Análisis de Sistemas Lineales

Función de transferencia y transformaciones de sistemas en variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Contenido

- Función de transferencia del modelo en variables de estado
- Transformaciones de similitud: caso general
- Transformación a la forma canónica diagonal (modal)
- Solución del sistema de ecuaciones transformado
- Ejemplos y Ejercicios

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Función de transferencia

- Al sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- Le aplicamos la transformada de Laplace

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

- Agrupando y despejando **X**(s), con **x**(0) = 0

$$\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{X}(s) = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Función de transferencia (2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

- Sustituyendo **X**(s) en la expresión para **Y**(s)

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

- Factorizando **U**(s) y despejando

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

- Para un sistema SISO G(s) es un escalar; pero, para un MIMO, **G**(s) es una matriz.

- Con $\boldsymbol{\Phi}(s) = \left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}$ $\quad\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{B}+\mathbf{D}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Ejemplo 1: Cálculo de G(s)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

- Paso 1: Calcular $\mathbf{\Phi}(s) = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}$

$$\mathbf{\Phi}(s) = \frac{adj\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)}{\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)} = \frac{cof\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{T}}{\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)}$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = \frac{adj\left[s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \right]}{\begin{vmatrix} \left(s + \frac{R}{L}\right) & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s \end{vmatrix}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Ejemplo 1: Cálculo de G(s)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$cof_{(1,1)} = (-1)^{(1+1)} s = s \qquad cof_{(1,2)} = (-1)^{(1+2)}\left(-\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{C}$$

$$cof_{(2,1)} = (-1)^{(2+1)}\left(\frac{1}{L}\right) = -\frac{1}{L} \qquad cof_{(2,2)} = (-1)^{(2+2)}\left(s + \frac{R}{L}\right) = \left(s + \frac{R}{L}\right)$$

$$cof\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & \left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}$$

Transponiendo filas y columnas de la matriz de cofactores

$$adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = cof\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{T} = \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Ejemplo 1: Cálculo de G(s)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Dividiendo la adjunta de (*s***I**-**A**) entre el determinante de (*s***I**-**A**)

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}}{\left(s\left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}\right)}$$

- Paso 2: Completamos el cálculo de *G*(s)

$$G(s) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}}{\left(s\left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{LC}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Ejemplo 2: Cálculo de G(s)

- Encuentre la función de transferencia de

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$G(s) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{adj\left[s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right]}{\begin{vmatrix} (s+2) & -2 \\ 0 & (s+3) \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s^2 + 5s + 6}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Transformaciones de similitud

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Caso general

Definimos la transformación $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}^{*}(t)$

Donde:

$\mathbf{x}(t)$: Vector de estado

$\mathbf{x}^{*}(t)$: Vector de estado transformado

$\mathbf{P}$: matriz constante y no singular ($\mathbf{P}^{-1}$ existe)

Derivando obtenemos además

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{*}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Transformaciones de similitud

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Caso general

Sea el sistema A:
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Sustituyendo el vector de estado y su derivada en el sistema A
$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x}^* + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Premultiplicando la ecuación de estado por la inversa de **P**
$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}^* + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x}^* + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Obtenemos el sistema equivalente B, que tiene la misma forma que el sistema A; con las matrices transformadas.

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^* + \mathbf{B}^*\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^*\mathbf{x}^* + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$
$$\mathbf{B}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$$
$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{P}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Ejemplo 3: Transformación

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Transforme el sistema usando la matriz **P** dada.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}u \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}^* + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 \end{bmatrix}\mathbf{x}^*$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Transformaciones de similitud

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- A forma canónica diagonal

Definimos la transformación $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t)$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{x}}(0)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = diag(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Donde:

$\mathbf{x}(t)$: Vector de estado

$\hat{\mathbf{x}}(t)$: Vector de estado transformado

$\mathbf{V}$: matriz constante y no singular, que transforma el sistema a forma canónica diagonal

λ_i : Valores propios de la matriz $\mathbf{A}$

$\hat{\mathbf{A}}$: matriz diagonal

Transformaciones de similitud

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- A forma canónica diagonal

Sea el sistema original:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Sustituyendo el vector de estado y su derivada en el sistema A

$$\mathbf{V}\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{V}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{V}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Premultiplicando la ecuación de estado por $\mathbf{V}^{-1}$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{V}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Obtenemos el sistema equivalente B, que tiene la misma forma que el sistema A; con las matrices transformadas.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = diag(\lambda_i)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = diag(\lambda_i)$$
$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}$$
$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{V}$$

Cálculo de la matriz **V** o matriz de vectores propios

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{BU}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{DU}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Caso 1: Todos los valores propios λ_i son diferentes

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV} = diag(\lambda_i)$$

$$\mathbf{AV} = \mathbf{V}diag(\lambda_i) \qquad \text{con} \qquad \mathbf{V} = \left(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \cdots, \mathbf{V}_n\right)$$

$$\mathbf{AV} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{AV}_1, \mathbf{AV}_2, \mathbf{AV}_3, \cdots, \mathbf{AV}_n\right) = \left(\lambda_1\mathbf{V}_1, \lambda_2\mathbf{V}_2, \lambda_1\mathbf{V}_3, \cdots, \lambda_n\mathbf{V}_n\right)$$

Cada valor de λ_i , llamado valor propio es un escalar cumple que

$$\mathbf{AV}_i = \lambda_i\mathbf{V}_i$$

Interpretación de la transformación diagonal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

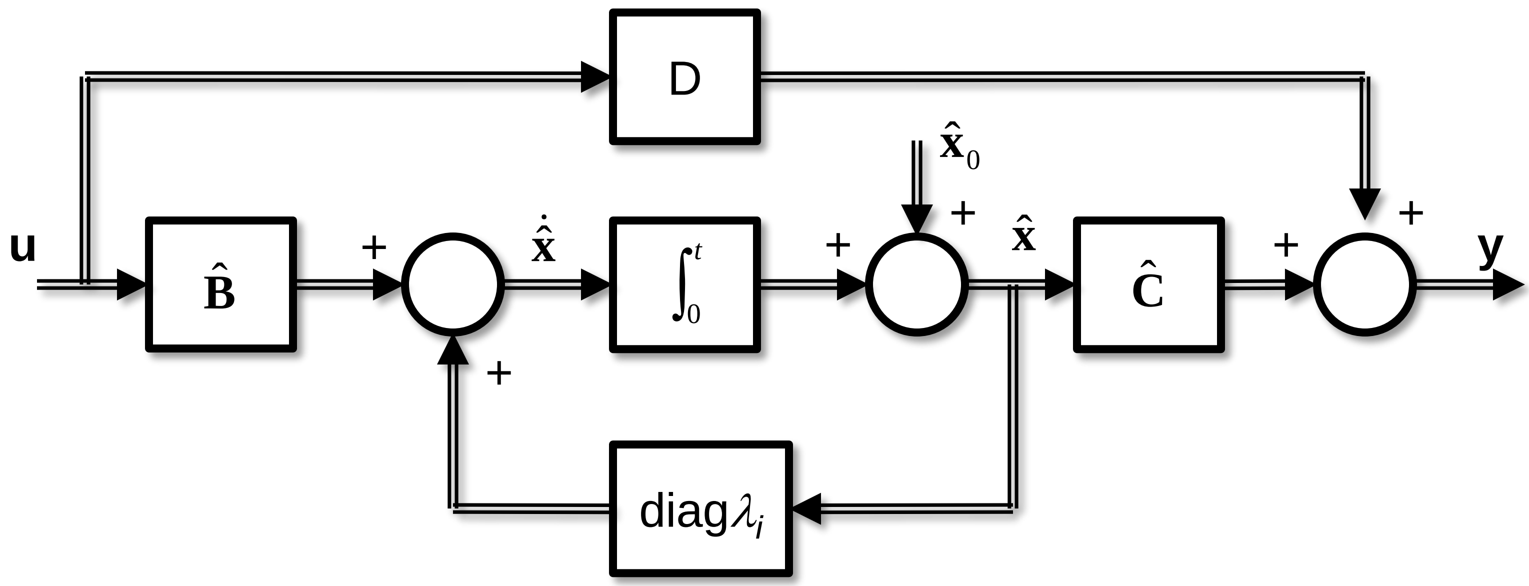

Diagrama de bloques de la estructura del sistema en forma modal

- Aparentemente no hay cambio de la estructura respecto al diagrama general de un sistema en variables de estado.

Interpretación de la transformación diagonal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + d \cdot u$$

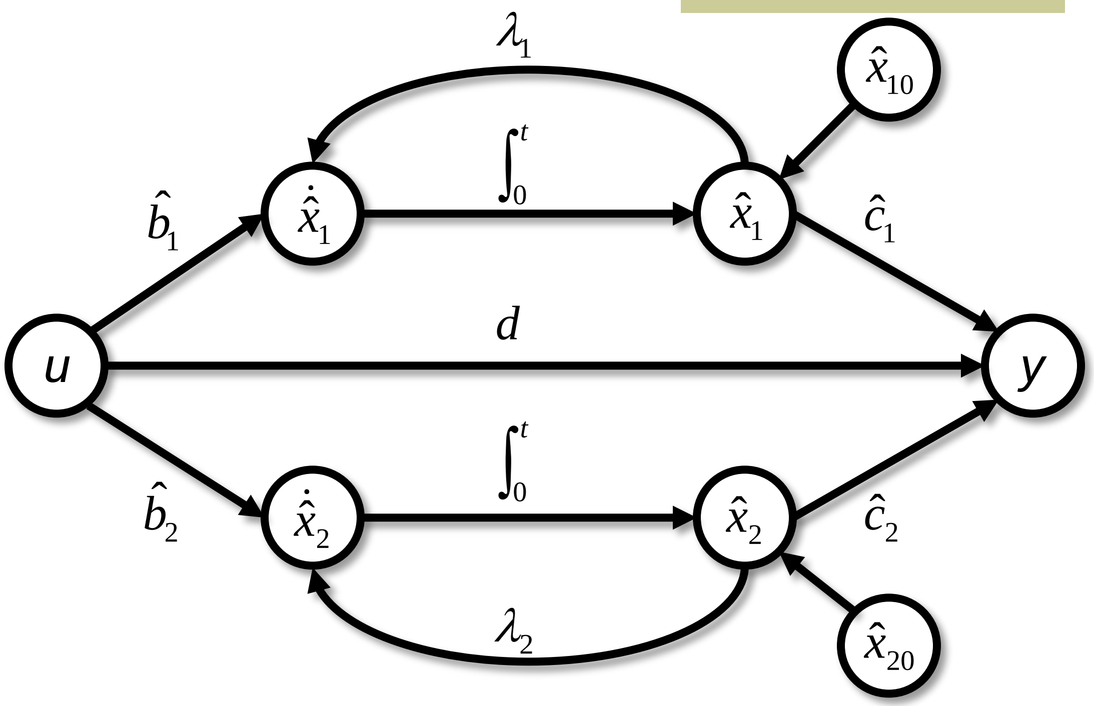

Diagrama de flujo de señales de la estructura de un sistema SISO de 2° orden en forma canónica diagonal

- No hay dependencia cruzada; las variables de estado son ahora dependientes únicamente de sí mismas. La solución es más fácil.

Solución del sistema transformado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Ecuación homogénea de estado $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = diag(\lambda_i)\hat{\mathbf{x}}$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{x}}(0)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \lambda_1 \hat{x}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \lambda_2 \hat{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= \lambda_n \hat{x}_n \end{aligned}\right\} \textit{Sistema de ecuaciones diferenciales escalares independientes}$$

$$\hat{x}_i = e^{\lambda_i t}\hat{x}_i(0)$$ Respuesta natural

$$\hat{x}_i = \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)}\hat{b}_i u(\tau) d\tau$$ Respuesta forzada

$$\hat{x}_i = e^{\lambda_i t}\hat{x}_i(0) + \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)}\hat{b}_i u(\tau)$$ Respuesta total

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Cálculo de la matriz **V**

- Caso 1: Todos los valores propios λ_i son diferentes

$$\left(\lambda_i \mathbf{V}_i - \mathbf{A}\mathbf{V}_i\right) = \mathbf{0}$$
$$\left(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{V}_i = \mathbf{0} \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \forall \lambda_i, \lambda_j$$

Aplicando repetidamente la ecuación anterior para cada valor de λ podemos calcular el calor de las componentes v_{ji} del vector columna $\mathbf{V}_i$.

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Existen típicamente más soluciones que incógnitas; por lo que se asume un valor para una de las componentes v_{ji}, (típicamente el valor 1), se calculan las otras componentes de v_{ji}, y eventualmente cada vector resultante puede normalizarse.

$$\mathbf{V}_i \text{ normalizado} = \frac{\mathbf{V}_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ji})^2}}$$

Ejemplo 4: Transformación a diagonal con la matriz **V**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -1.5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -1.5 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} (\lambda + 3.5) & 0.5 \\ -3.5 & (\lambda + 1.5) \end{pmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = -3$$

Ejemplo 4: Transformación a diagonal con la matriz **V**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}_1 = \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ -1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1.5 v_{11} + 0.5 v_{21} = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}_2 = \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0.5 v_{12} + 0.5 v_{22} = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4: Transformación a diagonal con la matriz **V**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = diag(\lambda_i) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{BU}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{DU}$$

Cálculo de la matriz **T**

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Caso 2: Todos los valores propios λ_i son diferentes y el sistema además está en forma canónica controlable o FCC.

Se puede calcular la matriz de transformación **T**, creando la matriz de **Vandermonde**. La matriz **T** tiene las mismas propiedades de la matriz de vectores propios **V**; aunque no resultan iguales al compararlas. En cualquier caso, las matrices **V** y **T** resultan dependientes del orden en el que se coloquen los valores propios; y la matriz **T** solamente funciona para el caso FCC.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: Transformación a diagonal usando la matriz $\mathbf{T}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 72 & 55 & 10 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 24 & 26 & (\lambda + 9) \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = -3$$
$$\lambda_3 = -4$$

Ejemplo 5: Transformación a diagonal usando la matriz **T**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = diag(\lambda_i) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 72 & 55 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Cálculo de la matriz V

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Caso 3: Cuando hay valores propios repetidos. En este caso la transformación es a la forma casi diagonal o forma de Jordan.

n: total de valores propios (orden del sistema)

q: valores propios diferentes

$(n\text{-}q)$: valores propios repetidos

λ_j: valor propio repetido

m_j: repeticiones del *j-ésimo* valor propio

Para calcular los vectores para los primeros *n* valores propios diferentes es lo mismo que para el caso 1:

$$\left(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{V}_i = \mathbf{0} \qquad i \ \varepsilon \{ 1..q \}$$

Para el primero de los valores propios repetidos λ_j:

$$\left(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{V}_j = \mathbf{0}$$

Para los siguientes valores repetidos de λ_j:

$$\begin{gathered}\left(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{V}_{j+1} = -\mathbf{V}_j \\ \vdots \\ \left(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{V}_{j+m_j-1} = -\mathbf{V}_{j+m_j-2}\end{gathered}$$

Cálculo de la matriz V

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Si se tuviese por ejemplo

  n = 4valores propios

  q = 2 valores propios diferentes

  (n-q) = 3 valores propios repetidos

  λ_j = -1 valor repetido 3 veces

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3\end{array}\right\} q$$
$$\left.\begin{array}{l}\lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = -1 \\ \lambda_5 = -1\end{array}\right\} n\text{-}q$$

Para calcular los primeros dos valores propios diferentes

$$(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$$
$$(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$$

Para el primero de los valores propios repetidos de λ_j = -1

$$(\lambda_j\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}_3 = \mathbf{0}$$

Para los siguientes valores repetidos de λ_j = -1

$$(\lambda_j\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}_4 = -\mathbf{V}_3$$
$$(\lambda_j\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}_5 = -\mathbf{V}_4$$

Ejemplo 6: Transformación a forma de Jordan

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- El sistema mostrado tiene cuatro valores propios y dos de ellos son repetidos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -18 & -39 & -29 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}\right\} q \qquad \left.\begin{matrix} \lambda_3 = -3 \\ \lambda_3 = -3 \end{matrix}\right\} n\text{-}q$$

- Usando la variante del método de cálculo para las raíces repetidas descrito en [1], p975, encontramos la matriz de vectores propios **V** y el sistema transformado a la forma casi diagonal o de Jordan.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 27 & -9 \\ -1 & -8 & -81 & 54 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ -1 \\ 0.1944 \\ 0.1667 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Referencias

[1] Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.

[2] Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4ª Ed., Madrid.