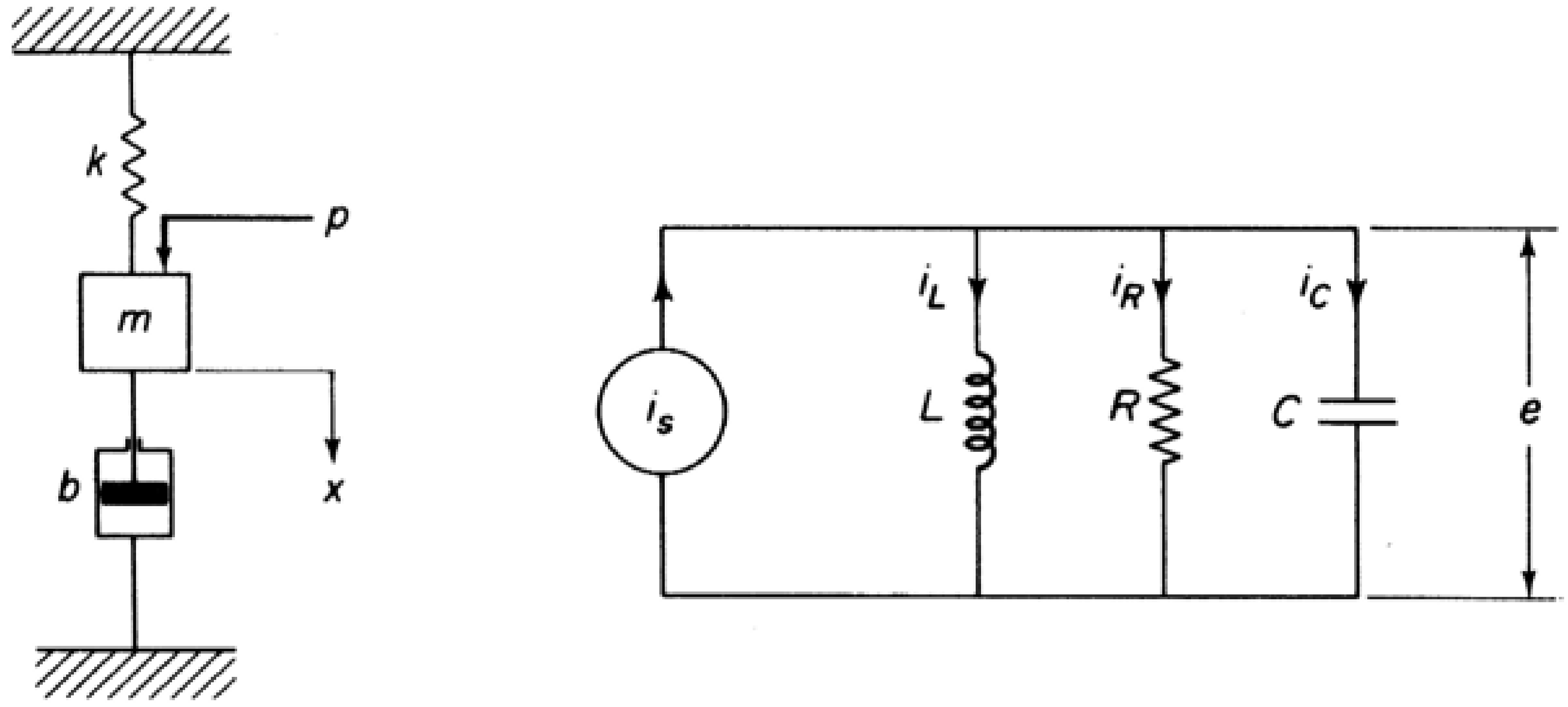
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = p \tag{3-21}$$

Considérese a continuación el sistema eléctrico mostrado en la Fig. 3-31(b). La aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff da

$$i_L + i_R + i_C = i_s \tag{3-22}$$

donde

$$i_L = \frac{1}{L}\int e\,dt, \qquad i_R = \frac{e}{R}, \qquad i_C = C\frac{de}{dt}$$



(a) (b)

Fig. 3-31. Sistemas mecánico y eléctrico análogos.

La ecuación (3-22) puede escribirse

$$\frac{1}{L}\int e\,dt + \frac{e}{R} + C\frac{de}{dt} = i_s \tag{3-23}$$

Puesto que el enlace de flujo ψ está relacionado con la tensión e mediante la ecuación

$$\frac{d\psi}{dt} = e$$

en términos de ψ, la Ec. (3-23) puede escribirse

$$C\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{L}\psi = i_s \tag{3-24}$$

Comparando las Ecs. (3-21) y (3-24), encontramos que los dos sistemas son análogos. Las cantidades análogas están enlistadas en la tabla 3-2. Aquí la analogía se llama *analogía fuerza-corriente* (o analogía masa-capacitancia).

Tabla 3-2. ANALOGÍA FUERZA-CORRIENTE

Sistemas mecánicos	Sistemas eléctricos
Fuerza p (par T)	Corriente i
Masa m (momento de inercia J)	Capacitancia C
Coeficiente de fricción viscosa b	Recíproco de la resistencia, $1/R$
Constante de resorte k	Recíproco de la inductancia, $1/L$
Desplazamiento x (desplazamiento angular θ)	Acoplamiento por flujo magnético ψ
Velocidad $\dot{x}$ (velocidad angular $\dot{\theta}$)	Tensión e