6. Estabilidad

Definición: Es una propiedad de un sistema de responder a una “excitación” limitada con un “movimiento” limitado.

Existen dos tipos de estabilidad:

I - Estabilidad de estado:

- La excitación es la desviación del estado de equilibrio.
- La estabilidad de estado existe si el sistema retorna al estado de equilibrio.

II - Estabilidad de entrada/salida

- La excitación es una entrada limitada en amplitud.
- La estabilidad de entrada/salida (E/S) existe si la salida del sistema es también limitada en amplitud.

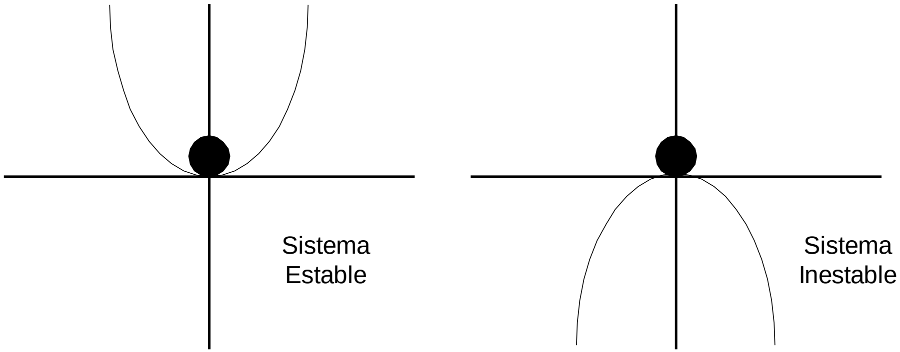


Figura 6.1: Ejemplos de sistemas estables e inestables

6.1 Estabilidad de estado (u(t)=0), x_0=x(0)

$$\dot{x} = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

El sistema se encuentra en estado de equilibrio x_e cuando $\dot{x} = 0$

$$0 = Ax_e$$

Si A es no singular, lo que significa que A^{-1} existe, premultiplicamos por A^{-1}

→ $$0 = x_e \qquad (2)$$

¡Los sistemas lineales poseen exactamente este único estado de equilibrio!

La norma vectorial:

Sirve para describir la distancia del estado actual x(t) del estado de equilibrio x_e.

Usaremos la norma vectorial $\|x(t)\|$; puede usarse cualquier norma, por ejemplo la norma vectorial euclidiana:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)}$$: norma vectorial euclidiana

Propiedades de la Norma

1) $\|x(t)\| \geq 0 \quad y \quad \|x(t)\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|ax(t)\| = a\|x(t)\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

por lo tanto vale que:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0$$

exactamente cuando

$$|x_i(t)| \rightarrow 0 \quad \forall\, i \in (1,2,\dots,n)$$

y

$$\|x(t)\| \rightarrow \infty$$

exactamente cuando

$$|x_i(t)| \rightarrow \infty \quad \text{para al menos un } i \in (1,2,\dots,n)$$

6.1.1 Definición de estabilidad según Lyapunov

El estado de equilibrio x_e del sistema (1) se llama estable, si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que para cualquier estado inicial que satisface la condición $\|x(t)\| < \delta$, la "respuesta natural del sistema" o movimiento propio del sistema (1) satisface la condición

$$\|x(t)\| < \varepsilon \;\; \forall \;\; t > 0 \qquad (4)$$

El estado de equilibrio se llama ***estable asintótico*** si es estable y

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0 \qquad (5)$$

Sistemas lineales estables

¡Un sistema lineal es estable si es estable asintóticamente!.

Estabilidad y estabilidad asintótica tienen diferente significado para sistemas no lineales; pero, pueden ser usados como sinónimos para sistemas lineales.

6.1.2 Criterios de estabilidad para la estabilidad de Lyapunov

De la ecuación de movimiento tenemos para un sistema sin entrada

$$x(t) = \phi(t)x_0 \qquad ; \; u(t)=0$$

La condición de estabilidad (4) es satisfecha para un ε dado cuando la norma de la matriz $\phi(t)$ es limitada para todo t.

$$\left\| \Phi(t) \right\| < \Phi_{máx} \quad \forall \; t \tag{6}$$

usando $\Phi(t) = V \operatorname{diag} e^{\lambda_i t} \, V^{-1}$, podemos relacionar (6) con los valores característicos de la matriz A.

La condición (6) será satisfecha cuando todos los modos $e^{\lambda_i t}$ se extinguen, esto es:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0 \;\; \forall \, i \in (1,2,...n) \tag{7}$$

“condición necesaria y suficiente para estabilidad asintótica”

Condición necesaria y suficiente para estabilidad de Lyapunov

"El sistema (1) es exactamente estable asintóticamente cuando la condición (7) es satisfecha"

Criterios de estabilidad a partir de los coeficientes de la ecuación característica: $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \qquad (8)$$

Método de Hurwitz

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ddots \end{pmatrix}$$

H: Matriz de Hurwitz (nxn)

- Se forman los determinantes principales D_i calculando los determinantes de la matriz [$i_{\,x}$ i] superior izquierda en H.

Criterio de Hurwitz:

Todos los ceros del polinomio característico (8) tienen parte real negativa exactamente si las siguientes condiciones son satisfechas:

1) Todos los coeficientes a_i son positivos (condición necesaria)

$$a_i > 0 \quad \forall\ i = 1,2,3,\dots,n$$

2) Los determinantes principales D_i de la matriz H son positivos

$$D_i > 0 \quad \forall\ i = 1,2,3,\dots,n$$

Pasos:

1) La condición 1 debe ser probada primero para
   a) La existencia de todos los coeficientes a_i
   b) Que todos los coeficientes a_i tengan el mismo signo

2) Calcular los determinantes D_i

Ejemplo 6.1: Probar la estabilidad de estado usando el criterio de Hurwitz del sistema con el polinomio característico $\lambda^4 + 16\lambda^3 + 75\lambda^2 + 118\lambda + 90$.

$$H = \begin{pmatrix} 16 & 118 & 0 & 0 \\ 1 & 75 & 90 & 0 \\ 0 & 16 & 118 & 0 \\ 0 & 1 & 75 & 90 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 16$
$D_2 = 1082$
$D_3 = 104636$
$D_4 = 9417240$

Todos los D_i son positivos, por lo tanto el sistema es estable

Método de Routh

Similar al método de Hurwitz; pero, evita el cálculo de determinantes grandes.

Los coeficientes del polinomio característico se ordenan en dos filas en el arreglo de Routh como se describe a continuación:

Se calculan los elementos del arreglo de Routh

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\lambda^{n} & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_0 & a_1 & 0 \\
\lambda^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\
\hline
\lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & & & & \\
\lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & & & & \\
\vdots & d_1 & & & & & \\
\lambda^{0} & & & & & &
\end{array}
$$

$$
b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}
$$

$$
c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}
$$

Ejercicio: Escriba las ecuaciones para calcular b_3 y d_1.

Criterio de Routh

Todos los ceros del polinomio característico tienen parte real negativa exactamente si las siguientes condiciones son satisfechas:

1) Todos los coeficientes a_i son positivos

$$a_i > 0 \quad \forall\ i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$$

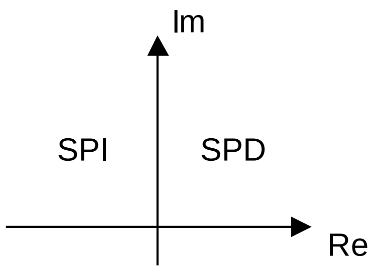
2) Todos los coeficientes de la primera columna del arreglo de Routh son positivos.

Ejemplo 6.2: Probar la estabilidad de estado usando el criterio de Routh del sistema cuyo polinomio característico es:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} \lambda^4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ \lambda^3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline \lambda^2 & 1 & 1 & 0 & \\ \lambda^1 & 2 & 0 & & \\ \lambda^0 & 1 & & & \end{array}$$

El número de raíces del polinomio en el SPD es igual al número de cambios de signo en la columna izquierda del arreglo de Routh avanzando de arriba hacia abajo.



- Cómo tratar los casos con ceros en la columna izquierda del arreglo de Routh:

Caso 1) Para evitar la indeterminación en el cálculo del elemento c_1 se sustituye el cero por un valor muy pequeño pero positivo llamado ε y Luego hacemos tender $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Ejemplo 6.3: Probar la estabilidad usando el criterio de Routh del sistema con el siguiente polinomio característico:

$$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3 \qquad \varepsilon > 0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\lambda^4 & 1 & 2 & 3 & 0 \\
\lambda^3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
\lambda^2 & \cancel{0}\ \varepsilon & 3 & 0 & \\
\lambda^1 & \dfrac{(3-2\varepsilon)}{-\varepsilon} & 0 & & \\
\lambda^0 & 3 & & &
\end{array}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 \end{vmatrix}}{-\varepsilon} \qquad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & 3 \\ \left(\dfrac{3-2\varepsilon}{-\varepsilon}\right) & 0 \end{vmatrix}}{-\left(\dfrac{3-2\varepsilon}{-\varepsilon}\right)}$$

Calculamos los límites: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon = 0$ y $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{(3-2\varepsilon)}{-\varepsilon} = -\infty$

Hay 2 cambios de signo:

- El polinomio tiene 2 raíces en el SPD (2 polos del sistema en el SPD)
- El sistema es inestable

Caso 2) Agregamos una raíz conocida, por ejemplo (λ+1)

Ejemplo 6.4: Calcular la estabilidad del sistema del ejemplo 6.3 agregando la raíz (λ+1).

$$\left(\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3\right)\cdot\left(\lambda + 1\right)$$

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\lambda^5 & 1 & 3 & 5 & 0 \\
\lambda^4 & 2 & 4 & 3 & 0 \\
\hline
\lambda^3 & 1 & \frac{7}{2} & 0 & \\
\lambda^2 & -3 & 3 & 0 & \\
\lambda^1 & \frac{27}{6} & 0 & & \\
\lambda^0 & 3 & & &
\end{array}$$

- Hay 2 cambios de signo
- Es inestable con 2 raíces del polinomio característico en el SPD

Si el polinomio tiene raíces en el eje imaginario entonces ocurre la "terminación prematura".

♦ Cómo tratar la terminación prematura del arreglo

Polinomio divisor: Cuando se presenta una fila de ceros entonces existe un polinomio divisor par (sólo potencias pares) o impar del polinomio original.

- Los coeficientes del polinomio divisor se obtienen del renglón (fila) anterior no nulo del arreglo.
- Se completa el arreglo sustituyendo el renglón de ceros por la derivada del polinomio anterior.

Ejemplo 6.5: Probar la estabilidad del sistema con el polinomio característico $\lambda^4 + \lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 6$

$$\begin{array}{c|cccc}
\lambda^4 & 1 & 5 & 6 & 0 \\
\lambda^3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
\lambda^2 & 2 & 6 & 0 & \\
\lambda^1 & 0 & 0 & & \\
\lambda^0 & & & &
\end{array}$$

El polinomio divisor es: $2\lambda^2+6$ (par) como se demuestra a continuación:

$$\left(\frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + 1\right) \cdot \left(2\lambda^2 + 6\right) = \lambda^4 + \lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 6$$

$$2\lambda^2 + 6 = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{6}{2}$$

$$\lambda = \sqrt{-3}$$

$$\lambda = \pm j\sqrt{3}$$

Se completa el arreglo con la derivada respecto a λ del polinomio divisor

$$\frac{d(2\lambda^2 + 6)}{d\lambda} = 4\lambda + 0$$

λ^4	1	5	6	0
λ^3	1	3	0	0
λ^2	2	6	0	
λ^1	4	0		
λ^0	6			

- No hay cambios de signo
- No tiene raíces en el SPD

Pero el polinomio tiene un par de raíces sobre el eje imaginario (las del polinomio divisor), por lo que el sistema se denomina ***cuasiestable***.

Sistemas ajustables: Son aquellos sistemas en los cuales existe una o más variables.

Ejemplo 6.6: Para que valores de K es estable el sistema cuya función de transferencia $T(\lambda)$ se muestra a continuación

$$T(\lambda) = \frac{4}{\lambda^2 + 2\lambda + K}$$

Como se trata de un sistema de 2° orden

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Para ser estable, el sistema debe tener todos los coeficientes positivos; por lo que para este caso, K>0 garantiza la estabilidad.

Ejemplo 6.7: Para que valores de K es estable el sistema cuya función de transferencia T(s) se muestra a continuación

$$T(s) = \frac{2s + K}{s^2 + (2 + K)s + 4}$$

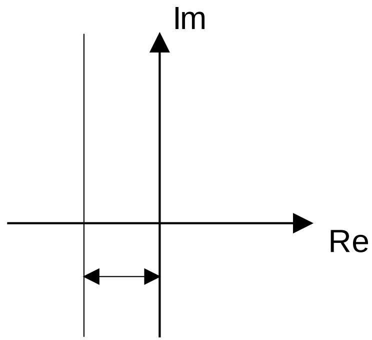
$$(2 + K) > 0$$
$$\Rightarrow K > -2$$

Ejercicio 6.1: ¿Para cuáles valores de K es el sistema estable?

$$T(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + K$$

Solución: $0 < K < 3$

Estabilidad relativa



Se aplica sólo a sistemas estables y se define como la distancia sobre el plano complejo de la raíz característica más próxima al eje imaginario.

Ejemplo 6.8: Probar si el sistema cuyo polinomio característico se muestra, tiene una estabilidad relativa de al menos 2.

$$s^4 + 14s^3 + 73s^2 + 168s + 144$$

$$\begin{array}{c|cccc} s^4 & 1 & 73 & 144 & 0 \\ s^3 & 14 & 168 & 0 & \\ \hline s^2 & 61 & 144 & & \\ s^1 & 823/61 & 0 & & \\ s^0 & 144 & & & \end{array}$$

Primero se prueba la estabilidad absoluta por el método de Routh-Hurwitz. No hay cambios de signo, por lo tanto el sistema es estable.

Luego se prueba la estabilidad relativa de al menos 2 haciendo la sustitución de variable s = (σ-2) que equivale a desplazar el eje imaginario dos unidades hacia la izquierda.

$$(\sigma-2)^4+14(\sigma-2)^3+73(\sigma-2)^2+168(\sigma-2)+144$$

$$\sigma^4+6\sigma^3+79\sigma^2+12\sigma+4$$

Se prueba el nuevo polinomio

$$\begin{array}{c|cccc}
\sigma^4 & 1 & 79 & 4 & 0 \\
\sigma^3 & 6 & 12 & 0 & \\
\hline
\sigma^2 & 77 & 4 & & \\
\sigma^1 & 900/77 & 0 & & \\
\sigma^0 & 4 & & &
\end{array}$$

→ No hay cambios de signo, por lo tanto el polinomio original tiene todas las raíces a la izquierda de s=-2.

6.2 Estabilidad de entrada/salida

El sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t); \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= c^T \cdot x(t) + d \cdot u(t) \end{aligned} \qquad (9)$$

para la condición **x**(0)=0 con una entrada u(t) limitada debe de responder con una salida y(t) limitada.

$\lvert u(t) \rvert < U_{máx} \quad \forall \ t > 0$		$\lvert y(t) \rvert < Y_{máx} \quad \forall \ t > 0$

6.2.1 Definición de estabilidad entrada/salida (E/S)

Un sistema lineal (9) se llama estable de entrada/salida si para un estado inicial igual a cero

$$x_0 = 0,$$

y una señal cualquiera limitada

$$|u(t)| < U_{máx} \quad \forall \; t > 0 \,,$$

la salida se mantiene limitada

$$|y(t)| < Y_{máx} \quad \forall \; t > 0 \qquad (10)$$

6.2.2 Criterios de estabilidad E/S

$$y(t) = C\varphi(t)\mathbf{x}_0 + g(t) * u(t); \quad g(t)$$: Respuesta al impulso

si $x_0 = 0$

$$\rightarrow y(t) = g(t) * u(t)$$

con

$$g(t) = C\varphi(t)B + D\delta(t) \qquad (11)$$

para entrada limitada

$$\left|y(t)\right| = \int_0^t \left|g(t-\tau)\right| u(t)\, d\tau$$

$$\left|y(t)\right| < \left|u_{max}\right| \int_0^t \left|g(t-\tau)\right| d\tau$$

Por lo tanto el sistema es estable si la integral

$$\int_0^t |g(\tau)| d\tau$$

existe para todo t, o sea

$$\int_0^\infty |g(t)| d\tau \quad < \quad \infty \qquad (12)$$

Si $u(t) = u_{max} \Rightarrow$ (12) es condición necesaria para estabilidad E/S!

Condición necesaria para estabilidad E/S

"El sistema (9) es exactamente estable de E/S si su respuesta al impulso g(t) según (11), cumple la condición (12)".
La condición (12) es equivalente a:

$$\int_0^\infty \left| \frac{dh(t)}{dt} \right| dt \quad < \quad \infty$$

Lo que significa que ante una entrada escalón, el sistema llega a un valor final.

Si en lugar de g(t) conocemos G(s)

$$G(s) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; g(t)$$

entonces podemos probar la estabilidad E/S a partir de los polos de G(s)

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{q} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

La condición (12) es satisfecha si todos los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa

$$\mathrm{Re}\{P_i\} < 0 \quad \forall\ i \in (1,2,3,\ldots,n) \tag{13}$$

Condición necesaria y suficiente para estabilidad E/S

"El sistema (9) es exactamente estable E/S si todos los polos de G(s) satisfacen la condición (13)".

6.3 Relación entre estabilidad de estado y estabilidad E/S

¡Esta relación está en (11) manifiesta!

$$g(t) = C\varphi(t)B + D\delta(t) \qquad \text{(11 repetida)}$$

Si el sistema es estable según Lyapunov; entonces $\|\phi(t)\|$, la norma de $\phi(t)$, se extingue asintóticamente. Por lo tanto $g(t)$ también se extingue asintóticamente; por lo que la integral (12) existe.

"**Si el sistema es estable asintóticamente entonces también es estable de entrada – salida**".

Esta afirmación sólo puede ser invertida si todos los modos de (9) aparecen en la función de $g(t)$. Para estos sistemas todos los valores propios λ_i de **A** son polos de la función de transferencia; de tal forma que las condiciones (4) y (5) coinciden.

$$\|x(t)\| \quad < \quad \varepsilon \quad \forall \ t > 0 \qquad \text{(4 repetida)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| \quad = \quad 0 \qquad \text{(5 repetida)}$$

→ La estabilidad de entrada/salida se puede probar con los criterios para estabilidad de estado; estos criterios son suficientes y bajo la condición anterior, también necesarios

Ejemplo 6.9: Sistema que no es estable asintóticamente pero es estable de entrada-salida.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

no es estable de estado

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

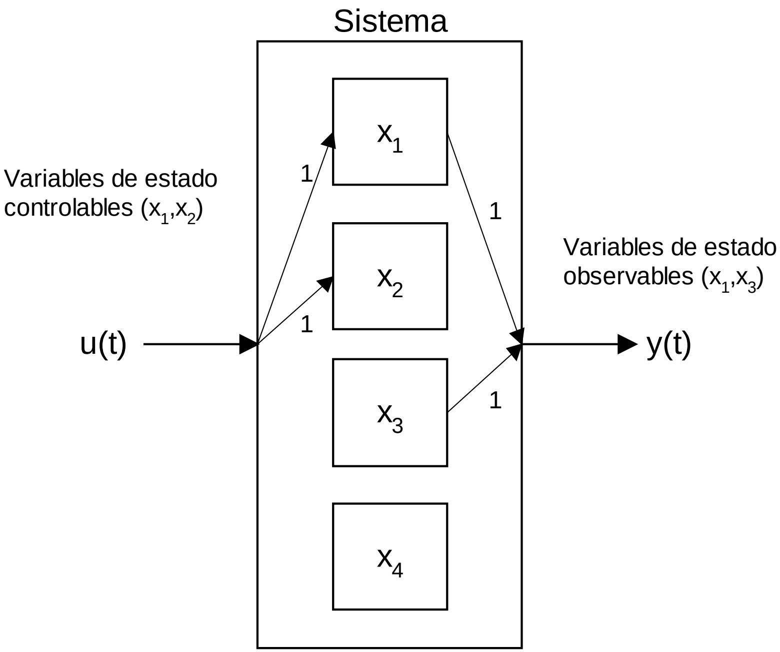


Figura 6.1: Estructura del sistema del ejemplo 6.9

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = f(x_i)$$

El modo 4, correspondiente a la variable x_4, no es estable; por lo tanto, el sistema no es estable asintóticamente; pero, este modo no es observable a la salida; por lo que el sistema es estable E/S.