Análisis de Sistemas Lineales

Modelado en variables de estado físicas

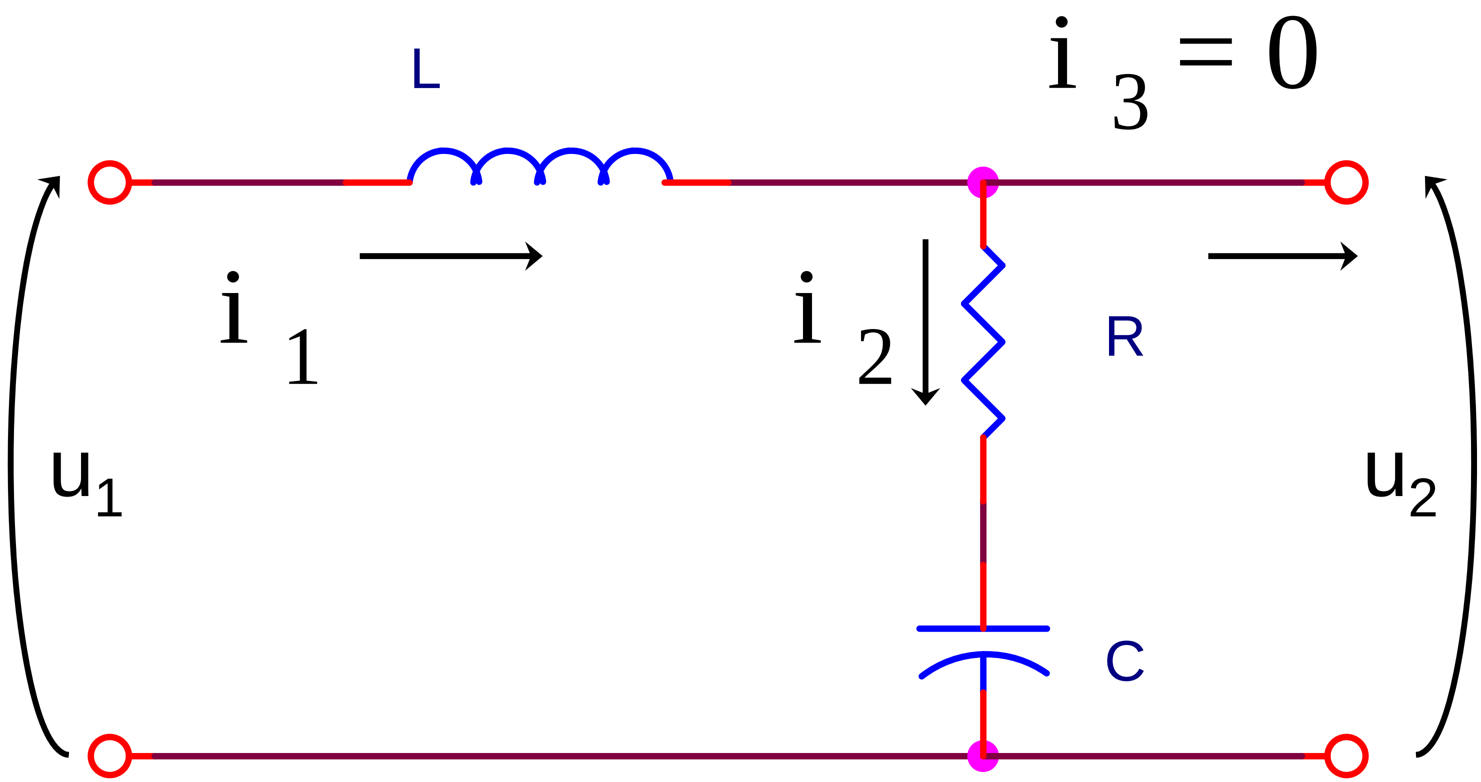
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Contenido

- El modelo en variables de estado
- Modelado en variables de estado físicas
- Ejemplos y ejercicios

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Ejemplo 1: circuito eléctrico



Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$\sum i = 0$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_1 = i_2 = i$$

$i_1 \text{↵} \sum u = 0$

$$L\frac{di_1}{dt} + u_2 - u_1 = 0 \qquad \text{(A)}$$

$i_2 \text{↵} \sum u = 0$

$$Ri_2 + \frac{1}{C}\int_0^t i_2 \cdot dt + u_c(0) - u_2 = 0 \qquad \text{(B)}$$

Obtener n ecuaciones dif. de orden 1, con la variables i_1, u_2

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\frac{di_1}{dt} = f(i_1, u_2, u_1)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f(i_1, u_2, u_1)$$

De (A) $$\frac{di_1}{dt} = 0i_1 - \frac{1}{L}u_2 + \frac{1}{L}u_1 \qquad (1)$$

De (B) $$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C}i_1 + R\frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C}i_1 - \frac{R}{L}u_2 + \frac{R}{L}u_1 \qquad (2)$$

Acomodando en forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{du_2}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{R}{L} \end{bmatrix} u_1 \qquad (4)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_2$$

Ejemplo 2: Encuentre el modelo en variables de estado x_1 y x_2

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

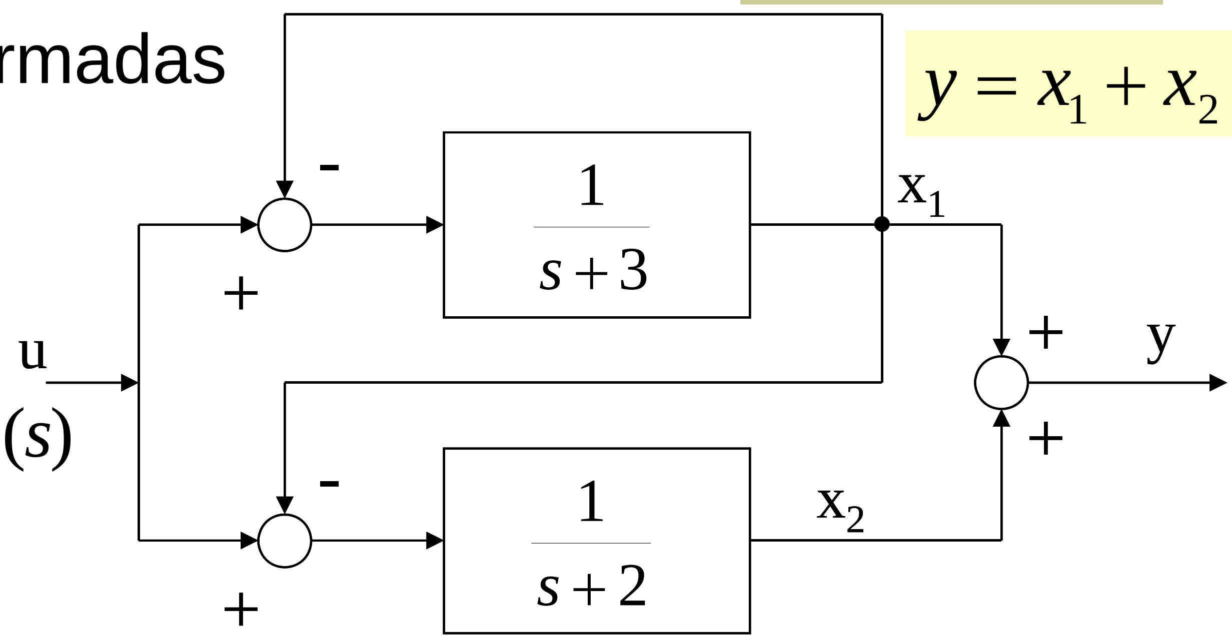
- Ecuaciones transformadas para $X_1(s)$ y $X_2(s)$.

$$X_1(s) = \frac{U(s) - X_1(s)}{s+3}$$

$$sX_1(s) + 3X_1(s) = U(s) - X_1(s)$$

$$X_2(s) = \frac{U(s) - X_1(s)}{s+2}$$

$$sX_2(s) + 2X_2(s) = U - X_1(s)$$



$$y = x_1 + x_2$$

- Ecuaciones en el dominio de t para y, x_1 y x_2.

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + 0x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + -2x_2 + u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Ejercicio 1: Reactor nuclear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

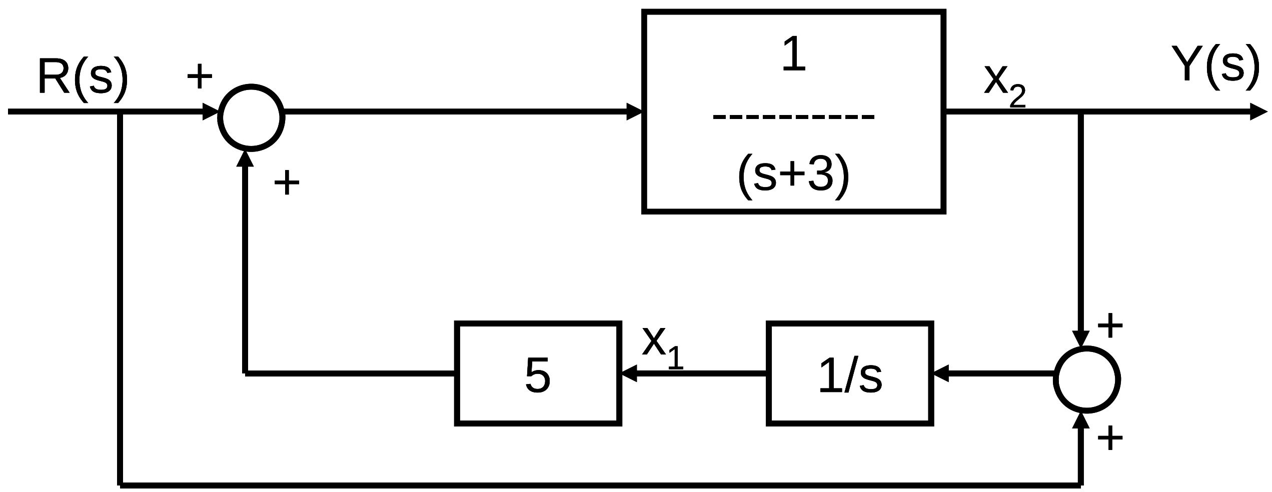
- Un reactor nuclear que opera en equilibrio a alto nivel de flujo de neutrones térmicos, se apaga repentinamente. En el momento del apagón, la densidad del xenón 135 (Xe) y del yodo 131 (I) son 7 x 10^{16} y 3 x 10^{15} átomos por unidad de volumen, respectivamente. La vida media de los núcleos de I 131 y del Xe 135 es de 6.7 y 9.2 horas, respectivamente. Las ecuaciones de desintegración son:

$$\frac{dX_e}{dt} = -\frac{0.693}{9.2} X_e - I$$
$$\frac{dI}{dt} = -\frac{0.693}{6.7} I$$

- Con I como salida, escriba el modelo en variables de estado

Ejercicio 2: Encuentre el modelo en var. estado físicas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

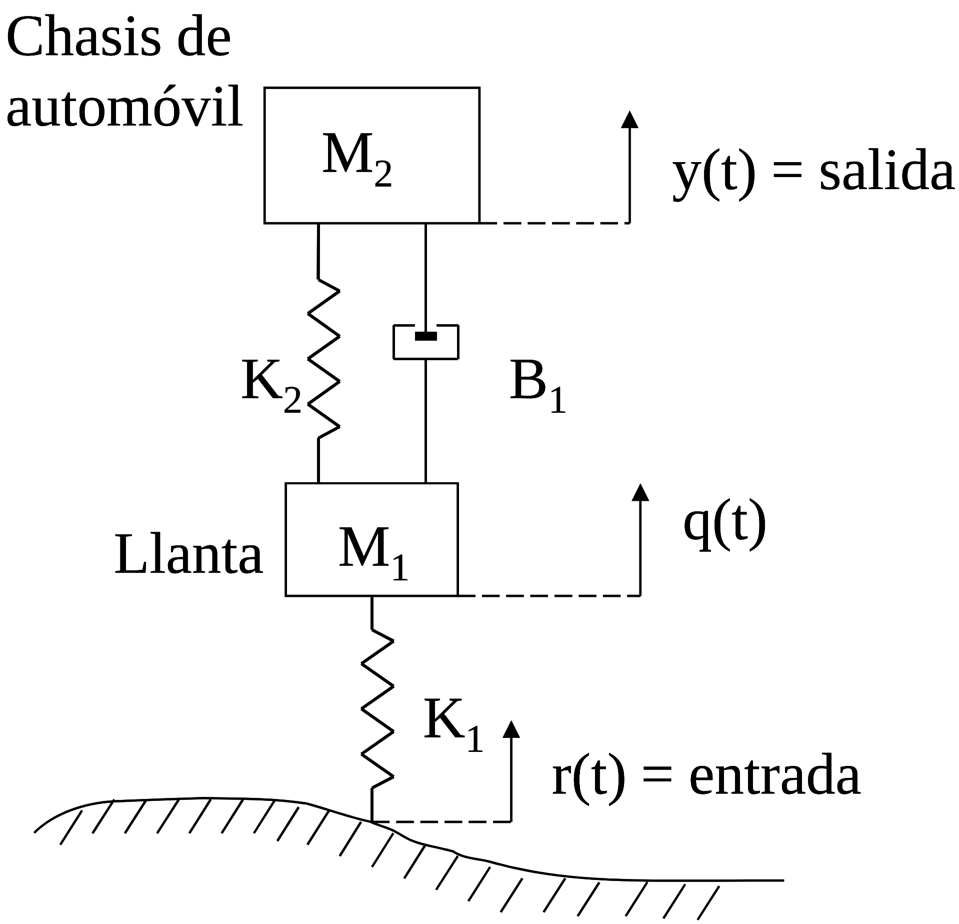


Ejemplo 3: Suspensión de auto modelada en variables físicas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Se muestra un sistema de suspensión de un automóvil. M_1 es la masa de la llanta, M_2 es ¼ de la masa del chasis del automóvil, K_1 es la constante elástica de la llanta y K2 es la constante elástica del resorte de suspensión y B_1 es la constante del amortiguador. La entrada ***r(t)*** es el nivel de la calle y la salida ***y(t)*** es la posición vertical del chasis del automóvil respecto a algún punto de equilibrio. Encuentre el modelo en variables de estado para el sistema mostrado en la figura.

Utilice y(t) = x3 y q(t) = x1.

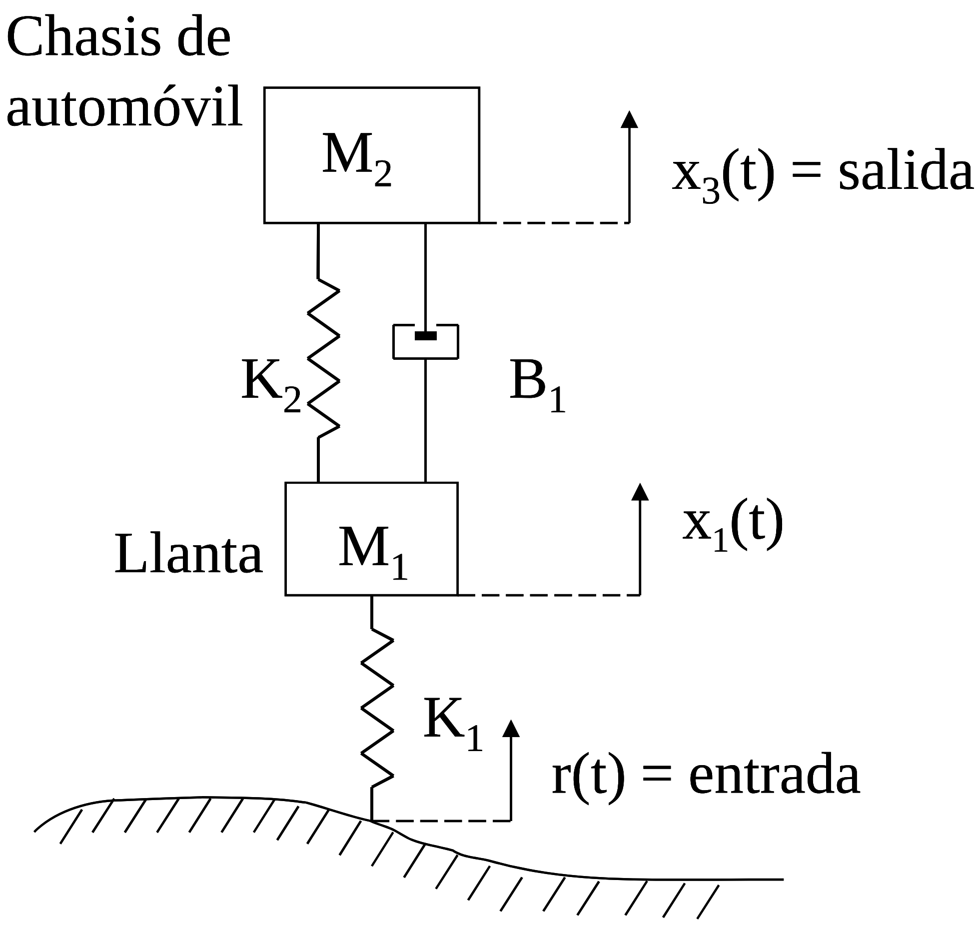


Ejemplo 3: Suspensión de auto modelada en variables físicas (2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Definiendo las variables a usar:

$$x_1 = q(t)$$
$$\dot{x}_1 = \dot{q}(t) = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{q}(t)$$
$$x_3 = y(t)$$
$$\dot{x}_3 = \dot{y}(t) = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \ddot{y}(t)$$



$$\dot{x}_1 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$
$$\dot{x}_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4$$

Ejemplo 3: Suspensión de auto modelada en variables físicas (3)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

Sumando fuerzas en cada masa

$$M_1\ddot{x}_1 + B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + K_2(x_1 - x_3) + K_1(x_1 - r) = 0$$

$$M_1\dot{x}_2 + B_1(x_2 - x_4) + K_2(x_1 - x_3) + K_1(x_1 - r) = 0$$

$$M_2\ddot{x}_3 + B_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + K_2(x_3 - x_1) = 0$$

$$M_2\dot{x}_4 + B_1(x_4 - x_2) + K_2(x_3 - x_1) = 0$$

Distribuyendo, despejando y ordenando las ecuaciones

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{K_1 + K_2}{M_1}\right)x_1 - \frac{B_1}{M_1}x_2 + \frac{K_2}{M_1}x_3 + \frac{B_1}{M_1}x_4 + \frac{K_1}{M_1}r$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_2}{M_2}x_1 + \frac{B_1}{M_2}x_2 - \frac{K_2}{M_2}x_3 - \frac{B_1}{M_2}x_4$$

Ejemplo 3: Suspensión de auto modelada en variables físicas (4)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Finalmente, escribiendo las ecuaciones de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{K_1 + K_2}{M_1}\right) & -\dfrac{B_1}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & \dfrac{B_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{B_1}{M_2} & -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{B_1}{M_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K_1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Ejercicio 3: Encuentre el modelo en variables de estado físicas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

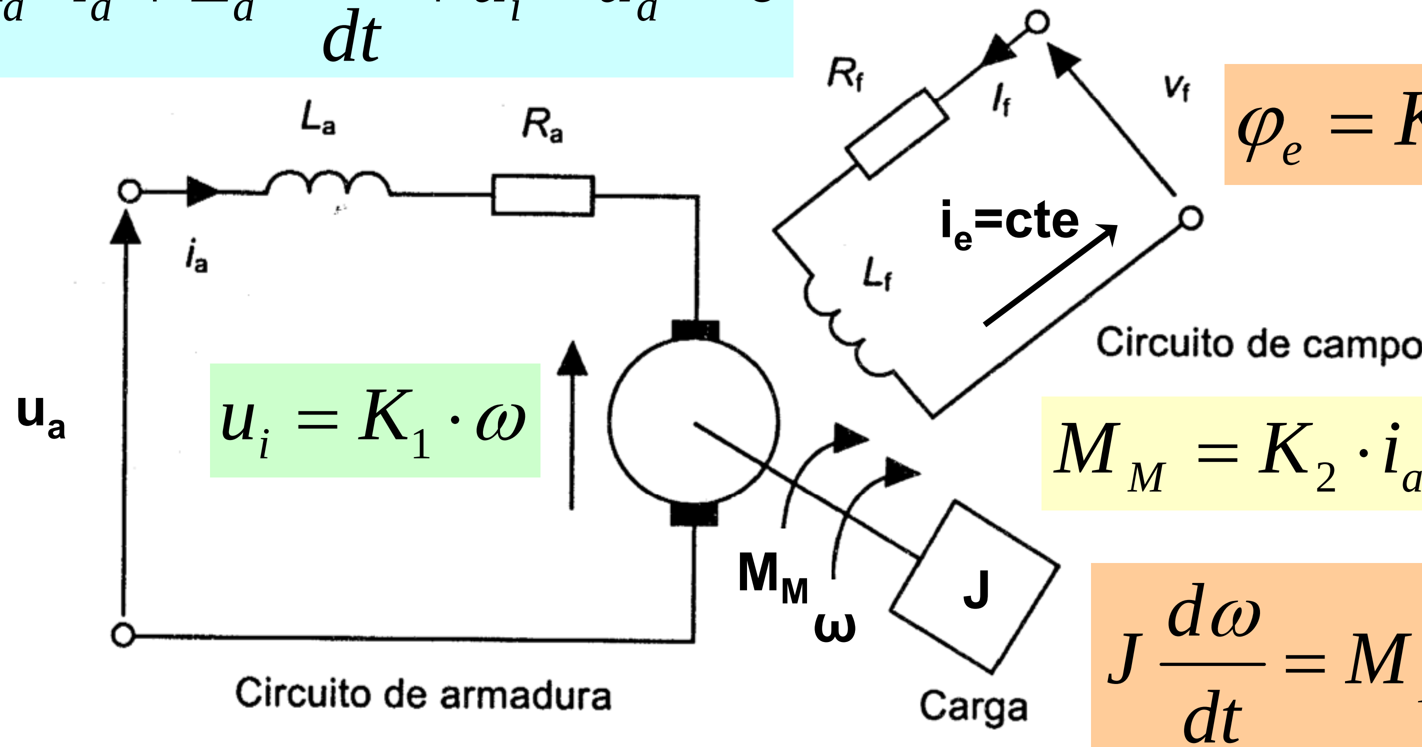
$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + u_i - u_a = 0$$

$$\varphi_e = K_e \cdot i_e(t)$$

$$u_i = K_1 \cdot \omega$$

$$M_M = K_2 \cdot i_a$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_M - B \cdot \omega$$



Motor controlado por armadura.

Solución al ejercicio 3

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- Escogemos a $\boldsymbol{\omega}$ como primera variable y a $\boldsymbol{i_a}$ como segunda variable
- En la ecuación de la flecha, sustituimos $\boldsymbol{M_M}$ y despejamos ***dω/dt***

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B}{J}\cdot\omega + \frac{K_2}{J}i_a$$

- En la ecuación del circuito de armadura, sustituimos $\boldsymbol{u_i}$ y despejamos $\boldsymbol{di_a/dt}$

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{K_1}{L_a}\cdot\omega - \frac{R_a}{L_a}\cdot i_a + \frac{1}{L_a}u_a$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Solución al ejercicio 3

- El modelo en variables de estado físicas es:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\omega}{dt} \\ \dfrac{di_a}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{B}{J} & \dfrac{K_2}{J} \\ -\dfrac{K_1}{L_a} & -\dfrac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L_a} \end{bmatrix} \cdot u_a$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Referencias

- Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.