7. Error de estado estacionario (normalizado)

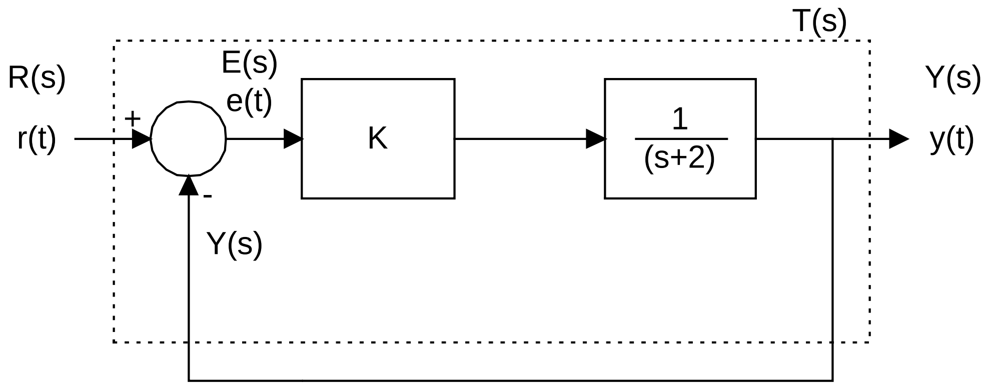


Figura 7.1: Sistema de control con realimentación unitaria

$$r(t) = A\,\sigma(t) \text{ : entrada al sistema} \tag{1}$$

$\sigma(t)$: escalon unitario

$\rightarrow R(s) = \dfrac{A}{s}$: transformada de Laplace de la entrada r(t) y

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \text{ : función de transferencia del sistema} \tag{2}$$

Calculamos Y(s), la salida del sistema ante una entrada escalón

$$Y(s) = T(s)\cdot R(s) = \frac{A}{s}T(s) \tag{3}$$

Calculamos E(s), el error o diferencia entre la entrada R(s) y la salida Y(s)

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{s}T(s) = \frac{A}{s}\left[1 - T(s)\right] \tag{4}$$

Definimos:

$$T_E(s) = 1 - T(s) \qquad \text{: Transmitancia de error} \tag{5}$$

La transmitancia de error de un sistema $T_E(s)$ es la transmitancia que relaciona la entrada de un sistema R(s) con el error E(s).

Encontrando el valor final del error (suponiendo que existe)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{A}{s}\left(1 - T(s)\right)\right] \tag{6}$$

Normalizando el error para hacerlo independiente de la amplitud A del escalón

$$\begin{matrix}\text{error normalizado de} \\ \text{estado estacionario}\end{matrix} = \lim_{t\to\infty}\frac{e(t)}{A} = \lim_{s\to 0}\left[1 - T(s)\right] \qquad (7)$$

Podemos calcular de forma similar el error de estado estacionario (si existe) para entradas rampa, parábola y funciones del tiempo de orden superior.

Error normalizado de estado estacionario para una entrada generalizada:

$$\frac{A\, t^n\, \sigma(t)}{n!} \Rightarrow \frac{\lim_{t\to\infty} e(t)}{A} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^n}\left[1 - T(s)\right] \qquad (8)$$

Las entradas estándar de potencias del tiempo son:

- $\sigma(t)$: entrada de posición, i=0
- $t\sigma(t)$: entrada de velocidad, i=1
- $\frac{1}{2}t^2\sigma(t)$: entrada de aceleración, i=2
- $\frac{1}{6}t^3\sigma(t)$: i=3

Ejemplo 7.1: Calcular el error de estado estacionario

a) ante una entrada escalón

$$T(s) = \frac{K}{s+2+K}$$

$$\frac{\lim_{t\to\infty} e(t)}{A} = \lim_{s\to 0}\left[1 - T(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{K}{s+2+K}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{(s+2)}{(s+2+k)}\right] = \frac{2}{2+K}$$

K>-2; estrictamente el sistema es estable para K>0. El error disminuye al aumentar K, error finito.

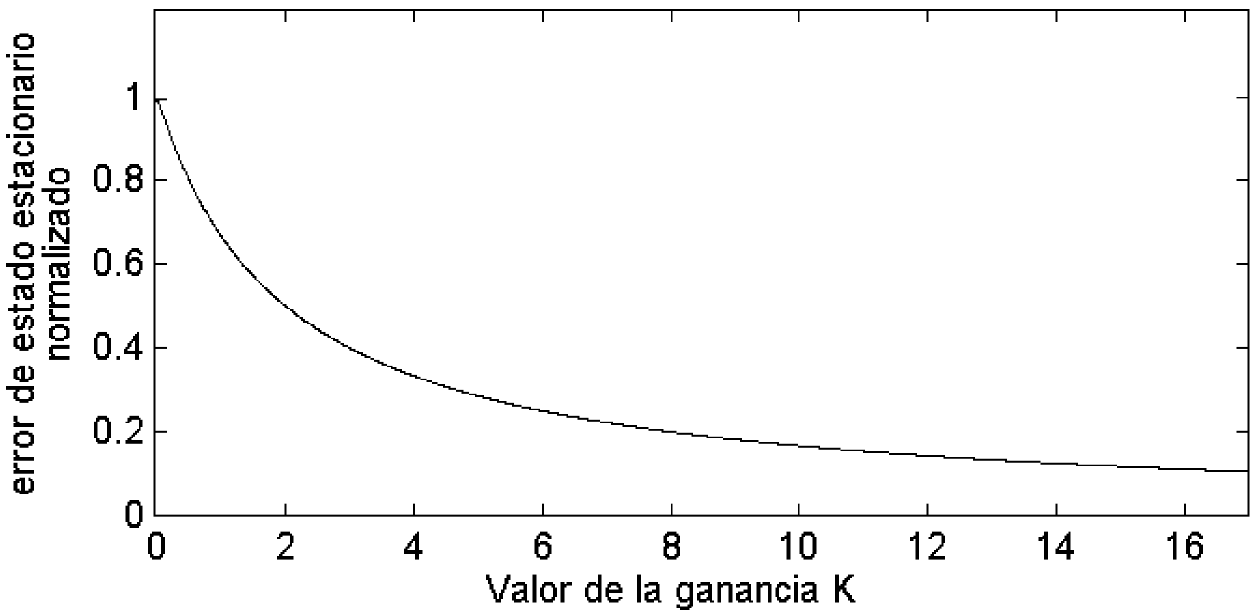


Figura 7.1: Error normalizado de estado estacionario en función de K ante una entrada escalón para el ejemplo 7.1

b) ante una entrada rampa

$$R(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$E(s) = \frac{A}{s^2}\left(\frac{s+2}{s+2+K}\right) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s+2+K}$$

! Al término $\frac{K_2}{s^2}$ corresponde la función $K_2 t$ la cual crece sin límite !

Por lo que para el ejemplo 7.1, para entradas rampa, parabólica o potencia superior del tiempo, el error de estado estacionario es infinito.

Haciendo cero el error de estado estacionario

Una forma de hacer cero el error de estado estacionario ante un escalón, para el ejemplo 7.1, es integrar el error

Ejemplo 7.2: Calcular el error de estado estacionario para el sistema de la figura 7.2

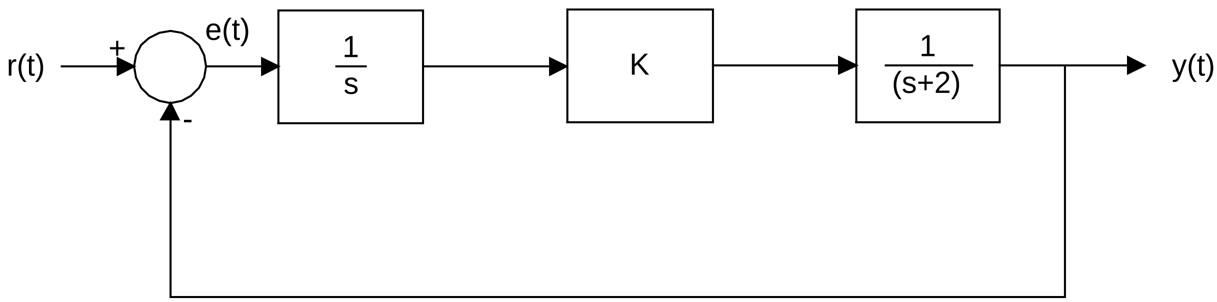


Figura 7.2: Sistema con realimentación unitaria e integrador

La función de transferencia con integrador es:

$$T(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1+\frac{K}{s(s+2)}} = \frac{K}{s^2+2s+K}$$

La nueva transmitancia de error es:

$$T_E(s) = 1-T(s) = \left[1-\frac{K}{s^2+2s+K}\right] = \left[\frac{s(s+2)}{s^2+2s+K}\right]$$

a) Calculamos el valor final del error normalizado para una entrada escalón con K>0 para garantizar la estabilidad:

$$\frac{\lim_{t\to\infty} e(t)}{A} = \lim_{s\to 0} T_E(s) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s(s+2)}{s^2+2s+K}\right] = \frac{0}{K} = 0$$

El error es cero debido al factor „s" en el numerador de $T_E(s)$, que aparece como resultado de haber agregado el integrador.

b) Calculamos el valor final del error normalizado para una entrada rampa

$$\frac{\lim_{t\to\infty} e(t)}{A} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} T_E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left[\frac{s(s+2)}{s^2+2s+K}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{(s+2)}{s^2+2s+K}\right] = \frac{2}{K}$$

El error es finito ante una entrada rampa para el sistema del ejemplo 7.2.

Tipo de sistema y error de estado estacionario

El error de estado estacionario para entradas que son potencias del tiempo está íntimamente relacionado con el número de factores „s" que hay en el numerador de $T_E(s)$.

E(s) = R(s) Te(s)

$T_E(s) = [1-T(s)]$ (5 repetida)

Tipo de sistema: Número de factores s que hay en el numerador de $T_E(s)$

- Tipo 0: $T_E(s)$ carece de factores s

  El error ante una entrada escalón, $R(s) = \frac{A}{s}$, es:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,T_E(s)R(s) = \lim_{s\to 0} s\,T_E(s)\frac{A}{s} = A\,T_E(0)$$

  → El error de estado estacionario ante un escalón para un sistema tipo 0 es $AT_E(0)$ y es finito.

  Las entradas con potencias superiores del tiempo producen un error de estado estacionario infinito. Por ejemplo para una entrada rampa r(t)=At, el error

$$E(s) = T_E(s).R(s) = T_E(s).\ \frac{A}{s^2}$$

  tiene una raíz repetida en s=0 lo que indica una rampa en e(t). En este caso el teorema del valor final no es aplicable pues e(t) no se aproxima a un valor final.

- Tipo 1: El sistema es estable y $T_E(s)$ tiene un factor s en el numerador

El error ante una entrada escalón, $R(s)=\dfrac{A}{s}$, es:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) \quad = \quad \lim_{s\to 0} s\,T_E(s)\frac{A}{s} \quad = \quad A\,T_E(0) \quad = \quad 0$$

→ El error de estado estacionario ante una entrada escalón es 0.

El error de estado estacionario ante una entrada rampa

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \; s\,T_E(s)\,R(s) \; = \lim_{s\to 0} \; s\,T_E(s)\frac{A}{s^2} \; = \; A \lim_{s\to 0}\frac{T_E(s)}{s}$$

es finito y constante.

Para entradas de potencias superiores del tiempo el error de estado estacionario es infinito pues E(s) presenta una raíz repetida del denominador en s=0.

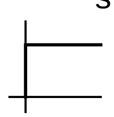
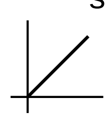
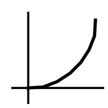
TIPO DE SISTEMA (Número de raíces s=0 en el numerador de $T_E(s)$)	Error de estado estacionario ante un escalón $r(t) = A\sigma(t)$ $R(s) = \dfrac{A}{s}$ 	Error de estado estacionario ante una rampa $r(t) = A\,t\,\sigma(t)$ $R(s) = \dfrac{A}{s^2}$ 	Error de estado estacionario ante una parábola $r(t) = \frac{1}{2}A\,t^2\,\sigma(t)$ $R(s) = \dfrac{A}{s^3}$ 	Error de estado estacionario ante una cúbica $r(t) = \frac{1}{6}A\,t^3\,\sigma(t)$ $R(s) = \dfrac{A}{s^4}$
0	$A\,T_E(0)$	∞	∞	∞
1	0	$A\lim_{s\to 0}\left[\frac{T_E(s)}{s}\right]$	∞	∞
2	0	0	$A\lim_{s\to 0}\left[\frac{T_E(s)}{s^2}\right]$	∞
3	0	0	0	$A\lim_{s\to 0}\left[\frac{T_E(s)}{s^3}\right]$

Tabla 7.1: Error de estado estacionario para el tipo de sistema

Sistemas con realimentación no unitaria

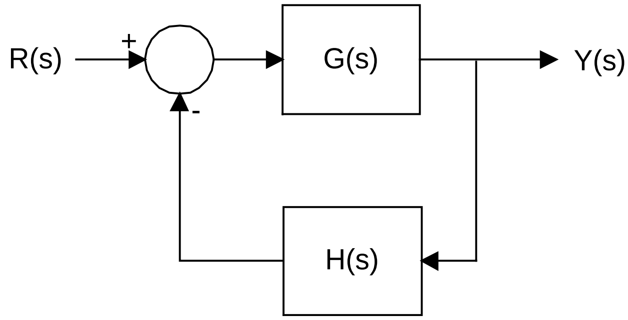


Figura 7.3: Sistema realimentado de control con realimentación no unitaria

Este sistema 7.3 es equivalente a:

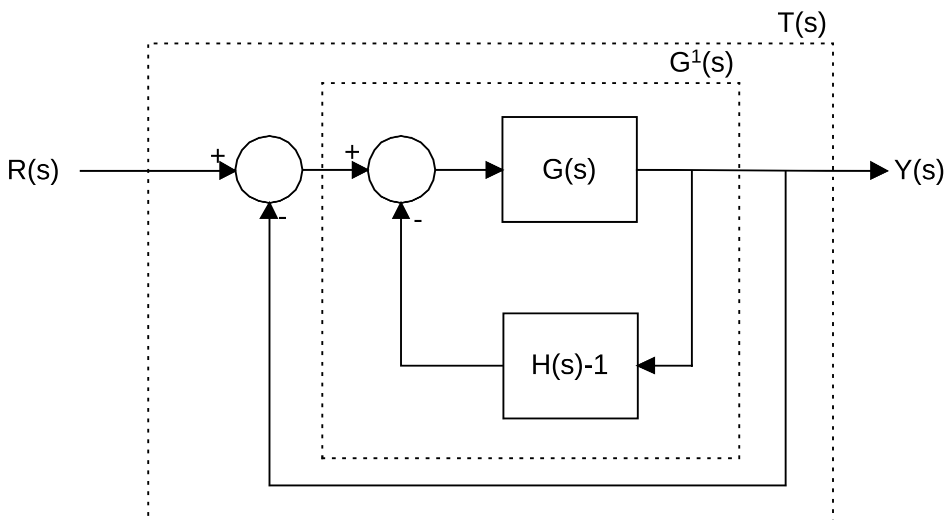


Figura 7.4: Sistema equivalente al de la figura 7.3

donde $G_E(s) = G^1(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]}$ (9), y $T(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ (10)

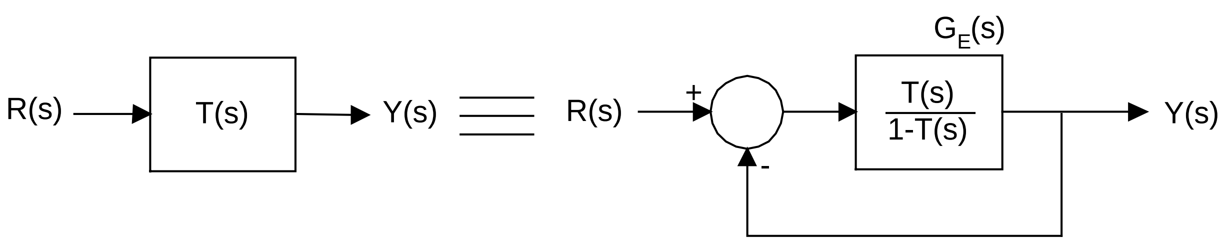


Figura 7.5: Sistema equivalentes.

$G_E(s)$: Transmitancia directa equivalente

Tipo de sistema generalizado

El tipo de sistema se identifica por:

a) Número de raíces s=0 del **numerador** de $T_E(s)=1-T(s)$ para un sistema con realimentación unitaria

b) Número de raíces s=0 del **denominador** de la transmitancia directa equivalente $G_E(s)$

Se ha visto que al agregar factores 1/s a la trasmitancia directa se aumenta el tipo de sistema; si el sistema resultante es estable.

Coeficientes de error en términos de $G_E(s)$

$$E(s) \quad = \quad R(s) - Y(s) \quad = \quad R(s)\left[1 - \frac{G_E(s)}{1+G_E(s)}\right]$$

$$E(s) \quad = \quad R(s)\left[\frac{1}{1+G_E(s)}\right] \tag{11}$$

para entrada de potencias del tiempo con $R(s) = \dfrac{A}{s^n}$ obtenemos

$$E(s) \quad = \quad \frac{A}{s^n}\left[\frac{1}{1+G_E(s)}\right] \tag{12}$$

si el límite existe, $\Rightarrow$ error de estado estacionario para entrada $\dfrac{A}{s^n}$ es:

$$\lim_{s\to 0} sE(s) \quad = \quad \lim_{s\to 0} \frac{A}{s^{n-1}\left[1+G_E(s)\right]} \tag{13}$$

casos particulares:

Escalón, n=1

$$\text{error} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{1+G_E(s)} = \frac{A}{1+K_0} \quad ; \quad K_0 = \lim_{s\to 0} G_E(s) \qquad (14)$$

Rampa, n=2

$$\text{error} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s[1+G_E(s)]} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s\,G_E(s)} = \frac{A}{K_1} \qquad (15)$$

$$K_1 = \lim_{s\to 0} s\,G_E(s) \qquad (16)$$

Para potencias superiores del tiempo, n>1

$$\text{error} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^{n-1}[1+G_E(s)]} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^{n-1}\,G_E(s)} = \frac{A}{K_{n-1}}$$

definimos:

K_i : Coeficientes de error de estado estacionario

$$K_i = \lim_{s\to 0} s^i\,G_E(s)$$

Ejemplo 7.3: Calcular el error de estado estacionario ante un escalón para un sistema tipo 0 con:

$$G_E(s) = \frac{K}{s+2}$$

$$K_0 = \lim_{s\to 0} G_E(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{s+2} = \frac{K}{2}$$

error de estado estacionario ante un escalón= $\frac{A}{1+K_0} = \frac{2A}{2+K}$

Ejemplo 7.4: Calcular el error de estado estacionario para un sistema tipo 1 con:

$$G_E(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Para entrada escalón

$$K_0 = \lim_{s\to 0} G_E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s(s+2)} = \frac{K}{0} = \infty$$

$$error = \frac{A}{1+\infty} = 0$$

Para entrada rampa

$$K_1 = \lim_{s\to 0} sG_E(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(s+2)} = \frac{K}{2}$$

$$error = \frac{A}{K_1} = \frac{2A}{K}$$

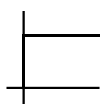
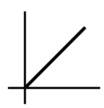
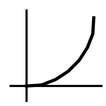
TIPO DE SISTEMA	$R(s) = \frac{A}{s}$ 	$R(s) = \frac{A}{s^2}$ 	$R(s) = \frac{A}{s^3}$ 	$R(s) = \frac{A}{s^4}$
0	$\frac{A}{1+K_0}$	∞	∞	∞
1	0	$\frac{A}{K_1}$	∞	∞
2	0	0	$\frac{A}{K_2}$	∞
3	0	0	0	$\frac{A}{K_3}$

Tabla 7.2: Coeficientes de error para el tipo de sistema

Pasos para calcular el error de estado estacionario:

1. Probar la estabilidad del sistema
2. Calcular $G_E(s)$
3. Identificar el tipo de sistema
4. Calcular los coeficientes de error
5. Calcular el error estacionario usando los coeficientes de error