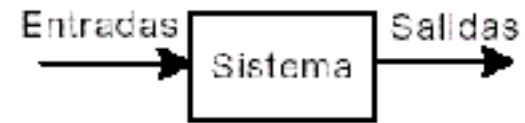


# Análisis de Sistemas Lineales

Modelado de sistemas

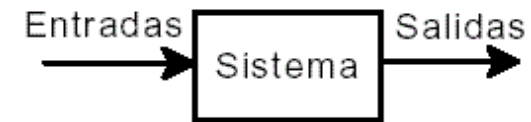


# Contenido

---

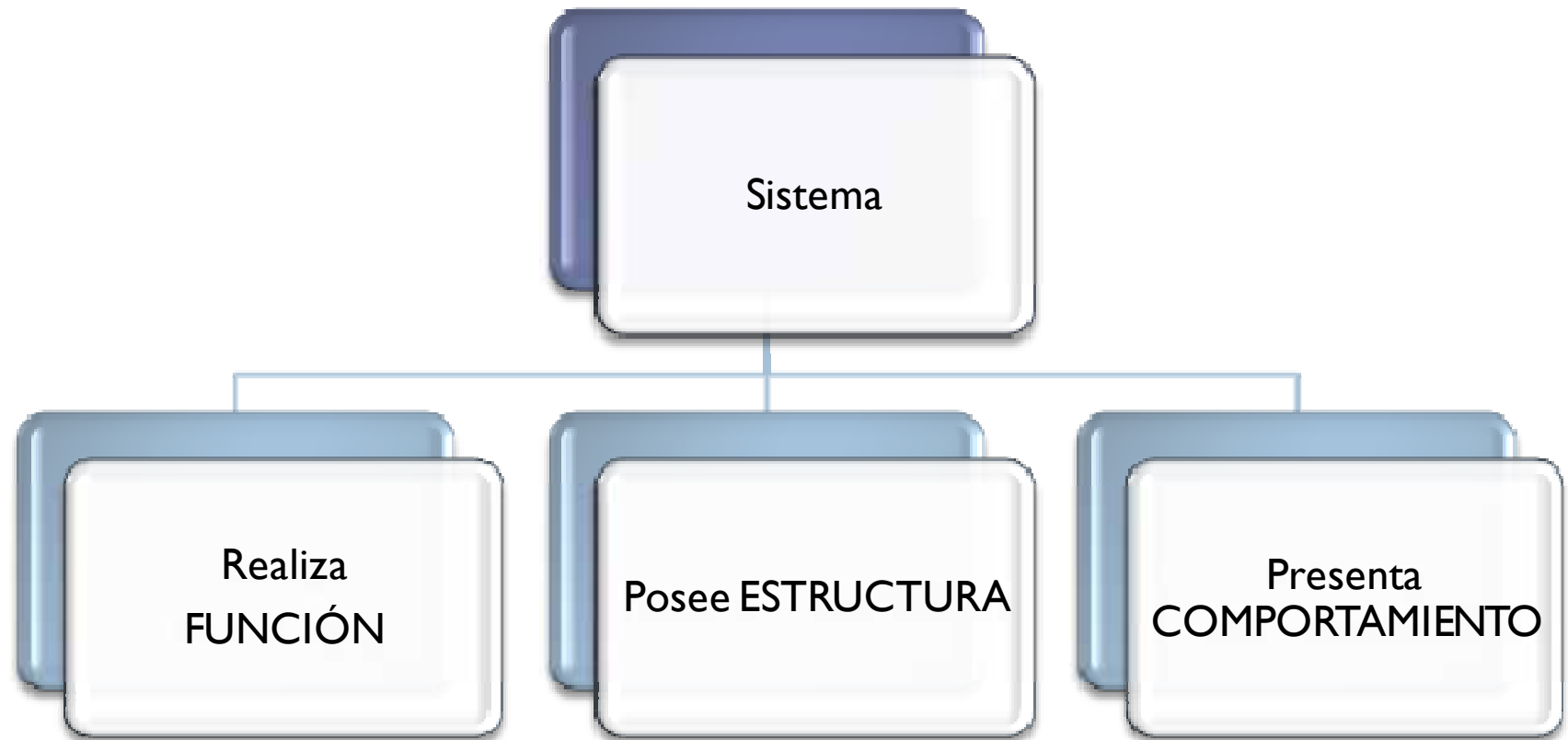
- ▶ Sistema: definiciones
- ▶ Modelado
- ▶ Representación de la estructura del sistema
- ▶ Función de transferencia





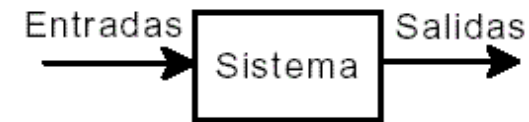
# Sistema

---



- Un sistema realiza una función, posee una estructura y presenta un comportamiento.





# Sistema de control

---



## De lazo abierto

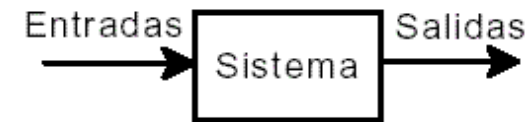
- Ni la salida, ni las variables del sistema influyen en el control



## De lazo cerrado

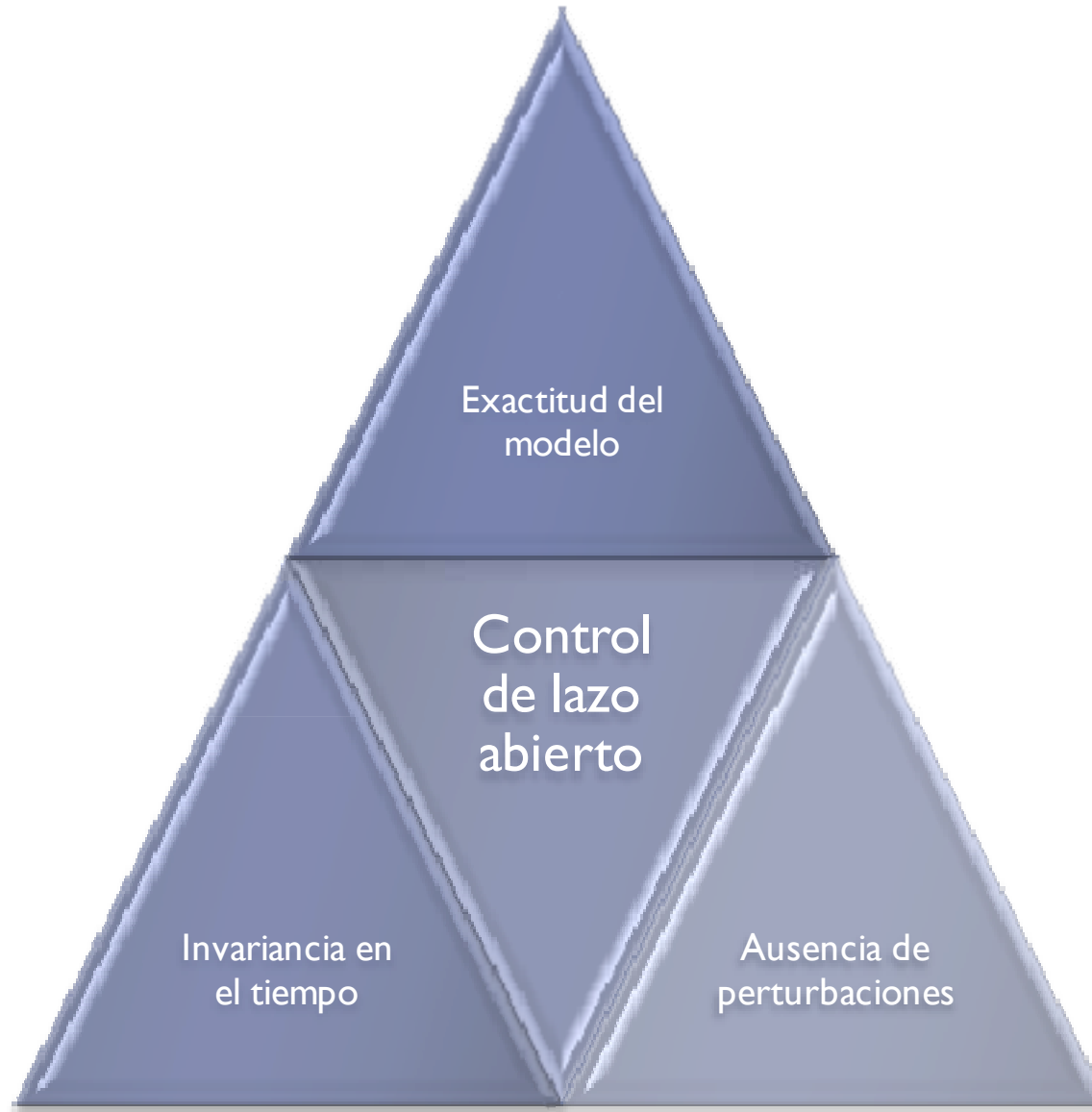
- Las variables del sistema o la salida, por medio de realimentación, influyen en el control

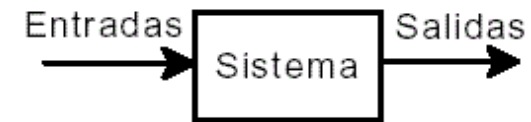




# Control de lazo abierto

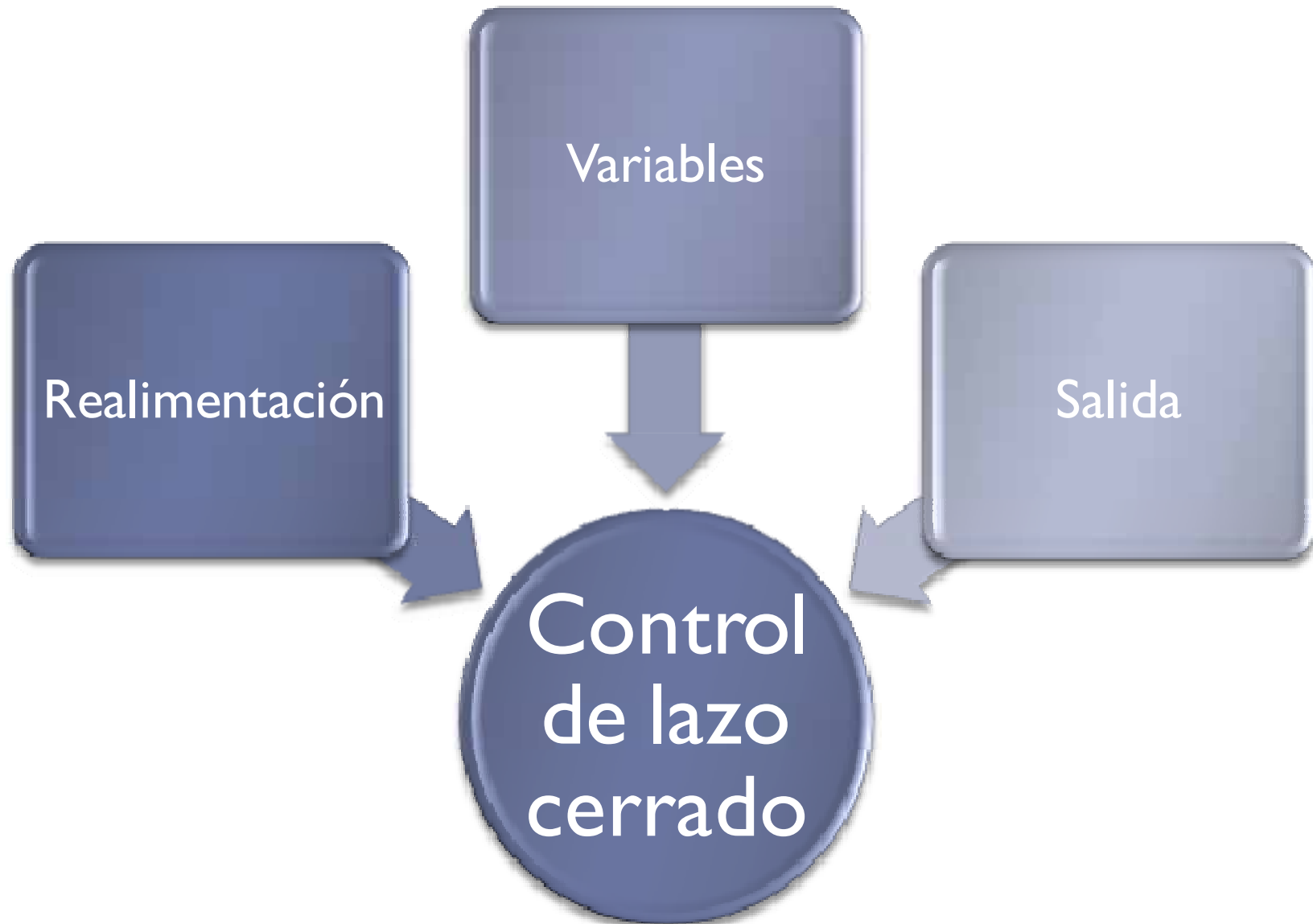
---

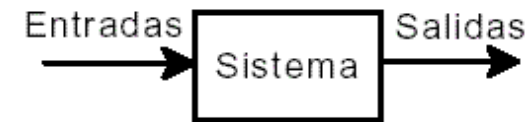




# Control de lazo cerrado

---





# Definiciones

---

## Realimentación

- Una muestra de la salida es redirigida hacia la entrada para comparación

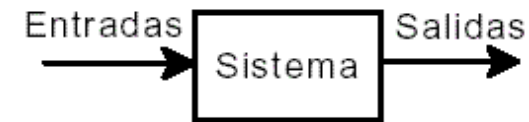
## Planta

- Es el equipo físico que se relaciona con la magnitud que se controla
- Se representa como sistema LTI

## Controlador

- Elemento que se añade para llevar a cabo el control





## Definiciones (2)

---

### Estabilidad (E/S)

- Propiedad de un sistema que ante una entrada finita reacciona con una salida finita

### Servo control

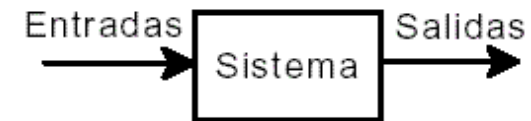
- Sistema de control en el cual la salida es la posición o alguna de sus derivadas

### Sistema dinámico

- Unidad funcional cuyos principales descriptores varían en el tiempo (Pueden ser descritos como funciones del tiempo)

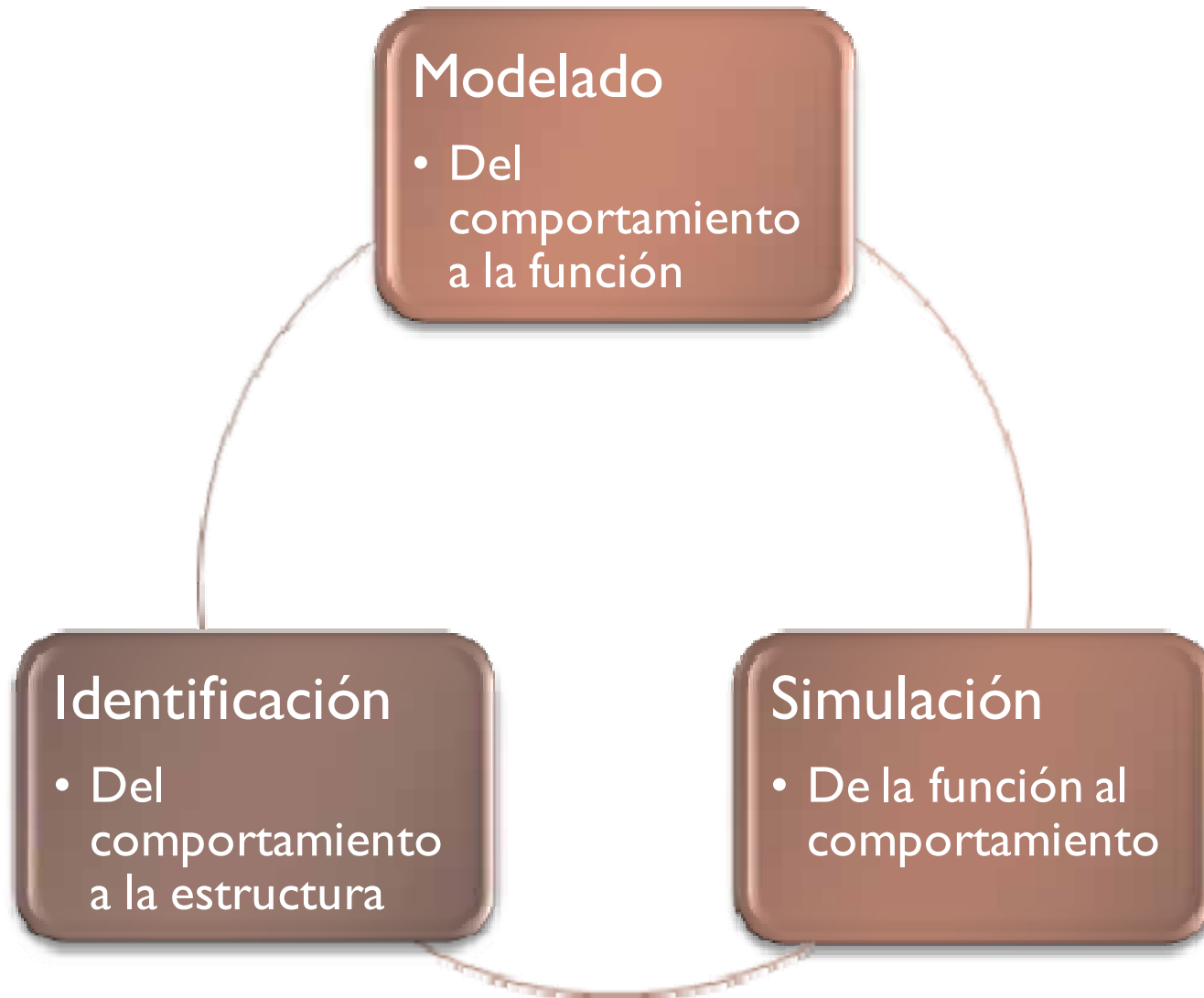


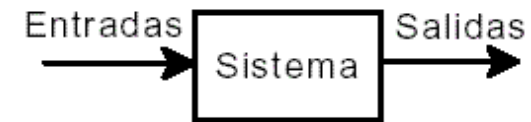




# Relación entre componentes del modelo

---





# Modelado

## Modelado

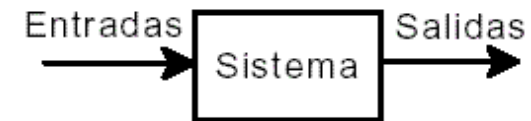
- El modelado es una abstracción: La dinámica será abstraída del carácter físico.

## Objetivo de la abstracción

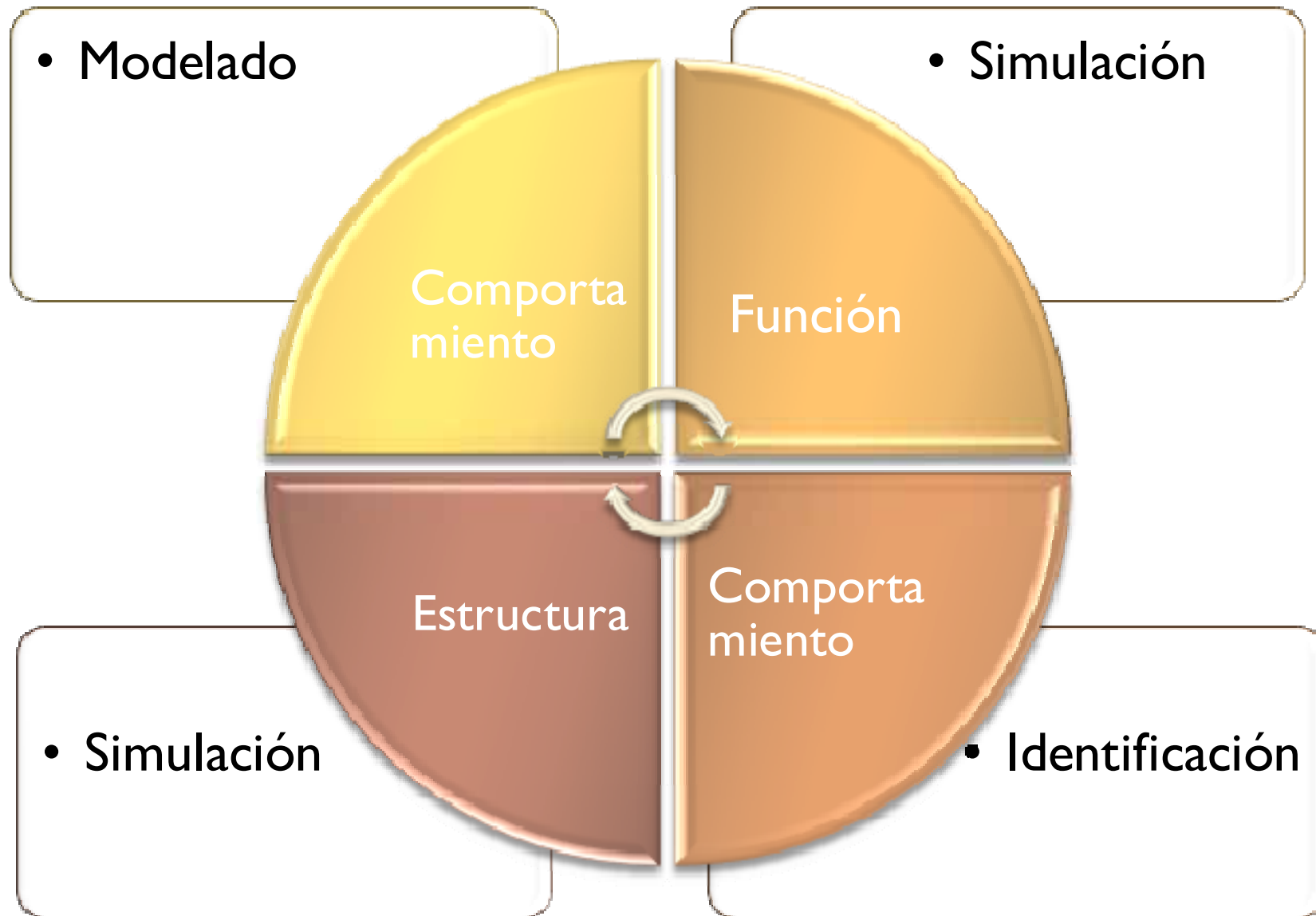
- Describir los procesos temporales por medio de funciones del tiempo
- Resumir las relaciones entre esos procesos como dependencias funcionales

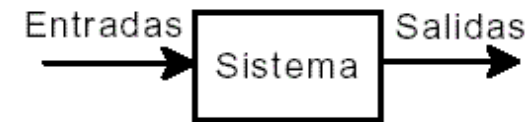
## Representación

- Cuáles variables del fenómeno reproducen el comportamiento dinámico del sistema

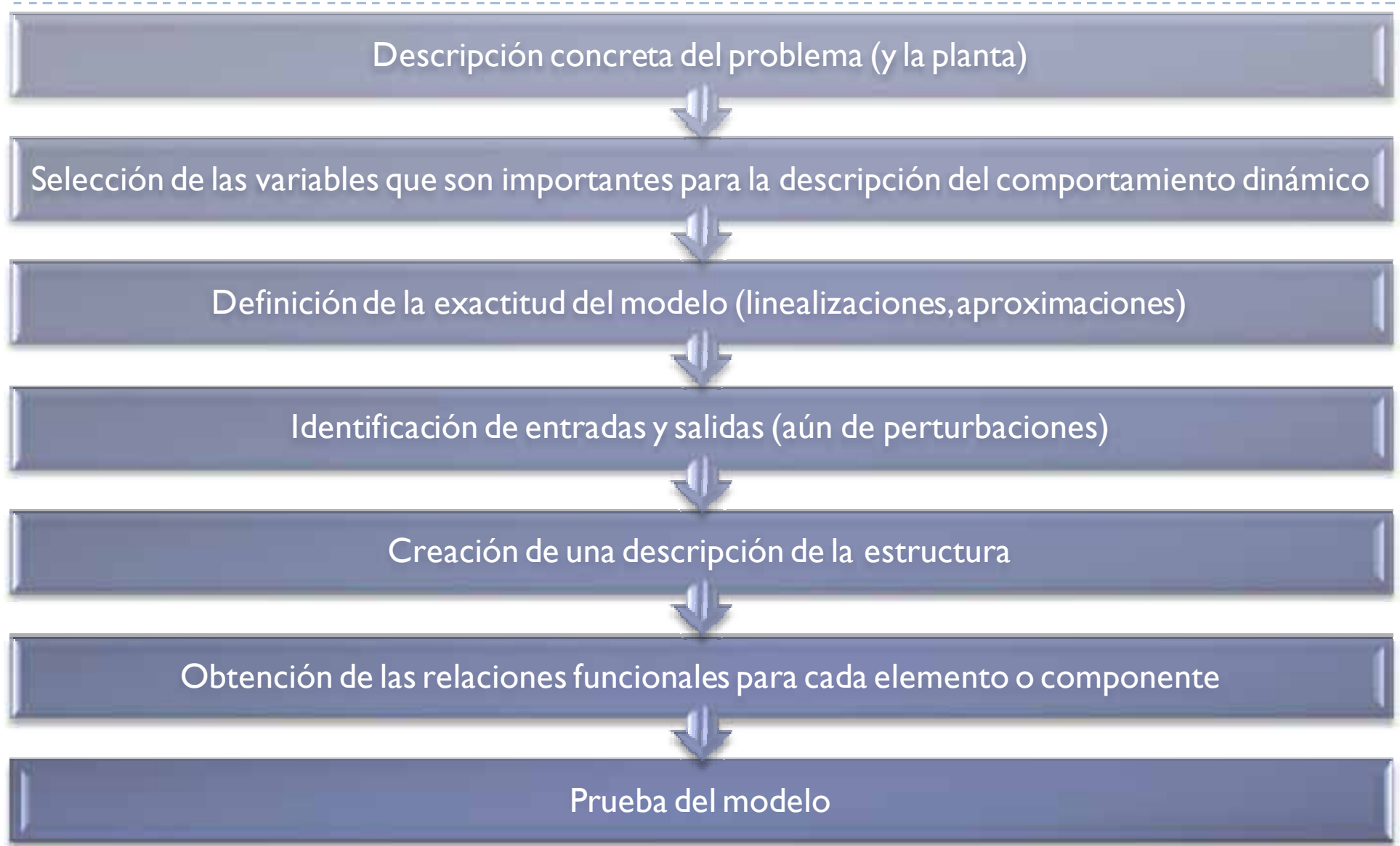


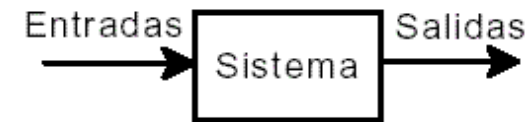
# Relación entre el sistema y el modelo





# Pasos del modelado

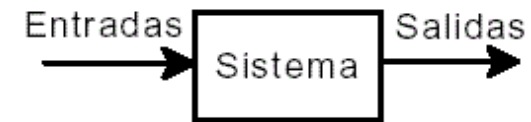




# Creación de la descripción de la estructura

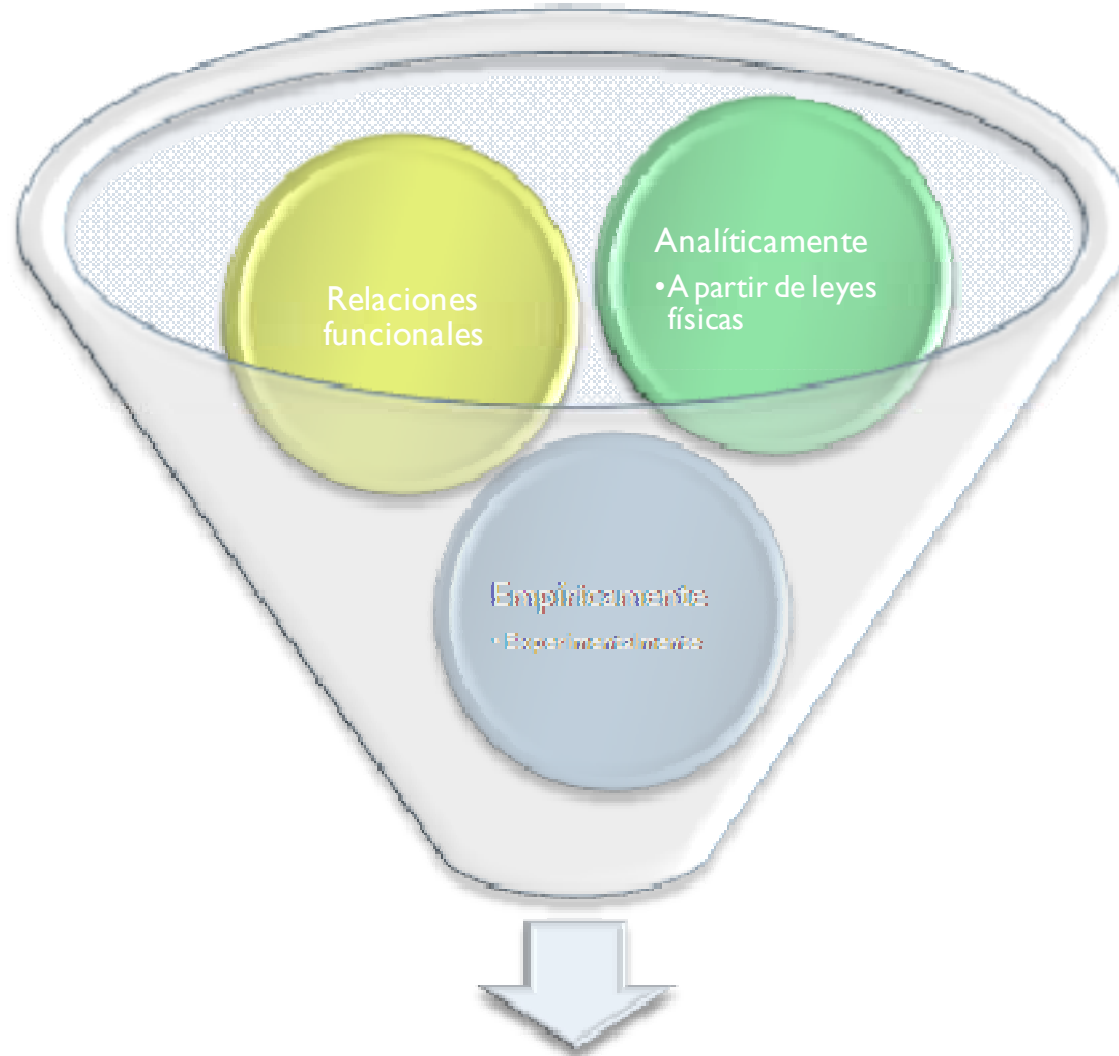
---





# Obtención del modelo cuantitativo

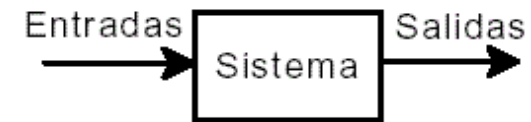
---



**Modelo cuantitativo**

---





# Prueba del modelo

## Análisis

Estabilidad

Error de estado estacionario

Respuesta de frecuencia

## Simulación

Comparación de resultados con las medidas del proceso

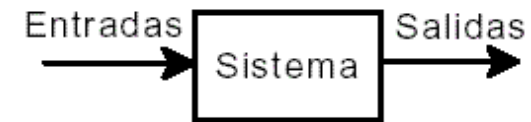
Validación

## Síntesis

Estructura del control

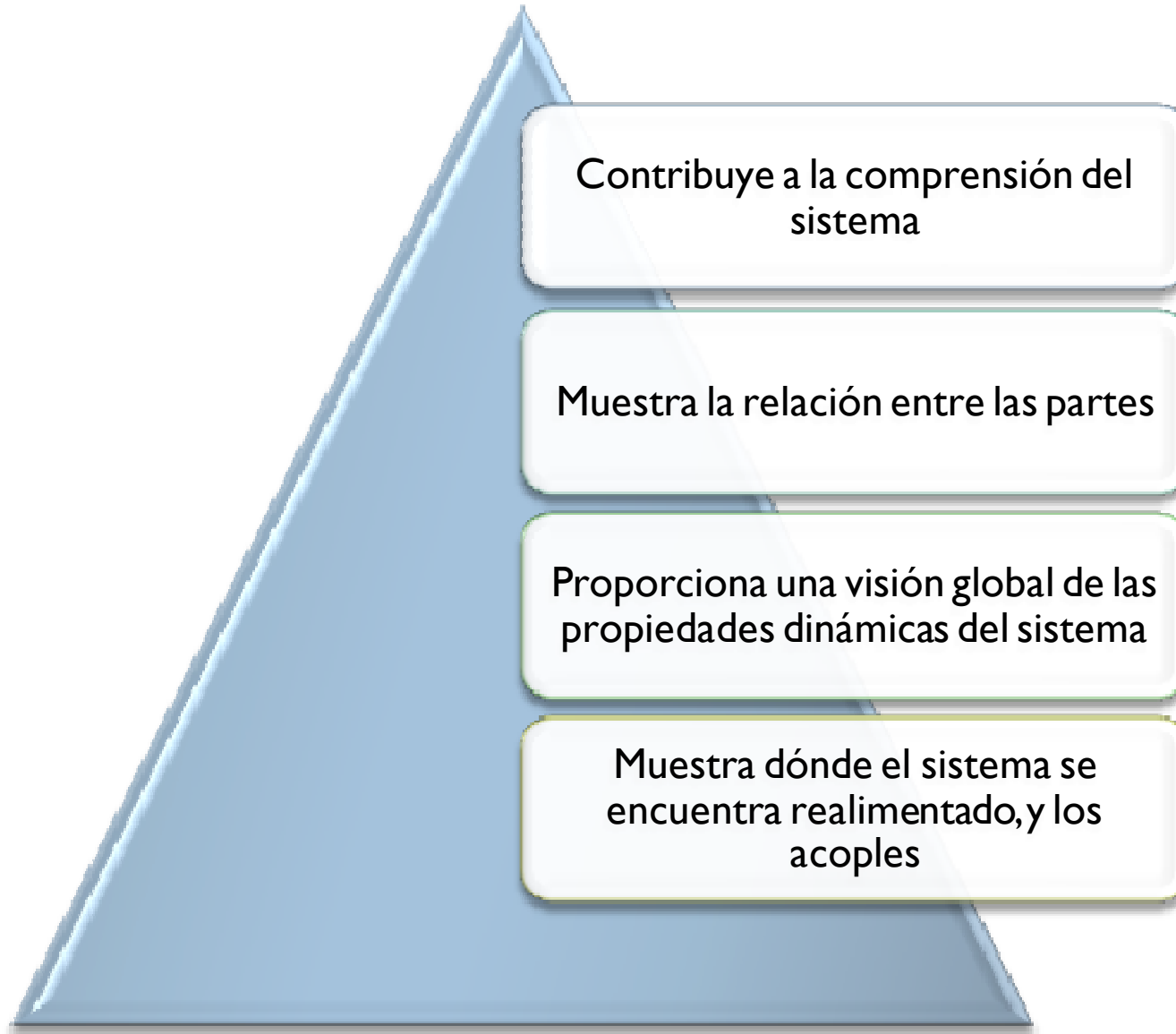
Diseño

Dimensionamiento

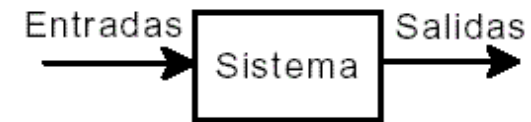


# Importancia de la estructura del sistema

---

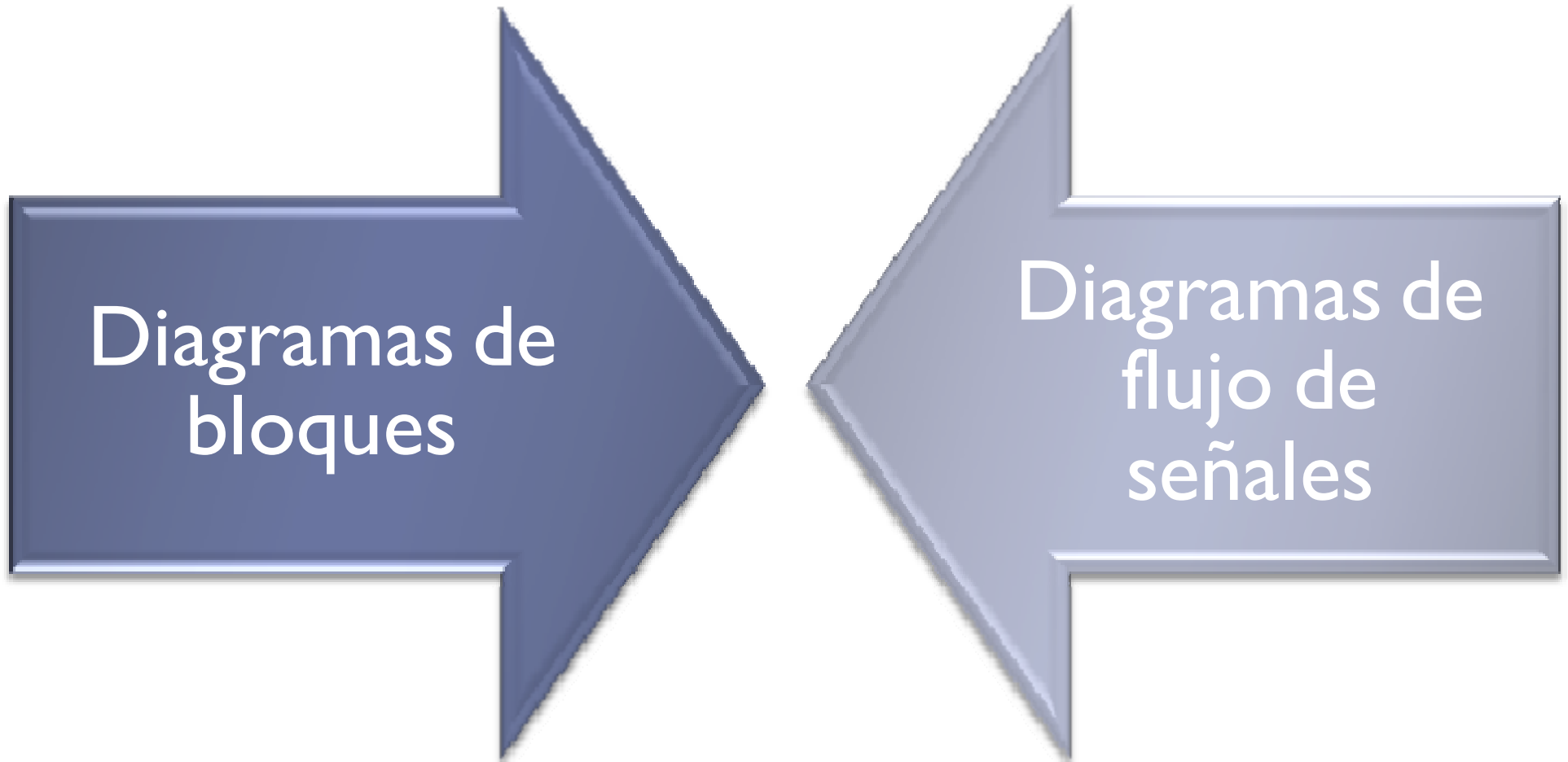


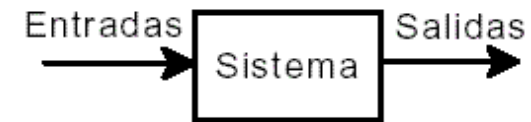




# Representaciones gráficas de la estructura

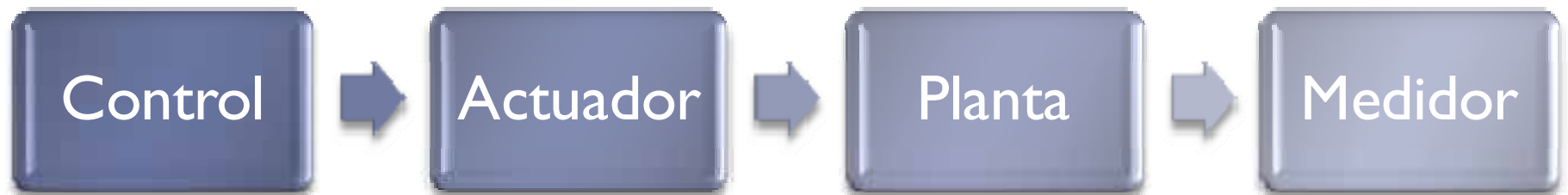
---



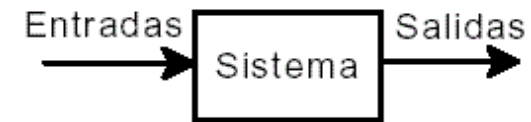


# Diagramas de bloques

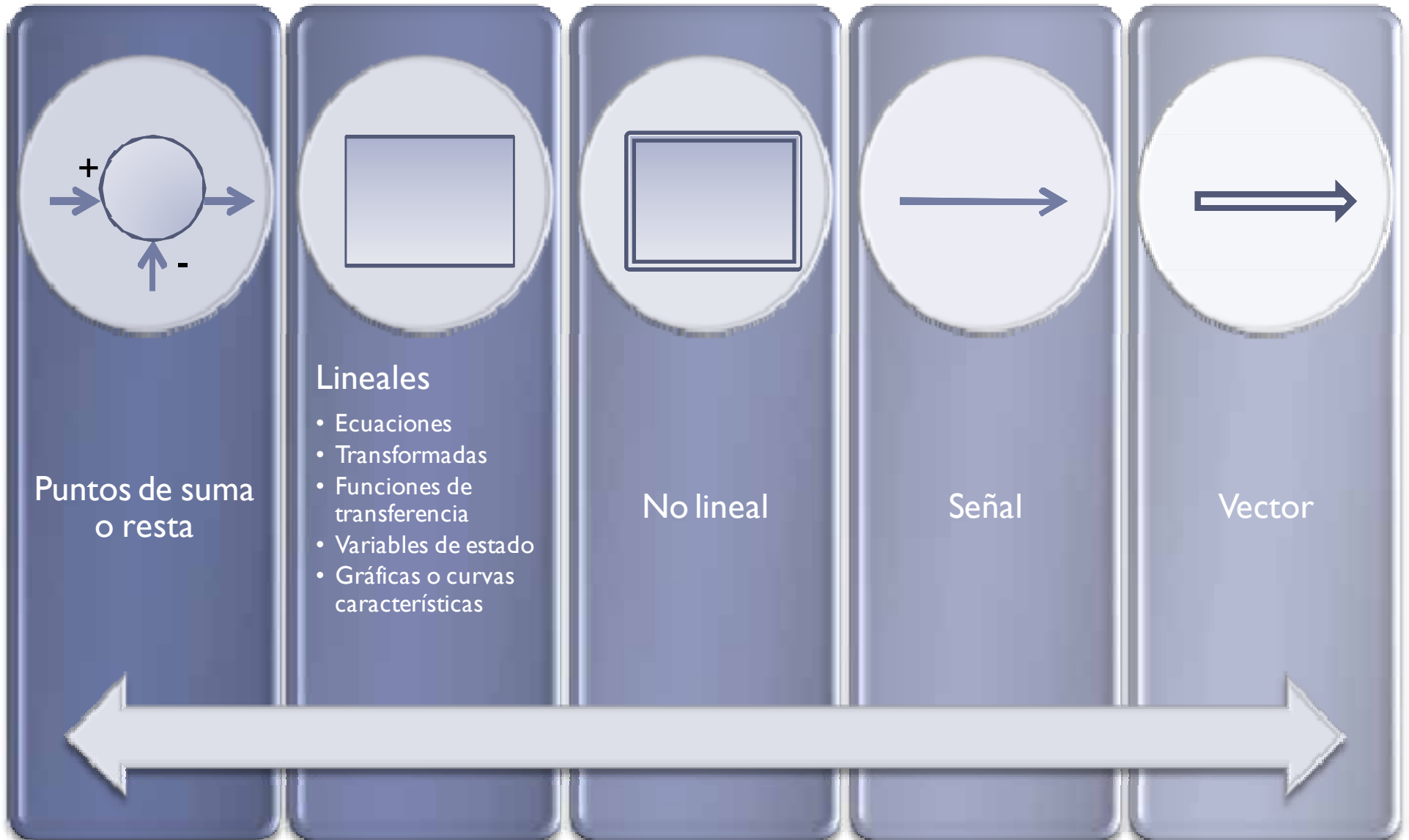
---

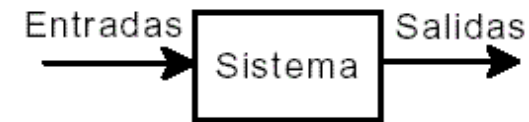


- ▶ La estructura del sistema se describe a través de un conjunto de elementos de transferencia (transmitancias) y las relaciones entre éstos.



# Elementos del diagrama de bloques



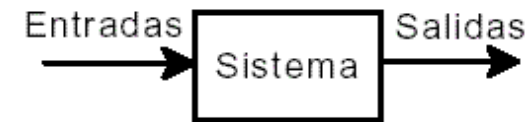


# Diagramas de flujo de señal

---

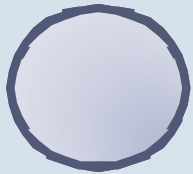


- ▶ La estructura del sistema se describe a través de un gráfico dirigido, donde los nodos representan las señales y las flechas representan propiedades de transferencia.



## Elementos del diagrama de flujo de señales

---



### Señal x

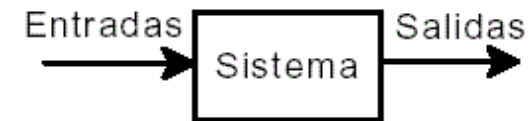
- Nodos



### Relación funcional

- Flechas
- Propiedades de transferencia





# Descripción temporal de sistemas lineales

A través de ecuaciones

diferenciales

De  
diferencia

Leyes físicas → modelo matemático

Sistema eléctrico →  
Leyes de Kirchhoff

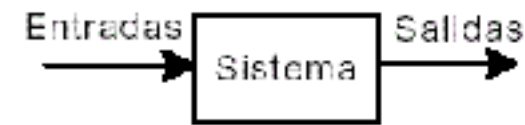
Sistema mecánico →  
Leyes de Newton,  
conservación de la  
energía

Sistemas hidráulicos  
→ Bernoulli

Los sistemas serán lineales

De parámetros  
concentrados

Invariantes en  
el tiempo



# Forma general de la ecuación diferencial

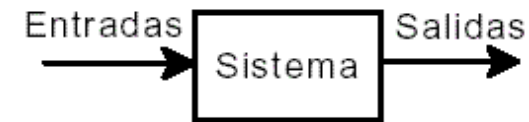
---

- Ecuación diferencial ordinaria de n-orden, donde  $a_i$  y  $b_i$  son reales y provienen de los parámetros físicos del sistema

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u(t)}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u(t)}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (1)$$

- Dadas  $u(t)$  para  $t \geq 0$  y las condiciones iniciales es posible conocer  $y(t)$

$$\text{Condiciones iniciales} \left\{ \frac{d^n y(0)}{dt^n}, \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}, \dots, y(0); q < n \text{ para causalidad} \right.$$



# Función de transferencia

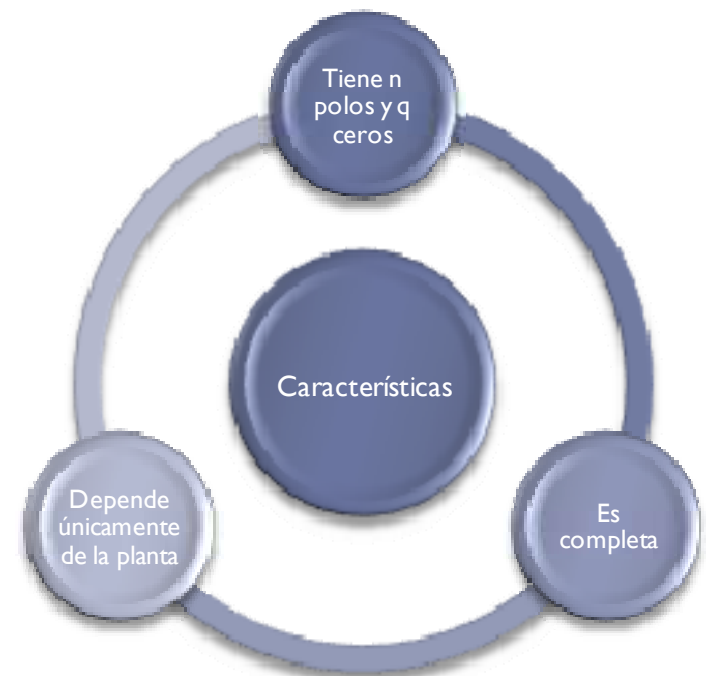
- Aplicamos la Transformada de Laplace a la ecuación (1) y poniendo todas las condiciones iniciales en cero se tiene:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_{q-1} s^{q-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

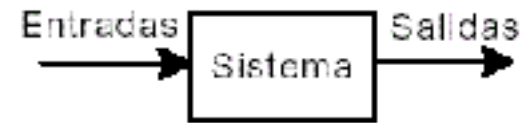
$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

## Función de transferencia en forma de cociente de polinomios

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s)$$







# Propiedades de la transformada de Laplace

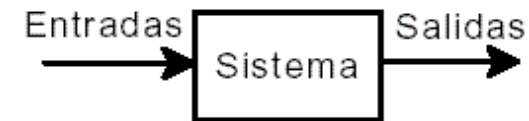
---

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(t)\big|_{t=0}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right\} = s^k F(s) - s^{k-1} f(t)\big|_{t=0} - s^{k-2} \dot{f}(t)\big|_{t=0} \dots - \frac{d^{k-1} f(t)}{dt}\big|_{t=0}$$





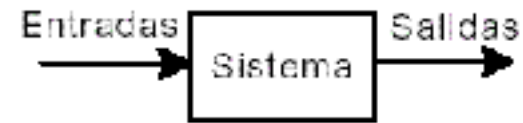
## Otras formas de representar $G(s)$

$$G(s) = \frac{C_q \cdot (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_q)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)}$$

$$G(s) = C_q \frac{\prod_{i=1}^q (s - s_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)}$$

**ZPK:** Cociente de producto de ceros entre producto de polos

- $q < n$  Función estrictamente propia (planta)
- $q = n$  Función propia (controlador)
- $q > n$  Función impropia (no existe)



## Referencias

---

- ▶ Ogata, Katsuhiko., **Dinámica de Sistemas**“, Prentice Hall, 1987, México.
- ▶ Kuo, Benjamin C.., **Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.

