4. El comportamiento de los sistemas lineales

Análisis:

El comportamiento de un sistema lineal está dado por el modelo de espacio de estado. Estudiaremos cómo a partir de un estado inicial conocido y una magnitud de entrada dada, podemos resolver la ecuación de estado y cómo con ayuda de la ecuación de salida podemos calcular la magnitud de la salida.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad \text{sistema}$$

Partimos de la solución de una ecuación diferencial de 1er orden.

$$\dot{x} = ax(t) + bu(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad (1\text{ y }1a)$$

Tratamos la ecuación homogénea

$$\dot{x} = a x(t) \qquad (2)$$

suponemos la solución:

$$x(t) = c e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \lambda c e^{\lambda t}$$

sustituimos en (2)

$$\lambda c e^{\lambda t} = a c e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = a \qquad \text{y}$$

$$x(t) = c e^{at}$$

Para $t=0$ $\quad x(0) = x_0$

$\Rightarrow$ $\quad x(0) = c \quad$ y $\quad x_0 = c$

Solución homogénea o respuesta Natural = $x(t) = x_0 e^{at}$ (3)

La solución particular la obtenemos por el método de variación de constante

$$x(t) = k(t)e^{at}$$

derivando respecto a t

$$\dot{x}(t) = k(t)ae^{at} + \frac{dk(t)}{dt}e^{at}$$

Sustituyendo en $\dot{x}(t) = ax(t) + bu$ (1 de nuevo)

$$k(t)ae^{at} + \frac{dk(t)}{dt}e^{at} = ak(t)e^{at} + bu(t)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = e^{-at}bu(t)$$

Integrando de 0 a t:

$$\int_0^t \dot{k}(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau)d\tau$$

$$k(t) - k(0) = \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau)d\tau$$

$$k(t) = \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau)d\tau + k(0)$$

$$x(t) = \int_0^t e^{-a\tau} b \cdot u(\tau)d\tau \cdot e^{at} + k_0 \cdot e^{at}$$

➔ $$x(t) = k_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau \qquad (4)$$

Utilizando la condición inicial para t=0 se obtiene

$$x(0) = k_0 = x_0$$

<u>Definimos</u> :

$$\phi(t) = e^{at} \tag{5}$$

➔ escribimos la solución completa llamada también ecuación de movimiento:

$$x(t) = \phi(t)\, x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)\, b u(t)\, dt \tag{6}$$

Solución a un sistema de ecuaciones diferenciales de 1er. Orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\,; \qquad\qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad (7)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \text{Ecuación Homogénea} \qquad (8)$$

➔ la solución es: $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}$ (9)

donde la matriz función exponencial está definida por:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots \qquad (10)$$

se puede demostrar que la serie converge para todas las matrices **A** cuadradas por lo que se puede intercambiar la sumatoria por derivada:

$$\Rightarrow \qquad \frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \frac{d\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!}}{dt} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \ldots$$

$$\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \qquad (10a)$$

Sustituyendo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}$ en la ecuación (8) vemos que cumple:

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}$$

entonces la solución homogénea es:

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \qquad \text{Solución homogénea} \qquad (11)$$

La respuesta forzada será calculada usando el método de variación de parámetros.

Solución propuesta: $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}(t)$ (11a)

derivamos y sustituimos en $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}(t) + e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{k}}(t)$$
$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}(t) + e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

eliminamos el término igual a ambos lados y obtenemos

$$e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$e^{\mathbf{A}t}$ es no singular y se puede invertir usando la definición en forma de serie

$$\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At} = e^{A(-t)}$$

➔ $\dot{\mathbf{k}}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

integramos :

$$\int_0^t \dot{\mathbf{k}}(\tau)d\tau = \mathbf{k}(t) - \mathbf{k}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

tomando en cuenta la condición inicial

$$\mathbf{k}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{k}(0)$$

sustituyendo en la ecuación (11a)

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}(0)$$

$x(0) = x_0 = k(0)$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Definimos la matriz de transición de estados o matriz fundamental como:

$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$; $\boldsymbol{\varphi}(t)$: matriz de transición (11b)

➔ $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$ ecuación de movimiento (12)

$\underline{x}_0$: las condiciones iniciales describen completamente la influencia del movimiento del sistema para t<0 en el tiempo t>0.

Comportamiento de entrada-salida de los sistemas lineales

- El comportamiento E/S describe cómo el sistema convierte la magnitud de entrada en la magnitud de salida.

- Describe las características dinámicas de transmisión del sistema; por ello se habla de comportamiento dinámico de transmisión.

Conociendo **x**(t) podemos calcular **y**(t):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{13}$$

Sustituimos (12) en (13)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{14}$$

hacemos $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ para que la salida responda únicamente a las entradas

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{15}$$

Con ayuda de la ecuación (15) podemos comprobar la linealidad del sistema:

Si $u(t) = au_1(t) + bu_2(t)$

$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

Solución a la ecuación de movimiento en representación canónica diagonal

Colocamos „techitos“ a la ecuación (12)

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}(t)\hat{\mathbf{x}}_0 + \int_0^t \hat{\boldsymbol{\varphi}}(t-\tau)\hat{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (16)$$

donde :

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{diag}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}t} \qquad (17)$$

$$\hat{\phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\, e^{\lambda_i t} \qquad (18)$$

Para la solución natural (movimiento propio)

$$\underline{\hat{x}}_i = e^{\lambda_i t}\,\hat{x}_i(0)$$

$$\hat{x}_{nat}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \hat{x}_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} & \hat{x}_2(0) \\ \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_n t} & \hat{x}_n(0) \end{bmatrix}$$

Si se transforman las variables canónicas en las variables originales tenemos:

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\hat{\mathbf{x}}(t)$ y $\mathbf{x}_0 = \mathbf{V}\hat{\mathbf{x}}(0)$

$$x_{nat}(t) = V\,\hat{x}_{nat}(t) = V\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \hat{x}_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} & \hat{x}_2(0) \\ \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_n t} & \hat{x}_n(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{nat}(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}\,\hat{x}_1(0) + V_2 e^{\lambda_2 t}\,\hat{x}_2(0) + \ldots + V_n e^{\lambda_n t}\,\hat{x}_n(0)$$

$$x_{nat}(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i\, e^{\lambda_i t}\,\hat{x}_i(0) \tag{19}$$

Cada respuesta natural se calcula independientemente.

Las respuestas forzadas se pueden calcular también independientemente unas de las otras.

Si hacemos para t = 0, **x**(0) = **0**, entonces la componente i del estado se calcula:

$$\hat{x}_i(t) \quad = \quad \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} b_i u(\tau) d\tau$$

$$\hat{x}_{forz}(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} \int_0^t e^{\lambda_1 (t-\tau)} b_1 u(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{\lambda_2 (t-\tau)} b_2 u(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t e^{\lambda_n (t-\tau)} b_n u(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \; x_{forz}(t) = V \hat{x}_{forz}(t)$$

Propiedades y fórmula de cálculo de la matriz de transición de estados $\boldsymbol{\varphi}(t)$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots \qquad \text{(10 de nuevo)}$$

$\boldsymbol{\varphi}(t)$ es la solución de: $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}(t)$ (20)

➔ $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{I}$

demostración:

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = e^0 = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}(0)}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 (0)^2}{2!} + \ldots$$