2 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

OBJETIVO: Caracterizar las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias discretas más comunes.

2.1 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

Considera el experimento de lanzar una moneda 3 veces, la probabilidad de que caiga cara en un lanzamiento es p. Supón que por cada cara ganas 1 peso y por cada cruz pierdes 1 peso, si X es la cantidad total ganada al cabo de los tres lanzamientos. Para cada evento simple (E_i) del espacio muestral se tiene un valor de X y un valor para su probabilidad como se ilustra en el siguiente cuadro:

i	E_i	X	$P(E_i)$
1	ccc	3	p^3
2	ccx	1	$p^2(1-p)$
3	cxc	1	$p^2(1-p)$
4	xcc	1	$p^2(1-p)$
5	cxx	-1	$p(1-p)^2$
6	xcx	-1	$p(1-p)^2$
7	xxc	-1	$p(1-p)^2$
8	xxx	-3	$(1-p)^3$

Cada lanzamiento es independiente de los demás por lo que $P(ccc)=\prod_{i=1}^{3}P(c)=p^3$.

Además $\sum_{i=1}^{8}P(E_i)=p^3+3\left[p^2(1-p)\right]+3p(1-p)^2+(1-p)^3=(p+1-p)^3=1$.

Si A es el evento de que la ganancia es 1 peso, se tiene que $A=\{E_i \mid X(E_i)=1\}=\{ccx,cxc,xcc\}$
Entonces $P(A)=3p^2(1-p)$.

A menudo se hace referencia a este hecho diciendo que $X=1$ tiene probabilidad $3p^2(1-p)$ o bien que $P(X=1)=3p^2(1-p)$, de igual manera se dice que:
$P(X=-1)=3p(1-p)^2$, $P(X=3)=p^3$, $P(X=-3)=(1-p)^3$ y $P(X=2)=0$.

Definición: Sea S el espacio muestral asociado a un experimento. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $E_i\in S$ un número real $X(E_i)$ se llama **variable aleatoria (v.a)** y se denota con una letra mayúscula *X, Y, Z*, etc la v.a es una “descripción” por ejemplo X puede ser el número de artículos defectuosos en una muestra aleatoria, o la ganancia al cabo del juego descrito anteriormente, etc.

La v.a toma valores numéricos, por ejemplo si la variable aleatoria X es el número de materias aprobadas por un alumno al cabo del primer semestre en la ESCOM los valores posibles de esta v.a, bajo el supuesto de que se cursan 6 materias en el primer semestre, son x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Entonces la expresión "$X = x$" se lee "el número de materias aprobadas por un alumno al cabo del primer semestre en la ESCOM es igual a x". Recuerda que X es una descripción de algo que se cuenta (en el caso discreto) y x es un número.

Definición: Un valor x de la v.a es posible si tiene probabilidad de ocurrencia diferente de cero, es decir si $P(X = x) \neq 0$.

Definición: Si el número de valores posibles que puede tomar la variable aleatoria X es finito (los puedes contar y acabas) o infinito numerable (los puedes contar pero nunca acabas) se dice que X es una v.a **discreta.**

Ejemplo:
Un envío de 5 automóviles contiene dos de ellos con pequeñas fallas en la pintura. Si una agencia recibe en forma aleatoria tres de estos automóviles, obtén una lista de los elementos del espacio muestral S utilizando las letras B y D para bueno y defectuoso respectivamente; después asigna a cada punto muestral un valor x de la v.a X que representa el número de automóviles adquiridos por la agencia que tuvieron defectos de pintura.

Solución

Se tienen 2 automóviles defectuosos y 3 buenos de los cuales queremos seleccionar 3 al azar, no importa el orden por lo tanto la cardinalidad del espacio muestral está dada por:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(3!)(2!)} = \frac{5(4)(3!)}{(3!)(2!)} = \frac{20}{2} = 10$$

De estas 10 posibles muestras de tamaño 3 se tienen sólo tres posibilidades dado que hay 3 automóviles buenos puede ser que ninguno en la muestra sea defectuoso, puede ser que sólo uno sea defectuoso o que dos sean defectuosos, esto porque sólo hay 2 defectuosos en los automóviles disponibles.

¿Cuántas muestras de 3 automóviles se pueden sacar de los 5 que tenemos siendo los 3 buenos? $\binom{3}{3} = 1$

¿Cuántas muestras de 3 automóviles se pueden sacar de los 5 que tenemos siendo 2 buenos y 1 defectuoso?

$$\binom{3}{2}\binom{2}{1} = \frac{3!}{(2!)(1!)}(2) = 6$$

¿Cuántas muestras de 3 automóviles se pueden sacar de los 5 que tenemos siendo 1 bueno y 2 defectuosos?

$$\binom{3}{1}\binom{2}{2} = \frac{3!}{(1!)(2!)}(1) = 3$$

Listando las 10 posibles muestras y el valor de la v.a se tiene que:

Muestra i	E_i	$X = x$
1	$B_1B_2B_3$	0
2	$B_1B_2D_1$	1
3	$B_1B_2D_2$	1
4	$B_1B_3D_1$	1
5	$B_1B_3D_2$	1
6	$B_2B_3D_1$	1
7	$B_2B_3D_2$	1
8	$B_1D_1D_2$	2
9	$B_2D_1D_2$	2
10	$B_3D_1D_2$	2

El espacio muestral está dado por el conjunto siguiente:

$$S = \{B_1B_2B_3, B_1B_2D_1, B_1B_2D_2, B_1B_3D_1, B_1B_3D_2, B_2B_3D_1, B_2B_3D_2, B_1D_1D_2, B_2D_1D_2, B_3D_1D_2\}$$

y los valores posibles de la v.a son 0, 1, 2.

2.1.1 FUNCIÓN DE MASA DE PROBABILIDAD.

Definición: La función f definida sobre $\mathfrak{R}$ como $\boxed{f_X(x) = P(X = x)}$ se conoce como la función de masa de probabilidad o función de probabilidad f.d.p de la v.a X si cumple con las propiedades siguientes:

i) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in \mathfrak{R}$.
ii) $\{x \mid f_X(x) \neq 0\}$ es un conjunto finito o infinito numerable.
iii) $\sum_x f_X(x) = 1$

Nota._ Si x es tal que $f_X(x) > 0$ entonces x es un valor posible de la v.a X.

Ejemplo:
En base al ejemplo de lanzar 3 veces la moneda de la sección anterior, se dijo que la probabilidad de una cara en un lanzamiento era p. Si $p = 0.4$ la v.a X tiene la función de masa de probabilidad siguiente:

$$f_X(-3) = P(X = -3) = (1-p)^3 = (1-0.4)^3 = 0.216.$$
$$f_X(-1) = P(X = -1) = 3p(1-p)^2 = 3(0.4)(1-0.4)^2 = 3(0.4)(0.6)^2 = 0.432.$$
$$f_X(1) = P(X = 1) = 3p^2(1-p) = 3(0.4)^2(1-0.4) = 3(0.4)^2(0.6) = 0.288.$$
$$f_X(3) = P(X = 3) = p^3 = (0.4)^3 = 0.064.$$

La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta se puede presentar como una tabla de valores de la manera siguiente:

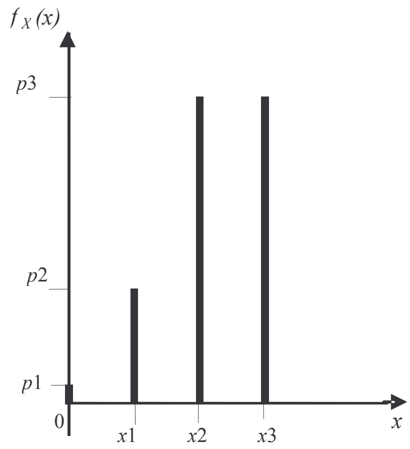
Función de probabilidad de *X*: ganancia al cabo de los tres lanzamientos.

$X = x$	$f_X(x) = P(X = x)$
-3	0.216
-1	0.432
1	0.288
3	0.064

Observa que $0.216 + 0.432 + 0.288 + 0.064 = 1$.

La f.d.p de una v.a además de representarse por una tabla se puede representar por una gráfica o por una fórmula.

Si la v.a X toma los valores posibles $x = x1, x2, x3$ y sus probabilidades asociados son $p1,\ p2,\ p3$ respectivamente entonces su f.d.p se puede representar con la gráfica siguiente:



Función de probabilidad para la v.a *X*.

También se puede decir que la v.a X tiene f.d.p dada por $f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, con $x = 0, 1, 2, ..., n$.

O que la f.d.p de la v.a Y es de la forma $f_Y(y) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$ con $y = 0, 1, 2, ...$

Observa que la manera más compacta de expresar una f.d.p es mediante una fórmula pero a veces no es tan fácil construirla.

2.1.2 FUNCIÓN ACUMULATIVA.

Definición: Se define a la **función de probabilidad acumulada o acumulativa** de la v.a X en el número x, $F_X(x)$ con $-\infty < x < \infty$ como $\boxed{F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{i \le x} P(X = i) = \sum_{i \le x} f_X(i)}$

Ejemplos:

1._ Sea X una v.a con posibles valores $x = 0,\ 1,\ 2$ tal que $P(X=0) = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{1}{6}$ y $P(X=2) = \frac{1}{2}$. Encuentra y grafica la función de probabilidad acumulada para la variable aleatoria X.

<u>**Solución**</u>

Primero necesitamos encontrar la acumulada en cada uno de los valores posibles de la v.a:

$$F_X(0) = P(X=0) = \frac{1}{3}.$$

$$F_X(1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$F_X(2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1.$$

Observa que

$$F_X(0.5) = P(X \le 0.5) = P(X \le 0) = P(X=0) = \frac{1}{3}.$$

$$F_X(1.9) = P(X \le 1.9) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{2}.$$

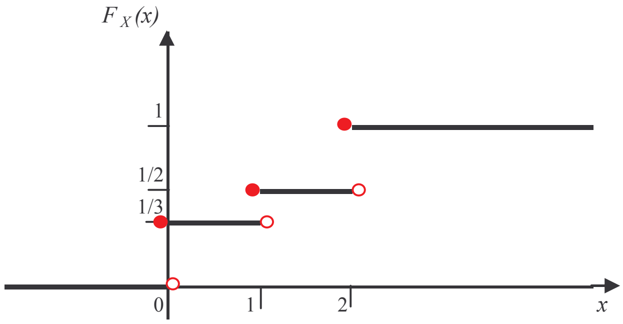
$$F_X(-1) = P(X \le -1) = 0$$

Por lo tanto la función de probabilidad acumulada es la función por partes:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Nota: La función de probabilidad acumulada $F_X(x)$ de una v.a discreta siempre es una función por partes.

Su gráfica es de la forma escalonada:



Función de probabilidad acumulada para la v.a X

Las propiedades de la función de probabilidad acumulada son:
i) $0 \le F_X(x) \le 1 \quad , \quad -\infty < x < \infty$
Esto es porque la función de distribución acumulada es una suma de valores positivos y cuando se agotan todos los valores posibles de la v.a se tiene la probabilidad de *todo* que es igual a 1.

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

Esto es cierto ya que si aún no se alcanza el primer valor posible de la v.a no se ha acumulado nada de probabilidad pero sí ya se ha rebasado el último valor posible de la v.a. entonces ya se tiene toda la probabilidad posible que es uno.

iii) Si $x_1 \le x_2$ entonces $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$
Si el valor de x_1 y el valor de x_2 están entre dos valores posibles consecutivos de la v.a entonces las acumuladas coinciden. Si entre x_1 y x_2 hay al menos un valor posible de la v.a. entonces la acumulada en x_1 es menor que la acumulada en x_2.

iv) Es continua por la derecha, es decir $F_X(x)$ existe y además $F_X(x) = \lim\limits_{t\to x^+} F_X(t)$.

Cálculo de probabilidades en función de acumuladas.

Toda probabilidad se puede expresar en términos de la función de probabilidad acumulada, tal como se muestra en los siguientes casos:

<u>Caso 1</u> $P(X > x) = 1 - P(X \le x)$ es decir $\boxed{P(X > x) = 1 - F_X(x)}$
Observa que $S = (X > x) \cup (X \le x)$ sacando probabilidad $P(S) = P(X > x) + P(X \le x)$ despejando la probabilidad de interés $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F_X(x)$.

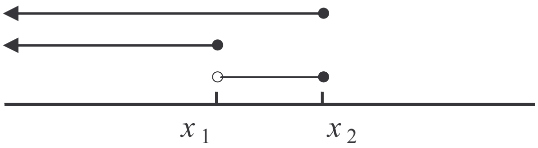
<u>Caso 2</u> Si $x_1 < x_2$ $\quad P(x_1 < X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1)$ es decir

$$\boxed{P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)}$$

$F_X(x_2) = P(X \leq x_2)$

$F_X(x_1) = P(X \leq x_1)$

$P(x_1 < X \leq x_2)$



Caso 3 $\boxed{P(X < x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)}$

Dado que las v.v.a.a discretas toman valores enteros esta probabilidad también se puede expresar como $P(X < x) = P(X \leq x - 1) = F_X(x-1)$.

Caso 4 $\boxed{P(X = x) = \lim_{t \to x^+} F_X(t) - \lim_{t \to x-} F_X(t)}$

Ya que $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - P(X < x)$ y usando la propiedad iv) de la definición y el caso 3 llegamos al caso 4.
Otra manera de expresar esta probabilidad puntual es;
$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X \leq x-1) = F_X(x) - F_X(x-1)$.

2._ Se sabe que al lanzar una moneda, a menudo sale cara (c) tres veces más que cruz (x). Esta moneda se lanza 3 veces. Sea *X* la v.a que representa el número de caras que aparecen:
a) Encuentra la función de masa de probabilidad de *X*.
b) Encuentra la función de probabilidad acumulada de *X*.
c) Grafica ambas funciones.

Solución

a) La variable aleatoria es *X*: número de caras en los tres lanzamientos. La ocurrencia de cara (c) es tres veces la de cruz (x), por lo tanto, si la ocurrencia de cruz está dada por a, la de cara es $3a$, y el número total de lanzamientos sería $4a$, con lo cual se tiene que $P(x) = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$ y $P(c) = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$.

E_i	$X = x$	$P(E_i)$
ccc	3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$
ccx	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$
cxc	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4}$
xcc	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$

cxx	1	$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$
xcx	1	$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$
xxc	1	$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$
xxx	0	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

La f.d.p de la variable aleatoria se puede presentar en la tabla siguiente:

Función de probabilidad para el número de caras
en tres lanzamientos de una moneda.

$X = x$	$f_X(x) = P(X = x)$
0	$\frac{1}{64}$
1	$\frac{9}{64}$
2	$\frac{27}{64}$
3	$\frac{27}{64}$

Observa que $\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{27}{64}+\frac{27}{64}=1$.

b) La función de probabilidad acumulada se construye de la manera siguiente:

$$F_X(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = \frac{1}{64}$$

$$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{10}{64}$$

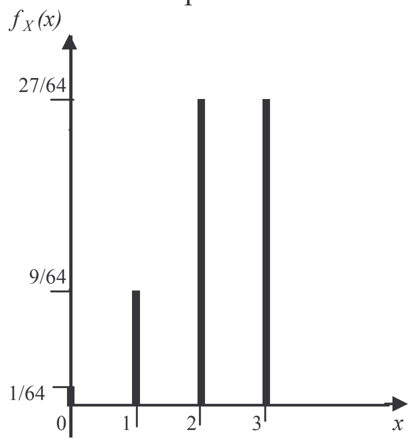
$$F_X(2) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

$$F_X(3) = P(X \le 3) = P(X = 0) + \ldots + P(X = 3) = \frac{37}{64} + \frac{27}{64} = 1$$

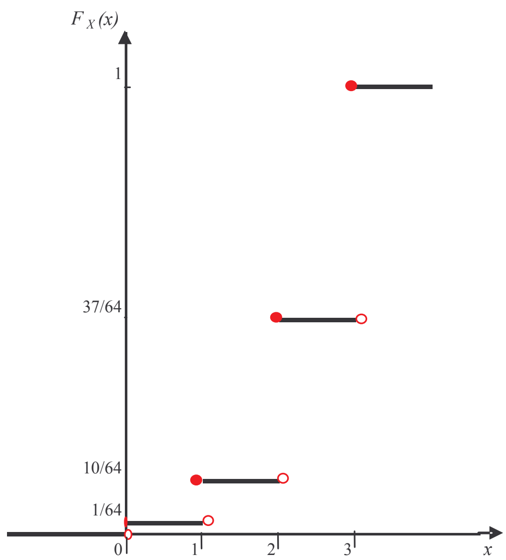
La función de probabilidad acumula de la v.a X es la función escalonada siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{64} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{10}{64} & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \dfrac{37}{64} & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

c) Las gráficas de la f.d.p y de la distribución de probabilidad acumulada son:



Función de probabilidad para la v.a X



Función de probabilidad acumulada para la v.a X.

Observa que de la gráfica de la probabilidad acumulada se tiene que:

$$P(X=1)=\frac{10}{64}-\frac{1}{64}=\frac{9}{64}$$

$$P(X=3)=\frac{64}{64}-\frac{37}{64}=\frac{27}{64}$$

$$P(X=-1)=P(X=1.4)=0$$

2.2 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Definición: Si X es una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$, **la esperanza**, **valor esperado** o **media** de la v.a X está dada por

$$\boxed{E(X)=\sum_x xf_X(x)=\sum_x xP(X=x)}$$

Ejemplos:

1._ En base al ejemplo de la sección 2.1.1 donde se lanzaba una moneda 3 veces y por cada cara se ganaba 1 peso y por cada cruz se perdía 1 peso. ¿Cuál es el valor esperado de la v.a. X: ganancia al cabo de los tres lanzamientos?

Solución

Función de probabilidad de X: ganancia al cabo de los tres lanzamientos.

$X=x$	$f_X(x)=P(X=x)$
-3	0.216
-1	0.432
1	0.288
3	0.064

$$E(X)=\sum_x xf_X(x)=-3P(X=-3)+(-1)P(X=-1)+1P(X=1)+3P(X=3)$$
$$=-3(0.216)-1(0.432)+1(0.288)+3(0.064)=-0.6$$

La ganancia esperada en este juego es de -0.6 pesos. Lo cual indica una pérdida de dinero.

Observación: El valor esperado de la v.a no necesariamente es uno de los valores posibles de la v.a.

¿Cómo se interpreta el valor esperado de una variable aleatoria?
Imagina que el experimento se repite n veces, se tendría entonces n ganancias, si se saca el promedio de estas ganancias el número resultante sería muy parecido al valor esperado, es decir a –0.6 pesos. La similitud entre el promedio de las n ganancias y el valor esperado calculado aumenta a medida que n aumenta.

Entonces no se debe pensar que al hacer una vez el experimento se perderá la cantidad de 0.6 pesos, de hecho ya nos dimos cuenta que esto no ocurre nunca ya que este no es un valor posible de la v.a. en un solo experimento, se puede perder uno o tres pesos y se puede ganar uno o tres pesos. Pero participar muchas veces en el experimento, a la larga produce una pérdida de dinero.

2._ Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% es defectuoso y el 90% no lo es. Si se produce un artículo defectuoso el fabricante pierde $1.00, mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de $5.00. Si X es la utilidad neta por artículo, encuentra su valor esperado.

Solución

X: utilidad neta por artículo.
$x = -1,\ 5.$
$P(Defectuoso) = 0.1$
$P(Bueno) = 0.9$

Los valores posibles de la v.a son –1 si el artículo es defectuoso y 5 si no lo es. La esperanza de la utilidad es:

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = -1P(X=-1) + 5P(X=5)$$
$$= -1P(Defectuoso) + 5P(bueno) = -1(0.1) + 5(0.9) = 4.40$$

Nota 1._ Si la v.a X puede tomar un número infinito numerable de valores, entonces se dice que la esperanza de X existe si y sólo si $\sum_x |x| f_X(x) < \infty$, es decir la serie tiene que ser absolutamente convergente.

Nota 2._ Si X es una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$ y $g(x)$ es una función de valores reales de x, se tiene que el valor esperado de la función de la v.a está dado por la expresión siguiente:

$$\boxed{E[g(x)] = \sum_x g(x) f_X(x)}$$

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO.

Sea X una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$

P1._ Si a y b son constantes y $Y = aX + b$, entonces $\boxed{E(Y) = aE(X) + b}$

Ya que; $E(Y) = \sum_x (ax+b) f_X(x) = \sum_x ax f_X(x) + \sum_x b f_X(x)$

$$= a\sum_x x f_X(x) + b\sum_x f_X(x) = aE(X) + b \qquad \blacklozenge$$

Observación._ Si $a = 0$ la esperanza de la constante b es ella misma, $\boxed{E(a) = a}$

P2._ Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias con valores esperados $E(X_i)$, i = 1, 2, ..., n respectivamente, entonces la esperanza de la suma de las variables aleatorias es la suma de las esperanzas de las variables aleatorias.

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

Definición: La **covarianza** entre las variables aleatorias *X* y *Y* con $E(X) = \mu_X$ y $E(Y) = \mu_Y$ está dada por:

$$\boxed{Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}$$

Se obtiene una definición alterna con un poco de álgebra.

$$\begin{aligned} E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] &= E(XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y) \\ &= E(XY) - E(X)\mu_Y - \mu_X E(Y) + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y}$$

Observación._ En el capítulo 4 se verán distribuciones de probabilidad conjuntas y se entenderá la siguiente justificación. Si $X \perp Y$ entonces $Cov(X,Y) = 0$.

Para $X \perp Y$ se tiene que $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ por lo que la esperanza del producto es el producto de las esperanzas.

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf_{XY}(x,y) = \sum_x \sum_y xyf_X(x) f_Y(y)$$
$$E(XY) = \sum_x xf_X(x) \sum_y yf_Y(y) = E(X)E(Y) = \mu_X \mu_Y$$

Es decir, la esperanza de un producto de variables aleatorias independientes es el producto de las esperanzas de las variables aleatorias.

La covarianza entre dos variables aleatorias independientes es cero.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = E(X)E(Y) - \mu_X \mu_Y = 0$$

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Definición._ Si *X* es una v.a con media μ, la **varianza de** *X* se define como $\boxed{V(X) = E(X-\mu)^2}$

Observaciones:

1._ La varianza de la v.a es un número no negativo.

2._ Otra manera de expresar la varianza se obtiene al desarrollar el cuadrado de la expresión original y con un poco de álgebra:

$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$ es decir $\boxed{V(X) = E(X^2) - \mu^2}$

3._ La varianza proporciona una medida de la variación o dispersión de una distribución alrededor de su media. Un valor pequeño de la varianza indica que la distribución de probabilidad está muy concentrada alrededor de la media y un valor grande indica que la distribución de probabilidad tiene gran dispersión alrededor de su valor central.

4._ La varianza se denota con la letra griega sigma cuadrada $V(X)=\sigma^2$, pero como la varianza nos lleva a hablar de unidades cuadradas y esto deja de tener sentido para el investigador, se acostumbra trabajar con su raíz cuadrada positiva, a la cual se le llama **desviación estándar** y se denota por sigma $\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}}$

PROPIEDADES DE LA VARIANZA.

P1._ La varianza de una constante es cero. Si a = Cte entonces $\boxed{V(a)=0}$

$$V(a)=E\left(a^2\right)-[E(a)]^2=a^2-a^2=0 \quad \blacklozenge$$

P2._ La varianza del producto de una constante por una v.a. es el producto del cuadrado de la constante por la varianza de la v.a. $\boxed{V(aX)=a^2V(X)}$

$$V(aX)=E\left(a^2X^2\right)-[E(aX)]^2=a^2\left\{E\left(X^2\right)-[E(X)]^2\right\}=a^2V(X) \quad \blacklozenge$$

P3._ Si X y Y son variables aleatorias cualesquiera $\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)}$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E[(X+Y)^2]-E^2(X+Y) \\ &= E\left(X^2+Y^2+2XY\right)-[E(X)+E(Y)]^2 \\ &= E\left(X^2\right)+E\left(Y^2\right)+2E(XY)-E^2(X)-E^2(Y)-2E(X)E(Y) \\ &= [E\left(X^2\right)-E^2(X)]+[E\left(Y^2\right)-E^2(Y)]+2[E(XY)-E(X)E(Y)] \\ &= V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y) \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Si X y Y son variables aleatorias independientes entonces la $Cov(X,Y)=0$ y por lo tanto la varianza de la suma es la suma de las varianzas.

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$$

La varianza de la suma de tres variables aleatorias cualesquiera.

$$\begin{aligned} V(X+Y+Z) &= V[(X+Y)+Z]=V(X+Y)+V(Z)+2Cov[(X+Y),Z] \\ &= V(X)+V(Y)+V(Z)+2[Cov(X,Y)+Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)] \end{aligned}$$

Ya que $Cov[(X+Y),Z]=E[(X+Y)Z]-E(X+Y)E(Z)$

$$\begin{aligned} &= E(XZ+YZ)-E(X)E(Z)-E(Y)E(Z) \\ &= [E(XZ)-E(X)E(Z)]+[E(YZ)-E(Y)E(Z)] \\ &= Cov(X,Z)+Cov(Y,Z) \end{aligned}$$

Si X , Y y Z son mutuamente independientes entonces $Cov(X,Y) = Cov(X,Z) = Cov(Y,Z) = 0$ y por lo tanto $V(X+Y+Z) = V(X)+V(Y)+V(Z)$.

En general $V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$.

Observa también que la segunda sumatoria consta de $\frac{n(n-1)}{2}$ términos.

Si las n variables aleatorias son independientes la segunda sumatoria se hace cero y la varianza de la suma de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas de las variables aleatorias.

Generalizando, se tiene que si $X_1, X_2,..., X_n$ son variables aleatorias independientes entonces la varianza de su suma es la suma de las varianzas.

$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$$

Ejemplo:

Si X es una v.a con media y varianza dadas por $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Demuestra que $E[X(X-1)] = \mu(\mu-1)+\sigma^2$.

<u>Solución</u>

$E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$

Pero $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ $\therefore$ $E(X^2) = V(X) + E^2(X)$

Entonces $E[X(X-1)] = \sigma^2 + \mu^2 - \mu = \sigma^2 + \mu(\mu-1)$ ♦

2.3 FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Definición: Si X es una v.a con $E(X) = \mu_X$ y k un entero positivo se definen dos tipos de momentos para la v.a:

1._ k-ésimo momento alrededor del origen definido como $\boxed{\mu_k^o = E(X^k) = \sum_x x^k f_X(x)}$

2._ k-ésimo momento alrededor de la media o k-ésimo momento central, definido por:

$$\boxed{\mu_k^c = E\left[(X-\mu_X)^k\right] = \sum_x (x-\mu_X)^k f_X(x)}$$

Observaciones:

i) La media de una v.a es el momento de orden 1 o primer momento alrededor del origen.

$$\mu_X = \mu_1^o$$

ii) La varianza de la v.a X es el segundo momento central de la misma.

$$\sigma_X^2 = \mu_2^c$$

Definición: Si X es una v.a discreta, la función generadora de momentos f.g.m se define como:

$$\boxed{\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x e^{tx} f_X(x)}$$

Observaciones:

1) Sacando la primera derivada de la f.g.m y evaluando en $t = 0$ se obtiene la media de la v.a.

$$\psi'_X(t=0) = \frac{d}{dt}\left[E\left(e^{tX}\right)\right]\Big|_{t=0} = E\left[\frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\right]\Big|_{t=0} = E\left(Xe^{tX}\right)\Big|_{t=0} = E\left(Xe^{0(X)}\right) = E(X)$$

$$\boxed{\psi'_X(t=0) = E(X) = \mu_X}$$

Es más intuitiva la demostración usando el hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas, de la manera siguiente:

$$\psi'_X(t) = \frac{d}{dt}\left[E\left(e^{tX}\right)\right] = \frac{d}{dt}\sum_x e^{tx} f_X(x) = \sum_x \frac{d}{dt} e^{tx} f_X(x) = \sum_x e^{tx} x f_X(x)$$

Evaluando en cero se tiene:

$$\psi'_X(t=0) = \sum_x e^{0(x)} x f_X(x) = \sum_x x f_X(x) = E(X) = \mu_X$$

2) La n-ésima derivada de la f.g.m evaluada en cero es el n-ésimo momento.

La misión en la vida de la f.g.m es generar momentos y ahora ya sabemos cómo lo hace.

PROPIEDADES DE LA f.g.m.

P1._ Si X es una v.a con f.g.m $\psi_X(t)$ y $Y = aX + b$ es otra v.a, con a y b constantes, entonces

$$\boxed{\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)}$$

Ya que $\psi_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(aX+b)}\right) = E\left(e^{atX}e^{bt}\right) = e^{bt}E\left(e^{atX}\right) = e^{bt}\psi_X(at)$

P2._ Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes cada una con f.g.m $\psi_{X_i}(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ y $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces la f.g.m de la v.a. Y, está dada por $\boxed{\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n}\psi_{X_i}(t)}$

Ya que $\psi_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\psi_{X_i}(t)$

Ejemplos:

1._ Supón que X es una v.a con $E(X) = 1$, $E\left(X^2\right) = 2$ y $E\left(X^3\right) = 5$. Determina el valor del tercer momento central de X.

Solución

$$\mu_3^c = E\left[(X-\mu)^3\right] = E\left(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right) = E\left(X^3\right) - 3\mu E\left(X^2\right) + 3\mu^3 - \mu^3$$

$$\mu_3^c = 5 - 3(2) + 2 = \underline{1}$$

2._ Determina la media y la varianza de la v.a X si se sabe que su f.g.m está dada por $\psi_X(t) = \frac{1}{4}\left(3e^t + e^{-t}\right)$ para $-\infty < t < \infty$.

Solución

La media de la v.a es el primer momento, entonces necesitamos la primera derivada de la f.g.m y evaluar en cero:

$$\psi'_X(t=0) = \frac{1}{4}\left(3e^t - e^{-t}\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(3-1) = \frac{1}{2} = \mu_X$$

$$\psi''_X(t=0) = \frac{1}{4}\left(3e^t + e^{-t}\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(3+1) = 1$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \mu_X^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

3._ Sea X una v.a con media μ y varianza σ^2 y sea $\psi_X(t)$ su f.g.m para $-\infty < t < \infty$. Si c es una constante positiva y Y una v.a con f.g.m $\psi_Y(t) = e^{c[\psi_X(t)-1]}$ para $-\infty < t < \infty$. Determina las expresiones de la media y la varianza de Y en función de la media y la varianza de X.

Solución

$$\mu_Y = \psi'_Y(t=0) = e^{c[\psi_X(t)-1]} c\,\psi'_X(t)\Big|_{t=0} = e^{c(1-1)} c\mu = \underline{c\mu}$$

Ya que $\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) \;\therefore\; \psi_X(0) = E\left(e^0\right) = E(1) = 1$

Para el calculo de la varianza, se necesita la segunda derivada de la f.g.m de Y evaluada en cero.

$$\psi'_Y(t) = ce^{-c} e^{c\psi_X(t)} \psi'_X(t)$$

$$\psi''_Y(t) = ce^{-c}\left[e^{c\psi_X(t)}\psi''_X(t) + \psi'_X(t) e^{c\psi_X(t)} c\,\psi'_X(t)\right]$$

$$\psi''_Y(0) = ce^{-c}\left[e^{c\psi_X(0)}\psi''_X(0) + \mu^2 e^{c\psi_X(0)} c\right]$$

$$= ce^{-c}\left(e^c \psi''_X(0) + c\mu^2 e^c\right)$$

$$= c\,\psi''_X(0) + c^2\mu^2$$

Pero $\psi''_X(0) = E\left(X^2\right) = V(X) + E^2(X) = \sigma^2 + \mu^2$

Entonces $\psi''_Y(0) = c\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + c^2\mu^2$

Por lo tanto $V(Y) = E\left(Y^2\right) - E^2(Y) = c\sigma^2 + c\mu^2 + c^2\mu^2 - c^2\mu^2 = c\left(\sigma^2 + \mu^2\right)$

4._ Si $\psi_X(t)=\frac{e^t}{6}+\frac{2e^{2t}}{6}+\frac{3e^{3t}}{6}$. Encuentra a) la esperanza de la v.a, b) su varianza y c) Su función de probabilidad.

Solución

a) $\psi'_X(t=0)=\left.\frac{e^t}{6}+\frac{4e^{2t}}{6}+\frac{9e^{3t}}{6}\right|_{t=0}=\frac{1+4+9}{6}=\frac{14}{6}\ \therefore\ \mu_X=\frac{7}{3}$

b) $\psi''_X(t=0)=\left.\frac{e^t}{6}+\frac{8e^{2t}}{6}+\frac{27e^{3t}}{6}\right|_{t=0}=\frac{1+8+27}{6}=\frac{36}{6}\ \therefore\ E(X^2)=6$

$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=6-(7/3)^2=6-\frac{49}{9}=\frac{5}{9}$

c) $\psi_X(t)=E(e^{tX})=\sum_x e^{tx}P(X=x)=\frac{1}{6}e^t+\frac{2}{6}e^{2t}+\frac{3}{6}e^{3t}$

La función de probabilidad de esta v.a está dada por la tabla siguiente:

$X=x$	$f_X(x)=P(X=x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{3}{6}$

Observa que $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=1$.

5._ Cinco pelotas numeradas del 1 al 5 se encuentran en una urna. Se sacan 2 pelotas al azar y se anotan sus números. Para el mayor número seleccionado encuentra:
a) La función de probabilidad.
b) Valor esperado y varianza.
c) Función generadora de momentos.
d) Función de probabilidad acumulada.

Solución

a) Sea la v.a de interés X: mayor de los dos números seleccionados. En el cuadro siguiente se presentan todos los resultados posibles del experimento y el valor que en cada caso toma la v.a.

Pareja Posible	$X = x$
(1,2)	2
(1,3)	3
(1,4)	4
(1,5)	5
(2,3)	3
(2,4)	4
(2,5)	5
(3,4)	4
(3,5)	5
(4,5)	5

La f.d.p puede presentarse mediante la tabla siguiente:

$X = x$	$f_X(x) = P(X = x)$
2	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{2}{10}$
4	$\frac{3}{10}$
5	$\frac{4}{10}$

O mediante la fórmula $f_X(x) = \frac{x-1}{10}$ para $x = 2,\ 3, 4.$

b) Para el cálculo de la media y la varianza es bueno crear un cuadro auxiliar que será de gran ayuda.

$X = x$	$f_X(x) = P(X = x)$	$xf_X(x)$	$x^2 f_X(x)$
2	0.1	0.2	0.4
3	0.2	0.6	1.8
4	0.3	1.2	4.8
5	0.4	2	10

La esperanza de la v.a es entonces $E(X) = \sum_{x=2}^{5} xf_X(x) = 0.2 + 0.6 + 1.2 + 2 = \underline{4}$

Para calcular la varianza necesitamos el segundo momento

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{5} x^2 f_X(x) = 0.4 + 1.8 + 4.8 + 10 = 17$$

Por la tanto la varianza es $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 17 - (4)^2 = 1$.

c) La f.g.m según la definición es:

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=2}^{5} e^{tx} P(X = x) = 0.1e^{2t} + 0.2e^{3t} + 0.3e^{4t} + 0.4e^{5t}.$$

O equivalentemente $\psi_X(t) = \frac{1}{10}\sum_{x=2}^{5}(x-1)e^{tx}$

d) Para la función de probabilidad acumulada $F_X(x) = P(X \le x)$, primero encontramos las acumuladas en cada uno de los valores posibles de la v.a y luego construimos la función por partes.

$F_X(2) = P(X \le 2) = P(X = 2) = 0.1$

$F_X(3) = P(X \le 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.1 + 0.2 = 0.3$

$F_X(4) = P(X \le 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.6$

$F_X(5) = P(X \le 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0.1 & 2 \le x < 3 \\ 0.3 & 3 \le x < 4 \\ 0.6 & 4 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

2.4 Distribución De Bernoulli y Binomial.

Muchos experimentos tienen sólo dos posibles resultados por ejemplo el lanzamiento de una moneda puede resultar en cara o cruz, el género de un bebe al nacer puede ser femenino o masculino, una prueba médica puede ser diagnosticada como positiva o negativa, al evaluar un trabajo terminal puede catalogarse como bueno o como malo, etc. Este tipo de experimentos se llaman **ensayos de Bernoulli,** el resultado que es de interés para el investigador se conoce como **éxito** y el otro resultado se conoce como **fracaso**, con probabilidades asociadas $P(\acute{e}xito) = p$ y $P(fracaso) = 1 - p = q$.

Distribución de Bernoulli.

La variable aleatoria *X:* resultado en un ensayo Bernoulli, con valores posibles $x = 0,\ 1$. Cero para el fracaso y uno para el éxito. Tiene una distribución de Bernoulli con parámetro *p,* dada por la expresión

$$f_X(x) = p^x q^{1-x} \quad x = 0,\ 1$$

Su valor esperado es $E(X) = 0 f_X(0) + 1 f_X(1) = 0(q) + 1(p)$, es decir $\boxed{E(X) = p}$

El segundo momento de la v.a Bernoulli es: $E\left(X^2\right) = 0^2 q + 1^2 p = E(X) = p$.
Dado que:

$V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$ se tiene que $\boxed{V(X) = pq}$

La **f.g.m**:

$$\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = e^{t(0)} f_X(0) + e^{t(1)} f_X(1) = P(X = 0) + e^t P(X = 1) = q + e^t p$$

$$\boxed{\psi_X(t) = q + pe^t}$$

No hay más que decir de esta distribución que es la más sencilla, pero muy útil para las distribuciones de variables aleatorias discretas que veremos en este capítulo.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

Definición: Un experimento es **binomial** si cumple con las dos condiciones siguientes:
i) Consiste de n ensayos Bernoulli independientes.
ii) La probabilidad de éxito p en cada ensayo es constante.
Se dice que la variable aleatoria X: número de éxitos en un experimento binomial, con valores posibles $x = 0, 1, 2, ..., n$, tiene una distribución de probabilidad binomial con parámetros n y p, lo cual se denota como $X \sim b(x; n, p)$, si su f.d.p está dada por

$$b(x;n,p) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

Observa que si $X_1, X_2, ..., X_n$ son n variables aleatorias Bernoulli, entonces la v.a binomial X puede escribirse como la suma de estas, es decir $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Recuerda que la f.g.m de una suma de variables aleatorias independientes es el producto de las funciones generadoras de momentos individuales.
Por lo tanto, la f.g.m para X es $\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(t)$ o bien, $\boxed{\psi_X(t) = \left(q + pe^t\right)^n}$
La esperanza de la v.a binomial es la primera derivada de su f.g.m evaluada en cero:

$$\psi'_X(t=0) = n\left(q + pe^t\right)^{n-1} pe^t \big|_{t=0} = n\left(q + pe^0\right)^{n-1} pe^0 = np(q+p)^{n-1} \quad \therefore \quad \boxed{E(X) = np}$$

Una manera alternativa de sacar la esperanza de la binomial es recordando que la v.a binomial es una suma de n Bernoullis independientes cada una con media p, y que la esperanza de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de las esperanzas,

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = np$$

Para encontrar **la varianza** se necesita el segundo momento de la v.a por lo tanto se calcula la segunda derivada de la f.g.m evaluada en cero:

$$\psi''_X(t=0) = np\left[\left(q + pe^t\right)^{n-1} e^t + e^t(n-1)\left(q + pe^t\right)^{n-2} pe^t\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$= np\left[\left(q + pe^0\right)^{n-1} e^0 + e^0(n-1)\left(q + pe^0\right)^{n-2} pe^0\right]$$
$$= np[1 + (n-1)p] = np(1 + np - p) = np(q + np) = npq + n^2p^2$$

$$\therefore \quad V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = npq + n^2p^2 - n^2p^2$$

La varianza de la v.a binomial es $\boxed{V(X) = npq}$

La varianza de la v.a Binomial también se obtiene con el hecho de que la varianza de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas de las variables aleatorias que se están sumando y recordando que la varianza de una Bernoulli es pq.

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$$

La función de probabilidad acumulada.

$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$. Los valores ya están tabulados en las llamadas tablas binomiales que se encuentran en los anexos de los libros de probabilidad.

Teorema._ Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son k variables aleatorias independientes y $X_i \sim b(x_i; n_i, p)$ $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces la v.a $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ tiene una distribución binomial con parámetros $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ y p.

Demostración

La f.g.m para X es

$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{k} \psi_{X_i}(t) = (q + pe^t)^{n_1} (q + pe^t)^{n_2} \cdots (q + pe^t)^{n_k} = (q + pe^t)^{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$\boxed{\psi_X(t) = (q + pe^t)^n \quad \text{con } n = \sum_{i=1}^{k} n_i}$$

Observa que es la f.g.m para una binomial con parámetros $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ y probabilidad de éxito igual a p.

Ejemplos:

1._ Una moneda con probabilidad de cara 0.6 se lanza nueve veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par de caras?

Solución

X: Número de caras.

$X \sim b(x; n = 9, p = 0.6)$

A: Número par de caras.

$P(A) = P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8)$

$$= \binom{9}{0}(0.6)^0 (0.4)^9 + \binom{9}{2}(0.6)^2 (0.4)^7 + \binom{9}{4}(0.6)^4 (0.4)^5 + \binom{9}{6}(0.6)^6 (0.4)^3 + \binom{9}{8}(0.6)^8 (0.4)$$

$= 0.0002621 + 0.0212336 + 0.1672151 + 0.2508226 + 0.0604661 = 0.499 \approx 0.5$

2._ Tres hombres A, B y C disparan a un blanco. Supón que A dispara 3 veces y la probabilidad de que dé en el blanco en un disparo concreto es $\frac{1}{8}$, que B dispara 5 veces y la probabilidad de que dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y C dispara sólo 2 veces con probabilidad de dar en el blanco de $\frac{1}{2}$.

a) ¿Cuál es el número esperado de disparos que darán en el banco?
b) ¿Cuál es la varianza del número de disparos que darán en el blanco?

Solución

X_1: Número de disparos de A que dan en el blanco.

X_2: Número de disparos de B que dan en el blanco.

X_3: Número de disparos de C que dan en el blanco.

X: Número total de disparos que dan en el blanco.

$n_1 = 3$ $\quad$ $n_2 = 5$ $\quad$ $n_3 = 2$

$p_1 = \frac{1}{8}$ $\quad$ $p_2 = \frac{1}{4}$ $\quad$ $p_3 = \frac{1}{2}$

$X_i \sim b(x_i; n_i, p_i) \quad i = 1,\ 2,\ 3.$

a) El número total de disparos que dan en el blanco es la suma del número de disparos del señor A que dan en el blanco, el número de disparos del señor B que dan en el blanco y el número de disparos del señor C que dan en el blanco.

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3) = \sum_{i=1}^{3} E(X_i) = \sum_{i=1}^{3} n_i p_i$$

$$E(X) = 3\left(\frac{1}{8}\right) + 5\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3+10+8}{8} = \frac{21}{8} = 2.625$$

b) Los tiros son independientes unos de otros, por lo tanto

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} V(X_i) = \sum_{i=1}^{3} n_i p_i q_i = 3\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right) + 5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{21}{64} + \frac{15}{16} + \frac{1}{2} = \frac{21+60+32}{64} = \frac{113}{64} = 1.766$$

3._ La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad en la sangre es de 0.4. Si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Por lo menos 10 de ellos sobrevivan?
b) Sobrevivan de 3 a 8 personas?
c) Se salven exactamente 5?

Solución

X: Número de sobrevivientes.

$p = 0.4$, $q = 0.6$, $n = 15$
$X \sim b(x; n = 15, p = 0.4)$

Este problema lo resolvemos utilizando las tablas binomiales.
a) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F_X(9) = 1 - 0.9662 = 0.0338$
b) $P(3 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(2) = 0.905 - 0.0271 = 0.8779$
c) $P(X = 5) = F_X(5) - F_X(4) = 0.4032 - 0.2173 = 0.1859$

4._ La probabilidad de que una cierta clase de componentes sobreviva a una prueba de choque dada es $\frac{3}{4}$. Determina la probabilidad de que resistan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se van a probar.
<u>Solución</u>

X: Número de componentes que sobreviven a la prueba.
$p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$, $n = 4$
$X \sim b\left(x; n = 4, p = \frac{3}{4}\right)$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{54}{16^2} = \frac{27}{128} = 0.21$$

5._ Un fabricante de cera para pisos desarrolla dos productos nuevos, A y B que desea someter a la evaluación de las amas de casa para determinar cuál es mejor. Las dos ceras A y B se aplican en los pisos de 15 casas. Se supone que en realidad no hay diferencia en calidad entre las dos marcas. ¿Cuál es la probabilidad de que
a) 10 o más amas de casa vayan a preferir la marca A?
b) 10 o más amas de casa prefieran A o B?
<u>Solución</u>

Sean las variables aleatorias:
X: Número de amas de casa que prefieren A.
Y: Número de amas de casa que prefieren B.

Observa que se cumple lo siguiente:

$X = x$	$Y = y$	$X = x$	$Y = y$
0	15	8	7
1	14	9	6
2	13	10	5
3	12	11	4
4	11	12	3
5	10	13	2
6	9	14	1
7	8	15	0

a) $X \sim b(x; n=15, p=0.5)$

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F_X(9) = 1 - 0.849 = 0.151$

b) $Y \sim b(y; n=15, p=0.5)$

$P(10 \text{ o más amas de casa prefieran B}) = P(Y \geq 10) = P(X \leq 5) = F_X(5) = 0.151$

Entonces $P(X \geq 10 \text{ o } X \leq 5) = P(X \geq 10) + P(X \leq 5) = 0.151 + 0.151 = 0.302$

2.5 Distribución Geométrica.

La distribución geométrica está relacionada con una secuencia de ensayos Bernoulli con misma probabilidad de éxito pero el número de ensayos no es fijo. La variable aleatoria de interés *X*, es el número de ensayos necesarios hasta obtener el primer éxito. Los valores posibles que toma la variable aleatoria son x = 1, 2, 3, ... Se dice que *X* tiene una distribución geométrica con parámetro *p* (probabilidad de éxito) lo cual se escribe como $X \sim G(x; p)$ si su f.d.p es de la forma:

$$\boxed{G(x; p) = P(X = x) = q^{x-1} p} \text{ con } x = 1, 2, ...$$

La f.g.m. para esta distribución es:

$$\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx} pq^{x-1} = p\left(e^t + e^{2t}q + e^{3t}q^2 + e^{4t}q^3 + \cdots\right) = pe^t\left(1 + e^t q + e^{2t}q^2 + e^{3t}q^3 + \cdots\right)$$

$$= pe^t \sum_{i=0}^{\infty} e^{it}q^i = pe^t \sum_{i=0}^{\infty} \left(e^t q\right)^i = pe^t \left[\frac{1}{1-qe^t}\right]$$

$$\therefore \boxed{\psi_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}}$$

Nota._ Utilizamos el resultado de la serie geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$

Media y varianza.

$$E(X) = \psi'_X(t=0) = \left.\frac{\left(1-qe^t\right)pe^t - pe^t\left(-qe^t\right)}{\left(1-qe^t\right)^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{pe^t - pqe^{2t} + pqe^{2t}}{\left(1-qe^t\right)^2}\right|_{t=0} = \frac{pe^t}{\left(1-qe^t\right)^2} = \frac{p}{p^2}$$

La media de la v.a Geométrica es: $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

$$\psi''_X(t=0) = \left.\frac{\left(1-qe^t\right)^2 pe^t + pe^t 2\left(1-qe^t\right)qe^t}{\left(1-qe^t\right)^4}\right|_{t=0} = \frac{p^3 + 2p^2q}{p^4} = \frac{p^2(p+2q)}{p^4} = \frac{p+2q}{p^2}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{p+2q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{p+2q-1}{p^2}=\frac{2q-q}{p^2}$$

La varianza de la v.a Geométrica es: $\boxed{V(X)=\frac{q}{p^2}}$

Función de probabilidad acumulada.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{i=1}^{x}pq^{i-1}=p\sum_{i=1}^{x}q^{i-1}=p\left[1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{x-1}\right]=p\sum_{i=0}^{x-1}q^i=p\left[\frac{1-q^x}{1-q}\right]$$

La función de probabilidad acumulada de la v.a geométrica es $\boxed{F_X(x)=1-q^x}$

Nota._ Utilizamos el resultado de la serie geométrica $\sum_{i=0}^{x}r^i=\frac{1-r^{x+1}}{1-r}$

Ejemplos:

1._ Se va a realizar cierto experimento hasta que se obtenga un resultado exitoso. Los ensayos son independientes y el costo de efectuar el experimento es \$25,000 dólares, sin embargo, si se produce una falla, cuesta \$5,000 dólares iniciar el siguiente ensayo. Al experimentador le gustaría determinar el costo esperado del proyecto. Supón que p = 0.25.

Solución

La v.a es

X: Número de ensayos hasta obtener un experimento exitoso.

$X\sim G(x;p=0.25)$

$C(X)$: Costo de experimento en función de la v.a.

Necesitamos construir el costo del proyecto como una función del número de ensayos requeridos hasta el primer éxito.

$$C(X)=25{,}000X+5{,}000(X-1)=30{,}000X-5{,}000$$

$$E[C(X)]=30{,}000E(X)-5{,}000=30{,}000\left(\frac{1}{p}\right)-5{,}000=30{,}000\left(\frac{100}{25}\right)-5{,}000=\$115{,}000.$$

2._ Una compañía aeroespacial ha construido cinco mísiles. La probabilidad de un disparo exitoso en cualquier prueba es 0.95. Supón lanzamientos independientes ¿Cuál es la probabilidad de que la primer falla ocurra en el quinto disparo?

Solución

El éxito es el evento de interés y en este problema nos interesa que el disparo sea no exitoso entonces:

$p = P(\text{éxito}) = P(\text{disparo no exitoso}) = 0.05$

$q = P(\text{fracaso}) = P(\text{disparo exitoso}) = 0.95$

X: Número de disparos hasta que ocurre la primera falla.

$X \sim G(x; p = 0.05)$

$P(X = 5) = (0.95)^4 (0.05) = 0.0407$

3._ La compañía A planea visitar clientes potenciales hasta que se realice una venta considerable. Cada presentación de venta cuesta 1,000 dólares y cuesta 4,000 dólares viajar para visitar al siguiente cliente y realizar una nueva presentación.
a) ¿Cuál es el costo esperado de la realización de una venta si la probabilidad de hacer una venta después de cualquier presentación es 0.10?
b) Si la ganancia esperada en cada venta es 15,000 dólares, ¿Deben efectuarse los viajes?
c) Si el presupuesto para publicidad es sólo 100, 000 dólares ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea gastada sin que se logre ningún pedido?

Solución

X: Número de visitas hasta realizar la primera venta importante.

$X \sim G(x; p = 0.1)$

Sabemos que $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$

$C(X)$: Costo de la realización de la primera venta en función de la v.a.

a) El costo en función del número de visitas es $C(X) = 1000X + 4000(X-1) = 5000X - 4000$
Por lo tanto el costo esperado es $E[C(X)] = 5000E(X) - 4000 = 5000(10) - 4000 = \$46{,}000$.

b) El costo esperado para realizar la primera venta es de \$46,000 > \$15,000 que es la ganancia esperada en esa venta, por lo tanto no deben efectuarse los viajes.

c) El costo para realizar la primera venta está dado por

$$C(X) = 5{,}000X - 4{,}000$$

Entonces
$$\begin{aligned} P[C(X) > 100{,}000] &= P(5{,}000X - 4{,}000 > 100{,}000) \\ &= P(5{,}000X > 104{,}000) \\ &= P\left(X > \frac{104}{5}\right) = P(X > 20.8) = 1 - P(X \le 20) \\ &= 1 - F_X(20) = 1 - \left(1 - q^{20}\right) = (0.9)^{20} = 0.1216 \end{aligned}$$

4._ Dado que se ha lanzado una moneda normal 10 veces, y se han obtenido cero caras. ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que lanzar al menos dos veces más para obtener la primera cara?

Solución

X : Número de lanzamientos para obtener la primera cara.

$X \sim G(x; p = 0.5)$

Entonces

$$P(X \ge 12 \mid X > 10) = \frac{P(X \ge 12,\ X > 10)}{P(X > 10)} = \frac{P(X \ge 12)}{P(X > 10)} = \frac{1 - F_X(11)}{1 - F_X(10)} = \frac{q^{11}}{q^{10}} = q$$

Propiedad._ Si X tiene una distribución geométrica, para dos enteros positivos cualesquiera s y t, se tiene que

$$\boxed{P(X \geq s+t \mid X > s) = P(X \geq t)}$$

Esta propiedad se conoce como la propiedad de la falta de memorio o pérdida de la memoria.

<u>Demostración:</u>

Observa que: $P(X \geq t) = 1 - P(X \leq t-1)$

$$= 1 - F_X(t-1)$$

$$= 1 - \left(1 - q^{t-1}\right) = q^{t-1}$$

Y por otro lado

$$P(X \geq s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s, X \geq s+t)}{P(X > s)} = \frac{P(X \geq s+t)}{1 - P(X \leq s)} = \frac{1 - P(X \leq s+t-1)}{1 - F_X(s)}$$

$$= \frac{1 - F_X(s+t-1)}{1 - F_X(s)} = \frac{1 - \left(1 - q^{s+t-1}\right)}{1 - \left(1 - q^{s}\right)} = \frac{q^{s+t-1}}{q^{s}} = q^{t-1} = P(X \geq t)$$

Así por ejemplo el problema de las 10 cruces pudo resolverse usando esta propiedad de la pérdida de la memoria;

$$P(X \geq 12 \mid X > 10) = P(X \geq 2) = 1 - F_X(1) = 1 - (1-q) = \frac{1}{2}$$

5._ Sea Y una v.a geométrica con probabilidad de éxito igual a p, demuestra que:

a) para un entero positivo a , $P(Y > a) = q^{a}$

b) para los enteros positivos a y b $P(Y > a+b \mid Y > a) = P(Y > b)$

<u>Solución</u>

a) $P(Y > a) = 1 - P(Y \leq a) = 1 - F_Y(a) = 1 - \left(1 - q^{a}\right) = q^{a}$.

b) $P(Y > a+b \mid Y > a) = \dfrac{P(Y > a+b)}{P(Y > a)} = \dfrac{q^{a+b}}{q^{a}} = q^{b} = P(Y > b)$.

6._ Un contador público ha encontrado que 9 de 10 auditorias de compañías contienen errores importantes. Si el contador revisa la contabilidad de una serie de compañías.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera contabilidad con errores importantes se encuentre en la tercera contabilidad revisada?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera contabilidad con errores importantes se encuentre después de revisar la tercera?

c) Encuentra la media y la desviación estándar del número de contabilidades que hay que revisar para obtener la primera con errores importantes?

<u>Solución</u>

X: Número de contabilidades revisadas para obtener el primer error importante.

$$X \sim G\left(x; p = \frac{9}{10}\right)$$

a) $P(X = 3) = \left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9}{1000} = 0.009$

b) $P(X > 3) = 1 - F_X(3) = q^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0.001$

c) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{10}{9} = 1.1$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1}{10}\left(\frac{100}{81}\right) = \frac{10}{81} = 0.123$$

Sacando la raíz positiva de la varianza obtenemos la desviación estándar, es decir $\sigma = \sqrt{V(X)} = 0.35$.

2.6 Distribución Hipergeométrica y Distribución de Poisson.

Supón ahora que tenemos una población con r objetos, de los cuales r_1 son del tipo A y r_2 del tipo B. Entonces el número de objetos en la población es $r = r_1 + r_2$.
Se toma una muestra aleatoria sin reemplazo de tamaño n, menor o igual a r, siendo de interés la v.a
X: número de objetos del tipo A en la muestra.

Esta v.a se conoce como **hipergeométrica.** Observa que el valor de la v.a no puede ser mayor que n ni mayor que r_1 es decir $x \leq \min(r_1, n)$.

Ejemplos:

i) n = 10 muestra de tamaño 10.
r_1 = 5 en la población hay 5 objetos del tipo A.
El número de objetos del tipo A en la muestra a lo más es 5 que es precisamente r_1.

ii) n = 6 muestra de tamaño 6.
r_1 = 7 en la población hay 7 objetos del tipo A.
El número de objetos del tipo A en la muestra a lo más es 6 que es precisamente el tamaño de la muestra n.

De igual manera el número de objetos del tipo B en la muestra, $n - x$, no puede exceder al número total de objetos del tipo B en la población, es decir, $n - x \leq r_2 \;\therefore\; n - r_2 \leq x$ y tampoco puede ser un número negativo por lo tanto $\max(0, n - r_2) \leq x \leq \min(r_1, n)$.

Ejemplos:

i) n = 6 muestra de tamaño 6.

$r_1 = 7$ en la población hay 7 objetos del tipo A.
$r_2 = 5$ y 5 objetos del tipo B, entonces el número total de elementos en la población es $r = 12$.
La variable aleatoria de interés toma valores entre 1 y 6 inclusive, ya que $\max(0,6-5) \le x \le \min(7,6)$.

ii) $n = 6$ muestra de tamaño 6.
$r_1 = 5$ en la población hay 5 objetos del tipo A.
$r_2 = 10$ elementos del tipo B, entonces el número total de elementos en la población es $r = 15$.
La variable aleatoria de interés toma valores entre 0 y 5 inclusive, ya que $\max(0,6-10) \le x \le \min(5,6)$.

Si tomamos una muestra aleatoria de tamaño 6, el mínimo número de objetos de la clase A es cero (hay 10 objetos de la clase B, entonces los 6 de la muestra pueden ser de este tipo) y el máximo número posible es 5 ya que sólo hay 5 del tipo A en la población.

Función de probabilidad.
La expresión $X \sim H(x; r_1, r_2, n)$ indica que la variable aleatoria X tiene una distribución hipergeométrica con parámetros r_1, r_2 y n, tal distribución es de la forma:

$$f_X(x) = \frac{\binom{r_1}{x}\binom{r-r_1}{n-x}}{\binom{r}{n}} \qquad \max(0, n-r_2) \le x \le \min(r_1, n)$$

Esperanza y varianza.
Sean las variables aleatorias Bernoulli $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \text{ es del tipo A} \\ 0 & \text{si } X_i \text{ es del tipo B} \end{cases}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para las cuales $E(X_i) = p = \frac{r_1}{r}$.

Observa que la v.a. hipergeométrica es la suma de estas variables aleatorias Bernoulli, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, usando las propiedades del valor esperado se tiene que:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X_i)$$

Y así se tiene que la esperanza de la v.a hipergeométrica es: $\boxed{E(X) = n\frac{r_1}{r}}$

La muestra se toma sin reemplazo, por lo tanto las variables aleatorias X_i no son independientes. Para encontrar la varianza de la v.a hipergeométrica necesitamos la varianza de cada X_i y la covarianza $Cov(X_i, X_j) \ \forall \ i < j$.

La varianza de cada Bernoulli es $V(X_i) = pq = \left(\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)$ (1)

Y la covarianza entre X_i y X_j está dada por:
$Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) \quad \forall\ i<j$

Los valores posibles que toma el producto son 0 y 1 de la manera siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} X_i = 0 \ \text{ y } \ X_j = 1 \\ X_i = 1 \ \text{ y } \ X_j = 0 \\ X_i = 0 \ \text{ y } \ X_j = 0 \end{array}\right\} X_iX_j = 0$$

$$X_i = 1 \ \text{ y } \ X_j = 1 \quad X_iX_j = 1$$

Por lo tanto

$$E(X_iX_j) = 1P(X_i = 1, X_j = 1) = P(X_i = 1)P(X_j = 1 \mid X_i = 1) = \frac{r_1}{r}\frac{r_1 - 1}{r-1}$$

Entonces $Cov(X_i, X_j) = \frac{r_1}{r}\frac{r_1-1}{r-1} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = \frac{r_1}{r}\left(\frac{r_1-1}{r-1} - \frac{r_1}{r}\right) = \frac{r_1}{r}\left(\frac{r_1r - r - r_1r + r_1}{r(r-1)}\right) = \frac{r_1}{r}\left(\frac{r_1 - r}{r(r-1)}\right)$ (2)

Usando las ecuaciones (1) y (2) en la expresión de la varianza:

$$V(X) = V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$= n\frac{r_1}{r}\left(1-\frac{r_1}{r}\right) + 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{r_1}{r}\left(\frac{r_1-r}{r(r-1)}\right)$$

$$= n\frac{r_1}{r}\left(1-\frac{r_1}{r}\right) + n(n-1)\frac{r_1}{r}\left(\frac{r_1-r}{r(r-1)}\right)$$

$$= n\frac{r_1}{r}\left(\frac{r-r_1}{r}\right) - n\left(\frac{r_1}{r}\right)\left(\frac{r-r_1}{r}\right)\left(\frac{n-1}{r-1}\right)$$

$$= n\frac{r_1}{r}\left(\frac{r-r_1}{r}\right)\left(1-\frac{n-1}{r-1}\right)$$

Finalmente tenemos que la varianza de la v.a hipergeometrica está dada por:

$$\boxed{V(X) = n\left(\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{n-1}{r-1}\right)}$$

Nota._ Supón que se tiene una población de tamaño r con r_1 objetos de la clase A y $r - r_1$ de la clase B, y se toma una muestra aleatoria (m.a) de tamaño n. La v.a Y: Número de objetos de la clase A en la muestra puede tener dos distribuciones de probabilidad diferentes, dependiendo de la manera en que se toma la m.a:

i) Si la muestra se toma con reemplazo, la probabilidad de éxito (el objeto es de la clase A) es constante igual a $\frac{r_1}{r}$, hay independencia y por lo tanto $Y \sim b(y;n,p)$ con $E(X) = np = n\frac{r_1}{r}$ y

$V(Y) = npq = n\frac{r_1}{r}\left(1-\frac{r_1}{r}\right)$

ii) Si la muestra se toma sin reemplazo entonces $Y \sim H(y;r_1,r_2,n)$ con $E(Y) = np = n\frac{r_1}{r}$ y

$$V(Y) = n\left(\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{n-1}{r-1}\right)$$

El valor esperado es el mismo pero si el muestreo es sin reemplazo la varianza es menor ya que:

$$n\left(\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right) > n\left(\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)\left(1-\frac{n-1}{r-1}\right)$$

pero $1 > 1-\frac{n-1}{r-1}$.

Si r es grande comparado con n, entonces $\frac{n}{r} \to 0$ y la varianza de la hipergeométrica se parece mucho a la varianza de la binomial, es decir para n fijo y r grande (poblaciones muy grandes) hay poca diferencia entre muestreo con y sin reemplazo (binomial e hipergeométrica).

Función de probabilidad acumulada.

Existen en escuelas del IPN tablas de la distribución acumulada realizadas por los profesores, pero en los libros difícilmente se encontraran debido a la diversidad de casos, en general esta probabilidad se puede encontrar usando la definición de acumulada y la f.d.p de la Hipergeométrica como sigue:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=\max(0,n-r_2)}^{x} \frac{\binom{r_1}{i}\binom{r-r_1}{n-i}}{\binom{r}{i}}$$

Ejemplos:

1._ Supón que una urna contiene cinco bolas rojas y diez azules. Si se seleccionan al azar sin reemplazo siete bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos tres bolas rojas?

b) Si $\overline{X}$ representa la proporción de bolas rojas en la muestra ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$.

<u>**Solución**</u>

$r_1 = 5$ bolas rojas.

$r_2 = 10$ bolas azules.

$n = 7$ tamaño de la muestra.

$r = 15$ total de bolas en la urna.

X: Número de bolas rojas en la muestra.

$X \sim H(x; r_1 = 5, r_2 = 10, n = 7)$

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= \frac{\binom{5}{3}\binom{10}{4} + \binom{5}{4}\binom{10}{3} + \binom{5}{5}\binom{10}{2}}{\binom{15}{7}} = \frac{2100 + 600 + 45}{6435} = \frac{2745}{6435} = \frac{61}{143} = 0.4265$$

b) Observa que $\overline{X} = \frac{X}{n}$ por lo tanto $E(\overline{X}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X)$ y $V(\overline{X}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X)$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{7}\left(\frac{7(5)}{15}\right) = \frac{1}{3}$$

$$V(\overline{X}) = \left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{7(5)}{15}\right)\left(1 - \frac{5}{15}\right)\left(1 - \frac{6}{14}\right) = \frac{10(8)}{7(3)(15)(14)} = \frac{8}{441} = 0.018$$

2._ En un almacén se tienen 10 impresoras de las cuales 4 son defectuosas. Una compañía selecciona 5 de las máquinas al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las 5 máquinas sean no defectuosas?

b) La compañía repara las impresoras defectuosas a un costo de 50 dólares cada una. Encuentra la media y la varianza del costo total de reparación.

<u>Solución</u>

$r_1 = 6$ máquinas buenas.

$r_2 = 4$ máquinas defectuosas.

$n = 5$ tamaño de la muestra.

$r = 10$ total de máquinas.

X: Número de máquinas buenas en la muestra.

$X \sim H(x; r_1 = 6, r_2 = 4, n = 5)$

a) $P(X = 5) = \dfrac{\binom{6}{5}\binom{4}{0}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{6}{252} = \dfrac{1}{42} = 0.024$

b) Ahora sea la v.a de interés Y: Número de máquinas defectuosas en la muestra.

$$Y \sim H(y; r_1 = 4, r_2 = 6, n = 5)$$

El costo de reparación está dado como $C(Y) = 50Y$.
Por lo tanto:

$$E[C(Y)] = 50E(Y) = 50(5)\frac{4}{10} = 100$$

$$V[C(Y)] = (50)^2 V(Y) = (50)^2 (5)\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right) = 1{,}666.66$$

3._ Una corporación muestrea sin reemplazo n = 3 empresas para adquirir ciertos suministros. La muestra se selecciona de un conjunto de 6 empresas, de las cuales cuatro son locales y dos no lo son. Sea Y el número de empresas foráneas entre las tres escogidas. Encuentra las siguientes probabilidades:

a) $P(Y = 1)$

b) $P(Y \geq 1)$

c) $P(Y \leq 1)$

<u>Solución</u>

$r_1 = 2$ empresas foráneas.

$r_2 = 4$ $r_2 = 4$ empresas locales.

$n = 3$ tamaño de la muestra.

$r = 6$ total de empresas.

Y: Número de empresas foráneas.

$Y \sim H(y; r_1 = 2, r_2 = 4, n = 3)$

a) $P(Y = 1) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

b) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \dfrac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = 1 - \dfrac{1}{5} = 0.8$

c) $P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

La distribución de Poisson a menudo servirá como una distribución de probabilidad apropiada para variables aleatorias tales como el número de llamadas telefónicas que entran a un conmutador en un periodo de tiempo dado, el número de partículas emitidas por una fuente en un periodo de 15 minutos, o el número de defectos en una longitud específica de una tela fabricada. Cada una de estas variables aleatorias representa el número total de ocurrencias de un fenómeno durante un período de tiempo fijo o en una región fija del espacio. Esta v.a tiene una distribución de probabilidad conocida como Poisson con parámetro λ, y su f.d.p está dada por:

$$P(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \text{si } x=0,1,2,\ldots$$

Función generadora de momentos.

$$\psi_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^{t}\lambda\right)^{x}}{x!}=e^{-\lambda}e^{e^{t}\lambda} \quad \text{Es decir } \boxed{\psi_X(t)=e^{\lambda(e^{t}-1)}}$$

Nota._ Utilizando el resultado de la serie $e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}$

Media y varianza.

$$\mu=\psi'_X(t=0)=e^{\lambda(e^{t}-1)}\lambda e^{t}\Big|_{t=0}=e^{\lambda(1-1)}\lambda e^{0}$$

La media de la v.a Poisson es $\boxed{\mu=\lambda}$ es decir, el parámetro de la distribución es el número promedio de ocurrencias en la unidad de tiempo, área, espacio, etc.

Para enconrar la varianza necesitamos el segundo momento:

$$E\left(X^{2}\right)=\psi''_X(t=0)=\lambda\left(e^{\lambda(e^{t}-1)}e^{t}+e^{t}e^{\lambda(e^{t}-1)}\lambda e^{t}\right)\Big|_{t=0}$$
$$=\lambda\left(e^{\lambda(0)}e^{0}+e^{0}e^{\lambda(0)}\lambda e^{0}\right)=\lambda(1+\lambda)=\lambda+\lambda^{2}$$

Sustituyendo en la expresión para la varianza $V(X)=E\left(X^{2}\right)-E^{2}(X)=\lambda+\lambda^{2}-\lambda^{2}$ por lo tanto $\boxed{V(X)=\sigma_X^{2}=\lambda}$

Observación._ Esta distribución tiene la característica de que su media y su varianza son iguales.

Función de probabilidad acumulada.

$F_X(x)=P(X\leq x)=\sum_{k=0}^{x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$ Existen tablas para estos valores en los anexos de los libros de probabilidad.

Teorema._ Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y $X_i \sim P(x_i;\lambda_i)$ para $i=1,\ 2,$ ... , k. Entonces la v.a $X=\sum_{i=1}^{k}X_i$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

Demostración:

La f.g.m para X_i es $\psi_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t-1)}$, para $i = 1,2,...,k$. Debido a que estas variables aleatorias son independientes, tenemos que la f.g.m de la suma de ellas está dada por el producto de las f.g.m. de las variables aleatorias individuales:

$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{k} \psi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(e^t-1)} = e^{(e^t-1)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}$$ que se puede escribir como

$\psi_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ con parámetro $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Ejemplos:

1._ Supón que en un fin de semana concreto el número de accidentes en un cierto cruce tiene una distribución de Poisson con media 0.7. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos tres accidentes en el cruce durante el fin de semana?

Solución

X : Número de accidentes en un cruce un fin de semana.

$X \sim P(x; \lambda = 0.7)$

$$P(X \geq 3) = 1 - F_X(2) = 1 - e^{-0.7}\left(\frac{(0.7)^0}{0!} + \frac{(0.7)^1}{1!} + \frac{(0.7)^2}{2!}\right) = 1 - 0.966 = 0.034$$

2._ Supón que el número de defectos en un rollo de tela fabricado con un cierto proceso tiene una distribución de Poisson con media 0.4. Si se inspecciona una muestra aleatoria de cinco rollos de tela. ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de defectos en los cinco rollos sea al menos 6?

Solución

X_i: Número de defectos en el rollo i.

$X_i \sim P(x_i; \lambda_i = 0.4)$

X: Número de defectos en los 5 rollos.

$X \sim P(x; \lambda = 5(0.4) = 2)$

Ya que $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

$$P(X \geq 6) = 1 - F_X(5) = 1 - e^{-2}\left(\frac{(2)^0}{0!} + \frac{(2)^1}{1!} + \frac{(2)^2}{2!} + \frac{(2)^3}{3!} + \frac{(2)^4}{4!} + \frac{(2)^5}{5!}\right) = 1 - 0.983 = 0.017$$

3._ Supón que un libro con n páginas contiene en promedio λ erratas por página. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos haya m páginas que contengan más de k erratas?

Solución

X: Número de erratas por página.

$X \sim P(x; \lambda)$

La probabilidad de que una página contenga más de k erratas es

$$P(X > k) = \sum_{x=k+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Sea ahora la v.a Y: Número de páginas de un total de n con más de k erratas.

$$P(\acute{e}xito) = P(\text{la página tiene más de } k \text{ erratas}) = \sum_{x=k+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = p$$

Entonces $Y \sim b(y; n, p)$ y la probabilidad de que al menos haya m páginas con el éxito está dada por:

$$P(Y \geq m) = \sum_{y=m}^{n} \binom{n}{y} \left[\sum_{x=k+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right]^y \left[\sum_{x=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right]^{n-y}$$

4._ Supón que una fuente radioactiva emite partículas y que el número de las que se emiten durante un período de una hora tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. Considera que el instrumento para contar esas emisiones en ocasiones falla al anotar una partícula emitida. Supón específicamente que cualquier partícula emitida tiene una probabilidad p de ser anotada.

a) Si Y está definida como el número de partículas anotadas. ¿Encuentra una expresión para la distribución de probabilidades de Y?

b) Calcula $P(Y = 0)$ si $\lambda = 4$ y $p = 0.9$.

Solución

Sean las variables aleatorias:

X: Número de partículas emitidas en una hora.
Con valores posibles $x = 0,\ 1, 2, ...$
$X \sim P(x; \lambda)$
Y: Número de partículas anotadas.
$y = 0,\ 1, 2, ...$

Para entender el problema observa el siguiente cuadro, si se anotan 3 partículas puede ser que se hayan emitido 3, 4, 5 o más partículas.

Ejemplos de valores posibles de las variables de interés.

X : Partículas emitidas	Y : Partículas anotadas
0	0
1	0, 1
2	0, 1, 2
3	0, 1, 2, **3**
4	0, 1, 2, **3**, 4
5	0, 1, 2, **3**, 4, 5
6	0, 1, 2, **3**, 4, 5, 6
⋮	⋮

Si el número de partículas emitido es fijo, digamos x, entonces la distribución de Y es una binomial dada por

$$P(Y = y | X = x) = \binom{x}{y} p^y q^{x-y}$$

Debido a que no se pueden emitir 3 y 4 partículas al mismo tiempo tenemos eventos disjuntos así que

$$(Y = y) = (Y = y, X \geq y) = (X = y, Y = y) \cup (X = y+1, Y = y) \cup (X = y+2, Y = y) \cup \cdots$$

Entonces la probabilidad de anotar exactamente y partículas está dada por:

$P(Y = y) = \sum_{x=y}^{\infty} P(X = x, Y = y)$ Usando la ley de la multiplicación se tiene que

$$= \sum_{x=y}^{\infty} P(X = x) P(Y = y \mid X = x)$$

$$= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \binom{x}{y} p^y q^{x-y}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^y \sum_{x=y}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{x!}{y!(x-y)!} q^x$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^y \frac{1}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(\lambda q)^x}{(x-y)!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^y \frac{1}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{(x-y)+y}}{(x-y)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{y!} \left(\frac{\lambda p q}{q}\right)^y \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{x-y}}{(x-y)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{y!} (\lambda p)^y \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^u}{u!} = \frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{\lambda(q-1)}$$

Finalmente la f.d.p de la v.a de interés se expresa como:

$\boxed{P(Y = y) = \frac{(\lambda p)^y e^{-\lambda p}}{y!}}$ con valores posibles $y = 0,\ 1,\ 2,\ ...$

b) si $\lambda = 4$ y $p = 0.9$.

$P(Y = 0) = e^{-4(0.9)} = e^{-3.6} = 0.027$

5._ Sea Y una v.a de Poisson con media λ. Encuentra $E[Y(Y-1)]$ y usa este resultado para demostrar que $V(Y)=\lambda$.

Solución

$$E[Y(Y-1)]=\sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}=\sum_{y=2}^{\infty}\frac{y(y-1)e^{-\lambda}\lambda^y}{y(y-1)(y-2)!}=e^{-\lambda}\sum_{y=2}^{\infty}\frac{\lambda^y}{(y-2)!}$$

Observa que $y=(y-2)+2$, entonces

$$E[Y(Y-1)]=e^{-\lambda}\sum_{y=2}^{\infty}\frac{\lambda^{(y-2)+2}}{(y-2)!}=e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{y=2}^{\infty}\frac{\lambda^{y-2}}{(y-2)!}=e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{z=0}^{\infty}\frac{\lambda^z}{z!}=\lambda^2$$

con $z=y-2$, se tiene que cuando $y=2$ el valor de z es 0.

Y además $E[Y(Y-1)]=E(Y^2)-E(Y)=\lambda^2$

$$\therefore\ E(Y^2)=\lambda^2+\lambda \quad \text{y} \quad V(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

2.7 Aproximación entre las distribuciones Binomial y Poisson.

Supón que $X\sim b(x;n,p)$ con función de probabilidad dada por

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)(n-x)!}{(n-x)!x!}p^xq^{n-x}$$

Observa que en el numerador del primer factor de esta ecuación hay exactamente x términos. Si hacemos $\lambda=np$ se tiene que $p=\frac{\lambda}{n}$, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(n-x+1)}{n}\cdots\frac{(n-1)}{n}\frac{n}{n}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(n-x+1)}{n}\cdots\frac{(n-1)}{n}\frac{n}{n}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{-x}$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty}P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-x+1)}{n}\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}(1)\cdots(1)\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{-x}$$

Recuerda que $(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-(n-1))}{n!}x^n+\cdots$

Entonces $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = 1 + n\left(-\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\lambda^2}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-(m-1))}{m!}\frac{\lambda^m}{n^m} + \cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = 1 + (-\lambda) + \frac{(-\lambda)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-\lambda)^m}{m!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^i}{i!} = e^{-\lambda}$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ que es precisamente la función de probabilidad de Poisson con parámetro $\lambda = np$.

Cuando n es grande y p es chica, el valor de la distribución binomial se puede aproximar con el valor de la distribución de Poisson con media $\lambda = np$.

Ejemplos:

1._ Supón que en una gran población la proporción de personas que tienen una cierta enfermedad es 0.01. Se desea encontrar la probabilidad de que en un grupo aleatorio de 200 personas al menos cuatro tengan la enfermedad.

Solución

La v.a de interés es X : Número de personas con la enfermedad.
$X \sim b(x; n = 200, p = 0.01)$
Como n es grande, podemos aproximar con una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np = 200(0.01) = 2$. Entonces la probabilidad buscada está dada por:

$$P(X \geq 4) = 1 - F_X(3) = 1 - 0.8571 = 0.1429$$

2._ Supón que la proporción de personas daltónicas en cierta población es 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de una persona daltónica en un grupo de 600 personas seleccionadas aleatoriamente?

Solución

X : Número de personas daltónicas.

$X \sim b(x; n = 600, p = 0.005)$

Aproximando con una Poisson,
$X \approx P(x; \lambda = np = 600(0.005) = 3)$
$P(X \leq 1) = F_X(1) = 0.1992$

3._ La probabilidad de trillizos en nacimientos humanos es aproximadamente 0.001. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un conjunto de trillizos entre 700 nacimientos en un gran hospital?

Solución

X: Número de nacimientos de trillizos.

$X \sim b(x; n = 700, p = 0.001)$

Que se puede aproximar con una Poisson dada por
$X \approx P(x; \lambda = np = 700(0.001) = 0.7)$

$P(X = 1) = 0.7e^{-0.7} = 0.3476$.

4._ Se sabe que el proceso de producción de luces de un tablero de automóvil de indicador giratorio produce uno por ciento de luces defectuosas. Si este valor permanece invariable, y se selecciona al azar una muestra de 100 luces, encuentre $P(\hat{p} \leq 0.03)$, donde $\hat{p}$ es la fracción de defectos de la muestra.

Solución

Sea la v.a X: Número de luces defectuosas.

P (luz defectuosa) = 0.01

La v.a tiene una distribución binomial de la forma $X \sim bin(x; n = 100, p = 0.01)$

Dado que n es grande se hace una aproximación usando la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np = 100(0.01) = 1$.

Observa que la fracción de luces defectuosas en la muestra en términos de la v.a es

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

Entonces

$$P(\hat{p} \leq 0.03) = P\left(\frac{X}{n} \leq 0.03\right) = P(X \leq n(0.03)) = P(X \leq 100(0.03)) = P(X \leq 3) = F_X(3)$$

Buscando en tablas de la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 1$ y acumulando en tres se tiene que $P(\hat{p} \leq 0.03) = 0.981$.

Si no se cuenta con las tablas de la distribución de Poisson se puede calcular directamente de la fórmula de la f.d.p Poisson

$$P(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{i=0}^{3} \frac{e^{-1}1^x}{x!} = e^{-1}\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{x!} = e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) = e^{-1}\left(\frac{6+6+3+1}{6}\right)$$

$$= e^{-1}\left(\frac{16}{6}\right) = e^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = 0.981$$

5._ La probabilidad de que un ratón inoculado con un suero contraiga cierta enfermedad es 0.2. Encuentra la probabilidad de que a lo más tres de 30 ratones inoculados contraigan la enfermedad, utilizando una aproximación de Poisson.

Solución

La variable aleatoria de interés es:

X: Número de ratones inoculados que contraen la enfermedad.

Su distribución es binomial con parámetros 30 y 0.2, lo cual se denota como

$X \sim bin(x; n = 30, p = 0.2)$.

Si se aproxima con una Poisson $\lambda = np = 30(0.2) = 6$

$$P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad = e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}\right]$$

$$= e^{-6}\left[\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!}\right] = e^{-6}\left[1 + 6 + 18 + 36\right] = 61e^{-6} \;= 0.151$$

6._ En promedio una persona en 1000 comete un error numérico al preparar su declaración de impuestos. Si se seleccionan 10,000 formas al azar y se examinan, ¿cuál es la probabilidad de que 6, 7 u 8 de las formas contengan un error?

Solución

X: Número de personas que cometen un error en su declaración de impuestos.

La probabilidad de que una persona cometa un error en su declaración es $\frac{1}{1000} = 0.001$, y la v.a tiene una distribución binomial con los siguientes parámetros.

$X \sim bin(x; n = 10{,}000, p = 0.001)$

Aproximando con una Poisson se debe hacer $\lambda = np = 10{,}000(0.001) = 10$

La probabilidad de interés se puede encontrar usando las tablas Poisson de la siguiente manera

$P(6 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(5) = 0.3328 - 0.0671 = 0.2657$

O usando la formula de la f.d.p Poisson como se muestra a continuación

$$P(6 \leq X \leq 8) = \sum_{x=6}^{8} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-10}\left(\frac{10^6}{6!} + \frac{10^7}{7!} + \frac{10^8}{8!}\right) = 0.2657$$