Apéndice 4

Regla de Mason
para el cálculo de la transmitancia entre dos puntos de un sistema

La *regla de Mason* permite determinar la transmitancia entre cualquier señal de entrada y cualquier señal de salida, o entre dos puntos cualesquiera, de un sistema, por complejo que éste sea, si se conoce su diagrama de bloques. El sistema puede contener múltiples entradas y salidas, lazos anidados y conexiones interactivas.

Antes de exponer el método, deberemos definir algunos términos y conceptos básicos, aplicables a cualquier diagrama de bloques.

- *Línea* o *Nodo*

  Es un segmento o trazo del diagrama de bloques, representativo de una *señal* o *variable* del sistema. Contiene una flecha que indica la dirección de circulación del flujo de señales. Toda línea conecta entre sí alguno de los siguientes pares de elementos:

  a) [*Bloque*]–[*Bloque*]. La señal de salida de un bloque pasa a ser la señal de entrada del siguiente.

  b) [*Sumador*]–[*Bloque*]. La salida de un sumador es introducida como señal de entrada de un bloque.

  c) [*Bloque*]–[*Sumador*]. La señal de salida de un bloque pasa a formar parte de una de las entradas de un sumador.

  d) [*Sumador*]–[*Sumador*]. La señal de salida de un sumador se introduce en otro sumador.

e) [*Señal de entrada al sistema*]–[*Bloque* o *sumador*]. Toda señal de entrada al sistema es introducida en un bloque o en un sumador.

f) [*Bloque* o *sumador*]–[*Señal de salida del sistema*]. Toda señal de salida de un sistema procede de un bloque o de un sumador.

Todo bloque tendrá una única línea de entrada y una única de salida. Un sumador puede contener más de dos entradas; no obstante, se recomienda representarlo con una sola salida. Cualquier línea podrá ser ramificada en la dirección del flujo, si fuera necesario.

- *Trayecto*

  Es el camino o recorrido directo y sin pérdida de continuidad entre dos líneas del diagrama, transitando a través de los distintos bloques, sumadores y otras líneas de interconexión. El recorrido debe seguir, en todo momento, el sentido de las flechas y no debe pasar más de una vez por una misma línea (ni, por tanto, por un mismo bloque o sumador). Entre dos líneas cualesquiera pueden existir uno o más trayectos o puede no existir ninguno.

- *Lazo*

  Es un trayecto que se cierra sobre sí mismo; es decir, aquel recorrido que partiendo de una línea y atendiendo las reglas de todo trayecto regresa a la misma línea.

- *Lazos adjuntos*

  Son lazos adjuntos aquellos que contienen alguna línea común, es decir, que comparten algún tramo del diagrama.

- *Lazos no adjuntos*

  Son lazos no adjuntos o *disjuntos* aquellos que no poseen ninguna línea común, es decir, que no se tocan.

- *Ganancia de trayecto*

  Es el producto de las transmitancias de los bloques que contiene un trayecto. El paso por una entrada sustractiva de un sumador, cambia el signo del producto (equivale a un bloque de ganancia -1).

- *Ganancia de lazo*

  Es el producto de las transmitancias de los bloques que contiene un lazo. El paso por una entrada sustractiva de un sumador cambia el signo del producto (equivale a un bloque de ganancia -1).

La regla de Mason permite determinar la transmitancia entre dos líneas cualesquiera (variables) de un sistema, aplicando la siguiente ecuación:

$$G = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} T_i \Delta_i$$

donde:

T_i = Ganancia del *i-ésimo* trayecto de los n posibles entre las dos líneas.

Δ = Determinante del diagrama =

= 1 – (suma de todas las ganancias de lazos distintos posibles) +
+ (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de *dos* lazos no adjuntos) –
– (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de *tres* lazos no adjuntos) +
+ ... =

$$1 - \sum_{a} L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \ldots$$

en donde se ha hecho

$\sum_{a} L_a$ = Suma de todas las ganancias de lazos distintos posibles.

$\sum_{b,c} L_b L_c$ = Suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos no adjuntos.

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = Suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos no adjuntos.

Δ_i = Cofactor de T_i:

es el determinante del resto del diagrama que queda cuando se *suprime* el trayecto que produce T_i; esto es, el determinante que se obtendría, en estas condiciones, aplicando la ecuación dada más arriba para el determinante general Δ. Por tanto, Δ_i podrá obtenerse de Δ, eliminando aquellos términos o productos que contengan algún lazo adjunto al trayecto de T_i.

Cuando el trayecto toca a todos los lazos del diagrama, o cuando éste no contiene ningún lazo, Δ_i es igual a la unidad.

En la práctica, la aplicación de la regla de Mason es mucho más sencilla que lo que induce a pensar la aparente complejidad de su descripción. Ello podrá comprobarse a continuación con unos ejemplos.

Ejemplo 1

La figura A-4.1 muestra el diagrama de bloques de un sistema de lazos múltiples, el cual contiene un anidamiento y una interacción. Se va a determinar la transmitancia entre la entrada y la salida:

$$G = \frac{Y}{X}$$

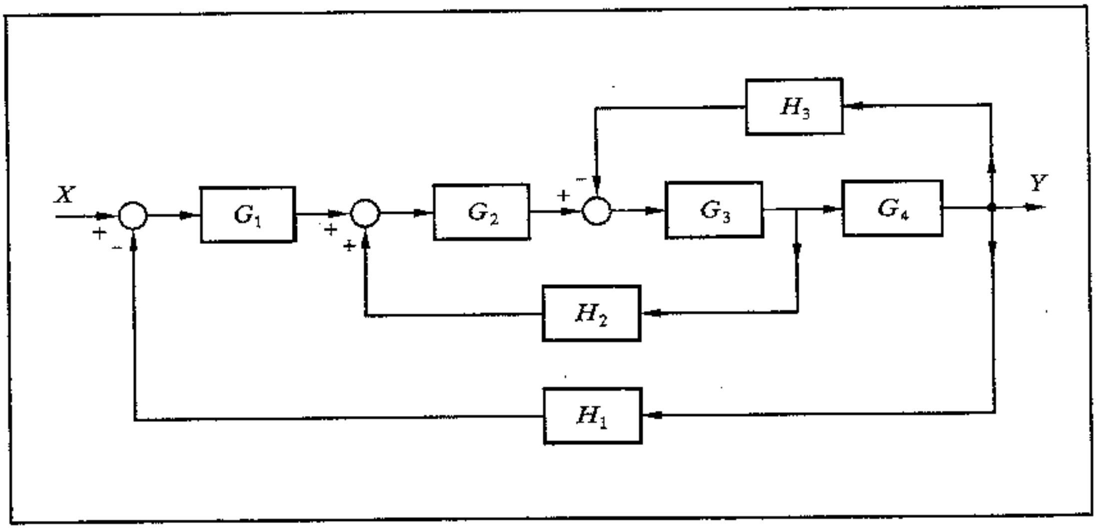


Fig. A-4.1 Diagrama de bloques de un sistema de lazos múltiples

Este sistema posee un solo trayecto entre la entrada y la salida. La ganancia de este trayecto es

$$T_1 = G_1\, G_2\, G_3\, G_4$$

Su cofactor Δ_1 vale la unidad, puesto que al suprimir el trayecto no queda ningún lazo, esto es,

$$\Delta_1 = 1$$

Se observan tres lazos distintos posibles, cuyas ganancias son

$$L_1 = -G_1\, G_2\, G_3\, G_4\, H_1$$

$$L_2 = G_2\, G_3\, H_2$$

$$L_3 = -G_3\, G_4\, H_3$$

en donde deben notarse los signos negativos como consecuencia del paso de las señales de salida de los bloques H_1 y H_3 por entradas sustractivas en los respectivos sumadores.

Todos los lazos tienen un tramo en común; es decir, que no existen lazos disjuntos, por lo que tampoco hay ninguna combinación posible de dos o más lazos no adjuntos. Por lo tanto, el determinante general Δ valdrá

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 + G_1\, G_2\, G_3\, G_4\, H_1 - G_2\, G_3\, H_2 + G_3\, G_4\, H_3$$

de donde, la transmitancia buscada resulta ser

$$G = \frac{Y}{X} = \frac{T_1\, \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1\, G_2\, G_3\, G_4}{1 + G_1\, G_2\, G_3\, G_4\, H_1 - G_2\, G_3\, H_2 + G_3\, G_4\, H_3}$$

Ejemplo 2

Este ejemplo lo extraemos de la figura 4.39 del capítulo 4, en donde se representaba el diagrama de bloques de un tanque encamisado, el cual volvemos a reproducir en la figura A-4.2.*a*, con su nomenclatura simplificada.

En la figura A-4.2.*b* se ha redibujado el diagrama para su mejor comprensión, considerando solamente las dos variables de interés, X_1 e Y_2.

Deduciremos la transmitancia entre la entrada X_1 y la salida Y_2, esto es,

$$G_{12} = \frac{Y_2}{X_1}$$

Este sistema posee un solo trayecto entre la entrada y la salida. La ganancia de este trayecto es

$$T_1 = G_1\, G_2\, G_3\, G_4$$

Su cofactor Δ_1 vale la unidad, puesto que al suprimir el trayecto no queda ningún lazo (el trayecto toca a todos los lazos), esto es,

$$\Delta_1 = 1$$

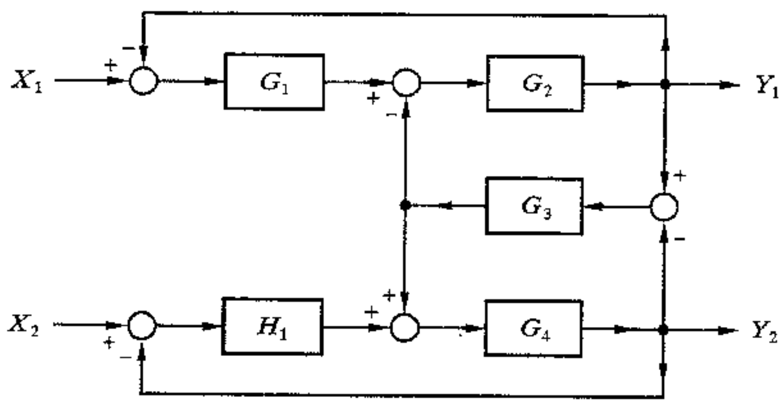
Se observan cuatro lazos distintos posibles, cuyas ganancias son

$$L_1 = -G_1 G_2$$

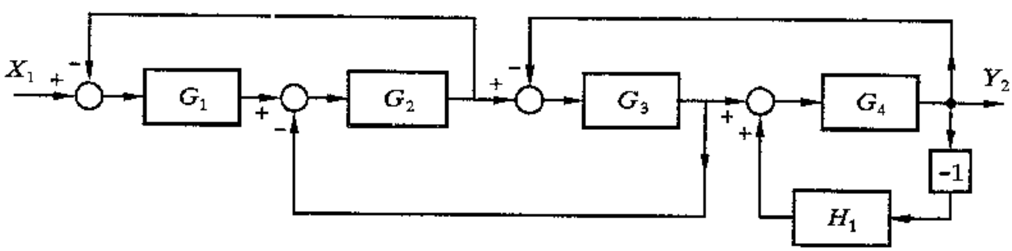
$$L_2 = -G_2 G_3$$

$$L_3 = -G_3 G_4$$

$$L_4 = -G_4 H_1$$



(a) *Diagrama según la figura 4.39*



(b) *Diagrama redibujado*

Fig. A-4.2 Diagrama de bloques de un tanque encamisado según la figura 4.39

Existen tres combinaciones posibles de dos lazos no adjuntos:

$$L_1, L_3 \; ; \qquad L_1, L_4 \; ; \qquad L_2, L_4$$

cuyo producto de las respectivas ganancias será

$$L_1 L_3 = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$L_1 L_4 = G_1 G_2 G_4 H_1$$

$$L_2 L_4 = G_2 G_3 G_4 H_1$$

No existe ninguna combinación posible de tres lazos no adjuntos. Por tanto, el determinante del diagrama será

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_4)$$

en la que sería sencillo sustituir los correspondientes valores. Finalmente, la transmitancia buscada sería

$$G_{12} = \frac{Y_2}{X_1} = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_4)}$$

Ejemplo 3

Y, por último, expondremos un ejemplo de sumo interés didáctico, al contener tres trayectos entre la entrada y la salida, con cofactores distintos de la unidad. Sea la figura A-4.3, en la que se muestra un diagrama de bloques, relativamente complejo, del que hay que hallar la transmitancia $G = Y/X$.

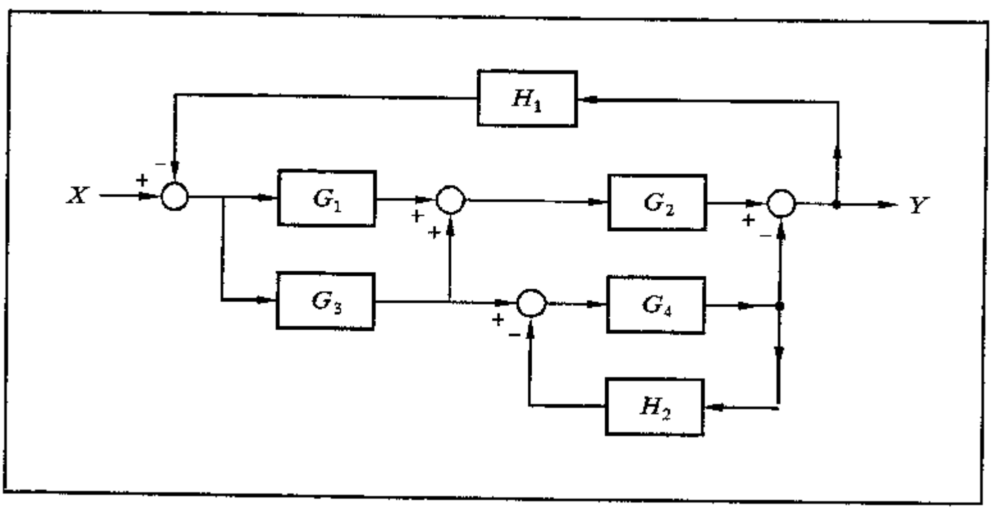


Fig. A-4.3
Diagrama de bloques de un sistema complejo de lazos múltiples

Para el estudio de este ejemplo, es recomendable disponer de una o varias copias del diagrama de bloques de la figura A-4.3, con el fin de marcar con diferentes colores los distintos trayectos y lazos del mismo.

Este sistema, según se ha dicho, posee tres trayectos entre la entrada y la salida. Las respectivas ganancias son

$$T_1 = G_1 G_2$$

$$T_2 = G_3 G_2$$

$$T_3 = -G_3 G_4$$

Al suprimir el trayecto que produce T_1 queda el lazo formado por los bloques $G_4 H_2$, y lo mismo sucede con el trayecto T_2, por lo que sus cofactores serán

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1 - (-G_4 H_2) = 1 + G_4 H_2$$

Al suprimir el trayecto que produce T_3 no queda ningún lazo (el trayecto toca a todos los lazos), por lo que su cofactor será, por definición

$$\Delta_3 = 1$$

Se observan cuatro lazos distintos posibles, cuyas ganancias son

$$L_1 = -G_1 G_2 H_1$$

$$L_2 = -G_3 G_2 H_1$$

$$L_3 = \quad G_3 G_4 H_1$$

$$L_4 = -G_4 H_2$$

Existen dos combinaciones posibles de dos lazos no adjuntos:

$$L_1 , L_4 \quad , \qquad L_2 , L_4$$

cuyo producto de las respectivas ganancias será

$$L_1 L_4 = G_1 G_2 G_4 H_1 H_2$$

$$L_2 L_4 = G_2 G_3 G_4 H_1 H_2$$

No existe ninguna combinación posible de tres lazos no adjuntos. Por tanto, el determinante del diagrama será

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_4 + L_2 L_4)$$

Finalmente, la transmitancia buscada se obtendría sustituyendo los valores que se acaban de calcular, en la siguiente expresión

$$G = \frac{T_1 \Delta_1 + T_2 \Delta_2 + T_3 \Delta_3}{\Delta}$$

Nota

Es evidente que este método no ofrecerá dificultad alguna para hallar la transmitancia entre una entrada cualquiera del sistema, tal como una perturbación, y una salida cualquiera.

Cuando sea preciso considerar como variable de salida una variable intermedia cualquiera del diagrama de bloques, bastará con efectuar una derivación de salida "pinchando" (conexión por soldador) en la línea que represente a dicha variable.

La figura A-4.2 es un ejemplo en el que se tienen dos entradas y dos salidas, y en donde se ha redibujado el diagrama de bloques para que el trayecto entre las señales de interés (la entrada X_1 y la salida Y_2) se muestre como un tramo recto, directo y sin quiebros, entre las dos variables. En la versión redibujada se ha suprimido tanto la entrada X_2 como la salida Y_1, las cuales no intervienen en el problema. Dicha entrada puede ser suprimida porque en el análisis se asume que el valor de la variable que representa es nulo; es decir, que no presenta variaciones en torno al punto de operación normal o reposo. No obstante, puede observarse la inserción, en el diagrama, de un bloque adicional con ganancia -1, el cual suple el efecto de la entrada sustractiva del sumador suprimido, por el que circula la señal Y_2 en el diagrama original, antes de entrar en el bloque H_1. Se habría logrado el mismo efecto cambiando el signo con el que la señal de salida de dicho bloque se introduce en el último sumador del diagrama redibujado o, también, cambiando el signo de la transmitancia de H_1.

Es preciso advertir que no es imprescindible, ni apenas recomendable, redibujar el diagrama, según se ha hecho en la figura A-4.2.*b*, lo cual puede entrañar ciertas dificultades, además del riesgo de cometer algún error de "conexionado". Cuando se trabaje con diagramas complejos, será preferible proveerse de una o varias copias del mismo, con el fin de marcar con diferentes colores los distintos trayectos y lazos que se observen.