La Transformada de Fourier y sus Propiedades

Integral de Fourier y Transformada de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Notación Operacional

Operador Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}$$

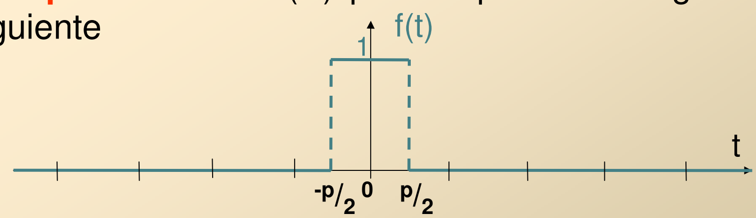
$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathbf{F}(\omega)$$

Operador Transformada Inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\,[\,\mathbf{F}(\omega)\,] = f(t)$$

Ejemplo. Calcular F(w) para el pulso rectangular f(t) siguiente



Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

Integrando $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-j\omega t} dt$

$$= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2}$$

$$= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega p/2} - e^{j\omega p/2})$$

Usando la fórmula de Euler

.

$$F(\omega) = p \frac{\operatorname{sen}(\omega p/2)}{\omega p/2}$$

Espectro Continuo de Magnitud (o Amplitud) y Fase

Espectro continuo de Magnitud:

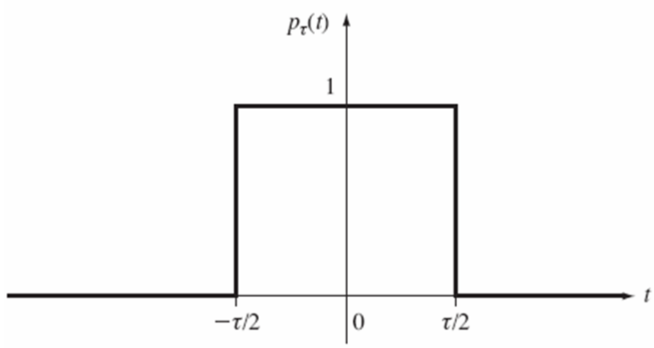
$|F(\omega)|$ ***módulo de*** $F(\omega)$ ***en función de*** ω

Espectro continuo de fase :

arg $[F(\omega)]$ *argumento de* $F(\omega)$ *en función de* ω

Ejercicio Nº1:

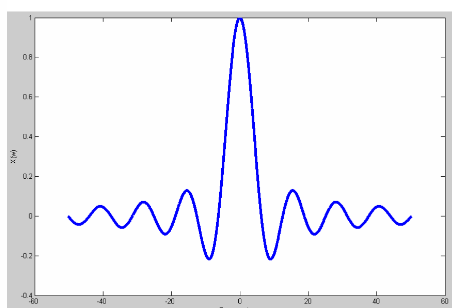
Usando Matlab calcular la transformada de Fourier del siguiente pulso rectangular y graficar su transformada.



$\tau = 1$

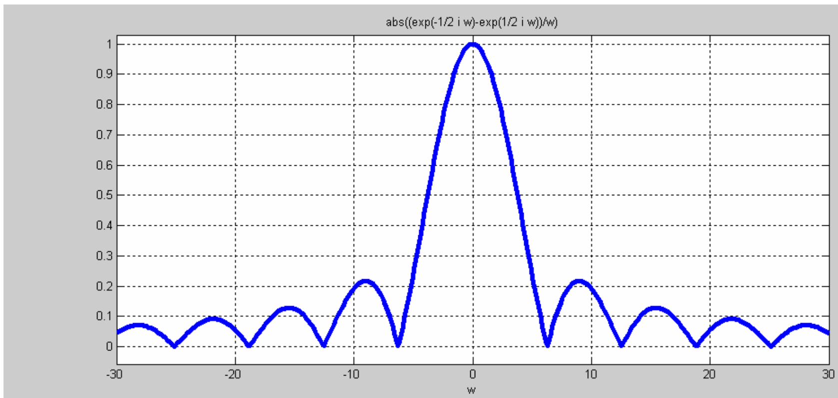
Implementación con Matlab del cálculo de la Transformada de Fourier correspondiente a un Pulso Rectangular de duración y amplitud igual a uno.

```
>> clear all

>> syms x t w X

>> X=int((exp(-i*w*t)),t,-1/2,1/2)

 X =

i*(exp(-1/2*i*w)-exp(1/2*i*w))/w

>>ezplot(abs(X), -16*pi,16*pi)
```

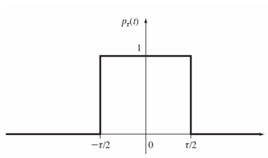


Implementación con Matlab del cálculo del Espectro de Magnitud correspondiente a un Pulso Rectangular de duración y amplitud igual a uno

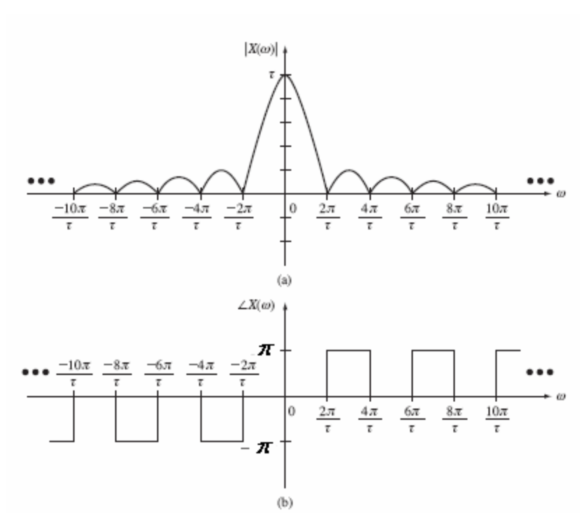
```
>> ezplot(abs(X), -30,30)
```



Espectro de Magnitud y Fase del Pulso Rectangular



$\tau = 1$



Algunas propiedades de la Transformada de Fourier

- Linealidad
- Desplazamiento en el Dominio t.
- Cambio de escala en el Dominio t.
- Multiplicación por una exponencial Compleja. (o desplazamiento en el dominio ω).
- Convolución en el dominio t.
- Convolución en el dominio ω.
- Simetría (o Dualidad).

Propiedad de Linealidad

$$f_1(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)$$
$$f_2(t) \Leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_n f_n(t) \Leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \ldots + a_n F_n(\omega)$$

Desplazamiento en el Dominio t

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\boxed{f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

Demostración

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$$

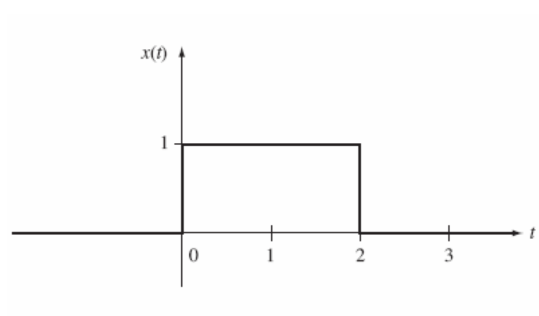
$$t - t_0 = \tau; \quad t = \tau + t_0, \; dt = d\tau,$$

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}d\tau = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau)}d\tau$$

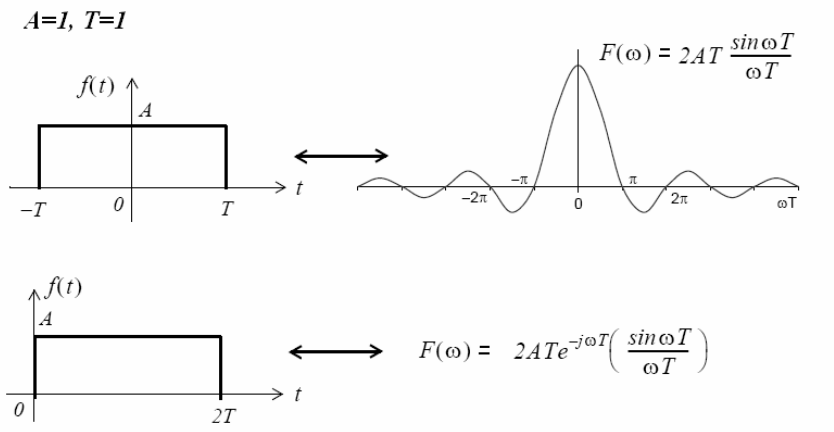
Ejercicios Propuestos:

1)Si f(t) se traslada en el dominio t, ¿qué sucede con su espectro de magnitud? ¿ ¿qué sucede con su espectro de fase?

2)Calcule la Transformada de Fourier del siguiente pulso rectangular y su espectro continuo de amplitud.



Respuesta del ejercicio 2



Cambio de escala en el Dominio t

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\boxed{f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

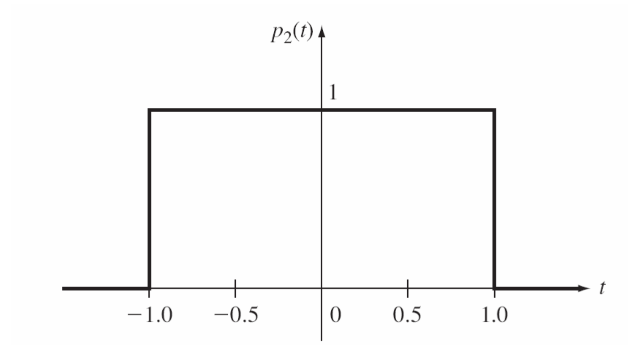
$$a > 0 \quad \mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t}dt$$

$$at = \tau;\ t = \tau/a,\ dt = (1/a)\,d\tau$$

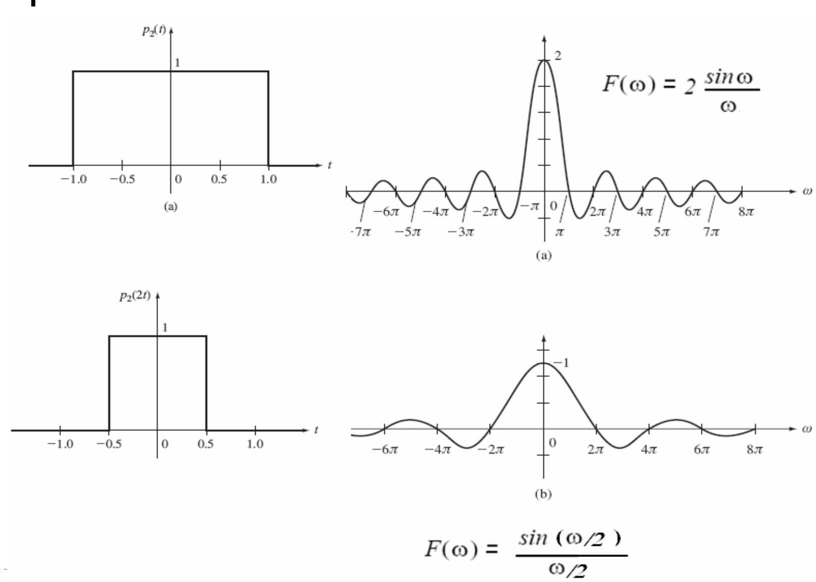
$$\mathcal{F}\{f(\tau)\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Se puede demostrar que esta propiedad es válida para *a*<0

Ejercicio:
1)Dado el pulso rectangular $P_2(t)$, grafique el pulso $P_2(2t)$.
2)Calcule la transformada de Fourier de ambos pulsos



Respuesta



Multiplicación por una exponencial Compleja.
(o desplazamiento en el dominio ω)

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)}$$

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)} dt = F(\omega - \omega_0)$$

Ejercicio:
Dada la función *f*(t) con transformada F(ω), calcular la transformada de Fourier de:
a) *f*(t) cos(ω_0t)
b) *f*(t) sen(ω_0t)

Respuesta (a)

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\boxed{f(t) \cos \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2}}$$

Respuesta (b)

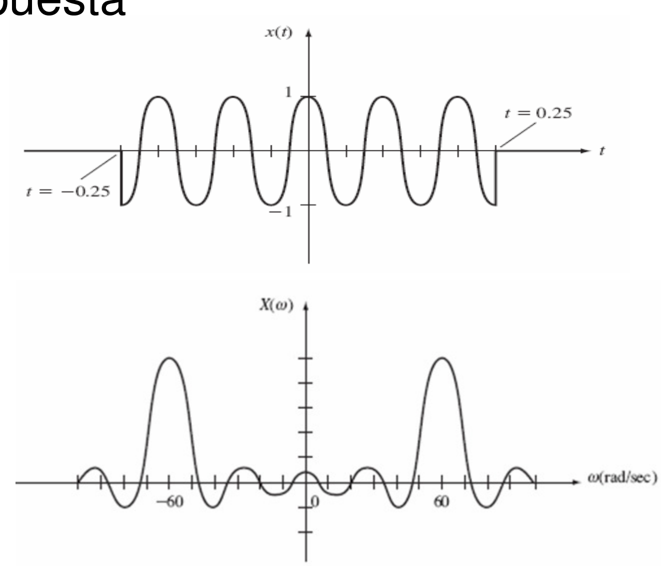
$$e^{j\omega_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2}$$

$$\boxed{f(t) \sin \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)}{j2}}$$

Ejercicio:
Dado el pulso P(t) de duración 0.50 seg:
1)Calcular la transformada de Fourier de: f (t)= P(t)cos(ω_0t),con ω_0=60 (rad/seg).
2) Graficar f(t) y su transformada

Respuesta



Convolución en el dominio t

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$$

$f_1(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)$ $\qquad f_2(t) \Leftrightarrow F_2(\omega)$ $\qquad \boxed{f_1(t)*f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)}$

$$\mathcal{F}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right] e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau =$$

$t-\tau = \sigma, \; dt = d\sigma$

$$\mathcal{F}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\sigma) e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega\sigma} d\sigma\right] d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\sigma) e^{-j\omega\sigma} d\sigma =$$

$$= F_1(\omega)F_2(\omega)$$

Convolución en el dominio ω

$$\boxed{f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)}$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)f_2(t)]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\chi)e^{j\chi t}d\chi\right]f_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\chi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{-j(\omega-\chi)t}dt\right]d\chi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\chi)F_2(\omega-\chi)d\chi$$

Propiedad de Simetría

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

Demostración

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

Cambiando t por ω y ω por t

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-j\omega t}dt$$

Energía asociada a una señal

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \, dt$$

Si $f(t)$ tiene transformada de Fourier $F(j\omega)$, de manera que,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

entonces puede expresarse como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \right] dt$$

Cambiando el orden de integración, esto se convierte en

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} \, dt \right] d\omega$$

De la integral definida para $F(j\omega)$, reconocemos la parte del integrando dentro de los paréntesis cuadrados como $F(-j\omega)$, que, si $f(t)$ es real, es tal que $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$, donde $F^*(j\omega)$ es la conjugada compleja de $F(j\omega)$. Así se convierte en

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega) \, d\omega$$

Teorema de Parseval

De la deducción anterior resulta

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

Densidad de Energía espectral $|F(\omega)|^2$

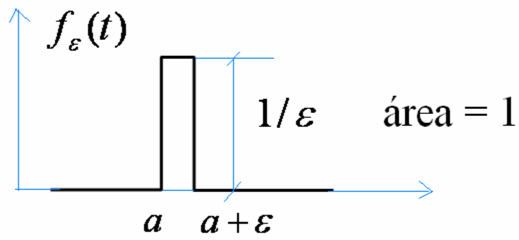
La gráfica de $|F(\omega)|^2$ ***se denomina espectro de energía***

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$y(t)$	$Y(\omega)$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Conjugación	$\overline{x(t)}$	$\overline{X(-\omega)}$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(\omega) Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t) y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) Y(\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\, dt$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$

Transformada Generalizada de Fourier
Nos permitirá encontrar la Transformada de la función escalón unidad, de una señal cosenoidal y senoidal.

Función delta de Dirac

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[u(t-a) - u\big(t-(a+\varepsilon)\big)\right]$$



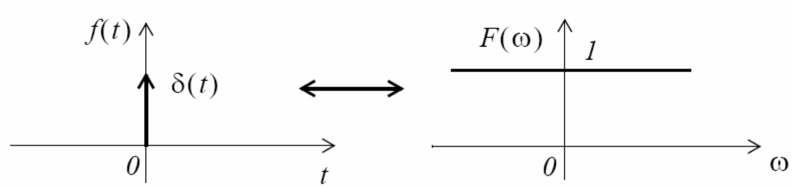
$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$$

Transformada de la Delta de Dirac

$$\boxed{\delta(t) \Leftrightarrow 1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\,, \quad t = 0\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

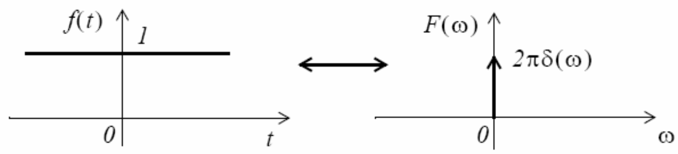
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$



Transformada de la señal constante f(t) = 1

$$\boxed{1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

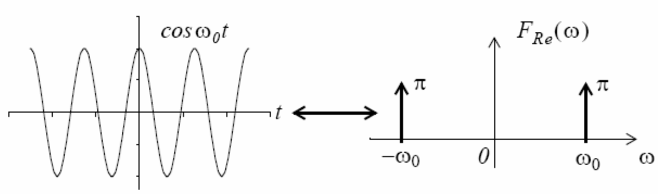
$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega t}\Big|_{\omega = 0} = 1$$



$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

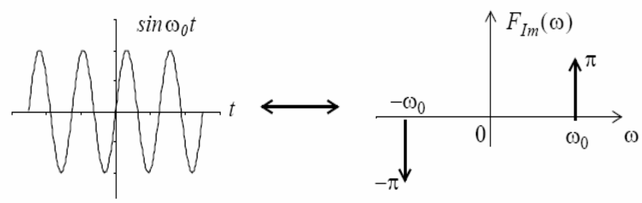
Transformada de Fourier de una señal cosenoidal

$$\boxed{\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)}$$



Transformada de Fourier de una señal senoidal

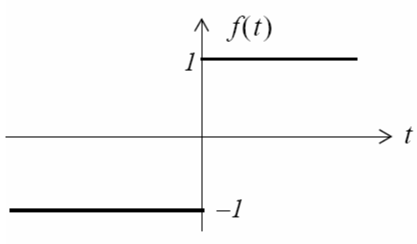
$$\boxed{\sin\omega_0 t = \frac{1}{j2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \Leftrightarrow j\pi\delta(\omega - \omega_0) - j\pi\delta(\omega + \omega_0)}$$

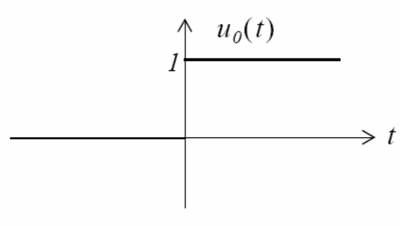


Transformada de la función signo y de la función escalón unidad

$$\boxed{sgn(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

$$\boxed{u_0(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$





$$u_0(t) = \frac{1}{2}(1 + sgn(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$$

Transformada de Laplace

Bioinformática

La transformada de Laplace

Sea *f(t)* una función definida para $t \geq 0$, su transformada de Laplace se define como:

$$\boxed{L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt}$$

donde *s* es una variable compleja

Se dice que la transformada de Laplace de *f(t)* existe si la integral converge.

TABLE 2.1 *Summary of Laplace Transform Properties and Theorems*

	Property/Theorem	Time Domain	Complex Frequency Domain
1	Linearity	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \ldots + c_n F_n(s)$
2	Time Shifting	$f(t-a)u_0(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
3	Frequency Shifting	$e^{-as}f(t)$	$F(s+a)$
4	Time Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
5	Time Differentiation See also (2.18) through (2.20)	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0^-)$
6	Frequency Differentiation See also (2.22)	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
7	Time Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f(0^-)}{s}$

7	Time Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f(0^-)}{s}$
8	Frequency Integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(s)ds$
9	Time Periodicity	$f(t+nT)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$
10	Initial Value Theorem	$\lim_{t \to 0} f(t)$	$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0^-)$
11	Final Value Theorem	$\lim_{t \to \infty} f(t)$	$\lim_{s \to 0} sF(s) = f(\infty)$
12	Time Convolution	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
13	Frequency Convolution	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$

Transformada de Laplace de las derivadas de una función

La transformada de Laplace de la derivada de una función está dada por:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

donde *f(0)* es el valor de *f(t)* en *t = 0*.

La transformada de Laplace de la segunda derivada de una función está dada por:

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Tabla de transformadas de Laplace

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Así la transformada de la función delta de Dirac es:

$$\boxed{\begin{gathered} L\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \\ \\ L\{\delta(t)\} = 1 \end{gathered}}$$