Transformada de Fourier

M. en C. Miguel Olvera Aldana

México D.F.
7 de Marzo de 2010

1. Introducción

1.1. Clasificación de las Funciones

Definición 1 *: Una función f de un conjunto D a un conjunto E es un correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único de E.*

A veces se ilustran las correspondencias con diagramas como el de la Figura 1 en los que los conjuntos D y E quedan representados por puntos dentro de ciertas regiones del plano. La flecha indica que y es elemento de E que corresponden al elemento x de D. Lon conjuntos pueden tener elementos en común. De hecho muchas veces $D = E$.

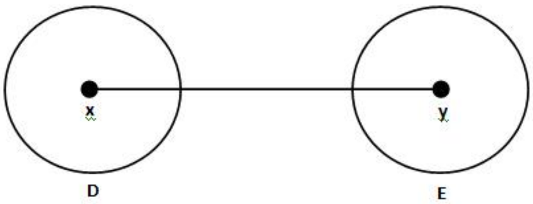

Figura 1:

La figura indica que a cada x en D le corresponde uno y solo un y en E, es decir, dado x se tiene que y es único. Sin embargo, a varios elementos de D les puede corresponder un mismo elemento de E.

En general, D y E serán conjuntos de números. Por ejemplo, si D y E son conjunto de los números reales, a cada numero real x se le puede asignar su cuadrado x^2. Así, a 3 se le asigna 9, a -5 se le asigne 25, a 5 se le asigna 25, y a 2 se le asigna 4, esto es una correspondencia de correspondencia.

1.1.1. Funciones Periódicas, definición y gráfica

Definición 2 *: Un función f se llama periódica si esta definida para todo t real para algún número positivo T, $f(t+T) = f(t)$ para todo T.*

El número T se llama el periodo de f. El periodo mínimo de f se llama periodo principal o periodo fundamental de f. Por ejemplo, $\sin(t + 6PI) = \sin(t)$ para todo t. Por lo tanto $6PI$ es un periodo de la función seno. Sin embargo, el periodo principal de la función seno es $2PI$ ya que $\operatorname{sen}(t + 2PI) = \operatorname{sen}(t)$ para todo t y $2PI$ es el mínimo número con esta propiedad. Geométricamente esto significa que la gráfica de f se repite cuando las abscisas de los puntos toman valores en intervalos sucesivos de amplitud T. La Figura 2 muestra la función periódica con periodo T.

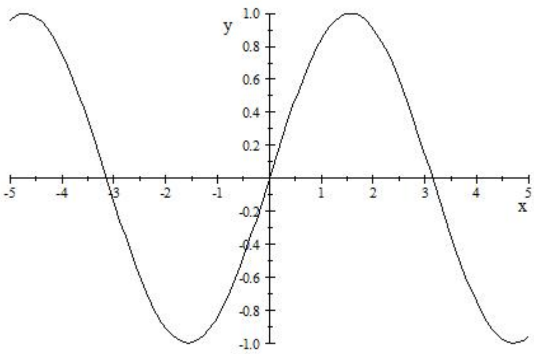

Figura 2: Función Periódica

1.1.2. Funciones Pares e Impares, definición y gráficas

Definición 3 *: Sea f una función tal que siempre que x este en el dominio D, $-x$ también esta en D.*

- *f es par si $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in D$.*
- *f es impar si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D$.*

En la Figura 3 se puede observar la gráfica del coseno que es simétrica con respecto al eje y, es decir, que tiene los mismos valores en el eje y para $\cos(x)$ que para $\cos(-x)$

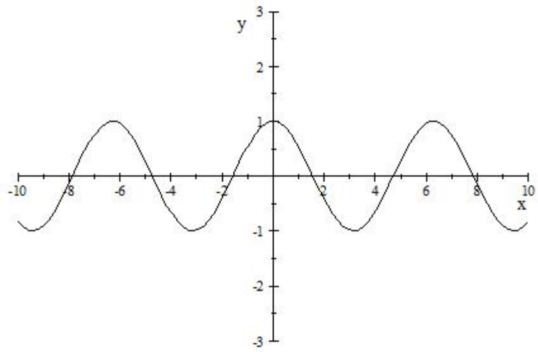

Figura 3: Función Par

En la Figura 4 se puede observar la gráfica del seno que es simétrica respecto al origen, es decir, que tiene los mismo valores para $\sin(-x)$ que para $-\sin(x)$

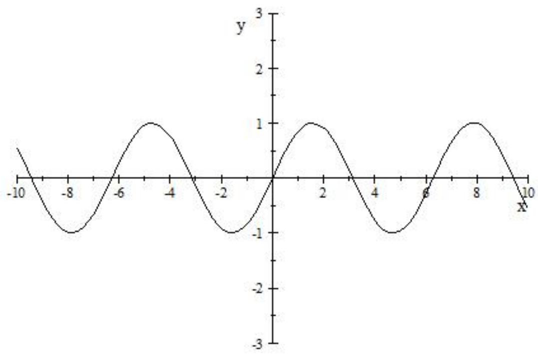

Figura 4: Función Impar

2. Conceptos y definición de Serie de Fourier

Muchas funciones conocidas pueden desarrollarse en series infinitas e integrales que contienen funciones trigonométricas. Esta idea es importante al modelar muchos fenómenos de la física, la ingeniería, la computación y la topografía asistida por computadora.

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo T, la cual puede representarse por una serie trigonométrica.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + a_3\cos(3\omega_0 t)\ldots + b_1\sin(\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t) + b_3\sin(3\omega_0 t) + \ldots$$

Entonces llamamos **Serie Trogonométrica de Fourier** a la siguiente expresión.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t))$$

Una alternativa para la serie trigonométrica de Fourier es:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(n\omega_0 t - \theta n))$$

Donde los coeficientes c_n y θ_n se conocen como las amplitudes armónicas y ángulos de fase respectiva.

Demostración 1 *:*

Si tenemos que:

$$c_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{a_n}{\sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{b_n}{\sqrt{(b_n)^2 + (b_n)^2}}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} a_0 \cos(n\omega_0 t) + b_0 \sin(n\omega_0 t) &= \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}} \cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{(b_n)^2 + (b_n)^2}} \sin(n\omega_0 t) \right) \\ &= c_n(\cos(\alpha)\cos(n\omega_0 t) + \sin(\alpha)\sin(n\omega_0 t)) \\ &= c_n(\cos(n\omega_0 t - \alpha)) \end{aligned}$$

Reescribiendo tenemos que:

$$\alpha = \theta_n$$
$$\tan(\theta_n) = \frac{b_n}{a_n} \quad \Rightarrow \quad \arctan \frac{b_n}{a_n} = \theta_n$$
$$c_0 = \frac{1}{2} a_n$$

Por lo tanto

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(n\omega_0 t - \theta n))$$

La expresión para la serie de Fourier es una representación de funciones periódicas que se ve como la suma de componentes sinosoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente sinosoidal de frecuencia se denomina la enésima frecuencia.

$$\omega_n = n\omega_0$$

La primera armónica se le conoce como la componente fundamental.

$$\omega_0 = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

2.1. Funciones Ortogonales

Un conjunto de funciones $\theta_n t$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para cuales quiera de dos funciones $\theta_n t$ y $\theta_m t \in \theta_v t$ se cumple lo siguiente:

$$\int_a^b \theta_n(t)\theta_m(t)dt = 0 \qquad si \;\; m \neq n$$
$$\int_a^b \theta_n(t)\theta_m(t)dt = r_n \qquad si \;\; m = n$$

Considérese el ejemplo de las funciones sinosoidales:

a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)dt &= \frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{T}{2\pi n}\left[\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - \sin\left(n\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{T}{2\pi n}(\sin(n\pi) + \sin(n\pi)) = 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)dt &= \frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{T}{2\pi n}\left[-\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) + \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{T}{2\pi n}(-\cos(n\pi) + \cos(n\pi)) = 0
\end{aligned}$$

c)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt$$

Si utilizamos las siguientes identidades trigonométricas.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) - \cos(a-b)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}\cos(n\omega_0 t + m\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cos(n\omega_0 t - m\omega_0 t)\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos((n+m)\omega_0 t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos((n-m)\omega_0 t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+m)\omega_0}\sin((n+m)\omega_0 t) + \frac{1}{(n-m)\omega_0}\sin((n-m)\omega_0 t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n+m)2\pi}\sin\left((n+m)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) + \frac{T}{(n-m)2\pi}\sin\left((n-m)\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Si $m \neq n \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt &= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n+m)2\pi}\left(\sin((n+m)\pi) - \sin(n+m)(-\pi)\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n-m)2\pi}\left(\sin((n-m)\pi) - \sin(n-m)(-\pi)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n+m)2\pi}(0+0) + \frac{T}{(n-m)2\pi}(0+0)\right] \\
&= \frac{1}{2}(0+0) = 0
\end{aligned}$$

Si $m = n$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(n\omega_0 t)dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2n\omega_0 t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}t\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2n\omega_0}\sin(2n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{T}{2}\right) + \frac{T}{4n\pi}\left[\sin\left(2n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - \sin\left(2n\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{T}{4n\pi}\left(\sin(2\pi n) + \sin(2n\pi)\right)$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{T}{4n\pi}(0+0) = \frac{T}{2}$$

d)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt$$

Si utilizamos las siguientes identidades trigonométricas.

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \frac{\cos(a+b)}{2} - \frac{\cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

Entonces sí: $m \neq n \neq 0$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}\left[\cos(n\omega_0 t - m\omega_0 t) - \cos(n\omega_o t + m\omega_0 t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos((n-m)\omega_0 t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos((n+m)\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)\omega_0}\sin((n-m)\omega_0 t) - \frac{1}{(n+m)\omega_0}\sin((n+m)\omega_0 t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n-m)2\pi}\left(\sin\left((n-m)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)\right) - \left(\sin\left((n-m)\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n+m)2\pi}\left(\sin\left((n+m)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)\right) - \left(\sin\left((n+m)\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n-m)2\pi}(0+0) - \frac{T}{(n+m)2\pi}(0+0)\right] = 0$$

Si $m = n$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2(n\omega_0 t)dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2n\omega_0 t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}t\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2n\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\frac{T}{2} - \left[\frac{1}{2}\frac{1}{2n\omega_0}\sin(2n\omega_0 t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{T}{8n\pi}\left(\sin(2n\pi) + \sin(2n\pi)\right)$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{T}{8n\pi}(0+0) = \frac{T}{2}$$

e)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt$$

Si $n = m$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = \frac{1}{n\omega_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)n\omega_0 dt$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\left[\frac{\sin^2(n\omega_0 t)}{2}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{T}{2n(2\pi)}\left[\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - \sin\left(n\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{T}{2n(2\pi)}\left[\sin(n\pi) + \sin(n\pi)\right]$$

$$= \frac{T}{2n(2\pi)}[0+0] = 0$$

Si $n \neq m$

Si utilizamos las siguientes identidades trigonométricas.

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

Entonces:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\sin(n\omega_o t + m\omega_0 t) + \sin(n\omega_0 t - m\omega_0 t)}{2}$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}(\sin(n\omega_0 t + m\omega_0 t) + \sin(n\omega_0 t - m\omega_0 t))$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin((n+m)\omega_0 t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin((n-m)\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(n+m)\omega_0}\cos((n+m)\omega_0 t) - \frac{1}{(n-m)\omega_0}\cos((n-m)\omega_0 t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{T}{(n+m)2\pi}\left(\cos\left((n+m)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)\right)-\left(\cos\left((n+m)\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n-m)2\pi}\left(\cos\left((n-m)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)\right)-\left(\cos\left((n-m)\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n+m)2\pi}(\cos((n+m)\pi)-\cos((n+m)\pi))\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{T}{(n-m)2\pi}(\cos((n-m)\pi)-\cos((n-m)\pi))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{T}{(n+m)2\pi}(0+0)+\frac{T}{(n-m)2\pi}(0-0)\right]=0$$

Para calcular el coeficiente de la serie de Fourier a_n se multiplica la serie de Fourier por $\sin(m\omega_0 t)$ y lo integramos, es decir:

Si la serie de Fourier es:

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t))$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{1}{2}a_0\sin(m\omega_0 t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n\cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt+\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n\sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}a_0(0)+a_n(0)+b_n\frac{T}{2}=b_n\frac{T}{2}$$

Entonces:

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)dt$$

Para calcular el coeficiente de la serie de Fourier b_n se multiplica la serie de Fourier por $\cos(m\omega_0 t)$ y lo integramos, es decir:

Si la serie de Fourier es:

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t))$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt=\frac{1}{2}a_0\cos(m\omega_0 t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n\cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt+\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n\sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}a_0(0)+a_n\frac{T}{2}+b_n(0)=a_n\frac{T}{2}$$

Entonces:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt$$

Para calcular a_0 se realiza lo siguiente:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{1}{2}a_n dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n\cos(n\omega_0 t)dt+\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n\sin(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}a_0\left(\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)+a_n(0)+b_n(0)=\frac{1}{2}a_0 T$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

**NOTA*: El $\frac{a_n}{2}$ es el valor promedio de $f(t)$ durante un periódo. Y el valor de $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Ejemplo: Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ con la grafica de la Figura 5:

$$f(t) = \begin{cases} -1,, -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1,, 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Si sabemos que:

$$a_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

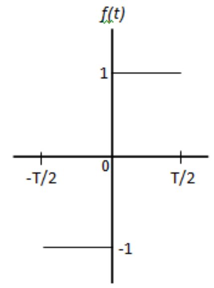

Figura 5: Ejemplo 1

Entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\cos(n\omega_0 t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^{0} \cos(n\omega_0 t)dt\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(-\frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}\right) \\ &= \frac{T}{2}\left\{-\frac{1}{n\omega_0}[\sin(0) - \sin(n\pi)] - \frac{1}{n\omega_0}[\sin(n\pi) - \sin(0)]\right\} = 0 \\ b_n &= \frac{T}{2}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\sin(n\omega_0 t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^{0} \sin(n\omega_0 t)dt\right) \end{aligned}$$

Si n es par entonces es igual a 0
Si n es impar entonces sabemos que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{1}{n\pi}[2 - (-1-1)] = \frac{4}{n(impar)\pi}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{n impar} \\ 0, & \text{n par} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\right] = \frac{2}{T}\left[t|_{-\frac{T}{2}}^{0} + t|_{0}^{\frac{T}{2}}\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{T}{2} + 0 + 0 - \frac{T}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$

En esta función $a_n = 0$ y $a_0 = 0$ porque es una *función impar.*

La serie de Fourier para esta función es:

$$f(t) = \sum_{n=impar}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(n\omega_0 t)$$

2.2. Determinación de la Serie de Fourier de Señales Eléctricas

En algunos sistemas de telemetría es necesario producir una onda sinusoidal con una frecuencia que está relacionada con el voltaje de una corriente de manera lineal. Por ejemplo, podemos necesitar que la salida de un oscilador sea 370 Hz (hertz o ciclos por segundo). Cuando se apliquen 0 voltios de corriente directa (CD) y después que varíe linealmente hasta 430 Hz cuando la entrada se eleve a 5 voltios de corriente directa.

El problema es que la frecuencia de un oscilador de onda sinusoidal no puede cambiarse mucho simplemente con una seal eléctrica. Usualmente, estos osciladores operan tomando una oscilación sinusoidal natural de otro circuito inductor-capacitor o de un cristal, entonces (al girar la perilla de sintonía de un radio se está cambiando el valor de un capacitor en un circuito oscilador inductor-capacitor). Lo que se necesita en este caso es la capacidad de cambiar la frecuencia de salida hasta en 7.5 % hacia cualquier lado de la frecuencia fundamental utilizando únicamente una seal eléctrica.

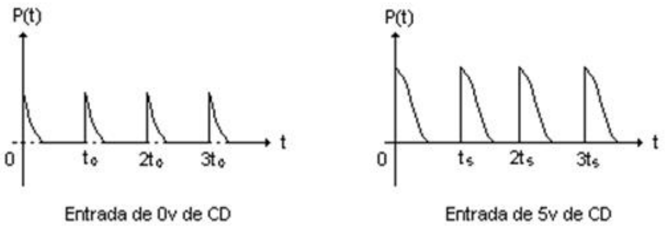

Figura 6: Salida de un generador de pulsos en 0v y 5v.

Estudiaremos ahora como se hace esto, empezaremos con un generador de pulso capaz de producir pulsos periódicamente (el mismo tiempo entre pulsos) y con la capacidad adicional de poder cambiar significativamente este periodo con un cambio en el voltaje de entrada. Esto es fácil de hacer si no nos importa la forma de los pulsos. Ahora tomamos la salida del generador de pulsos y la ponemos en un flip-flop con una salida que siempre tiene uno de dos voltajes, digamos, k y $-k$.

Si la salida es de k voltios, se mantendrá así hasta que reciba un impulso de entrada. En este momento, cambia de estado y su salida cae a $-k$ voltios hasta que llegue el siguiente pulso. Como el tiempo entre los pulsos es constante, la salida del flip-flop será una onda cuadrada de amplitud k y su frecuencia será de la mitad de la del generador de pulsos. Un aumento en el voltaje en el generador de pulsos hace que aumente su frecuencia, incrementándose la frecuencia de la onda cuadrada. Por lo tanto, es posible producir una onda cuadrada con una frecuencia que puede cambiarse con un voltaje de entrada.

Lo que realmente se necesita es una onda sinusoidal con una frecuencia que pueda cambiarse de esta manera. Como la onda cuadrada es periódica y satisface que en cada punto de un periodo las derivadas por la izquierda y por la derecha existen (La serie de Fourier converge al promedio de los limites izquierdo y derecho la función), sabemos que esta onda cuadrada es una suma de ondas sinusoidales una de las cuales es la que queremos.

Supongamos que queremos una onda sinusoidal con frecuencia $\frac{\omega_0}{2\pi}$. Constituimos una onda cuadrada con frecuencia $\frac{\omega_0}{2\pi}$.La onda cuadrada de la salida de un Flip-Flop es:

$$f(x) = \begin{cases} 0 < t < \frac{\pi}{\omega_0}, & \text{si k} \\ \frac{\pi}{\omega_0} < t < \frac{2\pi}{\omega_0}, & \text{si -k} \end{cases}$$

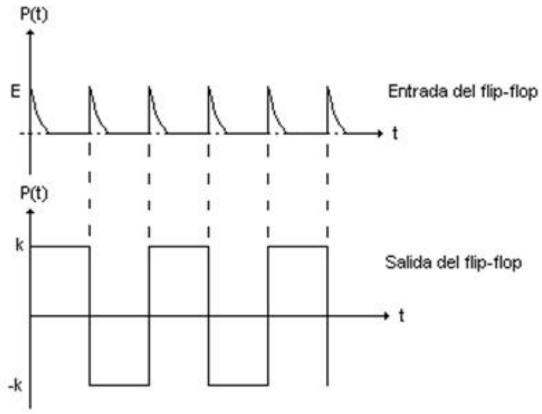

Figura 7: Flip-Flop

Y por tanto:

$$f\left[t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right] = f(t)$$

La serie de Fourier que representa la $f(t)$ es:

Si sabemos que:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} kdt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} (-k)dt\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[kt|_0^{\frac{\pi}{\omega}} - kt|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[k\left(\frac{\pi}{\omega_0} - 0\right) - k\left(\frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{\pi}{\omega_0}\right)\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[k\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) - k\frac{\pi}{\omega_0}\right] \\
&= \frac{2}{T}(0) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto en coeficiente $a_0 = 0$ y sabiendo que:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

Entonces:

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} k\cos(n\omega_0 t)dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} (-k)\cos(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{T}\left[\frac{k}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{k}{n\omega_0 t}\sin(n\omega_0 t)\Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{k}{n\omega_0}\left(\sin\left(n\omega_0\frac{n}{\omega_0}\right) - \sin(0)\right) - \frac{k}{n\omega_0}\left(\sin\left(n\omega_0 t\frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \sin\left(n\omega_0 t\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{k}{n\omega_0}\left(\sin(n\pi) - \sin(0)\right) - \frac{k}{n\omega_0}\left(\sin(n2\pi) - \sin(n\pi)\right)\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{k}{n\omega_0}(0-0) - \frac{k}{n\omega_0}(0-0)\right] \\
&= \frac{2}{T}(0-0) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el coeficiente $a_n = 0$

Si recordamos las propiedades de una función impar, notaremos que la función que estamos analizando es una función impar, por eso los coeficientes a_n y a_0 son igual a cero.

Si sabemos que:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} k\sin(n\omega_0 t)dt + \int_{\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{2\pi}{\omega_0}} (-k)\sin(n\omega_0 t)dt\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[-\frac{k}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} + \frac{k}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[-\frac{k}{n\omega_0}\left(\cos\left(n\omega_0\frac{\pi}{\omega_0}\right) - \cos(0)\right) + \frac{k}{n\omega_0}\left(\cos\left(n\omega_0\frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \cos\left(n\omega_0\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[-\frac{k}{n\omega_0}(\cos(n\pi) - \cos(0)) + \frac{k}{n\omega_0}(\cos(n2\pi) - \cos(n\pi))\right]
\end{aligned}
$$

Si n es un número par, el $b_n = 0$ y si n es un número impar, con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ entonces:

$$\frac{k}{n\pi}[2-(-1-1)] = \frac{4k}{n(impar)\pi}$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{n par} \\ \frac{4k}{n\pi 0}, & \text{n impar} \end{cases}$$

La serie de Fourier que representa a $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)\omega_0 t]}{2n-1}$$

$$= \frac{4k}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{4k}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) + \frac{4k}{5\pi}\sin(5\omega_0 t) + \dots$$

Para los propósitos actuales, solo queremos el primer término sinusoidal, de modo que eliminaremos las armónicas más altas colocando la seal de onda cuadrada en un filtro de frecuencias bajas. Este es simplemente un circuito que permite el paso a frecuencias bajas prácticamente ilesas mientras que atenúa las frecuencias altas. Para ver como se hace esto, consideraremos un ejemplo específico. Supongamos que queremos producir una onda sinusoidal de 400 hertzios y queremos cambiar esta frecuencia eléctricamente desde 370 hertz hasta 430 hertz sin distorsionar la seal. Supondremos que el valor de la amplitud de salida no es critica (dentro de límites razonables); esto es cierto en la práctica. Lo que es crucial es la frecuencia de salida.

Empezaremos con un generador de pulsos con una frecuencia que pueda variar de 740 a 860 hertz con un cambio en la entrada de 0v a 5v de CD. Hacemos una onda cuadrada poniendo estos pulsos en un flip-flop. La frecuencia de la onda cuadrada será de la mitad de la del pulso del generador y por lo tanto variara de 370 a 430 hertz. Ahora tenemos la onda cuadrada superior con $\omega_0 = 800\pi$, esto es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 < t < \frac{1}{800}, & \text{k} \\ \frac{1}{800} < t < \frac{1}{400}, & \text{-k} \end{cases}$$

Entonces:

$$f\left(t + \frac{1}{400}\right)$$

La función anterior tiene la siguiente serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)800\pi]}{2n-1}$$

Si tomamos esta señal como entrada a un filtro pasa bajas *inductor-capacitor*, debemos calcular $\frac{q(t)}{C}$; y a su vez debemos conocer q.

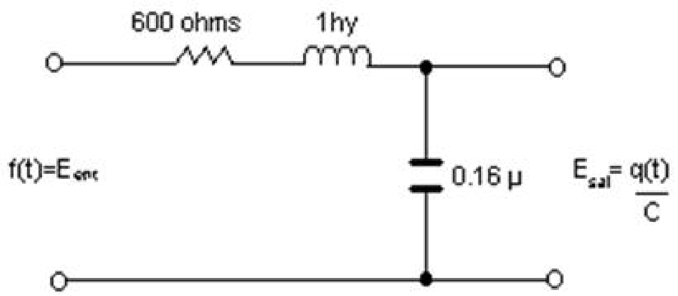

Figura 8: Circuito LRC

La ecuación diferencial para este circuito es:

$$Li^t + Ri + \frac{q}{c} = f(t)$$

Recordemos que $i = q^t$ y ponemos $f(t)$ y los valores de L, R y C en esta ecuación para obtener:

$$q^{tt} + 600q^t + 6{,}25(10^6)q = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)800\pi t]}{2n-1}$$

Como queremos únicamente la solución estacionaria, desechamos la solución homogénea y consideramos las ecuaciones diferenciales no homohéneas.

$$q^{tt} + 600q^t + 6{,}25(10^6)q = \frac{4k}{\pi} \sin(800\pi t)$$

$$q^{tt} + 600q^t + 6{,}25(10^6)q = \frac{4k}{3\pi} \sin(2400\pi t)$$

$$q^{tt} + 600q^{t} + 6{,}25(10^{6})q = \frac{4k}{5\pi}\sin(4000\pi t)$$

Hasta

$$q^{tt} + 600q^{t} + 6{,}25(10^{6})q = \frac{4k}{(2n-1)\pi}\sin[(2n-1)800\pi t]$$

La estrategia es resolver cada una de estas ecuaciones diferenciales y sumar las soluciones para encontrar la representación en serie de Fourier de la carga del capacitor q. Así consideramos:

$$q_n^{tt} + 600q_n^{t} + 6{,}25(10^{6})q_n = \frac{4k}{n\pi}\sin(n\omega_0 t)$$

Donde n es cualquier número positivo impar y $\omega_0 = 800\pi$. El subíndice n se introduce para recordarnos que esta es la enésima ecuación y debemos sumar las soluciones.

2.3. Interpretación Geométrica de la serie de Fourier

2.3.1. Condiciones de Dirichlet

Se supuso que las funciones dadas se podían interpretar mediante una serie de Fourier. Pero ahora se debe investigar la convergencia de la serie de Fourier de una función $f(t)$.

El argumento que motiva la definición de los coeficientes de Fourier dependía de poder intercambiar una serie con una integral, un paso que en general no es válido. Se tendrá que saber las condiciones sobre $f(t)$ que nos permitan determinar la suma de la serie de Fourier de $f(t)$ en un intervalo.

Recordemos que $f(t)$ es continua en pedazos si:

1. $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ son finitos.
2. $f(t)$ es continua en todos sus puntos de $[a, b]$ excepto posiblemente un número finito de ellos.
3. En los puntos (a, b) donde $f(t)$ es discontinua, la función tiene límite izquierdo y derecho finitos.

La siguiente figura muestra la gráfica de una función que es continua a pedazos. En los puntos de (a, b) donde la función es discontinua, la gráfica tiene discontinuidades de salto. La magnitud del salto en x_0 es la diferencia entre el límite izquierdo y derecho en ese punto:

$$\left|\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h) - \lim_{h\to 0^-} f(x_0+h)\right|$$

Esta es la distancia entre el extremo izquierdo y derecho de la gráfica en x_0.

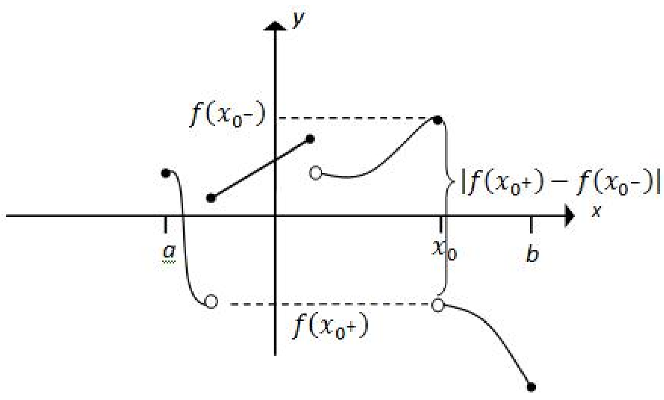

Figura 9: Condiciones Dirichlet

Se denotan el limite izquierdo y derecho de la siguiente manera:

$$f(x_{0^+}) = \lim_{k \to 0^+} f(x_0 + h) \qquad\qquad f(x_{0^-}) = \lim_{k \to 0^-} f(x_0 + h)$$

Si estos límites existen y son finitos, también existen las derivadas tanto por la izquierda como por la derecha aunque la derivada de la función no exista.

Se enunciarán aquí las condiciones, conocidas como *Condiciones de Dirichlet*, baja las cuales es posible la representación en serie de Fourier de una función dada $f(t)$.

1. La funcin $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.

2. La funcin $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.

3. La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un periodo es finita, es decir:

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} |f(t)| dt = finita < \infty$$

Se dice que una función $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo finito $\left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right]$ si satisface las condiciones 1. y 2. Si a_n y b_n son las sucesiones de los coeficientes de $f(t)$, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

Y si se tiene que:

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

Puesto que la serie del miembro izquierdo es convergente entonces es necesario que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$$

Lo cual implica que:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

Ejemplo:

Demostrar que si $f(t)$ es una función continua por tramos, la integral del valor absoluto de $f(t)$ es finita en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

Los coeficientes de Fourier existen, puesto que la integral del valor absoluto de $f(t)$ es finita en el intervalo $[\frac{T}{2}, -\frac{T}{2}]$

$$\lim_{n \to \infty} \begin{cases} a_n \\ \\ b_n \end{cases} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \begin{cases} \cos(n\omega_0 t) \\ \\ \sin(n\omega_0 t) \end{cases} dt = 0$$

2.4. Serie de Fourier Compleja

La representación de una función periódica como una serie de Fourier, implica que la especificación de sus coeficientes determina unívocamente la función. Ahora desarrollaremos la forma compleja de la serie de Fourier que nos proveerá de un contexto natural desde el cual podemos considerar muchos resultados del análisis de Fourier incluyendo la transformada de Fourier.

2.4.1. Definición de la Serie de Fourier Compleja

En muchas aplicaciones de las series de Fourier, es conveniente expresar estas series en términos de los exponenciales complejos $e^{\pm jn\omega_0 t}$

Si se considera la serie de Fourier de una función periódica (t), como:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, el seno y el coseno se pueden expresar en términos de los exponenciales como:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

Sustituyendo esto en la serie de Fourier, tenemos:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) + b_n \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)\right)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{j} = -j$, se puede expresar como:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right) e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

Si se hace:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

A esta ecuación se le denomina serie compleja de Fourier de $f(t)$. Y a los coeficientes c_n se pueden evaluar fácilmente en términos de a_n y b_n.

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt - j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\cos(n\omega_0 t)dt - j\sin(n\omega_0 t)\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

Si $f(t)$ es real, $c_{-n} = c_n^*$, donde '$*$' indica el campo conjugado, entonces tenemos:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}c_{-n}e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

A esta ecuación se le denomina *Serie Compleja de Fourier* de $f(t)$.

2.4.2. Determinación de la Serie Compleja de Seales

Determinaremos la serie de Fourier compleja de la función serrucho f de periodo 8 definida por:

$$f(t) = \frac{3}{4}t \qquad para \qquad 0 < t < 8$$

$$f(t+8) = f(t)$$

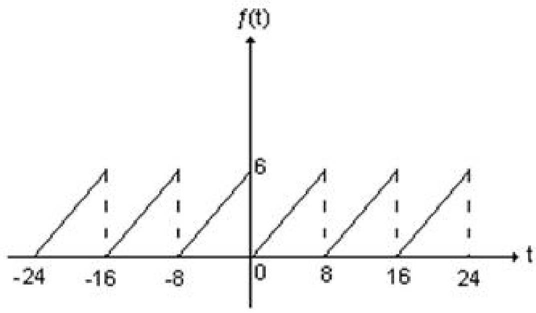

Figura 10: Serie de Fourier Compleja

Aquí tenemos $T = 8$ y $\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ si $n \neq 0$. Si sabemos que la serie compleja de Fourier es:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Con:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad\qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Entonces:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\frac{8}{2}}^{\frac{8}{2}} \frac{3}{4} t e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{3}{32}\int_{0}^{8} t e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$u = t \qquad du = dt$$

$$v = \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \qquad dv = e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Entonces:

$$= \frac{3}{32}\left[t\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} - \int_0^8 \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} dt\right]_0^8$$

$$= \frac{3}{32}\left[t\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} - \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{(-jn\omega_0)^2}\right]_0^8$$

Si:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Índice

Índice de figuras