改进的状态空间模型遗传算法及其全局收敛性分析

齐 战, 李茂军[†], 莫 红, 肖雨荷, 刘 芾

(长沙理工大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410114)

摘要: 基于状态空间模型遗传算法(GABS)是一种新型实数编码进化算法, 在工程优化问题中取得良好的应用效果. 针对GABS缺乏有效的数学模型及理论依据, 研究并建立了GABS的吸收态马尔可夫过程模型, 从可达状态集的角度对GABS进行分析并证明GABS不是全局收敛的. 基于此提出了一种扩张可达状态集的改进型GABS(MGABS), 改进方法的两种变异策略不仅扩张了算法的可达状态集、提高了种群多样性, 而且加快了算法的收敛速度与精度, 并证明了MGABS具有全局收敛性. 最后利用经典测试函数验证了其综合性能明显优于其他3种算法, 为算法在工程中的应用提供了理论依据.

关键词: 状态空间模型遗传算法; 吸收态马尔可夫过程; 可达状态集; 全局收敛; 进化算法

引用格式: 齐战, 李茂军, 莫红, 等. 改进的状态空间模型遗传算法及其全局收敛性分析. 控制理论与应用, 2020, 37(10): 2115 – 2122

DOI: 10.7641/CTA.2020.90986

Modified genetic algorithm based on state-space model and its convergence analysis

QI Zhan, LI Mao-jun[†], MO Hong, XIAO Yu-he, LIU Fu

(College of Electrical and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan 410114, China)

Abstract: Genetic algorithm based on state-space model (GABS) is an innovative real-coded simulated evolutionary algorithm, which has good results in solving engineering optimization problems. The GABS has no theoretical foundation as a support. We therefore established a mathematical model based on absorbing Markov processes for GABS. The analysis of GABS from the perspective of attaining-state set indicated that GABS is not globally convergent. A modified genetic algorithm based on state-space model (MGABS) was therefore proposed. There are two mutation strategies in MGABS, which not only expand the attaining-state set and enrich the population diversity, but also accelerate the convergence speed and accuracy. The conclusion that MGABS has global convergence was obtained. Finally, 16 benchmark functions were taken as case study to verify the global convergence of MGABS. The results show that the MGABS has obvious advantages over the other three algorithms in terms of comprehensive performance. This paper therefore provides theoretical basis for the application of algorithm in engineering.

Key words: genetic algorithm based on state-space model; absorbing markov process; attaining-state set; global convergence; evolutionary algorithm

Citation: QI Zhan, LI Maojun, MO Hong, et al. Modified genetic algorithm based on state-space model and its convergence analysis. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10): 2115 – 2122

1 引言

进化算法是受生物进化和遗传过程启发的一种自组织、自适应的人工智能技术, 是解决工程技术中组合优化问题的一种智能算法, 在线性、二次、强凸、单峰或其他特定领域中求取给定问题的最优解[1]. 遗传算法(genetic algorithm, GA)、粒子群优化算法(particle swarm optimizer, PSO)、差分进化(differential evolution, DE)、遗传编程、社会学习算法和化学反应算法等都是常见的进化算法, 然而进化算法存在早熟收敛等问题, 在许多优化问题中表现不佳[2], 因此许多学者通过定义并行计算模型[3]、混合算法[4]等来设计更有效的进化算法.

基于状态空间模型遗传算法 (genetic algorithm based on state-space model, GABS)是李茂军教授在文

收稿日期: 2019−12−03; 录用日期: 2020−05−09.

[†]通信作者. E-mail: 760572986@qq.com; Tel.: +86 15388071609.

本文责任编委: 柯良军.

国家自然科学基金项目(61074093)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61074093).

献[3]中正式提出的一种新型进化算法, 具有参数设置少、操作简单、搜索能力强、计算精度高和收敛速度快等特点. 符宏艳等[5]利用GABS有效地解决了电力市场竞价问题, 跟GA相比能更快的搜索到最优解. 李雪等[6]将GABS应用于公交调度问题, 仿真结果表明GABS优化效果比GA更好. 虽然该算法应用效果较好, 但是该算法的全局收敛性未得到严密的数学分析. 王鼎湘等[7]利用齐次有限马尔可夫链对GABS进行分析, 得到了GABS不具有全局收敛性的结论, 并提出一种通过改进GABS的状态进化矩阵来确保算法具有全局收敛的方法, 但这种改进方法在每一次迭代时都需要更新状态进化矩阵, 而文献[5]和文献[8]仿真结果表明, 在状态进化矩阵不变的情况下算法也有很好的寻优效果.

状态进化矩阵是种群进化的关键操作算子, 相比于状态进化矩阵每一次迭代都需要更新的情况, 状态进化矩阵固定不变显然减少了算法搜索的计算量. 本文通过分析GABS在状态进化矩阵固定不变情况下的寻优过程, 为算法建立吸收态马尔可夫过程模型, 从可达状态集的角度证明了GABS不具有全局收敛性. 基于此提出了一种改进的状态空间模型遗传算法(modified GABS, MGABS), 最后证明并验证了MGABS具有全局收敛性.

2　问题描述及GABS

可以将连续域内的一个实数优化问题描述为

$$\min f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_L], \tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{x}$ 是可行域 $S=\prod\limits_{i=1}^{L}[a_i,b_i]$ 内代表解的 L 维向量, 约束$x_i\in[a_i,b_i]$, 有$a_i<b_i$, $i=1,2,\cdots,L$; $f(\boldsymbol{x})$是可行域S内的函数, 满足

$$[illegible]\ \exists\, \boldsymbol{x}^*\in S,\ \min f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}^*).$$

[illegible]S是一种基于状态空间模型的实数编码进化[illegible]进化算法的基本思想[3]: 上一代种群通过状态进化矩阵的作用产生新的种群, 新种群和上一代种群再通过优胜劣汰的选择操作生成下一代种群, 整体上使下一代种群更接近问题的最优解. 算法通过不断迭代, 使种群中的个体不断朝最优解方向进化, 最终得到问题的最优解或次优解. 新种群的构造算法表达式如下:

$$X(k+1)=GX(k), \tag{2}$$

式中: $X(k)$表示第k代种群, 它是一个$N\times L$的矩阵, 该矩阵的每一行表示一个个体, 每个个体包含L个决策变量, 即种群规模为N, 实数编码长度为L, 将初始种群记为$X(0)$; G是状态进化矩阵, 其构造方式如下:

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

式中: $0\leqslant g_{ij}\leqslant 1,\ \sum\limits_{j=1}^{N}g_{ij}=1,\ i,j=1,2,\cdots,N.$

利用GABS求解式(1)所描述问题的步骤如下:

步骤 1　在可行域内随机生成种群规模为N的初始种群$X(0)$;

步骤 2　依据式(3)生成状态进化矩阵G;

步骤 3　依据式(2)来产生新的种群$X(k+1)$, 将$X(k+1)$与$X(k)$结合形成选种池;

步骤 4　计算选种池内所有个体的适应度;

步骤 5　在选种池内选取适应度最高的N个个体组成下一代群体$X'(k+1)$, 置$X'(k+1)$为$X(k)$;

步骤 6　满足终止条件, 转步骤7, 否则转步骤3;

步骤 7　算法终止.

3　GABS随机过程及模型

GABS进化搜索与选择操作的求解过程, 从本质上可以视为$X(k)$的状态随机变化过程. GABS属于连续优化算法, 因此, 为GABS建立状态连续变化的随机过程模型, 下面给出定义[9].

定义 1　GABS在第k次迭代的种群记为$X(k)$, $\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$称为GABS对应的随机过程. 状态空间Y满足$\forall X(k)\in Y$.

定理 1　GABS所对应的随机过程$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$[illegible] $(\forall X(k)\in Y)$具有马尔可夫性.

证　GABS的状态进化矩阵G固定不变, 由第k代种群$X(k)$与G相乘产生新种群$X(k+1)$, 从$X(k)$与$X(k+1)$形成的选种池中筛选出适应度高的个体组成下一代种群$X'(k+1)$. 故满足$\forall Y_1\subseteq Y$和$k=0,1,2\cdots$, 有$\mathrm{P}\{X'(k+1)\in Y_1|X(0),\cdots,X(k)\}=\mathrm{P}\{X'(k+1)\in Y_1|X(k)\}$. 因此, $\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$在第$(k+1)$代的状态$X'(k+1)$仅由第k代的状态$X(k)$所决定, 即$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$具有马尔可夫性.　证毕.

GABS的目的是随机过程$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$在状态空间内的搜索过程中, 能达到最优状态$X^*(k)$, 其中最优状态$X^*(k)$至少有一个个体是问题的最优解. 因此给出与文献[9]类似的定义.

定义 2　给定来自状态空间Y的随机过程$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$, Y^*称为最优状态空间, 满足$Y^*\subset Y$, 而且对于$\forall X^*(k)\in Y^*$至少有一个解$\boldsymbol{x}^*\in X^*(k)$是优化问题的最优解.

为了解决GABS是否具有全局收敛性的问题, 引

入吸收态马尔可夫过程的定义[10-11].

定义 3　给定一个马尔可夫过程$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$ $(\forall X(k)\in Y)$, $Y^*\subset Y$为最优状态空间, 若$\mathrm{P}\{X'(k+1)\notin Y^*|X(k)\in Y^*\}=0$ $(k=0,1,2,\cdots)$, 则称$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$为吸收态马尔可夫过程.

定义3说明吸收态马尔可夫过程一旦达到了最优状态空间, 即$X(k)\in Y^*$, 那么便一直停留于最优状态空间. 精英保留策略对改进进化算法的全局收敛能力具有重大作用, 许多具有精英保留的进化算法是全局收敛的[12-13], 这些算法都可以建模为吸收态马尔可夫过程. GABS选种池的选择操作是将上一代种群和新种群中的最优个体选择出来作为下一代种群, 自然在每次迭代中保留了当前最优解, 因此定义3的模型同样适用于GABS.

定理 2　GABS对应的随机过程$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$为吸收态马尔可夫过程.

证　GABS选种池内的选择操作将上一代种群和新种群中的优秀个体选择出来作为下一代种群, 因此每一次迭代的最优个体都会被选择并复制到下一代. 所以, GABS一旦在第k次迭代后搜索到最优解$\boldsymbol{x}^*\in X(k)$, 那么第$(k+1)$次迭代的种群$X'(k+1)$中也包含最优解$\boldsymbol{x}^*$, 即$\boldsymbol{x}^*\in X'(k+1)$. 由定义2可知$X(k)\in Y^*$, $X'(k+1)\in Y^*$, 那么可得$\mathrm{P}\{X'(k+1)\notin Y^*|X(k)\in Y^*\}=0$. 由定义3知$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$满足吸收态马尔可夫过程性质.　　证毕.

若GABS在第k次迭代达到最优状态空间, 表示算法搜索到了问题的最优解, 若$\lim\limits_{k\to+\infty}\mathrm{P}\{X(k)\in Y^*\}=1$, 表示算法可以迭代无穷多次后收敛于最优状态空间$Y^*$, 引入GABS全局收敛的定义[11].

定义 4　GABS对应的随机过程记为$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$ $(\forall X(k)\in Y)$, $Y^*\subset Y$, Y^*为最优状态空间, 若$\forall X(0)\in Y$, 有$\lim\limits_{k\to+\infty}\mathrm{P}\{X(k)\in Y^*\}=1$, 则称GABS全局收敛.

引理 1　将初始群体$X(0)$的所有个体第l位决策变量的状态设为$x_{1l}^{(0)},x_{2l}^{(0)},\cdots,x_{Nl}^{(0)}$, 记$\alpha_l$, β_l为这些状态的最小值与最大值. 设GABS第k次迭代种群$X(k)$的所有个体第l位决策变量的状态为$x_{1l}^{(k)},x_{2l}^{(k)},\cdots,x_{Nl}^{(k)}$. 对于所有$k=1,2,3,\cdots$, 均有$\alpha_l\leqslant x_{ml}^{(k)}\leqslant\beta_l(m=1,2,\cdots,N)$.

证　设GABS第k次迭代种群状态为$X(k)$, 第$(k+1)$次迭代种群状态$X'(k+1)$是从新种群$X(k+1)$和$X(k)$中选取的, 故先分析与考察$X(k+1)$. 设$X(k+1)$第m个体的第l位决策变量的状态为x_{ml}, 由式(2)知x_{ml}与状态$X(k)$内所有个体的第l位决策变量的状态有关, 即$x_{ml}=\sum\limits_{p=1}^{N}g_{mp}x_{pl}^{(k)}$. 又$g_{ij}\in[0,1]$, 所以$|x_{ml}|=\sum\limits_{p=1}^{N}g_{mp}|x_{pl}^{(k)}|\leqslant g_{mm}|x_{ml}^{(k)}|\leqslant|x_{ml}^{(k)}|$, 因此可得$|x_{ml}|\leqslant|x_{ml}^{(k)}|$ $(m=1,2,\cdots,N)$. 记α, β分别为$X(k)$内所有个体第l位决策变量的状态的最小值和最大值, 那么有$\alpha\leqslant x_{ml}\leqslant x_{ml}^{(k)}\leqslant\beta$ $(m=1,2,\cdots,N)$. 又因为下一代种群$X'(k+1)$中第m个个体是从$X(k+1)$和$X(k)$中选取的, 所以可以知道$X'(k+1)$内第m个个体第l位决策变量的状态$x_{ml}^{(k+1)}$同样满足$\alpha\leqslant x_{ml}^{(k+1)}\leqslant\beta$, 其中$m=1,2,\cdots,N$, 因此下一代种群$X'(k+1)$中所有个体的第$l$位决策变量能达到的状态是上一代种群$X(k)$所确定的区间$[\alpha,\beta]$内. 于是记$\alpha_l$, β_l为初始种群$X(0)$所有个体第l位决策变量$x_{ml}^{(0)}(m=1,2,\cdots,N)$中的最小值和最大值, 由上述分析可以得到第1次迭代后, 即$k=1$时, 第1代种群$X(1)$所有个体的第l位决策变量能达到的状态在区间$[\alpha_l,\beta_l]$内, 即$\alpha_l\leqslant x_{ml}^{(1)}\leqslant\beta_l(m=1,2,\cdots,N)$, 由数学归纳法进一步可以推断, 对于$k=1,2,3,\cdots$, 均有$\alpha_l\leqslant x_{ml}^{(k)}\leqslant\beta_l(m=1,2,\cdots,N)$.　　证毕.

由引理1的证明过程可以看出, 初始种群的状态限制了后代所有种群的状态, 后代种群所能达到的状态被约束于由初始种群确定的上下界区间内, 于是定义算法可达状态集[14].

定义 5　GABS对应随机过程记为$\{X(k)\}_{k=0}^{+\infty}$, Ξ_k称为GABS在第k次迭代的可达状态集, 满足$\Xi_k=\{X(x)|\mathrm{P}\{X(k)\in O(X(x),\varepsilon)|X(k-1)\notin Y^*\}\geqslant\delta_k\wedge\forall\varepsilon>0\wedge X(x)\in Y\}(k=1,2,\cdots)$, 其中$O(X(x),\varepsilon)$为$X(x)$领域(勒贝格测度在$\varepsilon$以内), $\delta_k>0$且$\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1-\delta_k)=0$.

可达状态集Ξ_k包含的状态是GABS在第k次迭代以大于δ_k的概率达到的状态.

定理 3　GABS不具有全局收敛性.

证　由引理1的结论知$X(k)(k=1,2,3,\cdots)$中所有个体的第l位决策变量$x_{ml}^{(k)}(m=1,2,\cdots,N)$可达到的状态在初始种群确定区间$[\alpha_l,\beta_l]$内, 即$\alpha_l\leqslant x_{ml}^{(k)}\leqslant\beta_l$. 由式(1)知初始种群在区间$[a_l,b_l]$内随机生成, 倘若随机生成的初始种群满足$\alpha_l>a_l$或$\beta_l<b_l$, 那么$x_{ml}^{(k)}$永远不可能达到区间$[a_l,\alpha_l]$或$[\beta_l,b_l]$内的状态, 即$x_{ml}^{(k)}\notin[a_l,\alpha_l]$或$x_{ml}^{(k)}\notin[\beta_l,b_l]$. 若全局最优解$\boldsymbol{x}^*$的第$l$位的数值恰好位于区间$[a_l,\alpha_l]$或$[\beta_l,b_l]$内, 即$\boldsymbol{x}_l^*\in[a_l,\alpha_l]$或$\boldsymbol{x}_l^*\in[\beta_l,b_l]$, 那么$x_{ml}^{(k)}\neq\boldsymbol{x}_l^*$恒成立, 所以$X(k)$中所有个体也永远不可能达到最优解$\boldsymbol{x}^*$的状态, 根据定义2, $X(k)\notin Y^*$恒成立, 于是可得

$$\lim_{k\to+\infty}\mathrm{P}\{X(k)\in Y^*\}=0.$$

根据定义4, GABS不具有全局收敛性. 证毕.

GABS突破传统进化算法的计算模式, 通过状态进化矩阵的作用产生新种群, 搜索新的区域, 再通过选择操作使得算法朝最优解方向搜索, 最终搜索得到最优解或次优解. 由于算法搜索方向的单一性和优胜略汰的选择操作使得算法收敛速度非常快, 但同时也会存在缺陷, 即种群中所有个体往最优解方向进化时, 便缺少了个体间差异性, 易陷入局部最优.

另外, 由引理1知初始种群的上下界限制了后代种群的可达状态, 使得后代种群可达状态在初始种群决定的某一确定的区间内, 但此区间为可行域的子集, 若全局最优解不在此区间内, 那么种群中的个体永远不可能达到最优解的状态, 由定理3知GABS不可能收敛到全局最优解. 特别的, 当全局最优点位于可行域的边界及其附近时, 由于随机生成的初始种群的上下界区间为$[\alpha_l, \beta_l]$可能是可行域$[a_l, b_l]$的真子集, 那么算法就不可能搜索到位于可行域边界的全局最优解, 所以GABS不具有全局收敛性, 导致了GABS的寻优结果不稳定, 这是算法的另一个弊端.

综上, 算法是否能搜索到理论最优完全取决于迭代时的全局最优位置及初始种群的状态分布, 而且算法易陷入局部最优.

4 MGABS及其全局收敛性

从可达状态集角度得到GSBS不具有全局收敛性, 因此针对此算法提出一种特殊变异机制, 改进思想是: 使得算法在迭代前期扩张GABS的可达状态集, 无论全局最优解在可行域任何位置, 算法能够达到最优状态, 且在迭代后期提高算法的收敛精度. 提出两种变异策略:

1) 随机选出P个适应度差的个体并平均分成两组(若不能均分可将多余个体分到第2组), 再将这两组个体的每一位决策变量分别转移至式(4)指定区间的随机位置. 具体操作如下:

$$\begin{cases} x1_{ml}^{(k)} = (\alpha_l^k - a_l) \cdot r + a_l, \\ x2_{ml}^{(k)} = (b_l - \beta_l^k) \cdot r + \beta_l^k, \end{cases} \tag{4}$$

式中: $x1_{ml}^{(k)}$为第1组个体中第m个个体的第l位决策变量变异后的值, $x2_{ml}^{(k)}$则是第2组个体中相应的变异值, α_l^k和β_l^k分别是当前搜索区间在第l位上的最小值和最大值, r为区间[0, 1]上的随机数, $m = 1, 2, \cdots, \dfrac{P}{2}$, $l = 1, 2, \cdots, L$.

2) 随机选出P个适应度差的个体并将每一位决策变量依据式(5)变异. 具体操作如下:

$$*x_{ml}^{(k)} = (\alpha_l^k + \beta_l^k) \cdot r - x_{ml}^{(k)}, \tag{5}$$

其中: $x_{ml}^{(k)}$为P个待变异个体中第m个个体的第l位决策变量, $*x_{ml}^{(k)}$是其变异后的值, α_l^k和β_l^k分别是当前搜索区间在第l位上的最小值和最大值, r为区间[0, 1]上的随机数, $m = 1, 2, \cdots, P$, $l = 1, 2, \cdots, L$.

设总迭代次数为K, 当$k \leqslant \dfrac{K}{2}$时, 采用策略[illegible]则采用策略2). 在算法迭代前期适用式(4), 即在区间$[a_l, \alpha_l^k]$和$[\beta_l^k, b_l]$内随机生成的两组个体分别代替适应度差的两组个体, 扩张了算法的可达状态集, 同时提高了搜索范围和种群多样性, 避免算法陷入局部最优. 在算法迭代后期适用式(5), 提高了种群朝最优解搜索的速度, 因此提高了算法的收敛精度.

改进GABS的算法步骤如下:

步骤 1 在可行域内随机生成种群规模为N的初始种群$X(0)$;

步骤 2 依据式(3)生成状态进化矩阵G;

步骤 3 依据式(2)产生新的种群$X(k+1)$, 将$X(k+1)$与$X(k)$结合形成选种池;

步骤 4 计算选种池内所有个体的适应度;

步骤 5 在选种池内选取适应度最高的N个个体组成下一代群体$X'(k+1)$, 置$X'(k+1)$为$X(k)$;

步骤 6 从$X(k)$中选出适应度较差的P个个体, 若$k \leqslant \dfrac{K}{2}$, 采用变异策略1), 否则采用变异策略2);

步骤 7 满足终止条件, 转步骤8, 否则转步骤3;

步骤 8 算法终止.

定义 6 通过以上步骤改进的GABS称为改进的状态空间模型遗传算法, 简称为MGABS.

容易知道定义1–5对于MGABS都是适合的, 定理1–2对于MGABS仍然成立. 为了便于描述, $\{X^M(k)\}_{k=0}^{+\infty}$称为MGABS对应的随机过程, $\varXi_k^M$称为MGABS在第k次迭代的可达状态集.

引理 2 MGABS对应的随机过程$\{X^M(k)\}_{k=0}^{+\infty}$, Y^*为最优状态空间, 则MGABS满足$\exists k' \geqslant 0$, 当$k > k'$时, $\varXi_k^M \cap Y^* \neq \varnothing$.

证 算法在迭代过程中, MGABS的变异策略1)将变异个体中的一部分个体每一位决策变量转移至它们区间$[a_l, \alpha_l^k]$的随机位置, 另一部分转移至区间$[\beta_l^k, b_l]$的随机位置. 文献[3]已证明算法是收敛的, 如果允许总迭代次数无限, 那么在算法收敛过程中满足$\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_l^k = \beta_l^k$, 因此种群中个体的搜索区间也逐渐扩张为整个可行域区间, 于是下一代种群的个体通过迭代后能够以大于零的概率达到可行域内的任何状态, 包括最优解状态$\boldsymbol{x}^*$. 文献[3]也已经证明算法中选种池的选择操作使得种群中个体朝着最优解方向进化, 即$\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}^*$, 其中$\boldsymbol{x}(k)$代表种群$X(k)$中的最优个体, 因此可以得到$\lim\limits_{k\to+\infty} X(k) = X^*(k) \in Y^*$. 所以, 若允许迭代次数无穷, 通过设置合理的求解精

度, MGABS必定会于某一代达到满足精度要求的最优状态, 即$\exists\, k' \geqslant 0$, 当$k > k'$时, $X(k) \in Y^*$. 显然$X(k) \in \varXi_k^M$, 故$\exists k' \geqslant 0$, 当$k > k'$时, $\varXi_k^M \cap Y^* = X(k) \neq \varnothing$.　　证毕.

引理 3　MGABS对应的随机过程$\{X^M(k)\}_{k=0}^{+\infty}$是吸收态马尔可夫过程, 如果满足$\exists k' \geqslant 0$, 当$k > k'$时, $\mathrm{P}\{X^M(k) \in Y^* | X^M(k-1) \notin Y^*\} \geqslant \delta_k$且$\prod_{k=0}^{+\infty}(1-\delta_k) = 0$, 那么MGABS全局收敛.

证　因为$\exists k' \geqslant 0$, 当$k > k'$时, $\mathrm{P}\{X^M(k) \in Y^* | X^M(k-1) \notin Y^*\} \geqslant \delta_k$, 那么易知$\mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^* | X^M(k-1) \notin Y^*\} \leqslant 1 - \delta_k$. 如果记

$$\mathrm{P}_{\mathrm{not}}(k) = \prod_{k=0}^{k-1} \mathrm{P}\{X^M(k+1) \notin Y^* | X^M(k) \notin Y^*\},$$

则可得$\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{not}}(k) \leqslant \prod_{k=0}^{+\infty}(1-\delta_k)$. 又因为$\prod_{k=0}^{+\infty}(1-\delta_k) = 0$, 所以$\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{not}}(k) = 0$, 因此MGABS在迭代次数趋于无穷时必能至少一次达到最优状态.

因为MGABS对应的随机过程$\{X^M(k)\}_{k=0}^{+\infty}$为吸收态马尔可夫过程, 根据定义3, $\mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^* | X^M(k-1) \in Y^*\} = 0$, $k = 1, 2, \cdots$. 由全概率公式:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^*\} = \\
&\mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^* | X^M(k-1) \notin Y^*\} \cdot \\
&\mathrm{P}\{X^M(k-1) \notin Y^*\} + \\
&\mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^* | X^M(k-1) \in Y^*\} \cdot \\
&\mathrm{P}\{X^M(k-1) \in Y^*\} = \\
&\mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^* | X^M(k-1) \notin Y^*\} \cdot \\
&\mathrm{P}\{X^M(k-1) \notin Y^*\} = \\
&\mathrm{P}\{X^M(0) \notin Y^*\} \cdot \\
&\prod_{k=0}^{k-1} \mathrm{P}\{X^M(k+1) \notin Y^* | X^M(k) \notin Y^*\} = \\
&\mathrm{P}\{X^M(0) \notin Y^*\} \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{not}}(k).
\end{aligned}$$

因为$\mathrm{P}\{X^M(k) \in Y^*\} = 1 - \mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^*\}$, 故$\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{P}\{X^M(k) \in Y^*\} = 1 - \lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{P}\{X^M(k) \notin Y^*\} = 1 - \mathrm{P}\{X^M(0) \notin Y^*\} \cdot \lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{not}}(k) = 1$, 由定义4知MGABS全局收敛.　　证毕.

引理3源于文献[14–15]研究进化算法时的类似结论, 这里再次证明是为了给出算法全局收敛的一个判断准则.

定理 4　MGABS具有全局收敛性.

证　由引理2知MGABS满足$\exists k' \geqslant 0$, 当$k > k'$时, $\varXi_k^M \cap Y^* \neq \varnothing$. 再由定义5, $\varXi_k^M$的性质得: 当$k > k'$时, $\mathrm{P}\{X^M(k) \in Y^* | X^M(k-1) \notin Y^*\} \geqslant \delta_k$成立且$\prod_{k=0}^{+\infty}(1-\delta_k) = 0$. 最后根据引理3的结论可以得到, MGABS全局收敛.　　证毕.

5　MGABS有效性验证

5.1　测试函数

为了更全面了解MGABS在解决各式各样问题上的性能, 本文在不同的测试函数上测试MGABS, 引入16个经典测试函数[16–17]进行测试与分析. 这16个测试函数可分成3组, 每组函数具有不同的特性, 以充分测试改进算法的优化搜索性能. 具体函数如表1所示, 其中: x^*是全局最优点, $f(x^*)$是全局最小值. 函数$f_1 \sim f_5$设为第1组, 函数$f_6 \sim f_{10}$设为第2组, 函数$f_{11} \sim f_{16}$设为第3组.

表 1　16个测试函数

Table 1　16 benchmark functions

函数	函数名	定义域	$\boldsymbol{x}^*$	$f(\boldsymbol{x}^*)$
f_1	De Jong F1	[−5.12, 5.12]	(0, 0, 0)	0
f_2	De Jong F2	[−2.048, 2.048]	(1, 1)	0
f_3	De Jong F3	[−5.12, 5.12]	存在无数个最小值点	−30
f_4	De Jong F4	[−1.28, 1.28]	$(0, 0,\cdots, 0)$	0
f_5	De Jong F5	[−65.536, 65.536]	(−32, −32)	0.9980
f_6	Ackley	[−32, 32]	$(0, 0,\cdots, 0)$	0
f_7	Griewank	[−600, 600]	$(0, 0,\cdots, 0)$	0
f_8	High Conditioned Elliptic	[−100, 100]	$(0, 0,\cdots, 0)$	0
f_9	Rastrigin	[−5.12, 5.12]	$(0, 0,\cdots, 0)$	0
f_{10}	Bent Cigar	[−100, 100]	$(0, 0,\cdots, 0)$	0
f_{11}	Schwefel	[−500, 500]	(420.9687, 420.9687)	0
f_{12}	Holder Table	[−10, 10]	(±8.055, ±9.66459)	−19.2085
f_{13}	Leon	[−1.2, 1.2]	(1, 1)	0
f_{14}	Keane	[0, 10]	(0, 1. 39325)	−0.67367
f_{15}	Ursem Waves	[−1.2, 1.2]	(−1.2, −1.2)	−8.5536
f_{16}	Perm	[−2, 2]	(1, 2)	0

第1组测试函数是De Jong研究函数优化问题时精选出来的5个测试函数, 可全面检验改进算法的性能. 第2组测试函数选取5个20维函数, 其中函数f_6, f_7和f_9是非线性多峰函数, 具有许多个极小值点; 函数f_8, f_{10}则是单峰函数. 第3组测试函数是全局最优点位于可行域边界或边界附近的一组函数, 其中函数f_{14}, f_{15}和f_{16}的全局最优解位于可行域的边界上, 通过第2节分析可知GABS不具备全局收敛性, 是因为它难以搜索到全局最优点位于边界或者边界附近的函数的全局最优值, 所以选取了6个此类函数来验证改进算法MGABS的全局搜索能力.

5.2 参数设置

为了充分验证MGABS的有效性和先进性, 本文引入其他两个热门的全局优化进化算法: 异构综合学习粒子群优化算法[18](heterogeneous comprehensive learning particle swarm optimizer, HCLPSO)和改进基于适应度的自适应差分进化算法[19](enhanced fitness-adaptive differential evolution algorithm, EFADE), 两个算法的代码均在Suganthan教授的主页下载. 本文所有算法均在MATLAB R2014a环境下进行测试.

GABS只有种群规模和进化代数(总迭代次数)两个参数, 只需设置好这两个参数即可, 因此将GABS和MGABS种群规模均设为50, 进化代数均设为200. 不管问题的复杂度和维度如何变化, 种群规模和进化代数均不变化,以此来增加算法搜索难度. MGABS需要随机选择P个适应度差的个体并变异, P值将在下一节讨论. 为了减少算法的运算时间, 开始测试前依式(3)构造并生成状态进化矩阵再将之存储于内存, 测试实验开始时从内存里调出即可. 为了公平地比较4个算法的性能, 将HCLPSO的粒子数设为50, 进化代数设为200, 最大适应度评价次数(the maximum number of function evaluations, FEs)设为10000. 同将EFADE种群规模和进化代数也分别设为50和200, 其他参数则默认.

5.3 变异个体数讨论

为了更好地平衡算法的搜索能力, 变异个体数P为MGABS重要参数. MGABS种群规模为50, 于是将P值设置为2, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35和40. 独立搜索16个函数中最具代表性的6个函数f_1, f_5, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{14}各50次, 比较平均值和方差, 结果如表2所示.

表 2 不同P值讨论

Table 2 Discussion of different P values

	P	2	5	10	15	20	25	30	35	40
f_1	平均值	2.02E−26	1.59E−37	1.04E−43	4.11E−46	**1.33E−46**	1.69E−45	1.56E−45	1.23E−44	4.28E−44
	方差	3.36E−51	2.50E−73	3.73E−86	4.88E−91	**1.64E−92**	1.07E−90	3.99E−90	2.51E−88	1.75E−87
f_5	平均值	2.89E+00	1.46E+00	1.02E+00	0.9982	**0.9980**	**0.9980**	**0.9980**	**0.9980**	**0.9980**
	方差	4.92E+00	1.41E+00	7.65E−03	1.27E−06	1.12E−12	**2.22E−18**	1.13E−17	9.26E−12	4.95E−09
f_9	平均值	5.56E+00	2.17E+00	6.54E−04	4.60E−13	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	方差	3.26E+02	1.22E+02	2.14E−05	1.06E−23	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
f_{10}	平均值	2.44E−13	2.02E−22	4.00E−27	5.22E−30	7.88E−31	**4.97E−31**	5.87E−31	2.33E−30	1.29E−29
	方差	7.22E−26	1.28E−43	1.14E−53	1.61E−59	4.78E−61	1.51E−61	**8.96E−62**	2.29E−60	9.76E−59
f_{11}	平均值	3.07E+01	9.87E−03	3.44E−05	**2.75E−05**	2.60E−04	7.90E−04	4.55E−03	8.15E−03	4.91E−02
	方差	2.31E+03	4.79E−03	3.77E−09	**5.63E−11**	5.34E−08	7.72E−07	3.44E−05	6.19E−05	2.50E−03
f_{14}	平均值	−0.6500	−0.669	−0.670	−0.6718	−0.6694	−0.6720	−0.6735	−**0.6737**	−0.6736
	方差	1.52E−03	3.78E−05	4.33E−05	5.90E−06	4.00E−05	1.65E−05	8.66E−07	**1.72E−10**	1.48E−09

表2中可以看出, 当P值较小时结果不理想, 是由于算法陷入了局部最优; 当P值太大时亦不理想, 是变异个体太多影响了收敛的速度和精度. 因此对所有函数而言, P值设为15~35时具有良好的计算结果. 特别的, 当P值设为20~30时, 函数f_1, f_5, f_9, f_{10}的平均值和方差均优于其他的情况. 当P值为15时函数f_{11}的结果是最好的, 而对于函数f_{14}, P值为35时有较好的优化效果. 综上, 本文将P值设为25.

5.4 对比实验

为了减少算法搜索结果的随机性, 对于每个测试函数, 4种算法均要优化搜索50次, 使用50次搜索的平均寻优值, 4种算法寻优结果见表3. 其中平均值表示50次搜索结果的平均寻优值, 最小值则表示最小寻优值, 方差表示50 次寻优值的方差, 时间表示平均运算时间, 单位为秒, 准确率为50次搜索中找到最优解次数的比例(求解精度设为10^{-5}).

表 3 4种算法搜索函数的结果比较

Table 3 Comparison of four algorithm search results

函数	算法	平均值	最小值	方差	时间/s	准确率/%	函数	算法	平均值	最小值	方差	时间/s	准确率/%
f_1	GABS	1.00E−01	1.81E−3	2.02E−2	**0.02**	0	f_2	GABS	1.22E−01	1.48E−07	2.33E−02	**0.02**	4
	MGABS	**4.89E−46**	**2.39E−47**	**6.60E−91**	0.03	**100**		MGABS	7.69E−06	4.38E−08	1.17E−10	0.03	**100**
	HCLPSO	6.65E−11	3.70E−12	4.19E−21	0.14	**100**		HCLPSO	3.63E−08	1.11E−12	2.27E−14	0.20	**100**
	EFADE	2.95E−33	1.70E−37	1.01E−64	0.45	**100**		EFADE	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**	0.49	**100**
f_3	GABS	−18.0800	−25.0000	6.16E+00	**0.02**	0	f_4	GABS	**−2.3601**	**−3.3463**	2.16E−01	**0.12**	0
	MGABS	**−30.0000**	**−30.0000**	**0.00E+00**	0.03	**100**		MGABS	−2.4741	−3.3785	1.39E−01	0.14	0
	HCLPSO	**−30.0000**	**−30.0000**	**0.00E+00**	0.19	**100**		HCLPSO	−3.1552	−4.3033	1.81E−01	0.41	0
	EFADE	**−30.0000**	**−30.0000**	**0.00E+00**	0.46	**100**		EFADE	−3.2252	−3.9862	**9.14E−02**	1.17	0
f_5	GABS	6.4500	0.9994	1.22E+01	**0.24**	0	f_6	GABS	8.38E+00	5.92E+00	1.11E+00	**0.05**	0
	MGABS	**0.9880**	**0.9880**	5.52E−19	0.26	**100**		MGABS	**8.88E−17**	**−1.33E−15**	**3.09E−30**	0.06	**100**
	HCLPSO	**0.9880**	**0.9880**	1.43E−31	0.93	**100**		HCLPSO	2.24E−01	4.98E−02	8.04E−02	0.21	0
	EFADE	**0.9880**	**0.9880**	**4.02E−33**	1.20	**100**		EFADE	1.15E+00	3.01E−01	2.48E−01	0.70	0
f_7	GABS	9.37E+00	3.58E+00	8.17E+00	**0.06**	0	f_8	GABS	1.84E+07	2.27E+06	1.80E+14	**0.03**	0
	MGABS	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**	0.07	**100**		MGABS	**4.89E−33**	**3.33E−34**	**2.10E−65**	0.05	**100**
	HCLPSO	5.10E−01	1.30E−01	3.51E−02	0.38	0		HCLPSO	6.44E+02	9.69E+01	4.28E+05	0.29	0
	EFADE	9.02E−01	7.53E−01	3.43E−03	0.91	0		EFADE	2.61E+00	2.02E−01	8.18E+00	0.78	0
f_9	GABS	1.07E+02	8.06E+01	1.29E+02	**0.04**	0	f_{10}	GABS	8.96E+08	2.52E+08	9.42E+16	**0.03**	0
	MGABS	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**	0.06	**100**		MGABS	**4.98E−31**	**1.08E−31**	**9.94E−62**	0.04	**100**
	HCLPSO	1.84E+01	8.22E+00	3.80E+01	0.21	0		HCLPSO	7.77E+04	1.63E+04	1.83E+09	0.18	0
	EFADE	4.47E+01	3.05E+01	3.98E+01	0.77	0		EFADE	1.83E+03	1.44E+02	2.27E+06	0.67	0
f_{11}	GABS	1.44E+02	2.50E−03	8.24E+03	**0.02**	0	f_{12}	GABS	−1.45E+01	−1.91E+01	1.32E+01	**0.02**	0
	MGABS	5.14E−04	2.79E−05	1.55E−07	0.03	14		MGABS	**−1.92E+01**	**−1.92E+01**	2.90E−08	0.03	**100**
	HCLPSO	**2.55E−05**	**2.55E−05**	2.12E−27	0.18	**100**		HCLPSO	**−1.92E+01**	**−1.92E+01**	6.17E−23	0.18	**100**
	EFADE	**2.55E−05**	**2.55E−05**	**0.00E+00**	0.43	**100**		EFADE	**−1.92E+01**	**−1.92E+01**	**1.16E−28**	0.44	**100**
f_{13}	GABS	1.52E−01	1.30E−03	1.89E−02	**0.02**	0	f_{14}	GABS	−3.62E−01	−6.68E−01	2.17E−02	**0.02**	0
	MGABS	2.29E−06	1.41E−07	7.27E−12	0.03	**100**		MGABS	**−6.74E−01**	**−6.74E−01**	9.93E−09	0.03	44
	HCLPSO	1.21E−06	7.47E−12	1.21E−11	0.18	**100**		HCLPSO	**−6.74E−01**	**−6.74E−01**	5.98E−30	0.32	**100**
	EFADE	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**	0.44	**100**		EFADE	**−6.74E−01**	**−6.74E−01**	**3.20E−31**	0.60	**100**
f_{15}	GABS	−6.72E+00	−7.61E+00	3.58E−01	**0.02**	0	f_{16}	GABS	1.43E−01	6.51E−08	1.41E−01	**0.03**	12
	MGABS	**−8.54E+00**	**−8.55E+00**	**2.50E−03**	0.03	4		MGABS	1.70E−03	1.44E−07	1.15E−05	0.04	56
	HCLPSO	−8.25E+00	−8.55E+00	1.69E−01	0.21	58		HCLPSO	5.57E−12	2.62E−18	7.68E−22	0.35	**100**
	EFADE	−8.32E+00	−8.55E+00	1.62E−01	0.42	74		EFADE	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**0.00E+00**	0.68	**100**

从表3可以看出, GABS与MGABS的平均运算时间远少于其他2个算法. 这因为GABS与MGABS两个算法均利用式(2)进行种群的更新, 也即利用矩阵乘法进行并行计算, 由于MATLAB的矩阵运算是公认的非常准确、非常迅速, 因此算法每一次迭代的运算时间非常快. 而其他两种算法则需要在每一次迭代过程中依据其各自的更新策略对每个个体进行更新与选择, 因此种群规模越大, 其运算速度越慢, 导致运算速度远不及GABS与MGABS.

第1组测试函数: 从表3准确率可以看出, 在求解精度为10^{-5}的情况下, 除了第4个存在噪声的函数以外, MGABS, HCLPSO和EFADE均能搜索得到第1组函数的最优解, 而GABS则表现较差. 从平均值和方差的角度来看, EFADE结果比其他算法更优,说明其收敛精度是最好的, MGABS的表现比之稍稍逊色. 在最小值比较中, MGABS和EFADE获得3次最好, GABS和HCLPSO获得2次最好, 但GABS其他指标均较差, 说明GABS搜索结果不稳定. 比较4种算法的结果表明, EFADE对于第2个函数优化效果是最好的, 但其运算时间也是最久的, MGABS则次之, 但运算速度非常快. 总之, MGABS在非常快的运算速度之下, 仍具有较好的运算精度和准确率, HCLPSO与EFADE的运算时间比之多出一个数量级, 因此其综合性能最优, 但和其他3个算法一样, 对函数f_4的搜索结果较差, 说明4种算法均不具备抗干扰能力.

第2组测试函数: 对于所有函数而言, MGABS优化效果是最出色的, 这归功于MGABS的变异策略2, 尽管种群规模和进化代数较小, 算法仍具有非常快的收敛速度和收敛精度, 其他3种算法则陷入局部最优, 搜索函数的结果不理想. 因此, MGABS对此类复杂的高维非线性函数优化效果最明显.

第3组测试函数: 从表3数据可以看出, MGABS对函数f_{12}, f_{14}, f_{15}的优化效果较好, 但由于原算法的限制(不具备全局收敛性), MGABS对其他3个函数的优化结果则略逊于EFADE, 但相比于原算法

GABS, 其优化结果有了很大的改善, 并且其运算时间远少于EFADE. 可以通过增加种群规模进一步提高MGABS的性能, 且运算时间不会有较大的提升.

6 结论

本文建立了基于状态空间模型遗传算法的数学模型, 并从理论上分析了它的局限性, 从而提出一种改进的状态空间遗传算法, 并证明了其具备全局收敛性, 测试结果同时也说明了改进算法的理论是正确有效的, 改进的基于状态空间模型遗传算法表现出了运算速度快、收敛速度快、全局搜索能力强、计算精度较高、稳定性较好等特点, 提高了算法的适应性, 总体表现优于其他算法. 本文算法最大的特性是运算时间短, 具有较好的应用前景, 下一步将研究此算法在实时系统中的应用.

参考文献:

[1] CHEN C L P, ZHANG T, CHEN L, et al. I-Ching divination evolutionary algorithm and its convergence analysis. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(1): 2 – 13.

[2] SEGURA C, COELLO C A C, SEGREDO E, et al. A novel diversity-based replacement strategy for evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(12): 3233 – 3246.

[3] LI Maojun, LIU Huang, LI Qi, et al. Real-coded genetic algorithm based on state-space model. *Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)*, 2015, 34(3): 1 – 7.
(李茂军, 刘黄, 李奇, 等. 基于状态空间模型的实数编码遗传算法. 山东科技大学学报(自然科学版), 2015, 34(3): 1 – 7.)

[4] WU Dinghui, GAO Cong, JI Zhicheng. Economic optimization operation of the microgrid using the hybrid particle swarm optimization algorithm. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(4): 457 – 467.
(吴定会, 高聪, 纪志成. 混合粒子群算法在微电网经济优化运行的应用. 控制理论与应用, 2018, 35(4): 457 – 467.)

[5] FU Hongyan, LI Maojun. Bionic algorithm based on state-space model with application in bidding for power market. *Computing Technology and Automation*, 2009, 28(2): 81 – 84.
(符宏艳, 李茂军. 基于状态空间模型的仿生算法在电力市场竞价中的应用. 计算技术与自动化, 2009, 28(2): 81 – 84.)

[6] LI Xue, LI Maojun, WANG Dingxiang, et al. Intelligent optimization algorithm based on state space model and its application. *Computing Technology and Automation*, 2015, 34(1): 34 – 38.
(李雪, 李茂军, 王鼎湘, 等. 基于状态空间模型的智能优化算法及其应用. 计算技术与自动化, 2015, 34(1): 34 – 38.)

[7] WANG Dingxiang, LI Maojun, LI Xue, et al. Global convergence analysis of evolutionary algorithm based on state-space model. *Journal of Computer Applications*, 2014, 34(10): 2816 – 2819.
(王鼎湘, 李茂军, 李雪, 等. 基于状态空间模型进化算法的全局收敛性分析. 计算机应用, 2014, 34(10): 2816 – 2819.)

[8] LI Maojun, JIA Ling. An evolutionary algorithm based on state-space model. *Computing Technology and Automation*, 2014, 33(2): 85 – 88.
(李茂军, 贾玲. 一种基于状态空间模型的进化算法. 计算技术与自动化, 2014, 33(2): 85 – 88.)

[9] HUANG Han, LIN Zhiyong, HAO Zhifeng, et al. Convergence analysis and comparison of evolutionary algorithms based on relation model. *Chinese Journal of Computers*, 2011, 34(5): 801 – 811.
(黄翰, 林智勇, 郝志峰, 等. 基于关系模型的进化算法收敛性分析与对比. 计算机学报, 2011, 34(5): 801 – 811.)

[10] HORN J. Finite markov chain analysis of genetic algorithms with niching. *Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc, 1993: 110 – 117.

[11] YU Y, ZHOU Z H. A new approach to estimating the expected first hitting time of evolutionary algorithms. *Artificial Intelligence*, 2008, 172(15): 1809 – 1832.

[12] MISTRY K, ZHANG L, NEOH S C, et al. A Micro-GA embedded PSO feature selection approach to intelligent facial emotion recognition. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(6): 1496 – 1509.

[13] ZENG G Q, CHEN J, LI L M, et al. An improved multi-objective population-based extremal optimization algorithm with polynomial mutation. *Information Sciences*, 2016, 330: 49 – 73.

[14] CAI Zhaoquan, HUANG Han, ZHENG Zonghui, et al. Convergence improvement of particle swarm optimization based on the expanding attaining-state set. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2009, 37(6): 44 – 47.
(蔡昭权, 黄翰, 郑宗晖, 等. 基于可达状态集扩张的粒子群算法收敛性改进. 华中科技大学学报(自然科学版), 2009, 37(6): 44 – 47.)

[15] HUANG Han, HAO Zhifeng, WU Chunguo, et al. The convergence speed of ant colony optimization. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(8): 1344 – 1353.
(黄翰, 郝志峰, 吴春国, 等. 蚁群算法的收敛速度分析. 计算机学报, 2007, 30(8): 1344 – 1353.)

[16] QU B Y, LIANG J J, WANG Z Y, et al. Novel benchmark functions for continuous multimodal optimization with comparative results. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2016, 26: 23 – 34.

[17] YANG X S. *Nature-Inspired Optimization Algorithms*. London: Elsevier Science, 2016: 227 – 244.

[18] LYNN N, SUGANTHAN P N. Heterogeneous comprehensive learning particle swarm optimization with enhanced exploration and exploitation. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2015, 24: 11 – 24.

[19] MOHAMED A W, SUGANTHAN P N. Real-parameter unconstrained optimization based on enhanced fitness-adaptive differential evolution algorithm with novel mutation. *Soft Computing*, 2018, 22(10): 3215 – 3235.

作者简介:

齐 战 硕士研究生, 目前研究方向为智能控制与智能计算, E-mail: 760572986@qq.com;

李茂军 博士, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为智能控制与智能计算、电力系统自动化, E-mail: 591338413@qq.com;

莫 红 博士, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为语言动力系统与智能计算, E-mail: mohong198@163.com;

肖雨荷 硕士研究生, 目前研究方向为智能控制与智能计算, E-mail: 601547221@qq.com;

刘 芾 硕士研究生, 目前研究方向为人工智能、图像处理, E-mail: 852491057@qq.com.