Análisis de Sistemas Lineales

Controlabilidad y Observabilidad

Contenido

- Controlabilidad de estado
- Transformación a forma canónica (regular) controlable, FCC
- Observabilidad de estado
- Transformación a forma canónica (regular) observable, FCO
- Ejemplos y ejercicios

Controlabilidad

- La controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario en un tiempo finito.
- El concepto de controlabilidad es la base para solucionar el problema de la ubicación de polos
- Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces es posible seleccionar los polos en lazo cerrado deseados (o las raíces de la ecuación característica)

Controlabilidad de estado

Partimos del sistema MIMO

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Para que este sistema sea de **estado completamente controlable,** es necesario y suficiente que la matriz de controlabilidad **M** de *n* x *nr* tenga rango *n*

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{\mathbf{n-1}}\mathbf{B}]$$

Pruebas para la controlabilidad de estado

- Si **M** no es cuadrada (MIMO), se puede formar la matriz **MM'**, que es de *n x n;* entonces si **MM'** es no singular **M** tiene rango n.

- El par **[A, B]** es completamente controlable si A y B están en la Forma Canónica Controlable o FCC, o son transformables a la Forma Canónica Controlable

Pruebas para la controlabilidad de estado (2)

- Si los valores propios de **A** son diferentes y **A** está en la Forma Canónica Diagonal el par **[A, B]** es completamente controlable si todos los elementos de **B** no son cero

- Si **A** está en la Forma Canónica de Jordan, el par **[A, B]** es completamente controlable si al menos uno, de los elementos en los renglones de **B** que corresponden al último renglón de cada bloque de Jordan, es diferente de cero

Ejemplo 1: Controlabilidad

- Sea el sistema SISO descrito por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La matriz de controlabilidad (nxn) es

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Que es singular y por lo tanto el sistema es NO controlable.

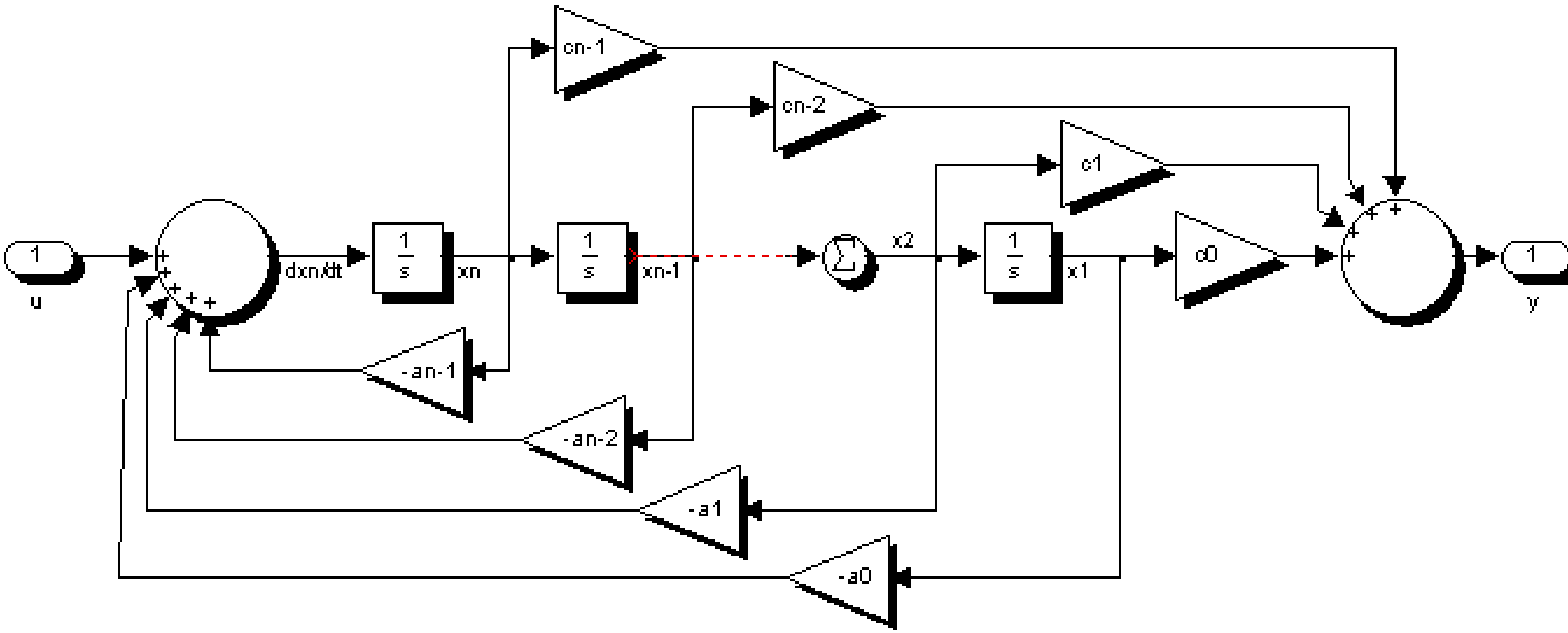
Forma canónica controlable (SISO)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = c^T \cdot x + d \cdot u$$

Las matrices o vectores C y D no siguen ningún patrón en particular

Estructura del modelo FCC (SISO)



Transformación a FCC

Sea **T** la matriz de transformación, con **M** la matriz de controlabilidad $\mathbf{T} = \mathbf{MW}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \bullet & \bullet & \bullet & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ a_{n-1} & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{\mathbf{n-1}}\mathbf{B}]$$

donde las a_i son los coeficientes característicos

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Transformación a FCC

- Se define $\hat{\mathbf{x}}$ como un nuevo vector de estado

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$$

- Si el sistema tiene estado completo controlable, la matriz **T** tiene inversa.

- Utilizando la matriz **T** se puede transformar el sistema a la forma ***canónica controlable***:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Ejercicio 1

- Encuentre si el sistema es controlable y transfórmelo a la forma canónica controlable o FCC

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Solución al ejercicio 1

- Prueba de controlabilidad

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- Como M es n*x*n, y su determinante no es cero, entonces el par (A,B) es controlable

Solución al ejercicio 1

- Conversión a FCC

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 5\lambda - 6$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución al ejercicio 1

- Conversión a FCC

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Verificación :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \mathbf{c}^T\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Observabilidad: definición

Partimos del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- se dice que el estado **x**(t_0) es observable si dada cualquier entrada **u**(t), existe un tiempo finito $t_f \geq t_0$ tal que, el conocimiento de:
  - **u**(t) para $t_0 \leq t < t_f$
  - las matrices **A**, **B**, **C** y **D**
  - la salida **y**(t) para $t_0 \leq t < t_f$

sea suficiente para determinar **x**(t_0).

Observabilidad: definición

- Si cada estado del sistema es observable para un tiempo finito, se dice que el sistema es ***completamente observable***, o simplemente ***observable***.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \cdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Para que el sistema descrito sea ***completamente observable***, es necesario y suficiente que **S,** la matriz de observabilidad de *np* x *n,* tenga un rango *n*.

Pruebas para la observabilidad

- Si el sistema tiene solo una salida, **C** es una matriz de reglón de 1 x *n* y **S** es una matriz cuadrada de *n* x *n*. Entonces, el sistema es completamente observable si **S** es no singular

- Para un sistema SISO, el par [**A**,**C**] es completamente observable si **A** y **C** están en la forma canónica observable (FCO) o son transformables a la FCO mediante una transformación de similitud.

Pruebas para la observabilidad (2)

- Si **A** está en la forma canónica diagonal (FCD) el par [**A**,**C**] es completamente observable si todos los elementos en las columnas de **C** son diferentes de cero.

- Si **A** está en la forma canónica de Jordan (FCJ), el par [**A**,**C**] es completamente observable si al menos uno, de los elementos en las columnas de **C** que corresponden a la primera columna de cada bloque de Jordan, es diferente de cero.

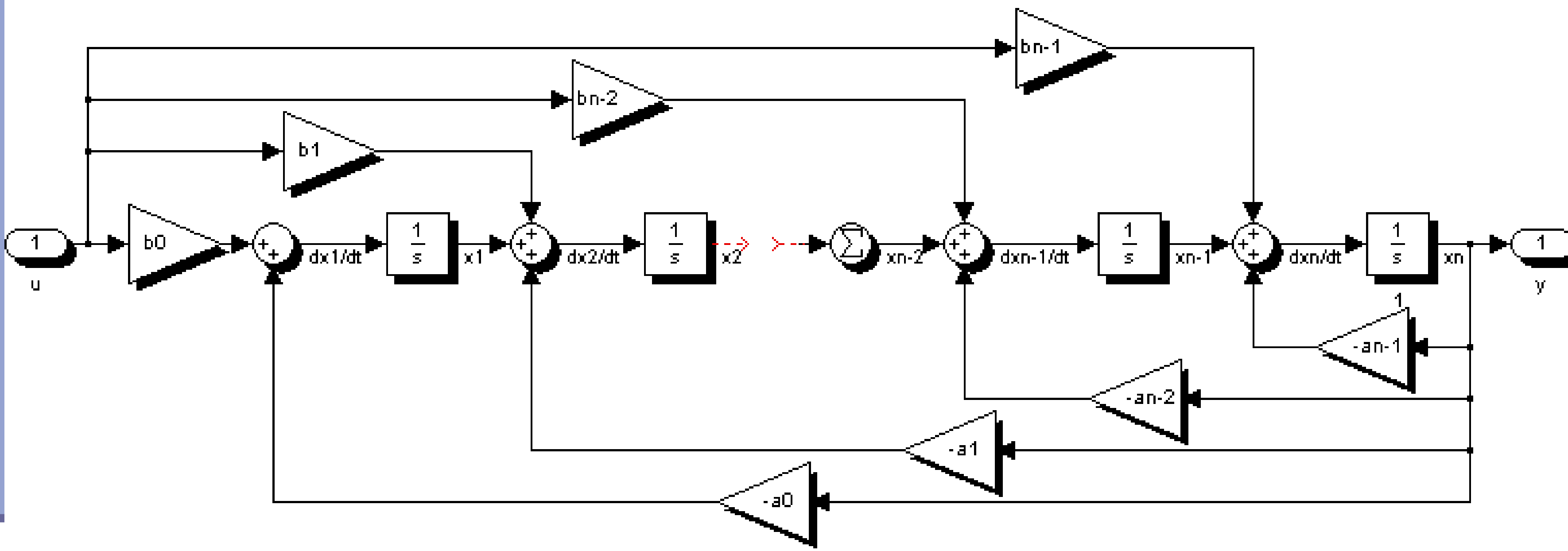
La forma canónica observable

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & . & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Los elementos de las matrices $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{D}}$ no están restringidos a ninguna forma

Estructura del modelo FCO



Ejemplo 2: Sistema con cancelación de polos

- Sea la función de transferencia: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+1}{(s+1)(s+2)}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se descompone en la forma FCC, por lo que es controlable.
- Pero, cuya matriz de observabilidad, **S, es singular** y por ello el par [**A,C**] **no es observable**

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: continuación

- El sistema en forma FCC se transforma a la forma FCO

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

- Debido a que la FCO se puede ***realizar,*** el par [**A, C**] ***es observable; pero, M es singular y se pierde la controlabilidad***

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Transformación a FCO

Sea **Q** la matriz de transformación, con **S** la matriz de observabilidad $\mathbf{Q} = (\mathbf{WS})^{-1}$

Y con $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \bullet & \bullet & \bullet & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ a_{n-1} & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \cdots \\ \mathbf{CA}^{\mathbf{n-1}} \end{bmatrix}$

Transformación a FCO

- Se define $\hat{\mathbf{x}}$ como un nuevo vector de estado

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

- Si el sistema es observable, la matriz **Q** tiene inversa.

- Utilizando la matriz **Q** se puede transformar el sistema a la forma ***canónica observable***:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Ejercicio 2

- Encuentre si el sistema es observable y transfórmelo a la forma canónica observable o FCO

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Solución al ejercicio 2

- Prueba de observabilidad

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -22 & 26 \end{bmatrix}$$

- Como ***S*** es n*x*n, y su determinante no es cero, entonces el par (A,C) es observable

Solución al ejercicio 2

- Conversión a FCO

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{WS})^{-1}$$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 5\lambda - 6$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -22 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 41 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución al ejercicio 2

- Conversión a FCO

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Verificación :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -17 & 41 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/92 & 41/92 \\ 1/92 & 17/92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -17 & 41 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} = \mathbf{c}^T\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/92 & 41/92 \\ 1/92 & 17/92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

1. Encuentre si el sistema continuo mostrado es controlable y observable.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

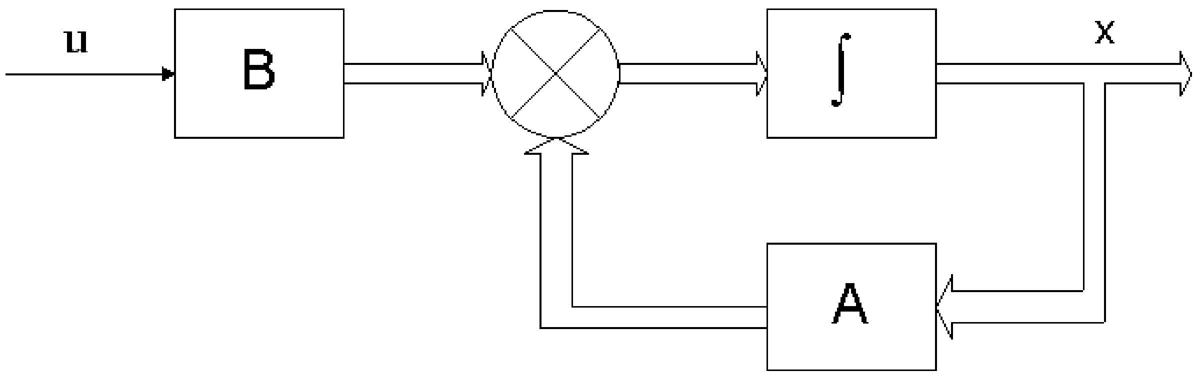
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

2. Transforme si es posible el sistema anterior a la forma canónica controlable, FCC, a la forma canónica observable, FCO y a la forma canónica diagonal, FCD.

Aplicación de la controlabilidad: Realimentación de estado

Tenemos un sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$



Hacemos la señal *u* como

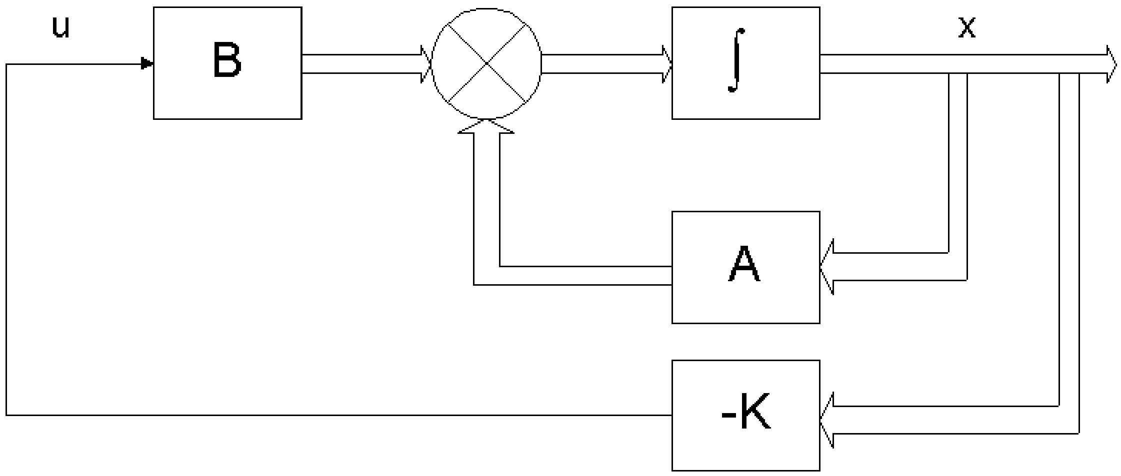
$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Sustituyendo obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

Realimentación de estado

Puede observarse que el nuevo sistema posee una nueva matriz $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})$



Que posee nuevos valores propios $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$$

Ejemplo 3: Ubicación de polos

Considere el sistema continuo en FCC, lo cual significa que es controlable, tiene los valores propios siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= +1 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Problema: se desea colocar arbitrariamente los valores propios o polos de lazo cerrado en μ_1 = -2 y μ_2 = -3. Es decir:

$$\det\left(\lambda\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}\right) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

Ejemplo 3: Solución por sustitución directa de K

Por sustitución directa de **K** = [k_1, k_2] en el polinomio característico deseado

$$\left|\lambda\mathbf{I}-\left(\mathbf{A}-\mathbf{BK}\right)\right| = \left\|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right)\right\| =$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ \left(k_1-1\right) & \left(\lambda+k_2\right)\end{vmatrix} = \lambda^2+k_2\lambda+\left(k_1-1\right)$$

Comparando polinomios obtenemos **K:**

$$\lambda^2+5\lambda+6=\lambda^2+k_2\lambda+\left(k_1-1\right)$$

K = [7   5]

Referencias

[1] Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.

[2] Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4ª Ed., Madrid.