3. Linealización de sistemas no lineales

Representación de un sistema no lineal en forma matricial:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = f\left[\underline{x}(t), r(t)\right] \tag{1}$$

donde

$$\underline{x}(t) = \text{Vector de estado} \quad (nx1)$$
$$\underline{r}(t) = \text{Vector de entradas} \quad (nx1)$$
$$f\left[\underline{x}(t), r(t)\right] = \text{Vector funcion} \quad (nx1)$$

Ejemplo 3.1: Sistema con ecuaciones de estado no lineales

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2^{\ 2} \tag{2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + u(t) \tag{3}$$

Método de linealización:

- Expansión en serie de Taylor alrededor del punto o trayectoria de operación normal o nominal.
- Únicamente se toman en cuenta los términos de primer orden, los términos de orden superior se descartan.

$\underline{x}_0(t) =$ Trayectoria de operación nominal que corresponde a la entrada de operación nominal $r_0(t)$ y a algunos términos iniciales fijos.

$\underline{r}_0(t) =$ Entrada nominal

Expandiendo (1) en serie de Taylor alrededor de $x(t) = x_0(t)$ y eliminando los términos de orden superior se obtiene:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\underline{x}_0, \underline{r}_0) + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i(\underline{x}, \underline{r})}{\partial x_j}\right|_{\underline{x}_0, \underline{r}_0} \left(x_j, x_{0j}\right) + \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f_i(\underline{x}, \underline{r})}{\partial r_j}\right|_{\underline{x}_0, \underline{r}_0} \left(r_j, r_{0j}\right) \tag{4}$$

en donde: i = 1, 2, ..., n
hacemos:

$$\Delta x_i = x_i - x_{0i}$$
$$\Delta r_j = r_j - r_{0j} \tag{5}$$

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{0i} \tag{6}$$

evaluando (4) para $\underline{x}_0$ y $\underline{r}_0$; ($\underline{x}_0$ y $\underline{r}_0$ o $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{r}_0$ son vectores y ambas notaciones son equivalentes)

$$\dot{x}_{0i} \quad = \quad f_i(x_0, r_0) \tag{7}$$

despejando f_i ($\mathbf{x}_0$, $\mathbf{r}_0$) al lado izquierdo y con signo negativo:

$$\Delta \dot{x}_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i(\underline{x},\underline{r})}{\partial x_j}\right|_{\underline{x}_0,\underline{r}_0} \Delta x_j + \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f_i(\underline{x},\underline{r})}{\partial r_j}\right|_{\underline{x}_0,\underline{r}_0} \Delta r_j \tag{8}$$

podemos escribir la ecuación (8) en forma matricial

$$\Delta \underline{\dot{x}} \quad = \quad A^* \underline{x} + B^* \Delta \underline{r} \tag{9}$$

$$A^* \quad = \quad \left[a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\underline{x}_0,\underline{r}_0} \right] \quad ; \quad B^* \quad = \quad \left[b_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\right|_{\underline{x}_0,\underline{r}_0} \right]$$

$$A^* \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B^* \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \frac{\partial f_1}{\partial r_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \frac{\partial f_2}{\partial r_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \frac{\partial f_n}{\partial r_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r_m} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ejemplo 3.2: Modelar el sistema de suspensión magnética mostrado a continuación y linealizar el modelo para el punto de operación nominal en cual la posición de la esfera de metal se mantiene suspendida a una distancia fija del electroimán.

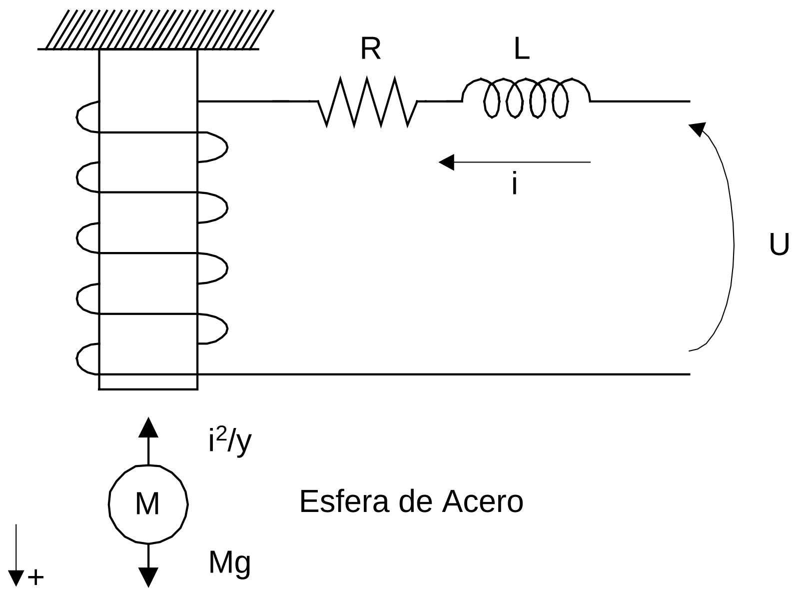

Figura 3.1: Sistema de suspensión magnética

Ecuaciones :

Newton

$$\sum f = m \cdot a$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = Mg - \frac{i^2(t)}{y(t)} \qquad (12)$$

Kirchhoff

$$\sum U = 0$$

$$-U + L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \qquad (13)$$

Variables de estado físicas : posición, velocidad y corriente por la bobina.

$$y = x_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$
$$\dot{y} = x_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}$$
$$i = x_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_3 = \frac{di}{dt}$$

Las ecuaciones de estado son :

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \text{(definición)} \qquad (14)$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{x_3^{\,2}(t)}{M x_1(t)} \qquad \text{(de (12))} \qquad (15)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} u(t) \qquad \text{(de (13))} \qquad (16)$$

El sistema se linealizará en el punto de equilibrio

$$y_0(t) = x_{01} = \text{cte}$$

evaluando (14) obtenemos $x_{02} = \dfrac{dx_{01}}{dt} = 0$ como consecuencia (17)

y $\dfrac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = 0$ (18)

Sustituyendo en (12) tenemos

$$0 = Mg - \frac{i_0^{\,2}(t)}{y_0(t)} = Mg - \frac{x_{03}^{\,2}(t)}{x_{01}(t)}$$

$$i_0(t) = x_{03}(t) = \sqrt{Mg\, x_{01}(t)} \qquad (19)$$

Para encontrar la ecuación de estado linealizada con los coeficientes A' y B' definimos las funciones:

$\dot{x}_1 = f_1(\underline{x},\underline{r}) = x_2\,;$ (no es función de $\underline{r}$; sino, solo de x_2)

$\dot{x}_2 = f_2(\underline{x},\underline{r}) = g - \dfrac{x_3^{\,2}(t)}{M x_1(t)}$ (no es función de $\underline{r}$; sino, solo de x_1 y x_3)

$\dot{x}_3 = f_3(\underline{x},\underline{r}) = -\dfrac{R}{L} x_3(t) + \dfrac{1}{L} u(t)$ (es función únicamente de x_3 y u)

El vector de estado inicial para la trayectoria nominal es:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \\ \sqrt{Mg\,x_{01}} \end{bmatrix}$$

tenemos entonces antes de evaluar:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \left.\dfrac{x_3^{\,2}(t)}{Mx_1^{\,2}(t)}\right|_{\underline{x}_0,\underline{r}_0} & 0 & -\left.\dfrac{2x_3\,(t)}{Mx_1(t)}\right|_{\underline{x}_0,\underline{r}_0} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}$$

evaluando

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{Mg\,x_{01}}{Mx_{01}^{\;2}} & 0 & -\dfrac{2\sqrt{Mg\,x_{01}}}{Mx_{01}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}$$

resultado

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{g}{x_{01}} & 0 & -\dfrac{2\sqrt{Mg\,x_{01}}}{Mx_{01}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$$