**ESCOM-IPN Departamento de Formación Básica**

**Asignatura: Probabilidad y Estadística**
**Profesor: Leticia Cañedo Suárez**
**Ejercicio: Distribución Conjunta**

**1._** Supón que la v. a. bidimensional $(X,Y)$ tienen f.d. p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = kx\,(x-y) \quad 0 < x < 2 \quad y \quad -x < y < x$$

***a)*** Encuentra el valor de *k*.
***b)*** Encuentra las f. d. p marginales.

**Respuesta** ***a)*** $k = \frac{1}{8}$

***b)*** $f_X(x) = \frac{1}{4}x^3 \quad \text{para} \quad 0 < x < 2$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{4}y + \frac{y^3}{48} & \text{para } 0 < y < 2 \\ \frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{5y^3}{48} & \text{para } -2 \le y \le 0 \end{cases}$$

**2._** ¿Para que valores de $k$ es $f_{X,Y}(x,y) = ke^{-(x+y)}$ una f. d. p conjunta de $(X,Y)$ en la región $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$?

**Respuesta** $k = \frac{1}{(1-e^{-1})^2}$

**3._** Supón que la v. a. bidimensional $(X,Y)$ está distribuida uniformemente en el cuadrado cuyos vértices son $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. Encuentra las marginales $f_X(x)$ y $f_y(y)$.

**Respuesta**

$f_X(x) = 1 - |x| \quad \text{para} \quad -1 < x < 1$

$f_Y(y) = 1 - |y| \quad \text{para} \quad -1 < y < 1$

**4._** Supón que la f. d. p conjunta de $(X,Y)$ está dada por $f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}$ para $x > 0$ y $y > x$. Encuentra:

***a)*** Las marginales para *X* y para *Y*.
***b)*** $P(X > 2 | y < 4)$

**Respuesta**

***a)*** $f_X(x) = e^{-x}$ para $x > 0$, $f_Y(y) = ye^{-y}$ para $y > x > 0$, $y > 0$ ***b)*** $e^{-2} - 3e^{-4}$

**5._** Cuando un automóvil es detenido por una patrulla, se revisa el desgaste de cada neumático y cada faro delantero se verifica para ver si está correctamente alineado. Denotemos por $X$ el número de faros delanteros que necesitan ajuste y por $Y$ él numero de neumáticos defectuosos.

***a)*** Si $X$ y $Y$ son independientes con $f_X(0)=0.5$, $f_X(1)=0.1$, $f_X(2)=0.4$ y $f_Y(0)=0.6$, $f_Y(1)=0.1$. $f_Y(2)=f_Y(3)=0.05$, $f_Y(4)=0.2$ Escribe la función de probabilidad conjunta de la v. a. bidimensional $(X,Y)$ mediante una tabla.

***b)*** Calcula $P(X\le 1, Y\le 1)$ y verifica que es igual al producto $P(X\le 1), P(Y\le 1)$

***c)*** ¿Cuál es la probabilidad de no violaciones $[P(X+Y=0)]$?

**Respuesta**

***b)*** 0.42 ***c)*** 0.30

**6._** Un maestro acaba de entregar un largo artículo a una mecanógrafa y otro, un poco más corto a otra. Sea $X$ el número de errores de mecanografía del primer artículo y $Y$ el número de errores de mecanografía del segundo artículo. Supón que $X$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda$ y $Y$ tiene una distribución de Poisson con parámetros $\mu$ y que $X$ y $Y$ son independientes.

***a)*** ¿Cuál es la función de probabilidad conjunta para la v. a. bidimensional $(X,Y)$?

***b)*** ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo se cometa un error en ambos artículos combinados?

***c)*** Obtén una expresión general para la probabilidad de que el número total de errores de los dos artículos sea $m$, donde $m$ es un entero no negativo.

$$\left[\begin{array}{l}\text{Sugerencia : } A=\{(x,y)|x+y=m\}=\{(m,0),(m-1,1),\ldots,(1,m-1),(0,m)\} \\ \text{ahora suma la f.d.p conjunta sobre } (x,y)\in A \text{ y utiliza el Teorema del binomio} \\ \text{que dice } \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}=(a+b)^m \text{ para cualquier } (a,b). \end{array}\right]$$

**Respuesta**

***b)*** $(1+\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)}$ ***c)*** $e^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{(\lambda+\mu)^m}{m!}$