Formas de Cálculo para la matriz de transición de estados ϕ (t)

1) De la definición con un número limitado de sumandos

$$\phi(t) = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$$

2) Según Fórmula de Sylvester

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} F_i$$

$$F_i = \prod_{j=1,\, i\neq j}^{n} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}$$

3) Usando la matriz de vectores propios

$$\phi(t) = V \operatorname{diag} e^{\lambda_i t} V^{-1}$$

$$\phi(t) = V \hat{\phi}(t) V^{-1}$$

4) Usando la transformada inversa de Laplace

Definición:

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\}$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

Pasos para el cálculo por Laplace:

- Cálculo de $\phi(s)$:

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

- Cálculo de la transformada inversa de Laplace

  Se transforma cada elemento de la matriz

Ejemplo 4.1: Cálculo de $\phi(t)$ usando la fórmula de Sylvester:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & 0 \\ \dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix}$$

Práctica 3, #1.1

$$\phi(t) = e^{\lambda_1 t}F_1 + e^{\lambda_2 t}F_2$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Ecuación característica

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & 0 \\ \dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \left(\lambda + \dfrac{1}{T_1}\right) & 0 \\ -\dfrac{1}{T_2} & \left(\lambda + \dfrac{1}{T_2}\right) \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{T_2}$$

$$\phi(t) = e^{-\frac{1}{T_1}t}F_1 + e^{-\frac{1}{T_2}t}F_2$$

$$F_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}}{\left(-\frac{1}{T_1} - \left(-\frac{1}{T_2} \right) \right)}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix}}{\left(-\frac{1}{T_2} - \left(-\frac{1}{T_1} \right) \right)}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = e^{-\frac{1}{T_1}t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{1-\dfrac{T_2}{T_1}} & 0 \end{bmatrix} + e^{-\frac{1}{T_2}t}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\dfrac{T_2}{T_1}-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{T_1}t} & 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}}{\left(1-\dfrac{T_2}{T_1}\right)} & e^{-\frac{1}{T_2}t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.2: Cálculo de $\phi(t)$ usando la Transformada inversa de Laplace

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & 0 \\ \dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \left(s+\dfrac{1}{T_1}\right) & 0 \\ -\dfrac{1}{T_2} & \left(s+\dfrac{1}{T_2}\right) \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{adj\begin{bmatrix} \left(s+\frac{1}{T_1}\right) & 0 \\ -\frac{1}{T_2} & \left(s+\frac{1}{T_2}\right) \end{bmatrix}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)} \right\}$$

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\begin{bmatrix} \left(s+\frac{1}{T_2}\right) & 0 \\ \frac{1}{T_2} & \left(s+\frac{1}{T_1}\right) \end{bmatrix}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)} \right\}$$

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)} & 0 \\ \frac{\frac{1}{T_2}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)} & \frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_2}\right)} \end{bmatrix} \right\}$$

Se sacan las transformadas inversas de cada elemento de la matriz

$$\frac{1}{s+\frac{1}{T_1}}$$ Es directa

0 Es cero

$$\frac{\frac{1}{T_2}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}$$ Por fracciones parciales (asumiendo valores propios diferentes)

$$\frac{1}{s+\frac{1}{T_2}}$$ Es directa

Sustituyendo las respectivas transformadas inversas se tiene

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{T_1}} & 0 \\ \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2}\right)\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) & e^{-\frac{t}{T_2}} \end{bmatrix}$$