10. Análisis en el dominio de la frecuencia

Tenemos una señal de entrada senoidal r(t) con amplitud R y frecuencia ω_0 y nos interesa la salida y(t) en régimen senoidal permanente.

$$r(t) = R\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t \qquad (1)$$

$$y(t) = Y\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi) \qquad (2)$$

en el dominio de la frecuencia compleja la salida es

$$Y(s) = T(s)R(s) \qquad (3)$$

para el análisis en régimen senoidal permanente hacemos $s \rightarrow j\omega$ en la ecuación (3)

$$\lim_{s\to j\omega} Y(s) = \lim_{s\to j\omega} T(s)R(s) = Y(j\omega) = T(j\omega)R(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = T(j\omega)R(j\omega) \qquad (4)$$

escribiendo $Y(j\omega)$ como número complejo en magnitud y fase

$$Y(j\omega) = \left|Y(j\omega)\right| \angle Y(j\omega) \tag{5}$$

donde

$$\left|Y(j\omega)\right| = \left|T(j\omega)\right|\left|R(j\omega)\right| \tag{6}$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle T(j\omega) + \angle R(j\omega) \tag{7}$$

de (1), (2) y (6) tenemos que la amplitud Y de la salida senoidal es:

$$Y = R\left|T(j\omega_0)\right| \tag{8}$$

y de (1), (2) y (7) escribimos la fase de salida como:

$$\phi = \angle T(j\,\omega_0) \tag{9}$$

$$\phi = \angle Y(j\omega) - \angle R(j\omega) = \angle T(j\omega) \tag{10}$$

Las características de magnitud y de fase de un sistema de lazo cerrado se pueden emplear para predecir el desempeño en estado estable cuando la entrada es senoidal; asi como el transitorio en el dominio del tiempo.

Respuesta de frecuencia de sistemas de lazo cerrado

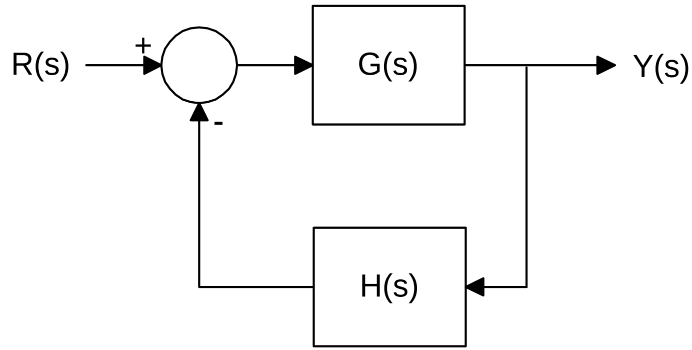

Figura 10.1: Sistema de control de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (11)$$

Si s→jω para régimen senoidal permanente

$$T(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)} \qquad (12)$$

donde la función de transferencia en régimen senoidal permanente es

$$T(j\omega) = \left|T(j\omega)\right|\angle T(j\omega) \qquad (13)$$

o equivalentemente como número complejo

$$T(j\omega) = \mathrm{Re}\{T(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{T(j\omega)\} \qquad (14)$$

donde

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{\left|G(j\omega)\right|}{\left|1+G(j\omega)H(j\omega)\right|} \qquad (15)$$

$$\angle T(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle\left[1+G(j\omega)\,H(j\omega)\right] \qquad (16)$$

T(s) se interpreta como la función de transferencia de entrada-salida de un filtro eléctrico.

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

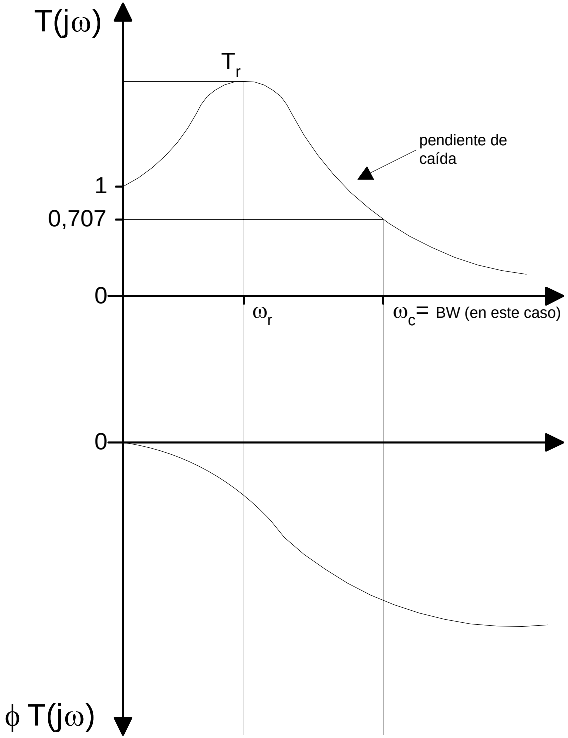

Figura 10.2:
Características típicas de ganancia y fase de un sistema de control realimentado

Definiciones:

T_r: Pico de resonancia, es el valor máximo de $|T(j\omega)|$ a la frecuencia de resonancia ω_r

- Valores deseados: 1,1…1,5
- Indica la estabilidad relativa y está directamente relacionado con el sobrepaso en el tiempo

ω_r: Frecuencia de resonancia, frecuencia a la cual ocurre el pico de resonancia T_r

ω_c: Ancho de banda (BW) o frecuencia a la cual la magnitud $\left|T(j\omega)\right|$ cae al 70,7% $(-3dB)$ de su valor a ω=0. (BW = ω_c pues el sistema no tiene frecuencia de corte inferior)

T_r, ω_r y BW para un sistema prototipo de 2° orden

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (17)$$

Pico de resonancia y frecuencia de resonancia

En régimen senoidal permanente (s → ω)

$$\lim_{s \to j\omega} T(s) = T(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (18)$$

para simplificar hacemos

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad \text{Frecuencia normalizada} \qquad (19)$$

$$T(j\Omega) = \frac{1}{1 + j2\Omega\xi - \Omega^2} \qquad (20)$$

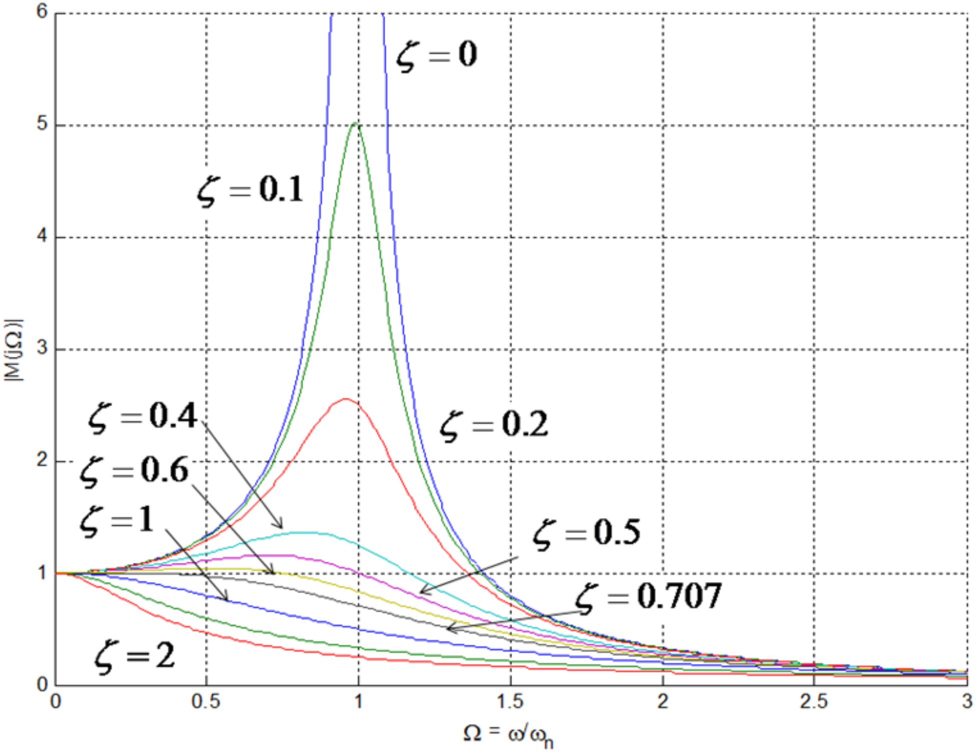

Figura 10.3: Magnitud en función de la frecuencia normalizada Ω de un sistema de control de lazo cerrado de 2º orden.

La magnitud y fase son:

$$\left|T(j\Omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2+\left(2\xi\Omega\right)^2}} \tag{21}$$

$$\angle T(j\Omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right] \tag{22}$$

para encontrar el máximo derivamos respecto a Ω e igualamos a cero

$$\frac{d\left[T(j\Omega)\right]}{d\Omega} = 0 \tag{23}$$

$\Rightarrow \quad \Omega_r$: frecuencia de resonancia

$$\Omega_r = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{1-2\xi^2} \end{cases} \tag{24}$$

$$\Omega_r = \sqrt{1-2\xi^2} \qquad ; \qquad \xi < 0{,}707 \tag{25}$$

Ω_r = 0 no es un máximo verdadero si ξ<0.707

desnormalizando, de (19) y (25)

$$\omega_r = \omega_n \Omega_r$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \qquad ; \qquad \xi < 0{,}707 \qquad (26)$$

Sustituyendo

$$|T_r| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad ; \qquad \xi < 0.707 \qquad (27)$$

$$T(j\Omega) = \frac{1}{1 + j2\Omega\xi - \Omega^2} \qquad (20)$$

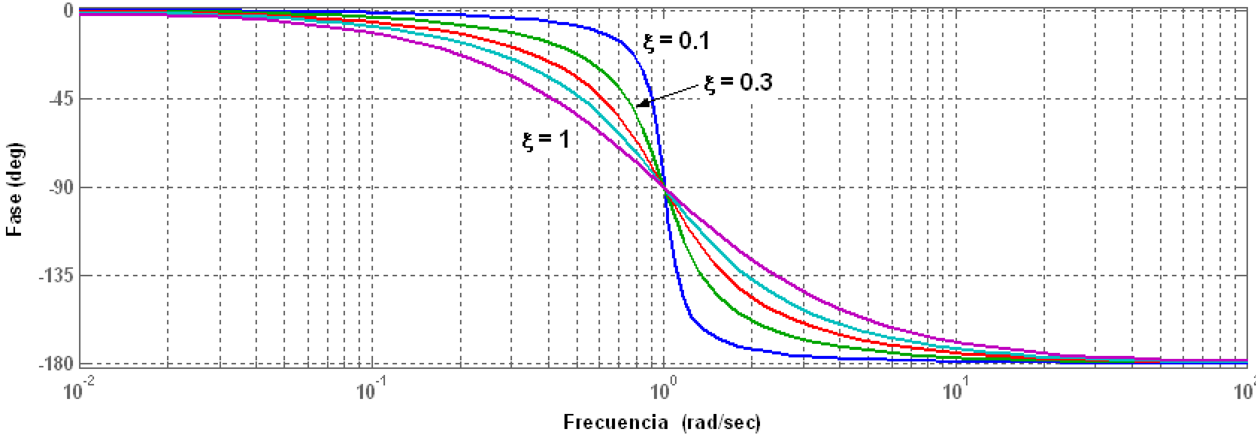

Figura 10.4: Fase normalizada de un sistema prototipo de segundo orden