

PRIMIJEĐENJE

MATEMATIKA



Neven Elezović

Dasa Petrić

ZBIRKA
ZADATAKA

**FUNKCIJE
KOMPLEKSNE
VARIJABLE**

ISBN 953-6098-19-9



9 7 8 9 5 3 6 0 9 8 1 9 4

**Prof. dr. sc. Neven Elezović
Daslav Petrizio, dipl. ing.**

**FUNKCIJE KOMPLEKSNE
VARIJABLE**

ZBIRKA ZADATAKA

**Zagreb
1994**

© Neven Elezović, 1994.

Recenzenti

doc. dr. sc. Luka Korkut
prof. dr. sc. Ljubo Marangunić

Za nakladnika

Sandra Gračan, dipl. ing

Nakladnik

Element, Zagreb

Tisak

Spiridion Brusina, D. Lomnica

Slog, crteži i prijelom

Element, Zagreb

Nijedan dio ove knjige ne smije se umnažati, fotokopirati
niti reproducirati na bilo koji način, bez pismene dozvole
nakladnika

PREDGOVOR

Program matematike na tehničkim fakultetima obrađuje uglavnom sljedeća područja

- Diferencijalni i integralni račun*
- Linearna algebra*
- Funkcije više varijabli. Vektorska analiza*
- Diferencijalne jednadžbe*
- Funkcije kompleksne varijable*
- Ortogonalni sustavi. Integralne transformacije*
- Diskretna matematika*
- Vjerojatnost i statistika*
- Numerička analiza*

Ova je zbirka jedna u nizu sličnih kojima kanimo pokriti ta područja. Cilj nam je pružiti studentu zbirke riješenih zadataka koje pokrivaju nastavni plan, ali ga također proširuju i produbljuju, čineći tako jednu zaokruženu cjelinu koju (dobar) inžinjer može i treba poznavati.

*Tako i ova zbirka sadrži sve zadatke koje se obrađuju na auditornim vježbama iz predmeta Matematička analiza III na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu, u dijelu Funkcije kompleksne varijable. Originalne vježbe su nadopunjene kako težim tako i lakšim zadacima. Nadodana su i tri uvodna poglavlja koja se obično obrađuju u programima Matematičke analize I. Dijelovi poglavlja koja ne ulaze u nastavni plan označena su zvjezdicom *.*

U svakom je poglavlju dan kратak podsjetnik važnijih definicija i teorema. Nakon toga su detaljno riješeni zadaci iz osnovnog kursa. Treći dio, zadaci za vježbu, namijenjen je samostalnom radu. Rješenja tih zadataka, dana na kraju knjige, treba zaista shvatiti tek kao kontrolu vlastita rada. Samo tako će ova zbirka ispuniti svoj cilj: ukazati budućem inžinjeru da se školuje da bi samostalno rješavao još složenije probleme.

Autori

U Zagrebu, studenog 1994.

SADRŽAJ

§1. Kompleksni brojevi	9
1. Prikaz kompleksnog broja	9
2. Potenciranje i korjenovanje	14
3. Zadaci za vježbu	20
§2. Geometrija kompleksne ravnine	23
1. Geometrija kompleksne ravnine	23
2. Zadaci za vježbu	31
§3. Nizovi i redovi kompleksnih brojeva	34
1. Nizovi kompleksnih brojeva	34
2. Redovi kompleksnih brojeva	38
3. Zadaci za vježbu	44
§4. Elementarne funkcije	46
1. Elementarne funkcije	46
2. Zadaci za vježbu	54
§5. Diferencijabilnost. Cauchy–Riemannovi uvjeti. Harmonijske funkcije	55
1. Limes, neprekidnost, diferencijabilnost	55
2. Cauchy–Riemannovi uvjeti	57
3. Harmonijske funkcije	63
4. Zadaci za vježbu	67
§6. Integral funkcija kompleksne varijable	68
1. Krivuljni integral	68
2. Cauchyjeva integralna formula	72
3. Zadaci za vježbu	74
§7. Möbiusova transformacija	75
1. Rastav Möbiusove transformacije	75
2. Implicitni oblik Möbiusove transformacije	82
3. Svojstvo simetrije za Möbiusovu transformaciju	84
4. Kanonski oblik Möbiusove transformacije	89
5. Zadaci za vježbu	93
§8. Konformna preslikavanja	97
1. Omjer preslikavanja. Kut zakreta	97
2. Konformna preslikavanja	101
§9. Preslikavanja elementarnim funkcijama	106
1. Funkcija $w = z^n$	106
2. Funkcija $w = \sqrt[n]{z}$	109
3. Funkcija Žukovskog	111
4. Eksponencijalna funkcija $w = e^z$	115
5. Logaritamska funkcija $w = \ln z$	118
6. Trigonometrijske funkcije	119
7. Zadaci za vježbu	122

§10. Taylorovi redovi	124
1. Redovi potencija	124
2. Taylorovi redovi	128
3. Funkcija izvodnica	135
4. Zadaci za vježbu	137
§11. Laurentovi redovi	142
1. Laurentovi redovi	142
2. Zadaci za vježbu	149
§12. Nul-točke i izolirani singulariteti	151
1. Nul-točke	151
2. Izolirani singulariteti	153
3. Zadaci za vježbu	158
§13. Reziduum. Račun ostataka	160
1. Reziduum analitičke funkcije	160
2. Račun ostataka	167
3. Princip argumenta. Rouchéov teorem	170
4. Zadaci za vježbu	163
§14. Računanje realnih integrala	177
1. I tip integrala	177
2. II tip integrala	179
3. III tip integrala	181
4. IV tip integrala	186
5. V tip integrala	188
6. Razni primjeri	190
7. Zadaci za vježbu	193
§15. Rješenja zadataka	196
Literatura	222

1.

Kompleksni brojevi

1.1. Prikaz kompleksnog broja

Algebarski prikaz kompleksnog broja.

Polje kompleksnih brojeva $(C, +, \cdot)$ sastoji se od skupa kompleksnih brojeva C na kojem su definirane dvije operacije: **zbrajanje** i **množenje**. C možemo poistovjetiti sa skupom svih uređenih parova realnih brojeva: $C = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$, a operacije definiramo na sljedeći način:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (1.2)$$

Realni broj x poistovjećujemo s kompleksnim brojem $(x, 0) \in C$. Kako se pri tom čuvaju operacije, jer vrijedi $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$, to je polje realnih brojeva sadržano u polju kompleksnih brojeva. Broj $(0, 1)$ nije realan, označavamo ga sa i i nazivamo **imaginarna jedinica**. Vrijedi, po (1.2)

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Kompleksan broj $z = (x, y)$ možemo pisati i u obliku:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy. \end{aligned}$$

Prikaz $z = x + iy$ nazivamo **algebarski prikaz** kompleksnog broja z . Broj x se naziva **realni**, a broj y **imaginarni dio** kompleksnog broja z . Označavamo ih sa $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi: $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Sa $-z$ označavamo broj $(-1) \cdot z = -x - iy$. **Oduzimanje** kompleksnih brojeva je definirano sa

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (1.3)$$

Kompleksan broj $\bar{z} = x - iy$ nazivamo **konjugiranim** broju $z = x + iy$. Također, broj z je konjugiran broju \bar{z} i zato kažemo da z, \bar{z} čine par **konjugano-kompleksnih** brojeva. Njihovim zbrajanjem i oduzimanjem dobivamo

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (1.4)$$

Također, vrijedi $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. Označimo

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.5)$$

Kako je uobičajeno, množenje kompleksnih brojeva pisat ćemo (uglavnom) bez znaka \cdot , dakle $z_1 z_2$ umjesto $z_1 \cdot z_2$.

Ako je $z \neq 0$, sa $\frac{1}{z}$ označavamo broj

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Uvjeri se da vrijedi $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Tako možemo definirati i dijeljenje kompleksnih brojeva:

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.6)$$

Računske operacije s kompleksnim brojevima izvodimo ne pamteći formule (1.2) i (1.6), već sa kompleksnim brojevima postupamo kao s "polinomima po varijabli i ", uvažavajući pri tom $i^2 = -1$, npr.

$$(4 - 3i)(2 + 5i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 23 + 14i,$$

$$\frac{1 + 2i}{3 - 2i} = \frac{1 + 2i}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{3 + 6i + 2i + 4i^2}{9 - 4i^2} = \frac{-1 + 8i}{13}.$$

1.1. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

A. $\frac{1}{1-i}$; B. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; C. $(1-i\sqrt{3})^3$.

RJEŠENJE. Moramo odrediti algebarski prikaz zadanih kompleksnih brojeva.

A. $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Dakle, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$.

B. $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^3 = (-i)^3 = i$.

Odavde, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$.

C. $(1-i\sqrt{3})^3 = 1 - 3i\sqrt{3} + 3(i\sqrt{3})^2 - (i\sqrt{3})^3 = 1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i = -8$, te je $\operatorname{Re} z = -8$, $\operatorname{Im} z = 0$.

1.2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\bar{z} = z^2$.

RJEŠENJE. Prikažimo broj z u obliku $z = x + iy$; što uvršteno u jednadžbu daje

$$x - iy = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Prema tome, x i y moraju zadovoljavati sistem

$$\begin{cases} x = x^2 - y^2, \\ y = 2xy, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x - y^2 = 0, \\ (2x + 1)y = 0. \end{cases}$$

Druga je jednadžba zadovoljena za $x = -\frac{1}{2}$ ili $y = 0$. Uvrstimo li $x = -\frac{1}{2}$ u prvu jednadžbu, dobivamo $y^2 = \frac{3}{4}$, što daje $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uvrstimo pak $y = 0$ u prvu jednadžbu, dobivamo $x^2 - x = 0$ i odavde $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Postoje dakle četiri rješenja:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 1.$$

1.3. Pokaži da operacija kompleksnog konjugiranja ima svojstva:

- | | |
|--|---|
| A. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$ | B. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2};$ |
| C. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$ | D. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$ |

RJEŠENJE. A.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

Na sličan se način pokazuju i ostale relacije.

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Kompleksan broj $z = x + iy$ možemo prikazati točkom $M(x, y)$ ili pak vektorom \overrightarrow{OM} u ravnini xOy , koju nazivamo **kompleksna ili Gaussova ravnina** (sl. 1.1.).

Duljina r vektora \overrightarrow{OM} naziva se **modul, norma ili absolutna vrijednost** kompleksnog broja z

$$r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (1.7)$$

Kut kojeg vektor \overrightarrow{OM} zatvara s pozitivnim dijelom realne osi naziva se **argument** kompleksnog broja z ; označavamo ga sa $\operatorname{Arg} z$. On je određen do na višekratnik broja 2π . Za **glavnu vrijednost argumenta** uzimamo vrijednost tog kuta unutar intervala $[0, 2\pi)$ i označavamo ga sa $\varphi = \arg z$. Dakle, vrijedi

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (1.8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

Stoga kompleksan broj možemo napisati u tzv. **trigonometrijskom obliku**

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.9)$$

Uvedimo simbol $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$. Prikaz $z = r e^{i\varphi}$ naziva se **eksponencijalni oblik** kompleksnog broja. Neka je $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Tada vrijedi

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)$ te je

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (1.10)$$

Odavde zaključujemo

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (1.11)$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \quad (1.12)$$

Kako je $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)$ (provjeri!), to vrijedi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (1.13)$$

i odavde

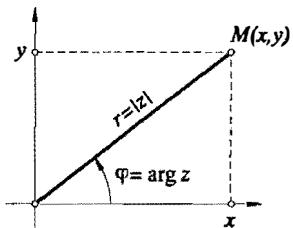
$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (1.14)$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) = \varphi_1 - \varphi_2 + 2k\pi. \quad (1.15)$$

1.4. Ako je $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ i $z_1 z_2 \neq -1$, dođe da je $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ realan broj.

RJEŠENJE. Broj z je realan ako i samo ako vrijedi $z = \bar{z}$. Po uvjetima zadatka imamo

$$1 = |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1, \quad 1 = |z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2.$$



Slika 1.1. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Zato je, koristeći pravila konjugiranja

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} \cdot \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_1 z_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1 z_2}{z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_1 z_2} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = z$$

i z je realan.

1.5.

Prikaži u trigonometrijskom obliku sljedeće brojeve:

- | | | |
|---------------------|--------------------|------------------|
| A. $\sqrt{3} + i$; | B. $-2i$; | C. $-\sqrt{2}$; |
| D. 2 ; | E. $1 + i^{123}$; | F. $-1 + 2i$. |

RJEŠENJE.

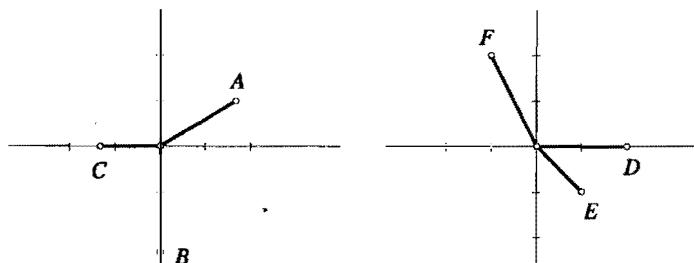
A.

$$\begin{aligned} r &= |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \left. \right\} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

B. $r = |-2i| = 2$; $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ te je $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.

C. $r = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi$, $z = \sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$.

D. $r = |2| = 2$, $\varphi = 0$, $z = 2(\cos 0 + i \sin 0)$.



Slika 1.2.

E. $1 + i^{123} = 1 + i^{4 \cdot 30 + 3} = 1 + (i^4)^{30} i^3 = 1 + i^3 = 1 - i$. Odavde $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\varphi = 2\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ te slijedi $z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

F. $r = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -2 \Rightarrow \varphi = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 = 1,1071 = 116^\circ 34'$. Dobivamo $z = \sqrt{5}(\cos 116^\circ 34' + i \sin 116^\circ 34')$. Vidi sl 1.2.

1.6. Prikaži u trigonometrijskom obliku

- A. $z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$;
 B. $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

RJEŠENJE.

$$A. \quad r = \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right)^{1/2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}.$$

Kako se broj z nalazi u trećem kvadrantu, to je $\varphi = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$. Dakle, $z = \cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8}$.

$$B. \quad r = \sqrt{1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = 2 \cos \alpha/2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2}{2 \cos^2 \alpha/2} = \operatorname{tg} \alpha/2 \text{ te je } \varphi = \alpha/2. \text{ Dakle,}$$

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

1.2. Potenciranje i korjenovanje

Označili smo $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$. Kako vrijedi

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$\begin{aligned} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \\ &= \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) \end{aligned}$$

to dobivamo $e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$. Odavde indukcijom zaključujemo da vrijedi $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, tj. vrijedi **de Moivreova formula**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \tag{1.16}$$

Potenciju kompleksnog broja, napisanog u trigonometrijskom obliku, računamo po formuli

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \tag{1.17}$$

Odavde zaključujemo

$$|z^n| = |z|^n \tag{1.18}$$

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.19}$$

Odredimo sada n -ti korijen kompleksnog broja z , $z \neq 0$. Stavimo $w := \sqrt[n]{z}$, tj. $z = w^n$ i prikažimo ih u trigonometrijskom obliku: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$. Tada iz

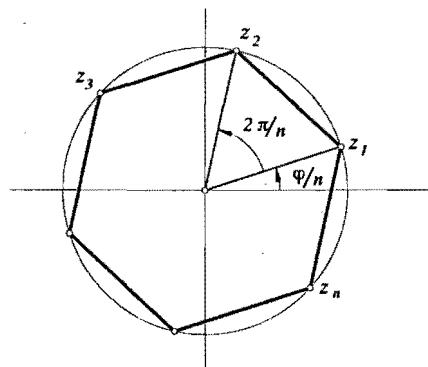
$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

slijedi $\rho = \sqrt[n]{r}$ i $n\psi = \varphi + 2k\pi$. Uvrštavanjem $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ dobivamo n različitih vrijednosti n -og korijena kompleksnog broja z :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.20)$$

Tu je $\varphi = \arg z$, a $\sqrt[n]{r}$ označava realan i pozitivan n -ti korijen iz pozitivnog broja $r = |z|$.

Sve vrijednosti od $\sqrt[n]{z}$ leže na kružnici polumjera $\rho = \sqrt[n]{|z|}$, sa središtem u ishodištu, a argumenti tih brojeva razlikuju se za višekratnik od $2\pi/n$. Dakle, n -ti korijeni kompleksnog (pa i realnog!) broja čine vrhove pravilnog n -terokuta sa središtem u ishodištu.



Slika 1.3. Svi n -ti korijeni kompleksnog broja su vrhovi pravilnog n -terokuta sa središtem u ishodištu. Polumjer n -terokuta iznosi $\sqrt[n]{r}$.

1.7. Izračunaj $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

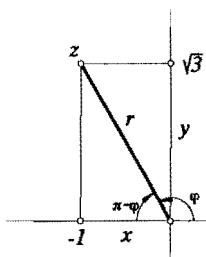
RJEŠENJE. Prikažimo $-1 + i\sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku. On se nalazi u drugom kvadrantu i vrijedi

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}.$$

Dakле, $r = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$



Možemo sada primjeniti de Moivreovu formulu (1.16)

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60} \left[\cos \left(60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2^{60} \left[\cos(40\pi) + i \sin(40\pi) \right] = 2^{60}. \end{aligned}$$

1.8. Izračunaj $\left(1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^6$.

RJEŠENJE. Po zadatku 1.6.B, kompleksan broj $z = 1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ima prikaz $z = 2 \cos \frac{\pi}{12} (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$. Zato je

$$\begin{aligned} z^6 &= 2^6 \left(\cos \frac{\pi}{12}\right)^6 \left(\cos \frac{6\pi}{12} + i \sin \frac{6\pi}{12}\right) \\ &= 2^6 \left(\frac{1 + \cos \pi/6}{2}\right)^3 \cdot i = 2^6 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)^3 \cdot i = (2 + \sqrt{3})^3 i. \end{aligned}$$

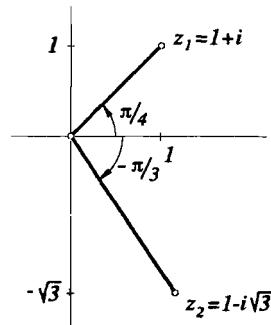
1.9. Izračunaj $\frac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9}$.

RJEŠENJE. Prikažimo najprije brojeve

$$z_1 = 1 + i \quad i \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), \\ z_2 &= 2 \left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned}$$



Slika 1.5.

Sada je

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9} &= \frac{(\sqrt{2})^{16} [\cos(16 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \sin(16 \cdot \frac{\pi}{4})]}{2^9 [\cos(-9 \cdot \frac{\pi}{3}) + i \sin(-9 \cdot \frac{\pi}{3})]} \\ &= \frac{1}{2} [\cos(16 \cdot \frac{\pi}{4} + 9 \cdot \frac{\pi}{3}) + i \sin(16 \cdot \frac{\pi}{4} + 9 \cdot \frac{\pi}{3})] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(7\pi) + i \sin(7\pi)] = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.10. Dokaži da je polinom $P(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$ djeljiv s polinomom $Q(x) = x^2 + 1$.

RJEŠENJE. Vrijedi $Q(x) = (x - i)(x + i)$. $P(x)$ će biti djeljiv sa $Q(x)$ ukoliko je djeljiv sa $(x - i)$ i sa $(x + i)$, tj. ako su brojevi $x_1 = i$ i $x_2 = -i$ nul točke polinoma $P(x)$. Izračunajmo stoga $P(i)$ i $P(-i)$.

$$\begin{aligned} P(i) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - i \sin n\alpha \\ &= \cos n\alpha + i \sin n\alpha - \cos n\alpha - i \sin n\alpha = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-i) &= (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n - \cos n\alpha + i \sin n\alpha \\ &= [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]^n - \cos(-n\alpha) - i \sin(-n\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $P(x)$ je djeljiv sa $(x + i)(x - i) = Q(x)$.

1.11. Odredi kompleksan broj z za kojeg vrijedi $|z-1|=|z|$ i $\operatorname{Arg}(z^3)=\pi/3 + \operatorname{Arg} z$.

RJEŠENJE. Prikažimo broj z u trigonometrijskom obliku, $z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$. Prvi uvjet daje

$$(r \cos \varphi - 1)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \implies r = \frac{1}{2 \cos \varphi},$$

a drugi, po formuli (1.19)

$$3\varphi = \frac{\pi}{3} + \varphi + 2k\pi \implies \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

za neku vrijednost cijelog broja k . Samo vrijednosti $k=0$ i $k=1$ daju kut unutar intervala $[0, 2\pi]$. Za $k=1$ dobivamo $\varphi = 7\pi/6$ što daje negativan r i to rješenje odbacujemo. Za $k=0$ dobivamo $\varphi = \pi/6$ i $r = \sqrt{3}/3$. Dakle,

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

1.12. Izračunaj A. $\operatorname{Arg} \frac{1+i}{1-i}$; B. $\operatorname{Arg}(-2 - 2i\sqrt{3})^4$.

RJEŠENJE. A.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \frac{1+i}{1-i} &= \operatorname{Arg}(1+i) - \operatorname{Arg}(1-i) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ili, na drugi način

$$\operatorname{Arg} \frac{1+i}{1-i} = \operatorname{Arg} \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \operatorname{Arg} \frac{1+2i+i^2}{2} = \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

B.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(-2 - 2i\sqrt{3})^4 &= 4 \operatorname{arg}(-2 - 2i\sqrt{3}) + 2k\pi \\ &= 4 \left[\pi + \arctg \frac{2\sqrt{3}}{2} \right] + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

1.13. Odredi sve vrijednosti korijena

- A. $\sqrt[3]{-1+i}$; B. $\sqrt[4]{16}$; C. $\sqrt[3]{-1}$; D. $\sqrt{3+4i}$,
i prikaži ih u kompleksnoj ravnini.

RJEŠENJE.

A. Napišimo broj $-1+i$ u trigonometrijskom obliku:

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Prema tome, vrijedi $| -1 + i| = \sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$ i po (1.20) dobivamo

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-1+i} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2, \\ &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Postoje tri vrijednosti ovog korijena:

$$\begin{aligned}k = 0 : \quad z_1 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ k = 1 : \quad z_2 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \\ k = 2 : \quad z_3 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

B. Broj 16 u trigonometrijskom obliku ima prikaz $16 = 16(\cos 0 + i \sin 0)$, pa je

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{16} &= \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{4} \right), \\ &= 2 \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Dobivamo sljedeće četiri vrijednosti:

$$\begin{aligned}k = 0 : \quad z_1 &= 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2, \\ k = 1 : \quad z_2 &= 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2i, \\ k = 2 : \quad z_3 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2, \\ k = 3 : \quad z_4 &= 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = -2i.\end{aligned}$$

Vidimo da smo $\sqrt[4]{16}$ mogli pronaći i bez upotrebe de Moivreove formule znajući da je jedno rješenje broj 2, a sljedeća tri predstavljaju preostale vrhove kvadrata sa središtem u ishodištu.

C. Trigonometrijski oblik broja -1 je $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$. Zato

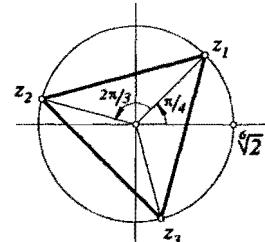
$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Dobivamo

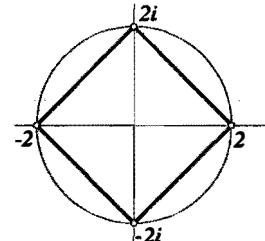
$$z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = -1,$$

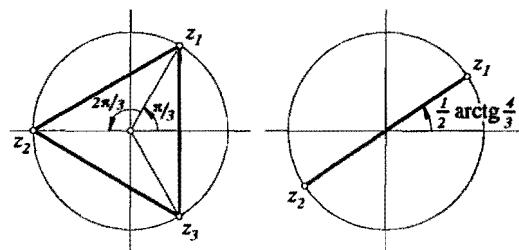
$$z_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Slika 1.6.



Slika 1.7.



Slika 1.8.

D. Trigonometrijski oblik ovog broja glasi

$$3 + 4i = 5 \left(\cos\left(\arctg \frac{4}{3}\right) + i \sin\left(\arctg \frac{4}{3}\right) \right).$$

Zato je

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1.$$

Za $k = 0$ dobivamo:

$$z_1 = \sqrt{5} \left(\cos\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{4}{3}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{4}{3}\right) \right).$$

Drugo rješenje z_2 je simetrično prvom s obzirom na ishodište, tj. $z_2 = -z_1$.

1.14. Odredi realna rješenja jednadžbe $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$.

RJEŠENJE. Jednadžba je ekvivalentna sa

$$\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^n = 1 \Rightarrow \frac{x+i}{x-i} = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Izračunajmo odavde x :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin \frac{2k\pi}{n} - i(1 + \cos \frac{2k\pi}{n})}{1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}} \\ &= \frac{\left(\sin \frac{2k\pi}{n} - i(1 + \cos \frac{2k\pi}{n}) \right) \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)}{\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} \right)^2 + \left(\sin \frac{2k\pi}{n} \right)^2} \\ &= \frac{\sin \frac{2k\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2k\pi}{n}} = \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n}}{2 \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right)^2} = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

1.15. Izračunaj A. $|(1-i\sqrt{3})^4 (\sqrt{3}+i)^6|$; B. $|\sqrt[5]{3-4i}|$; C. $|\sqrt{(1+i)^8}|$.

RJEŠENJE.

$$\text{A. } |(1-i\sqrt{3})^4 (\sqrt{3}+i)^6| = |(1-i\sqrt{3})^4| \cdot |(\sqrt{3}+i)^6| = |1-i\sqrt{3}|^4 |\sqrt{3}+i|^6 = (\sqrt{1+3})^4 (\sqrt{3+1})^6 = 2^{10}.$$

$$\text{B. } |\sqrt[5]{3-4i}| = \sqrt[5]{|3-4i|} = \sqrt[5]{\sqrt{9+16}} = \sqrt[5]{5}.$$

$$\text{C. } |\sqrt{(1+i)^8}| = \sqrt{|1+i|^8} = \sqrt{(\sqrt{1+1})^8} = \sqrt{2^4} = 4.$$

1.3. Zadaci za vježbu

- 1.16.** Neka je $f(z) = 2 + z + 3z^2$. Izračunaj $f(z)$ i $f(\bar{z})$ ako je $z = 3 + 2i$.
- 1.17.** Pokaži da je $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$, za svaki polinom P sa realnim koeficijentima
- 1.18.** Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:
- A. $\left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2$; B. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; C. $\left(\frac{2}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$; D. $\frac{i^{107} + i^{57}}{i^{107} - i^{57}}$.
- 1.19.** Odredi realna rješenja jednadžbe $(4x + i)(2 - i) + (2x + iy)(1 - 2i) = 7 - 8i$.
- 1.20.** Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi
- A. $\bar{z} = z^3$; B. $\bar{z} = z^{n-1}$, $n \geq 2$.
- 1.21.** Neka je $w = \frac{z-1}{z+1}$, $z \neq \pm 1$. Dokaži da je $\operatorname{Re} w = 0$ ako i samo ako je $|z| = 1$.
- 1.22.** Dokaži da su z_1 i z_2 kompleksno-konjugirani ako i samo ako su $z_1 + z_2$ i $z_1 z_2$ realni brojevi.
- 1.23.** Dokaži identitete
- A. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;
- B. $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$;
- C. $|1 + \bar{z}_1 z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$;
- D. $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$.
- 1.24.** Dokaži identitete
- A. $(n-2) \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = \sum_{1 \leq k < s \leq n} |z_k + z_s|^2$,
- B. $n \sum_{k=1}^n |z_k|^2 - \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = \sum_{1 \leq k < s \leq n} |z_k - z_s|^2$;
- 1.25.** Dokaži nejednakost:
- $$2(|z_1|^n + |z_2|^n) \leq |z_1 + z_2|^n + |z_1 - z_2|^n \leq 2^{n-1}(|z_1|^n + |z_2|^n), \quad n \geq 2.$$
- 1.26.** Riješi jednadžbe
- A. $|z| + z = 2 + i$;
- B. $2|z| - 4az + 1 + ai = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$;
- C. $z|z| + az + 1 = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$.
- 1.27.** Odredi sve kompleksne brojeve za koje vrijedi
- A. $|z| = \sqrt{2}$, $|z + i| = |z + 1|$;
- B. $|z| = |z - 1|$, $\arg(z - 1) = 3\pi/4$;
- C. $|z| = \left| \frac{1}{z} \right|$, $\arg(2z) = \arg(i/z)$.

1.28. Prikaži u trigonometrijskom obliku sljedeće brojeve:

A. $z = 1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$, $(0 < \alpha < \pi/2)$;

B. $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$, $(\pi < \alpha < 3\pi/2)$;

C. $z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}$, $(0 < \alpha < \pi/2)$;

D. $z = -\cos \pi/5 + i \sin \pi/5$.

1.29. Odredi realan broj $m > 0$ takav da za broj $z = m + im\sqrt{3}$ bude $\operatorname{Re}(z^8) = -128$.

1.30. Izračunaj A. $(2 + 2i)^7$; B. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$; C. $\left(\frac{1}{2} + i\right)^{10}$;
D. $(1 + \cos \pi/3 + i \sin \pi/3)^{18}$.

1.31. Dokaži da je za prirodan broj k broj $(1+i)^{4k}$ realan.

1.32. Nađi najmanji broj n za koji vrijedi $(\sqrt{3}+i)^n = (\sqrt{3}-i)^n$.

1.33. Služeći se de Moivreovom formulom izrazi $\sin n\alpha$ i $\cos n\alpha$ pomoću potencija od $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

1.34. Dokaži: $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \varphi}{1-i \operatorname{tg} \varphi}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\varphi}{1-i \operatorname{tg} n\varphi}$.

1.35. Ako vrijedi $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$, dokaži da je $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi$.

1.36. Izračunaj $z^{1991} + \frac{1}{z^{1991}}$ ako je $z^2 + z + 1 = 0$.

1.37. Dokaži da je polinom $P(x) = x^n \sin \alpha - \lambda^{n-1} x \sin(n\alpha) + \lambda^n \sin(n-1)\alpha$ djeljiv s polinomom $Q(x) = x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2$.

1.38. Neka je $0 < \alpha < 2\pi$. Dokaži formule

A. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{n\alpha}{2}$;

B. $\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

1.39. Neka je $0 < \alpha < \pi$. Dokaži formule

A. $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos(n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$;

B. $\sin \alpha - \sin 3\alpha + \dots + (-1)^{n+1} \sin(2n-1)\alpha = (-1)^{n+1} \frac{\sin 2n\alpha}{2 \cos \alpha}$.

1.40. Izračunaj

A. $\sqrt[4]{4+3i}$;

B. $\sqrt[3]{2+i}$;

C. $\sqrt{(1-i\sqrt{3})^7}$;

D. $\sqrt[5]{-1}$;

E. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$;

F. $\sqrt[5]{-\sqrt{3}+i}$.

1.41. Riješi jednadžbe

A. $(3-i)z^3 = -4+8i$; B. $z^4 + z^2 + 1 = 0$; C. $z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$;
 D. $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$; E. $(1+i)z^4 - (1-i)z = 0$.

1.42. Neka su $z_k = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ svi n -ti korijeni iz jedinice. Dokaži da vrijedi

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1}) = 1 + z + \dots + z^{n-1}.$$

Pomoću ovog identiteta izvedi relaciju

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

1.43. Dokaži identitete

$$\begin{aligned} x^{2n} - 1 &= (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1) \\ x^{2n+1} - 1 &= (x - 1) \prod_{k=1}^n (x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1) \\ x^{2n} + 1 &= \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{2n}\pi + 1) \end{aligned}$$

1.44. Ako za kompleksne brojeve a, b, c vrijedi $|a| = |b| = |c| = r$, dokaži da je tada $\left| \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \right| = r$.

1.45. Ako su z, a kompleksni brojevi s pozitivnim realnim dijelovima, pokaži da vrijedi $\left| \frac{a - z}{\bar{a} + z} \right| < 1$.

1.46. Ako vrijedi $|z| = 1$, pokaži da se broj z može prikazati u obliku $z = \frac{t+i}{t-i}$, pri čemu je t realan broj.

1.47. Izraz $A|\lambda|^2 + B\lambda\bar{\mu} + \bar{B}\bar{\lambda}\mu + C|\mu|^2$ je nenegativan, za sve vrijednosti brojeva $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dokaži da je tada $A \geq 0, C \geq 0, |B|^2 \leq AC$.

1.48. Dokaži da za proizvoljne kompleksne brojeve $z_1, z_2, \dots, z_n, w_1, w_2, \dots, w_n$ vrijedi Cauchy-Schwartzove nejednakost:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right).$$

1.49. Ako za brojeve $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ vrijedi $|z_k| \leq 1$, dokaži da je tada

A. $\left| \prod_{k=1}^n z_k - 1 \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - 1|$; B. $\left| \prod_{k=1}^n (z_k - 1) \right| \geq 1 - \sum_{k=1}^n |z_k|$.

2.

Geometrija kompleksne ravnine

Kompleksnu (ili Gaussovou) ravninu C možemo geometrijski poistovjetiti s prostorom \mathbb{R}^2 , točki $z = x + iy$ iz kompleksne ravnine odgovara točka (x, y) u (kartezijskoj) ravnini \mathbb{R}^2 .

Apsolutna vrijednost $|z|$ kompleksnog broja $z = x + iy$ odgovara (euklidskoj) udaljenosti točke (x, y) do ishodišta. Neka su zadana dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$. Tada vrijedi

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

te je $|z_1 - z_2|$ udaljenost između točaka z_1 i z_2 u kompleksnoj ravnini.

2.1.

Prikaži kompleksne brojeve z_1 i z_2 u Gaussovoj ravnini i uvjeri se da vrijedi

- A. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; B. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$,
Dokaži ove nejednakosti i algebarskim putem.

RJEŠENJE. Iz trokuta OAB vidimo

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

jer je duljina stranice trokuta manja od zbroja duljina preostalih dviju.

Iz trokuta OAC vidimo

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||,$$

jer je duljina jedne stranice veća od razlike duljina preostalih dviju stranica.

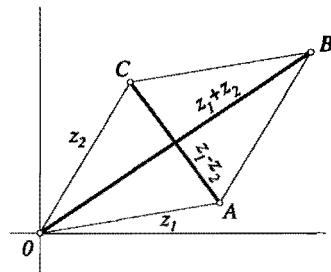
Dokažimo sada ove nejednakosti algebarskim putem.

A.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}) \end{aligned}$$

Izračunajmo izraz u zagradi

$$\begin{aligned} \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}). \end{aligned}$$



Slika 2.1. Geometrijska interpretacija brojeva $|z_1 + z_2|$ i $|z_1 - z_2|$

Dobili smo $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$. Kako za proizvoljan kompleksan broj z vrijedi

$$\operatorname{Re} z \leq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = |z|, \quad |z| = |\bar{z}|,$$

to imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) &\leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2\end{aligned}$$

tj. $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1| + |z_2|$, što je i trebalo dokazati.

B. Primjenimo gornju nejednakost na sljedeći način:

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|.$$

Dobivamo

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Zamijenimo ovdje z_1 sa z_2 :

$$|z_1 - z_2| \geq |z_2| - |z_1|.$$

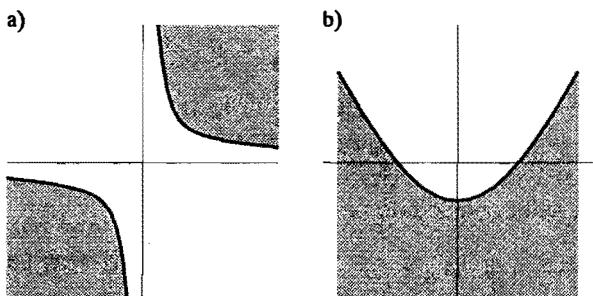
Ove su dvije nejednakosti ekvivalentne sa $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

2.2. Odredi i skiciraj skup točaka z u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi A. $\operatorname{Im} z^2 > 2$; B. $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$.

RJEŠENJE. A. Neka je $z = x + iy$. Tada je $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Prema tome, vrijedi $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$ i

$$\{z : \operatorname{Im} z^2 > 2\} = \{(x, y) : xy > 1\}$$

Ovaj je skup skiciran na sl. 2.2.a.



Slika 2.2.

B. Stavimo ponovo $z = x + iy$,

$$|z| > 2 + \operatorname{Im} z \iff x^2 + y^2 > (2 + y)^2 \iff x^2 > 4 + 4y.$$

Riječ je o području omeđenom odozgo parabolom $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ (sl. 2.2.b).

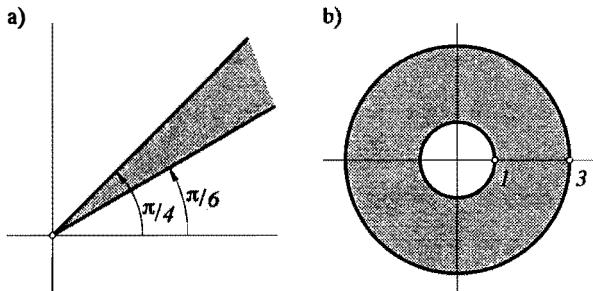
2.3.

Odredi sve točke kompleksne ravnine za koje je

A. $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

B. $1 < |z| < 3$.

RJEŠENJE. A. Neka je $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Vrijedi $\varphi = \arg z$. Uvjetom $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ postavljen je samo uvjet na kut φ , ali ne i na modul r . Dakle, r može biti proizvoljan, a φ se mora nalaziti unutar intervala $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$. Traženi je skup kut u kompleksnoj ravnini određen zrakama $\varphi = \frac{\pi}{6}$ i $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (sl. 2.3.a).



Slika 2.3.

B. Prikažimo ponovo kompleksni broj z u trigonometrijskom obliku: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Sada je $|z| = r$ i uvjet prelazi u $1 < r < 3$, dok nema ograničenja na kut φ . Stoga je uvjetom određen kružni prsten na sl. 2.3.b. Rubovi nisu uključeni u područje.

2.4.

Koje su krivulje određene sljedećim jednadžbama:

A. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;

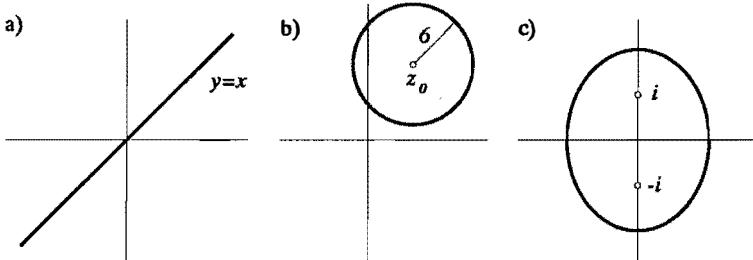
B. $|z - z_0| = 6$;

C. $|z - i| + |z + i| = 4$;

D. $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 2?$

RJEŠENJE. A. Neka je $z = x + iy$. Uvrstimo li ovakav z u gornju relaciju, dobivamo $y = x$, pravac (sl. 2.4.a).

B. Svi kompleksni brojevi z za koje vrijedi $|z - z_0| = r$ udaljeni su za r od točke z_0 , dakle, leže na kružnici sa središtem u z_0 i polujerom r (sl. 2.4.b).



Slika 2.4.

C. Zbroj udaljenosti točke z do točaka i , $-i$ mora iznositi 4. Kako je međusobna udaljenost tih točaka jednaka 2, to jednadžba $|z - i| + |z + i| = 4$ predstavlja elipsu s žarištima u točkama i , $-i$ i velikom osi $2a = 4$.

Izračunajmo njenu jednadžbu u kartezijevoj ravnini. Stavimo ponovo $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}|z - i| + |z + i| &= |x + i(y - 1)| + |x + i(y + 1)| \\&= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4.\end{aligned}$$

Eliminacijom korijena dobivamo (provjeri!):

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

što predstavlja jednadžbu elipse sa središtem u ishodištu i poluosima $b = \sqrt{3}$, $a = 2$ (sl. 2.4.c).

D. Stavimo $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}z\bar{z} + i(z - \bar{z}) &= 2 \iff (x + iy)(x - iy) + i(x + iy - x + iy) = 2 \\&\iff x^2 + (y - 1)^2 = 3.\end{aligned}$$

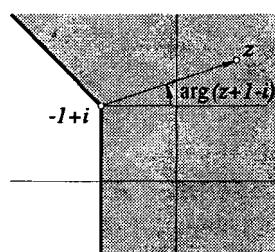
Riječ je o kružnici sa središtem u točki $S(0, 1)$ i polumjerom $\sqrt{3}$.

2.5. Kakav je podskup kompleksne ravnine određen uvjetom

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z + 1 - i) < \frac{3\pi}{4}?$$

RJEŠENJE. Fiksirajmo kompleksar broj z u ravnini. Kompleksan broj $z + 1 - i = z - (-1 + i)$ prikazuje se vektorom čiji je početak u točki $-1 + i$, a vrh u točki z . Kut kojeg taj vektor zatvara s osi Ox je upravo $\operatorname{Arg}(z + 1 - i)$ i on se može mijenjati u granicama od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{4}$.

Prema tome, zadani uvjet određuje podskup kompleksne ravnine između dviju zraka s početkom u točki $-1 + i$, a koje zatvaraju s osi Ox kutove od $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{4}$ radijana (sl. 2.5).



Sl. 2.5.

2.6. Koje su krivulje u kompleksnoj ravnini određene sljedećim jednadžbama? Naznači smjer kretanja po njima.

- A. $z(t) = a + (b - a)t$, $0 \leq t \leq 1$, ($a, b \in \mathbb{R}$);
- B. $z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$, $0 \leq t \leq 1$, ($z_0, z_1 \in \mathbb{C}$);
- C. $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, ($R > 0$);
- D. $z(t) = t + it^2$, $0 \leq t < \infty$;
- E. $z(t) = t + \frac{i}{t}$, $1 \leq t < \infty$.

RJEŠENJE.

A. Stavimo $z(t) = x(t) + iy(t)$.

$$x(t) + iy(t) = a + (b-a)t \iff \begin{cases} x(t) = a + (b-a)t, \\ y(t) = 0. \end{cases}$$

To je parametarska jednadžba segmenta $[a, b]$ na realnoj osi.

B. Stavimo $z(t) = x(t) + iy(t)$, $z_k = x_k + iy_k$, ($k = 0, 1$).

$$z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t \iff \begin{cases} x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t. \end{cases}$$

Eliminirajmo parametar t :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

To je jednadžba spojnice točaka (x_0, y_0) i (x_1, y_1) , odnosno, z_0 i z_1 u Gaussovoj ravnini.

C. Vrijedi $|z(t)| = R$. $\arg z(t) = t$, $0 \leq t \leq \pi$. Tražena krivulja je gornja polovina kružnice $|z| = R$, običena u pozitivnom smjeru.

D. Sada imamo

$$z(t) = t + it^2 \iff \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^2. \end{cases}$$

Eliminacijom parametra t slijedi $y = x^2$, $x \geq 0$. To je desna polovina parabole.

E. Sada dobivamo $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Dio luka hiperbole.

2.7. Neka za kompleksni broj a i realni broj β vrijedi $\beta < |a|^2$. Pokaži da jednadžba

$$|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + \beta = 0$$

predstavlja kružnicu. Odredi njeni središte i polumjer.

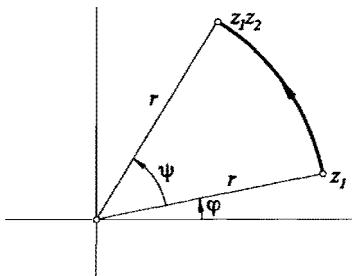
RJEŠENJE. Vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + \beta = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} + \beta - a\bar{a} \\ &= (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) + \beta - |a|^2 \\ &= |z - a|^2 - r^2 \iff |z - a| = r, \end{aligned}$$

gdje smo stavili $r^2 := -\beta + |a|^2 > 0$.

Dakle, jednadžba predstavlja kružnicu sa središtem u točki a i polumjerom $\sqrt{-\beta + |a|^2}$.

Neka je z_2 kompleksan broj modula 1, tj. $z_2 = \cos \psi + i \sin \psi$. Pokažimo da množenje s brojem z_2 geometrijski odgovara rotaciji broja z_1 oko ishodišta za kut ψ u pozitivnom smjeru. Ako je $z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, tada je $z_1 z_2 = r[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)]$ (sl. 2.6).



Slika 2.6. Množenjem s kompleksnim brojem modula 1 i argumenta ψ , broj z se rotira za kut ψ

2.8.

Odredi kompleksni broj koji se dobije rotacijom broja $-\sqrt{3} - i$ oko ishodišta, za kut $2\pi/3$.

RJEŠENJE. Množenjem kompleksnog broja z_1 sa brojem $\cos \alpha + i \sin \alpha$, rotiramo ga oko ishodišta za kut α . U zadatku je $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $\alpha = 2\pi/3$. Zato je

$$z = z_1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (-\sqrt{3} - i) \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} - i.$$

Nacrtaj sliku!

2.9.

Pravokutni koordinatni sustav zarotiran je za kut α . Odredi vezu između koordinata (x, y) i (x', y') iste točke, u ta dva sustava.

RJEŠENJE. Točku (x, y) možemo prikazati kompleksnim brojem u eksponentijalnom obliku

$$z = x + iy = r e^{i\varphi}.$$

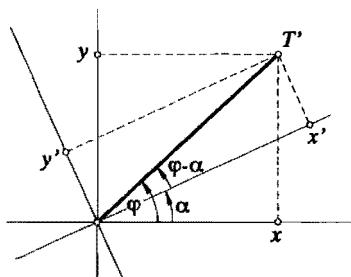
Prikaz istog kompleksnog broja u zaratiranom sustavu je (sl. 2.7)

$$z = x' + iy' = r e^{i(\varphi-\alpha)}.$$

Odavde

$$\begin{aligned} x' + iy' &= r e^{i\varphi} e^{-i\alpha} \\ &= (x + iy)(\cos \alpha - i \sin \alpha), \\ x + iy &= (x' + iy')(\cos \alpha + i \sin \alpha). \end{aligned}$$

Izdvajanjem realnih i imaginarnih dijelova, dobivamo tražene veze



Slika 2.7. Rotacija pravokutnog kartezijskog sustava može se povezati s množenjem kompleksnih brojeva

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha,\end{aligned}\tag{2.1}$$

i u obratnom smjeru:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.\end{aligned}\tag{2.2}$$

2.10. Odredi jednadžbu hiperbole $-x^2 + y^2 = 1$ u sustavu zarotiranom za 45° .

RJEŠENJE. Veze između kartezijevih koordinata u oba sustava su:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'),\end{aligned}$$

i početna jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned}-x^2 + y^2 = 1 &\iff -\frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) = 1 \\&\iff x'y' = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

i to je jednadžba hiperbole u novom sustavu.

2.11. Kanonska jednadžba krivulje drugog reda. Jednadžbom

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

određena je, u nedegeneriranom slučaju, krivulja drugog reda (elipsa, hiperbola, parabola), čije su osi zarotirane u odnosu na koordinatne osi Ox , Oy . Za koji kut treba zarotirati sustav xOy da bi ta krivulja imala osi paralelne s koordinatnim osima u novom sustavu? Provjeri na primjeru elipse

$$2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy = 5.$$

RJEŠENJE. Neka je α traženi kut. Jednadžba krivulje u novom sustavu će glasiti, po formulama (2.2) :

$$\begin{aligned}A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + B(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 \\+ C(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) \\+ D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0\end{aligned}$$

i da bi njene osi bile paralelne s koordinatnim, mora iščezavati koeficijent uz član $x'y'$:

$$\begin{aligned}-2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\(B - A) \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Odavde

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{C}{A - B} \implies \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{C}{A - B}. \quad (2.3)$$

U zadanom primjeru je:

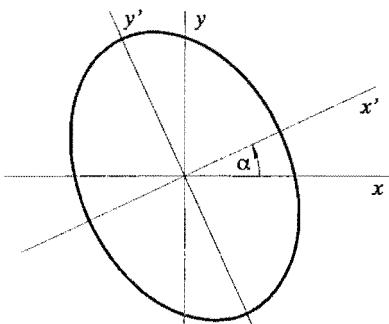
$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{3}}{2-1} = \frac{\pi}{6},$$

te je

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y',$$

$$y = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y',$$

što nakon uvrštavanja i sređivanja daje $5x'^2 + y'^2 = 10$. Ova nam jednadžba omogućava da nacrtamo elipsu i u početnom koordinatnom sustavu, vidi sl. 2.8.



Slika 2.8. Elipsa će u zarotiranom sustavu imati osi paralelne s kartezijevim koordinatnim osima

2.12. Koje su krivulje određene sljedećim jednadžbama:

$$\text{A. } |z+1| + |z-1-i| = \sqrt{15}; \quad \text{B. } |z+1-i| = \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}{\sqrt{2}}?$$

RJEŠENJE. A. $|z+1| + |z-1-i|$ predstavlja udaljenost točke $z = (x, y)$ do točaka $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 1)$. Zato je tražena krivulja elipsa, sa žarištim u točkama F_1 i F_2 i velikom osi $2a = \sqrt{15}$. Odredimo njenu jednadžbu. Početna jednadžba daje

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{15}.$$

Eliminacijom korijena dobivamo

$$11x^2 + 14y^2 - 4xy + 2x - 14y - 34 = 0.$$

Elipsa je nacrtana na sl. 2.9.a. Koliko je njena glavna os zarotirana prema realnoj osi koordinatnog sustava?

B. Uvrstimo $z = x + iy$:

$$|z+1-i| = |(x+1)+i(y-1)| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

Odavde, nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 4y + 4 = 0.$$

Da bismo odredili koju krivulju drugog reda određuje ova jednadžba, zarođitati ćemo sustav xOy za kut

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{2}{1-1} = \frac{\pi}{4}$$

(vidi Zadatak 2.11). Veze između starih i novih koordinata iznose:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Gornja jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 - 2x'y') + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + 2x'y') \\ + (x'^2 - y'^2) + 2\sqrt{2}(x' - y') - 2\sqrt{2}(x' + y') + 4 = 0, \end{aligned}$$

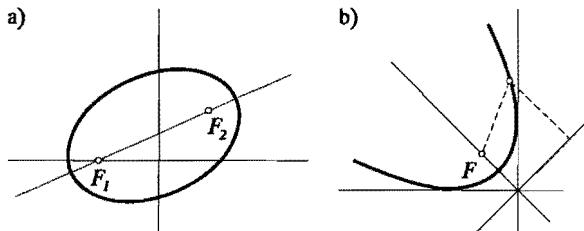
odnosno $2x'^2 - 4\sqrt{2}y' + 4 = 0$ te u novom sustavu dobivamo jednadžbu parabole:

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{4}x'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ova parabola ima žarište $F(-1, 1)$ i ravnalicu $p \dots y = x$ (sl. 2.9.b). Zajista, svaka točka $z = (x, y)$ na paraboli ima svojstvo da se njene udaljenosti do žarišta F i do ravnalice p podudaraju:

$$d(z, F) = d(z, p) \iff |z + 1 - i| = \frac{x - y}{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}{\sqrt{2}},$$

što predstavlja početnu jednadžbu.



Slika 2.9.

2.2. Zadaci za vježbu

2.13. Odredi podskup kompleksne ravnine određen sa

- | | | |
|--|--------------------------------------|---------------------------------------|
| A. $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$; | B. $ z - 1 < z - i $; | C. $\operatorname{Re}(1 + z) = z $; |
| D. $ z - z_1 = z - z_2 $; | E. $ z = \operatorname{Im} z + 1$; | F. $ 2z > 1 + z^2 $. |

2.14. Odredi podskup kompleksne ravnine određen sa

- | | |
|--|--|
| A. $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; | B. $\operatorname{Im} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; |
| C. $ z - 3 + z + 3 = 8$; | D. $ z - i - z + i = 1$; |
| E. $ z - 3 - z + 3i = 5$; | F. $4 < z - 1 + z + 1 < 8$. |

2.15. Skiciraj sljedeće krivulje u C i naznači smjer kretanja po njima

- A. $z(t) = a e^{it} + \frac{1}{a} e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ($a > 0$);
 B. $z(t) = 1 + e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$; C. $z(t) = e^{2it} - 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
 D. $z(t) = \begin{cases} e^{\pi it}, & 0 \leq t \leq 1, \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 3; \end{cases}$ E. $z(t) = i \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
 F. $z(t) = 1 + i \cos^2 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2.16. Dokaži da tri međusobno različite točke z_1, z_2, z_3 leže na jednom pravcu ako i samo ako je $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ realan broj.

2.17. Dokaži da četiri međusobno različite točke z_1, z_2, z_3, z_4 leže na jednom pravcu ako i samo ako je $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ realan broj.

2.18. (Apolonijeva kružnica) Dokaži da za svaki pozitivni broj $k \neq 1$ jednadžba $|z - z_1| = k|z - z_2|$ predstavlja kružnicu. Odredi njen središte i polumjer.

2.19. Neka je a kompleksan, te b realan broj. Dokaži da jednadžbe $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, $\bar{a}z - a\bar{z} + ib = 0$ definiraju pravce.

2.20. Pokaži da jednadžba pravca koji prolazi točkama z_1, z_2 glasi

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.21. Dokaži da jednadžba kružnice koja je određena s tri točke z_1, z_2, z_3 , glasi

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.22. Kružnica prolazi kroz tri nekolinearne točke z_1, z_2, z_3 . Pokaži da se njen središte z_0 i polumjer r mogu izračunati formulama

$$z_0 = -\frac{D_1}{D}, \quad r^2 = |z_0|^2 - \frac{D_2}{D},$$

gdje je

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} |z_1|^2 & z_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} |z_1|^2 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.23. Odredi kompleksan broj koji se dobije rotacijom broja $2 - 5i$ oko ishodišta, za kut $\pi/2$.

2.24. Za koji kut treba zaratirati broj $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ da se dobije broj $5 - i$?

- 2.25.** Odredi koordinate točke $T(1, 2)$ u sustavu zarotiranom za 20° .
- 2.26.** Odredi kut za koji treba zarotirati sustav xOy da bi sljedeće krivulje drugog reda u novom sustavu imale osi paralelne s koordinatnim osima. Nacrtaj te krivulje.
- A. $x^2 + 2y^2 - 3xy - 10 = 0$; B. $x^2 - y^2 + xy - 10 = 0$;
 C. $x^2 + xy - 4 = 0$.
- 2.27.** Ako vrijedi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, pokaži da su točke z_1 , z_2 , z_3 vrhovi jednakostraničnog trokuta upisanog u jediničnu kružnicu.
- 2.28.** z_1 je vrh pravilnog n -terokuta čije je središte točka $z = z_0$. Odredi preostale vrhove.
- 2.29.** Neka su z_1, \dots, z_n vrhovi pravilnog n -terokuta upisanog u kružnicu $\{|z| = 1\}$, te z proizvoljna točka s te kružnice. Dokaži da vrijedi

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = 2n.$$

- 2.30.** Nadji najveću i najmanju vrijednost modula broja z za kojeg je $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$, ($a > 0$).

3.

Nizovi i redovi kompleksnih brojeva

3.1. Nizovi kompleksnih brojeva

Sa $\{z_n\}$ ćemo označavati niz (slijed) kompleksnih brojeva. Pojam konvergencije toga niza definira se po analogiji kao za realne nizove: kažemo da niz $\{z_n\}$ konvergira ka broju $z_0 \in \mathbb{C}$, ako se u svakoj okolini broja z_0 nalaze svi članovi tog niza, s izuzetkom možda njih konačno mnogo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \implies |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Pišemo $z_n \rightarrow z_0$, $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ili kraće $z_0 = \lim z_n$.

z_0 je gomilište niza $\{z_n\}$ ako se u svakoj okolini broja z_0 nalazi beskonačno mnogo članova tog niza. Tada postoji podniz $\{z_{n_k}\}$ niza $\{z_n\}$ koji konvergira prema z_0 .

Konvergencija niza kompleksnih brojeva može se svesti na konvergenciju realnih nizova koje čine realni i imaginarni dijelovi. Neka je $z_n = x_n + iy_n$. Tada niz $\{z_n\}$ konvergira ako i samo ako konvergiraju realni nizovi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, i vrijedi $\lim z_n = \lim x_n + i \lim y_n$.

Vrijedi donekle i slična tvrdnja za trigonometrijski prikaz kompleksnog broja:

3.1. Neka je $z \in \mathbb{C}$, $\arg z \neq 0$. Dokaži da $z_n \rightarrow z$ ako i samo ako $|z_n| \rightarrow |z|$ i $\arg z_n \rightarrow \arg z$.

RJEŠENJE. Dovoljnost je očigledna: stavimo $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $z = r e^{i\varphi}$. Ako $r_n \rightarrow r$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$, tada, koristeći trigonometrijski prikaz kompleksnog broja i neprekidnost trigonometrijskih funkcija, dobivamo

$$z_n = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \rightarrow r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z.$$

Primijetimo da ovdje uvjet $\arg z \neq 0$ nije potreban.

Nužnost ćemo pokazati koristeći dvije ocjene.

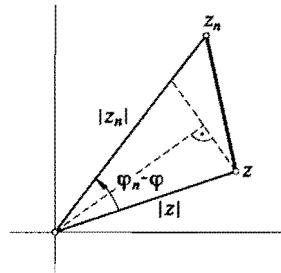
Najprije, vrijedi

$$|r_n - r| = ||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|.$$

Zato $z_n \rightarrow z$ povlači $r_n \rightarrow r$.

Pretpostavimo da $\{\varphi_n\}$ ne konvergira ka φ . Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $|\varphi_n - \varphi| > \delta$. Sa sl. 3.1. ocjenjujemo

$$\sin \frac{|\varphi_n - \varphi|}{2} \leq \frac{|z_n - z|}{2|z|}$$



Sl. 3.1.

$$\text{i zato } |z_n - z| \geq 2|z| \sin \frac{|\varphi_n - \varphi|}{2} \geq 2|z| \sin \frac{\delta}{2}.$$

Prema tome, ako vrijedi $z_n \rightarrow z$, tada mora biti i $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

Ovdje smo koristili uvjet $\arg z \neq 0$. Inače tvrdnja nije istinita, pošto se može dogoditi da dvije bliske točke blizu pozitivnog dijela realne osi imaju argumente koji se razlikuju skoro za 2π .

3.2.

Dokaži da vrijedi

$$\text{A. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n = \cos \varphi + i \sin \varphi;$$

$$\text{B. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy.$$

RJEŠENJE. A. Stavimo $z_n = \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n$. Odrediti ćemo modul r_n i argument φ_n broja z_n i pokazati da vrijedi $r_n \rightarrow 1$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Rezultat tada slijedi po prethodnom zadatku.

$$r_n = \left| \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n \right| = \left| 1 + \frac{i\varphi}{n} \right|^n = \left[1 + \left(\frac{\varphi}{n}\right)^2 \right]^{n/2} \rightarrow 1.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \arg \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n = n \cdot \arg \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right) \\ &= n \arctg \frac{\varphi}{n} \rightarrow \varphi \quad \text{kad } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zato $z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \rightarrow 1(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

B. Iskoristit ćemo prethodni rezultat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{iy}{n(1+x/n)}\right]^n \\ &= e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{iy}{n+x}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

3.3.

Dokaži da su sljedeći nizovi konvergentni i izračunaj im limese:

A. $\left\{ \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right\}, \quad |a| \neq 1;$

B. $\left\{ \frac{1}{n}(1+e^{i\varphi}+\dots+e^{in\varphi}) \right\}, \quad 0 < \varphi < 2\pi;$

C. $\left\{ \frac{1}{n+1}(n+1+nz+(n-1)z^2+\dots+z^n) \right\}, \quad |z| \leq 1, z \neq 1.$

RJEŠENJE. A. Za $|a| < 1$ vrijedi ocjena

$$\left| \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right| \leq \frac{|a|^n}{1-|a|^{2n}} = \frac{1}{1+|a|^n} \cdot \frac{|a|^n}{1-|a|^n}.$$

Kad $n \rightarrow \infty$, tada $|a|^n \rightarrow 0$. Specijalno, za $n \geq n_0$ vrijedi $|a|^n < 1/2$. Za takve n je

$$\left| \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right| < 2|a|^n \rightarrow 0.$$

Za $|a| > 1$ možemo postupiti ovako:

$$\left| \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right| \leq \frac{|a|^n}{|a|^{2n}-1} = \frac{|a|^n}{|a|^n+1} \cdot \frac{1}{|a|^n-1} < \frac{1}{|a|^n-1} \rightarrow 0.$$

U oba slučaja, traženi je limes 0.

B. Vrijedi $z_n := \frac{1}{n}(1+e^{i\varphi}+\dots+e^{in\varphi}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e^{i(n+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$ i zato

$$\begin{aligned} |z_n| &= \frac{1}{n} \cdot \frac{|1-e^{i(n+1)\varphi}|}{|1-e^{i\varphi}|} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1+|e^{i(n+1)\varphi}|}{|1-\cos\varphi-i\sin\varphi|} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{[(1-\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2]^{1/2}} \rightarrow 0 \quad \text{kad } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dakle, $z_n \rightarrow 0$.

C. Izračunajmo n -ti član niza na sljedeći način:

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{n+1}(n+1+nz+\dots+z^n) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+z+\dots+z^k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1-z^{k+1}}{1-z} \\ &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1-z^{k+1}) \\ &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{n+1} \left[n - \sum_{k=0}^n z^{k+1} \right] \\ &= \frac{1}{1-z} \frac{1}{n+1} \left[n - z \cdot \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right] \\ &= \frac{1}{1-z} \left[\frac{n}{n+1} - \frac{z}{1-z} \cdot \frac{1-z^{n+1}}{n+1} \right] \rightarrow \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

3.4.

Neka je $\lim z_n = A$, $A \neq \infty$. Dokaži da je tada

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = A$;

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + 2z_2 + \dots + nz_n}{n(n+1)/2} = A$;

C. Neka je $a_n > 0$ takav da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Dokaži

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = A.$$

RJEŠENJE. Dovoljno je pokazati C. Po definiciji limesa, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|z_n - A| < \varepsilon/2$ čim je $n \geq n_0$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 z_1 + \dots + a_n z_n}{a_1 + \dots + a_n} - A \right| &\leq \frac{|a_1(z_1 - A)| + \dots + |a_n(z_n - A)|}{a_1 + \dots + a_n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n_0} a_k |z_k - A|}{a_1 + \dots + a_n} + \frac{\sum_{k=n_0+1}^n a_k |z_k - A|}{a_1 + \dots + a_n} \\ &\leq \frac{M}{a_1 + \dots + a_n} + \frac{\varepsilon(a_{n_0+1} + \dots + a_n)/2}{a_1 + \dots + a_n} \\ &\leq \frac{M}{a_1 + \dots + a_n} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

gdje je M konstanta koja ne ovisi o n . Za dovoljno veliki n ovaj je izraz manji od ε .

3.5.

Neka je $|z| < 1$. Dokaži da je niz $\{w_n\}$ definiran sa

$$w_n = \frac{1}{2n+1} (2n+1 - (2n-1)z^2 + (2n-3)z^4 + \dots + (-1)^n z^{2n})$$

konvergentan i izračunaj mu limes.

RJEŠENJE. Definirajmo

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 1 - z^2$$

 \vdots

$$z_{n+1} = 1 - z^2 + \dots + (-1)^n z^{2n}.$$

Tada je $z_{n+1} = \frac{1 + (-1)^n z^{2n+2}}{1 + z^2}$ i ovaj niz konvergira prema $\frac{1}{1+z^2}$. Kako je

$$w_n = \frac{1}{2n+1} (2z_1 + 2z_2 + \dots + 2z_n + z_{n+1})$$

to, po Zadatku 3.4.C, niz $\{w_n\}$ ima isti limes kao i niz $\{z_n\}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{1}{1+z^2}$. Riješi na isti način i Zadatak 3.3.C.

3.2. Redovi kompleksnih brojeva

Red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je **konvergentan**, ako niz parcijalnih suma $\{S_n\}$, $S_n = z_1 + \dots + z_n$ ima konačan limes. Taj se limes naziva **suma reda**. Red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je **apsolutno konvergentan**, ako konvergira red pozitivnih brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Svaki apsolutno konvergentni red konvergira. Obrat ne vrijedi. Za red koji konvergira ali ne konvergira apsolutno, kažemo da **konvergira uvjetno**.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira ako i samo ako je **Cauchyjev**, tj. ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n > m$ vrijedi

$$\left| \sum_{k=m}^n z_k \right| < \varepsilon.$$

Neka je $z_n = x_n + iy_n$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira ako i samo ako konvergiraju redovi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. U tom slučaju za njihove sume vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira, tada mora vrijediti $\lim |z_n| = 0$, tj. $\lim z_n = 0$. Taj se uvjet naziva **nužan uvjet** za konvergenciju reda: ako je $\lim z_n \neq 0$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergira.

Pri ispitivanju apsolutne konvergencije obično koristimo **tzv. kriterije konvergencije**:

1. D'Alambertov kriterij. Ako je

$$\rho := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$$

tada red konvergira (apsolutno). Ako pak postoji

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

tada red konvergira za $\rho < 1$, divergira za $\rho > 1$. Za $\rho = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.

2. Cauchyjev kriterij. Ako je

$$\rho := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$$

tada za $\rho < 1$ red konvergira (apsolutno), a za $\rho > 1$ red divergira. Za $\rho = 1$ nema odluke.

3. Raabeov kriterij. Ako je

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| - 1 \right)$$

tada za $\beta > 1$ red konvergira (apsolutno), a za $\beta < 1$ red divergira.

4. Gaussov kriterij. Ako je

$$\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| = \alpha + \frac{\beta}{n} + r(n)$$

pri čemu su α , β brojevi neovisni o n i $\frac{r(n)}{n} \rightarrow 0$, tada red konvergira (apsolutno) ako je $\alpha > 1$ ili pak $\alpha = 1$ i $\beta > 1$. Za $\alpha < 1$ ili $\alpha = 1$ i $\beta \leq 1$ red divergira.

5. Kriterij usporedbe. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red pozitivnih brojeva i ako vrijedi

$$|z_n| \leq a_n$$

čim je $n \geq n_0$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira apsolutno.

3.6. Ispitaj ponašanje redova

$$\text{A. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}; \quad \text{B. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}; \quad \text{C. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i/n}}{n}.$$

RJEŠENJE. A. Vrijedi

$$|z_n| = \frac{1}{|n+i|^2} = \frac{1}{n^2+1}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergira, to zadani red konvergira apsolutno.

B. Ovaj red ne konvergira apsolutno. Vrijedi

$$\frac{(-1)^n}{n+i} = (-1)^n \frac{n}{n^2+1} + i \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ konvergira uvjetno, a red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ konvergira apsolutno. Zato zadani red konvergira uvjetno.

C. Sada je $\frac{e^{i/n}}{n} = \frac{\cos 1/n}{n} + i \frac{\sin 1/n}{n}$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 1/n}{n}$ divergira (jer je usporeljiv s harmonijskom redom). Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 1/n}{n}$ konvergira. Zadani red divergira pošto ne konvergira red njegovih realnih dijelova.

3.7.

Dokaži da sljedeći redovi konvergiraju apsolutno:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad |z| < e;$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n, \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad |z| < 1;$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}, \quad \operatorname{Re} z > 1;$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^n \right)^2, \quad |z| < 1.$

RJEŠENJE. A. Iskoristit ćemo d'Alembertov kriterij. Stavimo $z_n = \frac{n!}{n^n} z^n$. Tada je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n! z^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} |z| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + 1/n\right)^n} = \frac{|z|}{e}. \end{aligned}$$

Za $|z| < e$ ovaj je kvocijent manji od 1 i red konvergira apsolutno.

B. Po Cauchyjevom kriteriju,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^\alpha z^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| (\sqrt[n]{n})^\alpha = |z| < 1$$

i red konvergira apsolutno.

C. Sada vrijedi $\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| = \frac{|z+n+1|}{n+1}$. Zato

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{|z+n+1| - (n+1)}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |(x+n+1) + iy| - (n+1) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{(x+n+1)^2 + y^2} - (n+1) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+n+1)^2 + y^2 - (n+1)^2}{\sqrt{(x+n+1)^2 + y^2} + n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x(n+1) + y^2}{\sqrt{(x+n+1)^2 + y^2} + n+1} = x. \end{aligned}$$

Po Raabeovom kriteriju, red će konvergirati apsolutno ako je $x = \operatorname{Re} z > 1$. Primjeti da d'Alembertov kriterij ne daje odluke.

D. Sada je

$$\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| = \left(\frac{2n+2}{(2n+1)|z|} \right)^2.$$

Dokazati ćemo apsolutnu konvergenciju koristeći Gaussov kriterij:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| &= \frac{1}{|z|^2} \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{|z|^2} \left(1 + \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \alpha + \frac{\beta}{n} + r(n). \end{aligned}$$

Ovaj prikaz vrijedi uz izbor $\alpha = 1/|z|^2$, $\beta = 1/(2|z|^2)$. Kako je $\alpha > 1$, to red konvergira apsolutno.

Pri ispitivanju konvergencije redova koji konvergiraju uvjetno (ali i ne samo njih) koristimo najčešće sljedeću **Abelovu transformaciju**: Neka su $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ nizovi kompleksnih brojeva i $S_n := a_1 + \dots + a_n$, $S_0 := 0$. Tada za sve m , $n \in \mathbb{N}$, $m < n$ vrijedi

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) - S_{m-1}b_m + S_n b_n. \quad (3.1)$$

Po smislu, ova formula odgovara metodi parcijalne integracije. Dokažimo formulu (3.1)!

Transformirati ćemo desnu stranu u (3.1), tako da promijenimo poredak sumiranja:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^k a_j \right) (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1}b_m + S_n b_n \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} a_j \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + \sum_{j=m}^{n-1} a_j \sum_{k=j}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1}b_m + S_n b_n \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} a_j (b_m - b_n) + \sum_{j=m}^{n-1} a_j (b_j - b_n) - S_{m-1}b_m + S_n b_n \\ &= S_{m-1}b_m - S_{m-1}b_n + \sum_{j=m}^{n-1} a_j b_j - (S_{n-1} - S_{m-1})b_n - S_{m-1}b_m + S_n b_n \\ &= \sum_{j=m}^{n-1} a_j b_j + b_n (S_n - S_{n-1}) = \sum_{j=m}^n a_j b_j \end{aligned}$$

3.8.

Dirichletov test. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ red kompleksnih brojeva za kojeg je niz parcijalnih suma $S_n = z_1 + \dots + z_n$ omeđen: postoji $M < \infty$ takav da vrijedi

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je nadalje $\{c_n\}$ niz pozitivnih brojeva koji teži monotono ka nuli. Dokaži da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ konvergira.

RJEŠENJE. Iskoristit ćemo Abelovu transformaciju (3.1). Neka je $m < n$.

$$\left| \sum_{k=m}^n c_k z_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |S_k|(c_k - c_{k+1}) + |S_{m-1}|c_m + |S_n|c_n.$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Izaberimo m dovoljno velik da bude $c_m < \epsilon/2M$. Kako je $|S_k| < M$ za svaki k , to imamo za svaki $n > m$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n c_k z_k \right| &\leq M \sum_{k=m}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) + M(c_m + c_n) \\ &= M(c_m - c_n) + M(c_m + c_n) = 2c_m M < \epsilon. \end{aligned}$$

Dakle, red $\sum c_k z_k$ je Cauchyjev, pa stoga i konvergentan.

3.9.

Abelov test. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergentan red kompleksnih brojeva, a $\{c_n\}$ monoton i ograničen niz realnih brojeva. Dokaži da tada red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ konvergira.

RJEŠENJE. Možemo pretpostaviti, bez smanjenja općenitosti, da je niz $\{c_n\}$ rastući. Iskoristit ćemo ponovo Abelovu transformaciju:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n c_k z_k \right| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |S_k|(c_k - c_{k+1}) + |S_n c_n - S_{m-1} c_m| \\ &\leq \max_{m \leq k \leq n-1} |S_k| \sum_{k=m}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) + |(S_n - S_{m-1})c_n + S_{m-1}(c_n - c_m)| \\ &\leq \max_{m \leq k \leq n-1} |S_k|(c_m - c_n) + |(S_n - S_{m-1})|c_n + |S_{m-1}|(c_n - c_m). \end{aligned}$$

Pokažimo da članove s desne strane možemo učiniti po volji malenima, za dovoljno velike n i m . Najprije, niz $\{S_n\}$ je konvergentan i stoga omeđen nekom konstantom M . Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno malen i unapred zadan. Za dovoljno veliki m i $n > m$ je razlika $|S_n - S_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^n z_k \right|$ manja od ϵ pošto je $\sum z_k$ po pretpostavci konvergentan. Također, niz $\{c_n\}$ je monoton, omeđen nekom

konstantom C i stoga konvergentan. Zato je i razlika $c_n - c_m$ manja od ε za dovoljno velike n i m . Tako dobivamo ocjenu

$$\left| \sum_{k=m}^n c_k z_k \right| \leq M\varepsilon + \varepsilon C + M\varepsilon$$

i odavde slijedi konvergencija tog reda.

- 3.10.** Neka je $0 < \varphi < 2\pi$ i $\{a_n\}$ rastući niz pozitivnih realnih brojeva koji teži u ∞ . Dokaži da tada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{a_n}$ konvergira.

RJEŠENJE. Iskoristiti ćemo Dirichletov test. Prikažimo zadani red u obliku $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ uz izbor $c_n = 1/a_n$, $z_n = e^{in\varphi}$. Tada je $\{c_n\}$ niz pozitivnih brojeva koji teži monotono u nulu. Po Zadatku 3.8 dovoljno je pokazati da je niz $S_n = z_1 + \dots + z_n$ omeđen. Vrijedi

$$S_n = e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{in\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

te je

$$\begin{aligned} |S_n| &= \frac{[(1 - \cos n\varphi)^2 + (\sin n\varphi)^2]^{1/2}}{|1 - e^{i\varphi}|} \\ &= \frac{[4 \sin^2 n\varphi/2]^{1/2}}{|1 - e^{in\varphi}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|} = M. \end{aligned}$$

Za $0 < \varphi < 2\pi$ je $M < \infty$ i tvrdnja slijedi.

- 3.11.** Neka za niz $\{a_n\}$ kompleksnih brojeva vrijedi $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$. Stavimo $S_n = a_0 + \dots + a_n$. Dokaži da za $|z| < 1$ redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$ konvergiraju, te da za njihove sume vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (3.2)$$

RJEŠENJE. Vrijedi

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq |z| < 1.$$

Po Cauchyjevom kriteriju, red $\sum a_n z^n$ konvergira apsolutno. Sada je

$$\begin{aligned} (1-z)(S_0 + S_1 z + \dots + S_n z^n) \\ = S_0 + z(S_1 - S_0) + z^2(S_2 - S_1) + \dots + z^n(S_n - S_{n-1}) - S_n z^{n+1}. \end{aligned}$$

Odavde

$$\sum_{k=0}^n S_k z^k = \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^n a_k z^k - \frac{z^{n+1}}{1-z} S_n.$$

Pustimo da n teži ka ∞ . Kako je $\limsup |a_n| \leq 1$, to za dovoljno velike n vrijedi $|S_n| \leq n+1$ i zato $z^{n+1}S_n \rightarrow 0$ kad $n \rightarrow \infty$, pošto je $|z| < 1$. Stoga desna strana, a s tim i lijeva, teži ka $\frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

3.12. Izračunaj sumu redova

A. $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) z^n, \quad |z| < 1;$

B. $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad |z| < 1.$

RJEŠENJE. A. Iskoristiti ćemo formulu (3.2). Stavimo $a_n = e^{in\varphi}$. Vrijedi $|a_n| = 1$ i ispunjen je uvjet Zadatka 3.11. Zato je

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} z^n \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\varphi} z)^n = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1 - e^{i\varphi} z}. \end{aligned}$$

B. Stavimo ovdje $a_0 = 0$, $a_n = 1$ za $n \geq 1$. Tada je $S_n = n$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{z}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

3.3. Zadataci za vježbu

3.13. Dokaži da su sljedeći nizovi konvergentni i izračunaj im limes:

A. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} (1 - e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} - \dots + (-1)^n e^{ni\varphi}) \right\}, \quad 0 < \varphi < 2\pi;$

B. $\left\{ \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{n-k}{n}} z^k \right\}, \quad |z| < 1.$

3.14. Dokaži da točke gomilanja niza $\{e^{in}\}$ čine kružnicu $\{|z| = 1\}$.

3.15. Dokaži da točke gomilanja niza $\left\{ \frac{1}{n} (1^{i\alpha} + 2^{i\alpha} + \dots + n^{i\alpha}) \right\}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$) čine kružnicu $\{|z| = 1/\sqrt{1 + \alpha^2}\}$. (Tu je $n^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln n}$.)

- 3.16.** Dokaži da točke gomilanja niza $\{c_n\}$, $c_n := \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{i}{k}\right)$ leže na kružnici $|z| = \sqrt{2 \operatorname{sh} \pi / \pi}$.
- 3.17.** Ispitaj konvergenciju redova (vidi u sljedećem poglavlju definiciju i svojstva elementarnih funkcija kompleksne varijable)
- A. $\sum \frac{\cos(in)}{2^n};$ B. $\sum \frac{n \sin(in)}{3^n};$ C. $\sum \frac{\cos(in^2)}{5^{n^2}};$
 D. $\sum \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}};$ E. $\sum \frac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}};$ F. $\sum \frac{(1+i)^n}{2^{n/2} \cos(in)};$
 G. $\sum \frac{\operatorname{sh}(i\sqrt{n})}{\sin(in)};$ H. $\sum \frac{\ln(n)}{\operatorname{sh}(in)};$ I. $\sum \frac{\operatorname{ch} i\pi/n}{n^{\ln n}};$
 J. $\sum \frac{n}{\operatorname{tg}(i\pi n)}.$
- 3.18.** Ispitaj konvergenciju sljedećih redova
- A. $\sum \frac{n}{(2i)^n};$ B. $\sum \frac{n!}{(in)^n};$ C. $\sum e^{in};$ D. $\sum \frac{e^{in}}{n}.$
- 3.19.** Dokaži da sljedeći redovi konvergiraju apsolutno
- A. $\sum \frac{n! z^n}{n^{n+p}}, \quad |z| < e;$
 B. $\sum \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \frac{z^n}{1+z^n}, \quad |z| \leq \frac{1}{4};$
 C. $\sum \frac{1}{(n+z) \ln^2 n}, \quad z \neq -2, -3, \dots;$
 D. $\sum \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}, \quad \operatorname{Re} z < -1;$
 E. $\sum \frac{n!}{(z+2)(z+4)\cdots(z+2n)}, \quad z \neq -2, -4, \dots;$
 F. $\sum \frac{2^n n!}{(z+1)(z+3)\cdots(z+2n-1)}, \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2};$
 G. $\sum \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0.$
 (hipergeometrijski red)
- 3.20.** Ako konvergiraju redovi $\sum z_k$ i $\sum |w_{k+1} - w_k|$, dokaži da tada konvergira i red $\sum z_k w_k$.
- 3.21.** Ako red $\sum z_n$ konvergira i ako pri tom vrijedi $|\arg z_n| \leq \alpha < \pi/2$, dokaži da tada red $\sum z_n$ konvergira apsolutno.
- 3.22.** Dokaži da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ konvergira za $|z| < 1$, a divergira za $|z| \geq 1$.
- 3.23.** Dokaži da se iz beskonačnog ograničenog niza može odabrati konvergentan podniz.

4.

Elementarne funkcije

Neka je $G \subset \mathbb{C}$ područje i $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ zadana funkcija. Za f kažemo da je funkcija kompleksne varijable. Obično pišemo $w = f(z)$ i kažemo da f preslikava točke kompleksne z -ravnine u točke kompleksne w -ravnine.

Dajemo popis nekih elementarnih funkcija

1. Polinom n -tog stupnja:

$$P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0.$$

2. Racionalna funkcija:

$$w = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}.$$

3. Eksponencijalna funkcija $z \mapsto \exp(z)$ definirana je za svaki $z \in \mathbb{C}$ sumom apsolutno-konvergentnog reda

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.1)$$

Uobičajeno je pisati i e^z umjesto $\exp(z)$. Eksponencijalna funkcija ima svojstva:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

$$e^{2\pi i} = 1,$$

i stoga je $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$, tj. $z \mapsto e^z$ je periodička s periodom $2\pi i$.

4. Trigonometrijske funkcije $z \mapsto \sin z$, $z \mapsto \cos z$ definirane su redovima

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (4.2)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (4.3)$$

koji apsolutno konvergiraju za svaki $z \in \mathbb{C}$. One su periodičke s realnim periodom 2π i imaju samo realne nul točke. Vrijedi Eulerova formula

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (4.4)$$

Odavde dobivamo

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad (4.5)$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}). \quad (4.6)$$

Funkcije $z \mapsto \operatorname{tg} z$, $z \mapsto \operatorname{ctg} z$ definirane su poput realnih funkcija sa

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Za trigonometrijske funkcije kompleksne varijable vrijede sve uobičajene formule koje vrijede za realne trigonometrijske funkcije.

5. **Hiperboličke funkcije** $z \mapsto \operatorname{sh} z$, $z \mapsto \operatorname{ch} z$, $z \mapsto \operatorname{th} z$, $z \mapsto \operatorname{cth} z$ definiraju se poput realnih funkcija formulama

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &:= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), & \operatorname{ch} z &:= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \\ \operatorname{th} z &:= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cth} z &:= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Za njih također vrijede sve formule kao i za odgovarajuće funkcije na realnom području.

6. **Logaritamska funkcija** $z \mapsto \operatorname{Ln} z$ definirana je na $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije. To je dakle višeznačna funkcija zadana formulom:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z &:= \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \\ &= \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pri tom je $\ln |z|$ realna logaritamska funkcija pozitivnog broja $|z|$. Za $k = 0$ dobivamo glavnu vrijednost višeznačne funkcije Ln :

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z.$$

7. **Opća potencija** $z \mapsto z^a$, kao i opća eksponencijalna funkcija $z \mapsto a^z$, gdje je $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, definiraju se formulama

$$z^a := e^{a \operatorname{Ln} z}, \quad (4.9)$$

$$a^z := e^{z \operatorname{Ln} a}. \quad (4.10)$$

To su višeznačne funkcije s glavnim vrijednostima $e^{a \operatorname{Ln} z}$, odnosno $e^{z \operatorname{Ln} a}$.

8. **Arkus funkcije** definirane su kao inverzne trigonometrijskim, a **Area funkcije** kao inverzne hiperboličkim. Npr.

$$w := \operatorname{Arc} \sin z \iff z = \sin w,$$

$$w := \operatorname{Ar} \operatorname{sh} z \iff z = \operatorname{sh} w.$$

To su višeznačne funkcije. Za njihov eksplisitni prikaz vidi zadatak 4.14.

Neka je $w = f(z)$. Prikažimo z i w u algebarskom obliku: $z = x + iy$, $w = u + iv$. Tada su u , v realne funkcije dviju realnih varijabli x , y i funkcija f je potpuno određena parom realnih funkcija (u, v) :

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ponekad je prikladnije prikazati z u eksponencijalnom (ili trigonometrijskom) obliku: $z = r e^{i\varphi}$. Tada će u , v biti realne funkcije realnih varijabli r , φ :

$$w = f(z) = f(r e^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi).$$

Ako pak w prikažemo u trigonometrijskom obliku, $w = R e^{i\Phi}$, imat ćemo npr.

$$w = f(z) = f(x + iy) = R(x, y) e^{i\Phi(x, y)}$$

ili pak

$$w = f(z) = f(r e^{i\varphi}) = R(r, \varphi) e^{i\Phi(r, \varphi)}.$$

4.1. Prikaži u algebarskom ili trigonometrijskom obliku funkcije

- | | | |
|---------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| A. $w = z^3;$ | B. $w = \frac{1}{z} + \bar{z} + 1;$ | C. $w = \frac{z - 1}{z + 1};$ |
| D. $w = z^n;$ | E. $w = e^z.$ | |

RJEŠENJE. A. Stavimo $z = x + iy$, $w = u + iv$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} u + iv &= (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3). \end{aligned}$$

Prema tome, realni i imaginarni dijelovi funkcije $w = f(z)$ su

$$u = u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v = v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

B.

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{x + iy} + \overline{(x + iy)} + 1 = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} + (x - iy) + 1 \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + x + 1 + i \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} - y \right) \end{aligned}$$

te je

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} + x + 1, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2} - y.$$

C.

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{x + iy - 1}{x + iy + 1} = \frac{x - 1 + iy}{x + 1 + iy} \cdot \frac{x + 1 - iy}{x + 1 - iy} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1) + y^2 + iy(x + 1) - iy(x - 1)}{(x + 1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

i dobivamo

$$u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}, \quad v = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

D. U ovom je slučaju jednostavnije uzeti prikaz $z = r e^{i\varphi}$. Tada ćemo dobiti

$$u + iv = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Dakle,

$$u = u(r, \varphi) = r^n \cos n\varphi,$$

$$v = v(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi.$$

Ako prikažemo $w = R e^{i\Phi}$, tada iz $R e^{i\Phi} = r^n e^{in\varphi}$ slijedi

$$R = R(r, \varphi) = r^n, \quad \Phi = \Phi(r, \varphi) = n\varphi.$$

E. Izaberimo prikaze $z = x + iy$, $w = u + iv$:

$$u + iv = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

te je

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

U slučaju prikaza $w = R e^{i\Phi}$, dobivamo $R e^{i\Phi} = e^x e^{iy}$ te je

$$R = R(x, y) = e^x, \quad \Phi = \Phi(x, y) = y.$$

4.2. Uvjeri se da vrijedi

$$\begin{array}{ll} \sin iz = i \operatorname{sh} z, & \operatorname{sh} iz = i \sin z, \\ \cos iz = \operatorname{ch} z, & \operatorname{ch} iz = \cos z, \\ \operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z, & \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z, \\ \operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z, & \operatorname{cth} iz = -i \operatorname{ctg} z. \end{array}$$

RJEŠENJE. Po formuli (4.5) izlazi

$$\begin{aligned} \sin iz &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} (e^{-z} - e^z) \\ &= -\frac{i}{2} (e^{-z} - e^z) = \frac{i}{2} (e^z - e^{-z}) = i \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Dokaži na sličan način i ostale relacije.

4.3. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih funkcija:

A. $w = \sin z$; B. $w = e^{z^2}$; C. $w = \operatorname{ch}(z - i)$.

RJEŠENJE. Funkciju w je potrebno prikazati u obliku $w = u + iv$, uvezši $z = x + iy$. A.

$$\begin{aligned} w &= \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Dakle,

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y.$$

B.

$$\begin{aligned} w &= e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2} e^{i2xy} \\ &= e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy). \end{aligned}$$

Dakle,

$$u = e^{x^2-y^2} \cos 2xy, \quad v = e^{x^2-y^2} \sin 2xy.$$

C.

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{ch}(z - i) = \operatorname{ch}(x + iy - i) = \operatorname{ch}[x + i(y - 1)] \\ &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch}[i(y - 1)] + \operatorname{sh} x \operatorname{sh}[i(y - 1)] \\ &= \operatorname{ch} x \cos(y - 1) + i \operatorname{sh} x \sin(y - 1). \end{aligned}$$

Dakle, $u = \operatorname{ch} x \cos(y - 1)$, $v = \operatorname{sh} x \sin(y - 1)$.

4.4. Odredi modul i glavnu vrijednost argumenta zadanih funkcija u zadanim točkama:

A. $w = \sin z$, $z_0 = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$;

B. $w = (z - \pi)e^z$, $z_1 = \pi$;

C. $w = \operatorname{ch}^2 z$, $z_2 = i \ln 3$.

RJEŠENJE. A.

$$\begin{aligned} w(z_0) &= \sin[\pi + i \ln(2 + \sqrt{5})] \\ &= \sin \pi \cos[i \ln(2 + \sqrt{5})] + \cos \pi \sin[i \ln(2 + \sqrt{5})] \\ &= -\sin[i \ln(2 + \sqrt{5})] = -i \operatorname{sh}[\ln(2 + \sqrt{5})] \\ &= -i \cdot \frac{1}{2} (e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}) \\ &= -\frac{i}{2} \left(2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}} \right) = -\frac{i}{2} \cdot \frac{8 + 4\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = -2i. \end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi

$$r = |w(z_0)| = |-2i| = 2,$$

$$\varphi = \arg w(z_0) = \arg(-2i) = 3\pi/2.$$

B.

$$\begin{aligned} w(z_1) &= (\pi i - \pi)e^{\pi i} = \pi(i-1)(\cos \pi + i \sin \pi) \\ &= -\pi(i-1) = \pi - \pi i. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} r &= |w(z_1)| = |\pi - \pi i| = \pi\sqrt{2}, \\ \varphi &= \arg w(z_1) = \arg(\pi - \pi i) = \arctg(-1) = 7\pi/4. \end{aligned}$$

C.

$$w(z_2) = \operatorname{ch}^2(i \ln 3) = \cos^2(\ln 3) \implies \begin{cases} r = |w(z_2)| = \cos^2(\ln 3), \\ \varphi = \arg w(z_2) = 0. \end{cases}$$

4.5.

Odredi logaritme sljedećih brojeva:

- A. 1 ; B. $-1 - i$; C. i^i .

RJEŠENJE. A.

$$\operatorname{Ln} 1 = \ln |1| + i(\arg 1 + 2k\pi) = 0 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

B.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(-1 - i) &= \ln |-1 - i| + i[\arg(-1 - i) + 2k\pi] \\ &= \ln \sqrt{2} + i(5\pi/4 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

C. U ovom slučaju moramo biti oprezni jer je općenito $\operatorname{Ln} a^b \neq b \operatorname{Ln} a$! Po definiciji opće potencije je

$$\begin{aligned} i^i &= \exp(i \operatorname{Ln} i) = \exp\{i[\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi)]\} \\ &= \exp\{i[\ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi)]\} = \exp\{-(\pi/2 + 2k\pi)\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} i^i &= \operatorname{Ln} \exp\{-(\pi/2 + 2k\pi)\} \\ &= \ln |\exp\{-(\pi/2 + 2k\pi)\}| + i(\arg \exp\{-(\pi/2 + 2k\pi)\} + 2m\pi) \\ &= \ln \exp\{-(\pi/2 + 2k\pi)\} + i(0 + 2m\pi) \\ &= -(\pi/2 + 2k\pi) + i2m\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Primjeti da je $i \operatorname{Ln} i = i[\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi)] = -\pi/2 + 2k\pi$ te je $\operatorname{Ln} i^i \neq i \operatorname{Ln} i$.

- 4.6.** Odredi modul i argument kompleksnih brojeva
 A. 10^i ; B. 3^{2-i} ; C. $w = 2^z$.

RJEŠENJE. A. Izračunajmo najprije broj 10^i .

$$\begin{aligned} 10^i &= e^{i \ln 10} = e^{i[\ln 10 + i(\arg 10 + 2k\pi)]} \\ &= e^{i(\ln 10 + i2k\pi)} = e^{i \ln 10} e^{-2k\pi} \\ &= e^{-2k\pi} (\cos(\ln 10) + i \sin(\ln 10)). \end{aligned}$$

Ovo je upravo trigonometrijski zapis broja 10^i pa odavde čitamo:

$$r = |10^i| = e^{-2k\pi}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} 10^i = \ln 10 + 2m\pi, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

B. Računamo kao u prošlom primjeru:

$$\begin{aligned} 3^{2-i} &= e^{(2-i)\ln 3} = e^{(2-i)(\ln |3| + i(\arg 3 + 2k\pi))} \\ &= e^{(2-i)(\ln 3 + i2k\pi)} \\ &= e^{2 \ln 3} e^{2k\pi} e^{i4k\pi} e^{-i \ln 3} = 9 e^{2k\pi} e^{i(-\ln 3)}. \end{aligned}$$

pošto je $e^{2 \ln 3} = 9$ i $e^{i4k\pi} = 1$. Gornji broj je upravo eksponencijalni zapis broja 3^{2-i} i zato možemo pročitati:

$$\begin{aligned} r &= |3^{2-i}| = 9 e^{2k\pi}, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ \varphi &= \operatorname{Arg} 3^{2-i} = -\ln 3 + 2m\pi, \quad m \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

C.

$$\begin{aligned} w = 2^z &= e^{z \ln 2} = e^{(x+iy) \ln 2} \\ &= \exp\{(x+iy)[\ln |2| + i(\arg 2 + 2k\pi)]\} \\ &= \exp\{x \ln 2 - 2k\pi y + i(y \ln 2 + 2k\pi x)\} \\ &= e^{x \ln 2} e^{-2k\pi y} [\cos(y \ln 2 + 2k\pi x) + i \sin(y \ln 2 + 2k\pi x)] \end{aligned}$$

i dobivamo

$$u = 2^x e^{-2k\pi y} \cos(y \ln 2 + 2k\pi x), \quad v = 2^x e^{-2k\pi y} \sin(y \ln 2 + 2k\pi x).$$

- 4.7.** Izračunaј (prikaži u algebarskom ili trigonometrijskom obliku)

- A. $i^{\sin i}$; B. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; C. $\operatorname{Arc sin} i$.

RJEŠENJE.

A.

$$\begin{aligned} i^{\sin i} &= i^{i \operatorname{sh} 1} = e^{i \operatorname{sh} 1 \cdot \ln i} \\ &= e^{i \operatorname{sh} 1 [\ln |i| + i(\arg i + 2k\pi)]} \\ &= e^{i \operatorname{sh} 1 [\ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi)]} = e^{-(\pi/2 + 2k\pi) \operatorname{sh} 1}, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

B. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} = \exp\left\{2i \ln \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}$. Izračunajmo najprije $\ln \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

$$\ln \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \ln \left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| + i(\arg \frac{1+i}{\sqrt{2}} + 2k\pi)$$

$$= \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Dakle

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} = e^{2i \cdot i(\pi/4+2k\pi)} = e^{-(\pi/2+4k\pi)}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

C. Označimo traženi broj sa w .

$$\operatorname{Arcsin} i = w \implies i = \sin w = \frac{1}{2i} (e^{iw} - e^{-iw}).$$

Množenjem sa e^{iw} nakon sređivanja dobivamo:

$$(e^{iw})^2 + 2e^{iw} - 1 = 0$$

sa rješenjima $e^{iw} = -1 \pm \sqrt{2}$. Prema tome,

$$w = \frac{1}{i} \ln(-1 \pm \sqrt{2}) = -i \ln(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Izračunavši obje vrijednosti $\ln(-1 + \sqrt{2})$, $\ln(-1 - \sqrt{2})$, dobivamo

$$\operatorname{Arcsin} i = \begin{cases} 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1) \\ \pi + 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1) \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4.8. Riješi jednadžbu: $\operatorname{ch} z - i = 0$.

RJEŠENJE.

$$\operatorname{ch} z = i \implies \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = i.$$

Množenjem sa e^z dobivamo:

$$(e^z)^2 - 2i e^z + 1 = 0$$

i odavde $e^z = i \pm i\sqrt{2}$. Dakle,

$$z = \ln(i \pm i\sqrt{2}) = \begin{cases} \ln(1 + \sqrt{2}) + i(\pi/2 + 2k\pi) \\ \ln(\sqrt{2} - 1) + i(-\pi/2 + 2k\pi) \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4.2. Zadaci za vježbu

4.9. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih funkcija:

A. $w = z^2 - 2\bar{z} + 5i$; B. $w = \bar{z}^3 - \frac{i}{z}$; C. $w = \frac{z+1}{z^2-1}$.

4.10. Izračunaj $w(z_0)$ ako je zadano

A. $w = (z-i)^2$, $z_0 = -i$; B. $w = \bar{z}/z$, $z_0 = 1+i$;
C. $w = z^3$, $z_0 = e^{i\pi/4}$.

4.11. Dokaži da trigonometrijske funkcije zadovoljavaju formule:

A. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;
B. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$;
C. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

4.12. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih funkcija:

A. $w = e^{1-z}$; B. $w = \operatorname{sh} z$; C. $w = \operatorname{tg} z$.

4.13. Izračunaj modul i argument zadanih funkcija u zadanim točkama:

A. $w = \cos z$, $z_0 = \pi/2 + i \ln 2$; B. $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i\pi/2$;
C. $w = \operatorname{th} z$, $z_0 = \pi i$.

4.14. Dokaži:

A. $\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1})$; B. $\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
C. $\operatorname{Ar} \operatorname{sh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$; D. $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

4.15. Izračunaj (prikaži u algebarskom ili trigonometrijskom obliku)

A. $\operatorname{Ln}(e)$; B. $\operatorname{Ln}(-i)$; C. $\operatorname{Ln}(3-2i)$; D. 1^i ;
E. 2^i ; F. $1^{1/i}$; G. $(4-3i)^{1+i}$; H. $\operatorname{tg}(\pi i/2)$;
I. $\operatorname{Arc} \cos i$; J. $\operatorname{Arc} \sin(1/2)$; K. $\operatorname{Arctg}(i/3)$; L. $\operatorname{sh}(\pi i/2)$;
M. $\sin 2i$; N. $\cos(2+i)$; O. $(-1)^{\sqrt{2}}$.

4.16. Riješi jednadžbe:

A. $e^z + i = 0$; B. $e^{iz} = \cos \pi z$, $x \in \mathbb{R}$; C. $\sin z = 3$;
D. $\operatorname{ln}(i-z) = 1$; E. $\operatorname{ln}(z+i) = 0$; F. $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$;
G. $4 \cos z + 5 = 0$; H. $\sin z = \pi i$; I. $i + \operatorname{sh} iz = 0$;
J. $\sin z + \cos z = 2$.

5.

Diferencijabilnost. Cauchy–Riemannovi uvjeti. Harmonijske funkcije

5.1. Limes, neprekinitost, diferencijabilnost

Pojmovi limesa, neprekinitosti i diferencijabilnosti definiraju se kao i za funkcije realne varijable:

- a) Točka $w_0 \in \mathbb{C}$ je **limes** funkcije $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ u točki $z_0 \in G$ ako vrijedi
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in G) 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon.$
- b) Funkcija $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ je **neprekinuta** u točki $z_0 \in G$, ako vrijedi
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in G) |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$
- b') Funkcija $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ je **jednoliko (uniformno) neprekinuta** na području G ako vrijedi
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z_1, z_2 \in G) |z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$
- c) Funkcija $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ je **diferencijabilna u točki** $z \in G$ ako postoji

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Pojmovi limesa i neprekinitosti mogu se vrlo jednostavno izraziti preko realnog i imaginarnog dijela funkcije f ; naime, f će imati limes u točki $z_0 = x_0 + iy_0$ ako i samo ako vrijedi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y).$$

Također, f je neprekinuta u točki $z_0 = x_0 + iy_0$ ako i samo ako su funkcije u i v neprekinute u točki (x_0, y_0) . Međutim, ako su u i v diferencijabilne u točki (x_0, y_0) , funkcija $f = u + iv$ ne mora biti diferencijabilna u z_0 . Vidjet ćemo da u i v moraju zadovoljavati još i dodatne, tzv. Cauchy–Riemannove uvjete.

5.1. Da li postoje limesi

A. $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - \bar{z}}{1 - z};$

B. $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1 + \bar{z}}?$

RJEŠENJE. A. Ako postoji limes u točki $z_0 = 1$, onda je on neovisan o putu po kojem točka z teži ka točki z_0 . Izračunajmo taj limes po dvama različitim putovima:

(1) Neka $z \rightarrow 1$ duž osi OX , tj. po pravcu $y = 0$. Stavimo $z = 1 - x$. Ako $z \rightarrow 1$, tada $x \rightarrow 0$ te dobivamo

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - \bar{z}}{1 - z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \overline{(1-x)}}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x}{1 - 1 + x} = 1.$$

(2) Neka $z \rightarrow 1$ po pravcu $x = 1$. Stavimo $z = 1 + iy$. Ako $z \rightarrow 1$, onda $y \rightarrow 0$ i zato u ovom slučaju mora biti

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - \bar{z}}{1 - z} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \overline{(1+iy)}}{1 - (1+iy)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + iy}{1 - 1 - iy} = -1.$$

Dobili smo dvije različite vrijednosti i stoga limes ne postoji.

B. Pokažimo da ovaj limes postoji. Stavimo

$$z = 1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Uvjet $z \rightarrow 1$ ekvivalentan je sa $r \rightarrow 0$ (φ se može ponašati proizvoljno).

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1 - \bar{z}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 + 1 + r(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \frac{1}{2}.$$

5.2. Pokaži da je funkcija $f(z) = |z|$ neprekinuta na čitavoj kompleksnoj ravnini \mathbf{C} .

RJEŠENJE. Pokazali smo (vidi zadatak 2.1) da vrijedi nejednakost

$$||z| - |z_0|| < |z - z_0|.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Izaberimo $\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$. Tada iz nejednakosti $|z - z_0| < \delta$ slijedi $||z| - |z_0|| < \delta < \varepsilon$ tj. $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Dakle, f je neprekinuta u točki z_0 . Kako je z_0 bila proizvoljna točka iz \mathbf{C} , to je f neprekinuta na čitavoj kompleksnoj ravnini.

Štoviše, f je uniformno neprekinuta, pošto izbor broja δ ne ovisi o točki z_0 .

5.3. Pokaži da je funkcija $f(z) = z^2$ neprekinuta na čitavoj kompleksnoj ravnini \mathbf{C} .

RJEŠENJE. Neka je $z_0 \in \mathbf{C}$ proizvoljan. Pokazat ćemo da je f neprekinuta u točki z_0 . Ocijenimo u tu svrhu $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2|$.

Ako $z \rightarrow z_0$, tada postoji pozitivan broj $M < \infty$ za koji vrijedi $|z| < M$ i $|z_0| < M$, čim je z dovoljno blizu točki z_0 (npr. ako je $|z - z_0| < 1$, možemo uzeti $M = |z_0| + 1$). Sada je

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &= |z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| \\&\leq |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < 2M|z - z_0|.\end{aligned}$$

Za zadani broj $\epsilon > 0$ možemo odabrat $\delta > 0$ takav da je $\delta < \epsilon/2M$. Uz ovakav izbor broja δ će vrijediti

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < 2M|z - z_0| < 2M\delta < \epsilon$$

i zaključujemo da je f neprekinuta u točki z_0 . Zbog proizvoljnosti od z_0 , f je neprekinuta na C .

Primijeti da u ovom slučaju izbor broja δ ovisi o M , pa dakle i o z_0 . Stoga f neće biti jednoliko neprekinuta na čitavoj kompleksnoj ravnini C . Pokaži da je ipak f uniformno neprekinuta na svakom ograničenom podskupu u C , npr. na krugu $\{z : |z| \leq R\}$, za neki fiksni (ma kako veliki) R .

5.4. Pokaži da je funkcija $f(z) = z^n$ diferencijabilna na čitavoj ravnini C , te da vrijedi $(z^n)' = n z^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

RJEŠENJE. Računamo derivaciju funkcije f po definiciji:

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\left[z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} \Delta z + \binom{n}{2} z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n \right] - z^n}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left\{ n z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1} \right\} = n z^{n-1}\end{aligned}$$

5.2. Cauchy-Riemannovi uvjeti

Ako je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ diferencijabilna u točki $z = x + iy$, tada su funkcije u i v diferencijabilne u točki (x, y) i zadovoljavaju **Cauchy-Riemannove uvjete**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.1}$$

Vrijedi i obratna tvrdnja: ako funkcije u i v zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete i ako su njihove parcijalne derivacije neprekinute u (x, y) , tada je $f = u + iv$ diferencijabilna u točki $z = x + iy$.

Ako je f diferencijabilna, njenu derivaciju možemo računati pomoću parcijalnih derivacija funkcija u i v :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.2}$$

ili pomoću bilo koje od preostalih triju kombinacija koje slijede primjenom indentiteta (5.1).

Za funkciju f ćemo reći da je **analitička** (ili **regularna**) na području G ako je diferencijabilna u svakoj točki $z \in G$. Istinita je, ali posve netrivijalna, činjenica da u tom slučaju f ima derivaciju svakog reda na G .

5.5. Pokaži da je funkcija $f(z) = e^{z^2}$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini, te nađi njenu derivaciju.

RJEŠENJE. Odredimo najprije realni i imaginarni dio od f .

$$f(z) = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \sin 2xy).$$

Dakle,

$$u = e^{x^2-y^2} \cos 2xy, \quad v = e^{x^2-y^2} \sin 2xy.$$

Funkcije u i v su diferencijabilne u svakoj točki (x, y) i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2xe^{x^2-y^2} \cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2} \sin 2xy = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2ye^{x^2-y^2} \cos 2xy - 2xe^{x^2-y^2} \sin 2xy = -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

Vidimo da su ove parcijalne derivacije neprekinute i stoga je f analitička funkcija na čitavoj \mathbb{C} .

Po formuli (5.2) njenu derivaciju možemo računati ovako:

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x^2-y^2} [2x \cos 2xy - 2y \sin 2xy] \\ &\quad + ie^{x^2-y^2} [2y \cos 2xy + 2x \sin 2xy] \\ &= e^{x^2-y^2} [2(x+iy) \cos 2xy + 2(ix-y) \sin 2xy] \\ &= e^{x^2-y^2} [2(x+iy) \cos 2xy + 2i(x+iy) \sin 2xy] \\ &= 2(x+iy)e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy) \\ &= 2(x+iy)e^{(x+iy)^2} = 2ze^{z^2}\end{aligned}$$

5.6. Da li je funkcija $f(z) = i\bar{z}$ diferencijabilna?

RJEŠENJE.

$$f(z) = i(x-iy) = y+ix.$$

Zato je $u(x, y) = y$, $v(x, y) = x$. Izračunajmo parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 1, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 1\end{aligned}$$

Kako je $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$ to Cauchy-Riemannovi uvjeti nisu ispunjeni niti u jednoj točki kompleksne ravnine. Zato f nije nigdje diferencijabilna.

5.7. Da li su funkcije

- A. $f(z) = z \cdot \bar{z}$; B. $f(z) = \frac{1}{z}$; C. $f(z) = \sin z$
diferencijabilne? Ako jesu, izračunaj im derivaciju.

RJEŠENJE. A. $f(z) = z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Dakle,
 $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$.

Ispitajmo u kojim točkama vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \implies x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \implies y = 0.\end{aligned}$$

Vidimo da su oni zadovoljeni samo u točki $(0, 0)$. Zato je $f(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$ diferencijabilna samo u točki $z = 0$ i nije nigdje analitička (pošto nije diferencijabilna niti u kojoj okolini točke 0).

Izračunajmo njenu derivaciju u točki $z = 0$:

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0.\end{aligned}$$

B. $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$. Zato:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti su ispunjeni svuda osim u točki $(0, 0)$, u kojoj funkcije nisu definirane:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

Izračunajmo još derivaciju funkcije $f(z) = 1/z$. Po formuli (5.2):

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2 + 2xyi}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - 2xyi - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{(\bar{z})^2}{(z \cdot \bar{z})^2} = -\frac{1}{z^2}.\end{aligned}$$

Izvedi ovu derivaciju i po definiciji.

C. $f(z) = \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y = u + iv$. Cauchy-Riemannovi uvjeti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

su ispunjeni u svakoj točki (x, y) i kako su ove funkcije neprekinute, to je funkcija sinus analitička u čitavoj C. Njena derivacija iznosi

$$(\sin z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y = \cos z.$$

5.8. Ako su f_1 i f_2 analitičke funkcije, pokaži da je i funkcija $f_1 \cdot f_2$ analitička.

RJEŠENJE. Označimo: $f_1 = u_1 + iv_1$, $f_2 = u_2 + iv_2$, $h = f_1 \cdot f_2 = u + iv$. Vrijedi

$$f_1 \cdot f_2 = u_1 u_2 - v_1 v_2 + i(u_1 v_2 + v_1 u_2).$$

Dakle, $u = u_1 u_2 - v_1 v_2$, $v = u_1 v_2 + v_1 u_2$. Funkcije f_1 i f_2 su analitičke i zato parovi u_1 , v_1 odnosno u_2 , v_2 zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete. Prema tome, vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} v_2 - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial y} u_2 + u_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(v_1 u_2 + u_1 v_2) = \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Na isti se način pokaže da vrijedi $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Kako su ove parcijalne derivacije neprekinute funkcije, to je h analitička.

5.9. Ako analitičke funkcije $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ zadovoljavaju uvjet $f'(z) = g'(z)$, $z \in G$, pokaži da se one razlikuju za konstantu.

RJEŠENJE. Funkcija $F(z) = f(z) - g(z)$ je očito analitička i vrijedi $F'(z) = f'(z) - g'(z)$ za svaki $z \in G$. Moramo pokazati da je F konstantna na G . Stavimo $F = u + iv$. Tada je

$$0 = F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

i zato

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Zato su u i v konstantne, pa je i F konstantna.

5.10. Ako je analitička funkcija $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ realna na području $D \subset G$, pokaži da je ona konstantna na D .

RJEŠENJE. Označimo ponovo $f = u + iv$. Po pretpostavci je $v = 0$ na D . Kako je f analitička, to u i v zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{na } D, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{na } D.\end{aligned}$$

Zato je u , a time i f , konstantna na D .

Spomenimo da vrijedi i mnogo jači rezultat: uz iste pretpostavke može se dokazati da je f konstantna na čitavom području definicije G .

5.11. Pokaži da Cauchy-Riemannovi uvjeti u polarnim koordinatama (r, φ) glase

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (5.3)$$

Izrazi derivaciju funkcije f u polarnim koordinatama.

RJEŠENJE. Veza između Kartezijevih i polarnih koordinata glasi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Po pravilima za derivaciju složenih funkcija dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r \sin \varphi) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi.\end{aligned} \quad (5.4)$$

Analogno:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x}(-r \sin \varphi) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi.\end{aligned} \quad (5.5)$$

Funkcije u i v kao funkcije varijabli x i y zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete (5.1). Iskoristimo ih:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi \\ &= -r \left[\frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi \right] = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi \\ &= r \left[\frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi \right] = r \frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

Dakle, vrijede relacije (5.3). One su, uz neprekinutost parcijalnih derivacija, i dovoljne da bi funkcija $f = u + iv$ bila analitička, pošto iz njih sličnim računom možemo izvesti i relacije (5.1).

5.12. Pokaži da se derivacija analitičke funkcije f može računati u polarnim koordinatama formulama

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (5.6)$$

odnosno

$$f'(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right). \quad (5.7)$$

RJEŠENJE. Iz relacija (5.4) dobivamo sljedeće izraze za $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Koristeći te izraze, kao i formule (5.2), (5.3) dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi \right) \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right] (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Ako zamijenimo $\frac{\partial u}{\partial r}$ i $\frac{\partial v}{\partial r}$, koristeći (5.3), dobit ćemo (5.7).

5.3. Harmonijske funkcije

Funkcija $\psi = \psi(x, y)$ je **harmonijska funkcija** u području $G \subset \mathbf{R}^2$ ako je ona dvaput neprekinuto diferencijabilna i zadovoljava na G Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\Delta\psi := \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \equiv 0. \quad (5.9)$$

Ako je $f = u + iv$ analitička u nekom području G , tada su njen realni dio u i njen imaginarni dio v harmonijske funkcije u tom području, pošto vrijedi

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2u}{\partial y^2}.$$

Obratno, ako dvije harmonijske funkcije u i v zadovoljavaju Cauchy–Riemannove uvjete, tada je funkcija $f = u + iv$ analitička. Dvije takve harmonijske funkcije zovemo konjugirani par harmonijskih funkcija.

Ako je zadana jedna od funkcija u ili v (ona mora nužno biti harmonijska), tada pomoću Cauchy–Riemannovih uvjeta možemo odrediti harmonijsku funkciju koja s njom čini konjugirani par. Drugim riječima, možemo odrediti analitičku funkciju f ukoliko poznajemo njen realni ili imaginarni dio.

5.13. Ispitaj koje su od zadanih funkcija harmonijske:

- A. $u = -2e^x \cos y$; B. $u = \sin x \operatorname{ch} y - y^2$;
 C. $v = x^2 - y^2 - x$.

RJEŠENJE. A. Vrijedi $\frac{\partial u}{\partial x} = -2e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y$ te je

$$\Delta u = \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = -2e^x \cos y + 2e^x \cos y = 0.$$

B. $\Delta u = -2$, u nije harmonijska.

C. $\Delta v = 0$, v jeste harmonijska.

5.14. Da li funkcija $v = e^x \sin y + y^2$ može biti imaginarni dio neke analitičke funkcije?

RJEŠENJE. Izračunajmo Δv .

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + 2y$$

$$\Delta v = e^x \sin y - e^x \sin y + 2 = 2$$

v nije harmonijska pa ona ne može biti imaginarni dio analitičke funkcije.

- 5.15.** Odredi funkciju v , tako da funkcija $w = u + iv$ kojoj je realni dio $u = x^3 - 3xy^2 + y$, bude analitička.

RJEŠENJE. Vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

te je $\Delta u = 0$. Dakle, u je harmonijska i zato postoji tražena funkcija v . Odredit ćemo je koristeći Cauchy–Riemannove uvjete:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

i odavde

$$v(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2) dy + h(x) = 3x^2y - y^3 + h(x).$$

Nepoznatu funkciju h određujemo koristeći drugi Cauchy–Riemannov uvjet:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 1 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy - h'(x).$$

Prema tome, vrijedi $h'(x) = -1$ i zato $h(x) = -x + C$. Dobili smo

$$\begin{aligned} w &= x^3 - 3xy^2 + y + i(3x^2y - y^3 - x + C) \\ &= (x + iy)^3 - i(x + iy) + C = z^3 - iz + C. \end{aligned}$$

- 5.16.** Ako je zadan realni dio analitičke funkcije $f = u + iv$, pokaži da se njen imaginarni dio može dobiti formulom

$$v(x, y) = \int_{x_0}^x -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} dy + C. \quad (5.10)$$

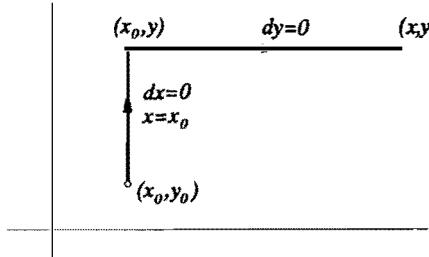
Obratno, za zadanu funkciju v , njoj konjugirana funkcija u može se naći formulom

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y -\frac{\partial v(x_0, y)}{\partial x} dy + C. \quad (5.11)$$

RJEŠENJE. Vrijedi

$$dv = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy$$

(iskoristili smo Cauchy–Riemannove uvjete). Integrirajmo ovaj potpuni diferencijal po putu $(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, y) \rightarrow (x, y)$ koji povezuje proizvoljnu točku (x_0, y_0) iz područja analitičnosti funkcije f , s točkom (x, y) , tako da taj put leži u području G (sl. 5.1).



Slika 5.1. Integral potpunog diferencijala ne ovisi o putu integracije. Taj put biramo tako da nam omogućava jednostavno određivanje dijelova analitičke funkcije

Integral ne ovisi o putu integracije:

$$\begin{aligned} v(x, y) - v(x_0, y_0) &= \int_{\gamma} dv(x, y) \\ &= \int_{x_0}^x -u'_y(x, y) dx + \int_{y_0}^y u'_x(x_0, y) dy \end{aligned}$$

i odavde slijedi (5.10). Analogno se izvodi i formula (5.11)

- 5.17.** Da li funkcija $u = \ln(x^2 + y^2)$ može biti realni dio neke analitičke funkcije? Ako može, odredi tu funkciju.

RJEŠENJE. Kako je $\Delta u = 0$ (provjeri!), to je u odista realni dio neke analitičke funkcije. Odredimo njen imaginarni dio koristeći formulu (5.10)

$$v(x, y) = \int_{x_0}^x -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x} dy + C.$$

Za početnu točku integracije uzimamo npr. točku $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^x -\frac{2y}{x^2 + y^2} dx + \int_1^y \frac{2 \cdot 0}{0^2 + y^2} dy + C \\ &= -2 \operatorname{arc tg} \frac{x}{y} + C. \end{aligned}$$

Time dobivamo

$$w = u + iv = \ln(x^2 + y^2) + i(C - 2 \operatorname{arc tg} \frac{x}{y}).$$

- 5.18.** Neka je u harmonijska funkcija. A. Da li je u^2 harmonijska funkcija? B. Za koje funkcije ψ je $\psi(u)$ harmonijska?

RJEŠENJE. A. Izračunajmo Δu^2 :

$$\begin{aligned} \Delta u^2 &= \nabla(\nabla u^2) = \nabla(2u \nabla u) = 2\nabla u \cdot \nabla u + 2u \nabla(\nabla u) \\ &= 2|\nabla u|^2 + 2u \Delta u = 2|\nabla u|^2 \end{aligned}$$

pošto je $\Delta u = 0$ po pretpostavci. Dakle, ako je $\Delta u^2 = 0$, tada mora biti i $\nabla u = 0$. Zato je u^2 harmonijska ako i samo ako je u konstanta.

B.

$$\begin{aligned}\Delta\psi(u) &= \nabla(\nabla\psi(u)) = \nabla(\psi'(u)\nabla u) \\ &= \psi''(u)|\nabla u|^2 + \psi'(u)\Delta(u) = \psi''(u)|\nabla u|^2\end{aligned}$$

$\psi(u)$ je harmonijska ukoliko je $\nabla u = 0$ ili $\psi''(u) = 0$. Ako je $\nabla u = 0$, tada je u konstanta i ψ može biti proizvoljna (i tada je $\psi(u)$ opet konstanta). Ako u nije konstanta, da bi $\psi(u)$ bila harmonijska, mora biti $\psi''(u) = 0$, i odavde integracijom $\psi(u) = C_1u + C_2$.

5.19. Da li postoji harmonijska funkcija, različita od konstante, oblika $u(x, y) = \psi(y/x)$?

RJEŠENJE. Stavimo $z = y/x$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \psi' \cdot \frac{-y}{x^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \psi'' \cdot \frac{y^2}{x^4} + \psi' \cdot \frac{2y}{x^3}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \psi' \cdot \frac{1}{x}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \psi'' \cdot \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Zato

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \psi'' \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^4} + \psi' \cdot \frac{2y}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^2} \left\{ (1 + z^2)\psi'' + 2z\psi' \right\}.\end{aligned}$$

Da bi u bila harmonijska funkcija, mora vrijediti

$$(1 + z^2)\psi'' + 2z\psi' = 0$$

tj.

$$\frac{\psi''}{\psi'} = -\frac{2z}{1 + z^2}.$$

Integracija daje $\ln \psi' = -\ln(1 + z^2) + \ln C_1$, tj.

$$\psi' = \frac{C_1}{1 + z^2}$$

i odavde $\psi(z) = C_1 \operatorname{arctg} z + C_2$, tj. $u(x, y) = \psi(y/x) = C_1 \operatorname{arctg} y/x + C_2$ je harmonijska funkcija, jedina tog oblika.

5.4. Zadaci za vježbu

5.20. Pomocu Cauchy-Riemannovih uvjeta provjeri koje su funkcije analitičke (na nekom području u C) i izračunaj im derivaciju.

- | | | |
|---|-----------------------------------|---------------------------------------|
| A. $w = z^2 \cdot \bar{z};$ | B. $w = z e^z;$ | C. $w = z \bar{z};$ |
| D. $w = z ;$ | E. $\sin 2z + 3i;$ | F. $w = \bar{z} \operatorname{Im} z;$ |
| G. $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z;$ | H. $w = z \operatorname{Im} z;$ | I. $w = \ln z;$ |
| J. $w = e^z/z;$ | K. $w = \operatorname{tg} z.$ | |

5.21. Odredi sve točke u kojima su diferencijabilne funkcije

- | | | |
|---------------------------------|--|---------------------------------|
| A. $w = \operatorname{Re} z;$ | B. $w = \operatorname{Im} z;$ | C. $w = x^2 y^2, (z = x + iy);$ |
| D. $w = z ^2;$ | E. $w = x^2 + iy^2, (z = x + iy);$ | |
| F. $w = z \operatorname{Re} z;$ | G. $w = 2xy - i(x^2 - y^2), (z = x + iy).$ | |

5.22. Odredi analitičku funkciju f ako su poznati njen realni ili imaginarni dio:

- | | |
|--|---|
| A. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(\pi) = 1/\pi;$ | B. $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), f(0) = 0;$ |
| C. $u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, f(0) = 0;$ | D. $v = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y, f(0) = 2;$ |
| E. $v = 2 \cos x \operatorname{ch} x - x^2 + y^2, f(0) = 2;$ | |
| F. $u = x^3 + 6x^2 y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0;$ | |
| G. $u = e^x(x \cos y - y \sin y), f(0) = 0.$ | |

5.23. Pokaži da su sljedeće funkcije harmonijske i odredi pripadne konjugirane funkcije:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|---|
| A. $u = x^2 + 2x - y^2;$ | B. $u = 2e^x \cos y;$ | C. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x);$ |
| D. $u = xy.$ | | |

5.24. Za koje vrijednosti od a, b, c će $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ biti harmonijska funkcija?

5.25. Neka je $\psi(z)$ analitička funkcija. Da li su sljedeće funkcije harmonijske?

- | | | |
|-----------------|--------------------|---------------------|
| A. $ \psi(z) ;$ | B. $\arg \psi(z);$ | C. $\ln \psi(z) .$ |
|-----------------|--------------------|---------------------|

5.26. Da li postoji harmonijska funkcija, različita od konstante, sljedećeg oblika?

- | | | |
|---|-----------------------------------|------------------------|
| A. $u = h(x);$ | B. $u = h(ax + by);$ | C. $u = h(x^2 y);$ |
| D. $u = h(xy);$ | E. $u = h(x^2 + y^2);$ | F. $u = h(x^2 + y);$ |
| G. $u = h\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right);$ | H. $u = h(x + \sqrt{x^2 + y^2});$ | I. $u = h(x^2 - y^2).$ |

5.27. Neka je u, v par konjugiranih harmonijskih funkcija. Dokaži da tada i U, V čine par konjugiranih harmonijskih funkcija, ako je

- | |
|--|
| A. $U = e^u \cos v, V = e^u \sin v;$ |
| B. $U = u^2 - v^2, V = 2uv;$ |
| C. $U = e^{u^2 - v^2} \cos 2uv, V = e^{u^2 - v^2} \sin 2uv;$ |
| D. $U = \varphi(u, v), V = \psi(u, v)$ |

pri čemu je φ, ψ također par konjugiranih harmonijskih funkcija

6.

Integral funkcija kompleksne varijable

6.1. Krivuljni integral

Neka je Γ orijentirana, po dijelovima glatka krivulja i $z \mapsto f(z)$ funkcija kompleksne varijable definirana i po dijelovima neprekinuta na Γ . Integral funkcije f duž krivulje Γ definira se kao

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k), \quad (6.1)$$

ukoliko ovaj limes postoji, neovisno o izboru točaka z_1, z_2, \dots, z_n na krivulji Γ (z_0 je početna, a z_n završna točka krivulje), te izboru točaka ξ_k unutar luka krivulje određenog točkama z_k, z_{k+1} (sl. 6.1.). Limes uzimamo po svim razdiobama za koje vrijedi $\max |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0$.

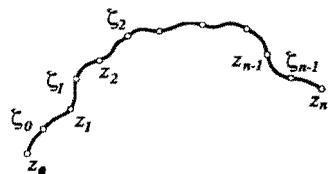
Ova definicija omogućava da se uspostavi veza sa krivuljnim integralom realnih funkcija; ako je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tada vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} u(x, y) dy + v(x, y) dx, \quad (6.2)$$

pri čemu su integrali s desna krivuljni integrali realnih funkcija, uzeti po krivulji $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$.

Navodimo osnovna svojstva krivuljnih integrala:

1. $\int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n c_k f_k(z) dz = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\Gamma} f_k(z) dz$
2. $\int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$



Slika 6.1. Razdioba luka krivulje Γ pri definiciji krivuljnog integrala

gdje je Γ^- krivulja identična krivulji Γ , ali s protivnim smjerom obilaska.

$$3. \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz$$

ukoliko se krivulja Γ sastoji od lukova $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

$$4. \quad \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds$$

gdje je ds diferencijal luka krivulje Γ .

U krivuljnog integralu smijemo zamjenjivati varijable; ako je φ analitička funkcija koja preslikava jednoznačno krivulju Γ^* na Γ , tada vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma^*} f(\varphi(\zeta)) \varphi'(\zeta) d\zeta. \quad (6.3)$$

Ovu formulu koristimo pri računanju krivuljnih integrala kod kojih krivulja Γ ima parametrizaciju oblika

$$\Gamma \dots z = \gamma(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Tada (6.3) glasi

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (6.4)$$

(6.4) se često uzima kao definicijska formula za krivuljni integral. Npr. za integral po kružnici $\Gamma \dots z = z_0 + r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ dobivamo:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) ire^{it} dt.$$

Ovaj pak integral možemo računati tako da ga razbijemo na realni i imaginarni dio, no obično ga računamo kao integral po realnoj varijabli t , tretirajući imaginarnu jedinicu kao konstantu.

6.1. Izračunaj integral $\int_{\Gamma} z dz$, po odresku koji spaja točke $z_1 = 1$ i $z_2 = 2+i$.

RJEŠENJE. Jednadžba krivulje Γ glasi

$$\Gamma \dots y = x - 1, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

ili pak

$$\Gamma \dots \gamma(t) = 1 + t(2+i-1) = 1 + (1+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Po (6.2) :

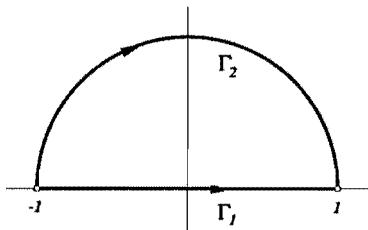
$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} z \, dz &= \int_{\Gamma} x \, dx - y \, dy + i \int_{\Gamma} y \, dx + x \, dy \\ &= \int_{\Gamma} x \, dx - (x-1) \, dx + i \int_{\Gamma} (x-1) \, dx + x \, dx \\ &= \int_1^2 dx + i \int_1^2 (2x-1) \, dx = 1 + 2i.\end{aligned}$$

Računajući pak po (6.3), imali bismo

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} z \, dz &= \int_0^1 [1 + (1+i)t](1+i) \, dt \\ &= (1+i)[t + (1+i)\frac{t^2}{2}] \Big|_0^1 = 1 + 2i.\end{aligned}$$

6.2.

Izračunaj integral $\int_{\Gamma_i} |z| \, dz$ po krivuljama na slici.



Slika 6.2. Krivulja Γ_1 je spojnicu točaka -1 i 1 , dok je Γ_2 polukružnica koja spaja iste točke

RJEŠENJE. Parametrizacija krivulje Γ_1 glasi

$$\Gamma_1 \dots y = 0, \quad x = t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

i vrijedi $|z| = |t + i \cdot 0| = |t|$, $dz = dx + i \, dy = dt$. Zato

$$\int_{\Gamma_1} |z| \, dz = \int_{-1}^1 |t| \, dt = 2 \int_0^1 t \, dt = 1.$$

Za parametrizaciju krivulje Γ_2 biramo

$$\Gamma_2 \dots z = e^{it}, \quad t \in [\pi, 0],$$

te je

$$\int_{\Gamma_2} |z| \, dz = \int_{\pi}^0 1 \cdot i \cdot e^{it} \, dt = i \frac{e^{it}}{i} \Big|_{\pi}^0 = 2.$$

Primijeti da ovaj integral ovisi o putu integracije. Međutim, on ne ovisi o izboru parametrizacije zadane krivulje. Tako npr. krivulje u ovom zadatku imaju

(između ostalih) i sljedeće parametrizacije:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \dots z &= \cos t, \quad t \in [\pi, 0], \\ \Gamma_1 \dots z &= \ln t, \quad t \in [1/e, e], \\ \Gamma_2 \dots z &= e^{-2it}, \quad t \in [\pi/2, 0].\end{aligned}$$

Provjeri da se u svakom od ovih slučajeva dobiva isti rezultat.

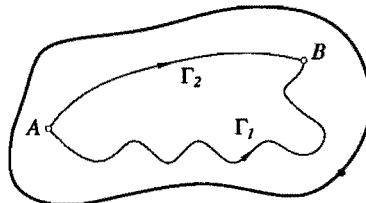
Neka je f analitička funkcija u jednostruko povezanom području G i Γ zatvorena Jordanova krivulja sadržana u G . Tada vrijedi, po Cauchyjevom teoremu

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (6.5)$$

Kao posljedicu ovog osnovnog rezultata dobivamo činjenicu da integral analitičke funkcije ne ovisi o putu integracije. Neka su A, B zadane točke unutar G i Γ_1, Γ_2 dvije krivulje koje spajaju točke A, B (i leže unutar G). Tada vrijedi

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Slika 6.3. Integral funkcije koja je analitička na području G ne ovisi o putu integracije, već samo o početnoj i završnoj točki. Pri tom ne smijemo zaboraviti da put integracije mora ležati unutar G , taj integral ovisi dakle o području G



Neka je f cijela funkcija (analitička u čitavoj kompleksnoj ravnini C). Tada gornji integral možemo označavati kratko sa $\int_A^B f(z) dz$, jer on ovisi samo o točkama A i B (pošto je funkcija analitička na svakom području G u kompleksnoj ravnini).

Neka su z_0, z proizvoljne točke. Po gornjem, dobro je definirana funkcija

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz.$$

Nju nazivamo **neodređeni integral** funkcije f . To je analitička funkcija za koju vrijedi $\Phi'(z) = f(z)$. Najčešće pišemo kratko $\Phi(z) = \int f(z) dz$.

6.3. Izračunaj integral $\int_{\Gamma} (4z - 3z^2) dz$ po dužini Γ koja spaja točke $z_1 = 1$ i $z_2 = i$.

RJEŠENJE. Podintegralna funkcija $f(z) = 4z - 3z^2$ je analitička u čitavoj kompleksnoj ravnini. Integral zato neće ovisiti o putu integracije i vrijediti će Newton-Leibnitzova formula:

$$\int_1^i (4z - 3z^2) dz = (2z^2 - z^3) \Big|_1^i = -3 + i.$$

6.2. Cauchyjeva integralna formula

Neka je f analitička funkcija u jednostruko povezanom području G i Γ zatvorena Jordanova krivulja u G , koja obuhvaća točku a . **Cauchyjeva integralna formula** glasi

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad (6.6)$$

te, općenitije

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad (6.7)$$

pri čemu se po zatvorenoj krivulji Γ integrira u pozitivnom smislu.

6.4. Dokaži da je

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}, n \neq 1, \end{cases}$$

gdje je Γ kružnica sa središtem u točki a i polujerom r .

RJEŠENJE. Dakako da se vrijednost ovog integrala može lako izvesti po formuli (6.7). Međutim, ovaj račun predstavlja najvažniji korak pri izvođenju formule (6.7), odnosno (6.6), stoga ćemo ga izvesti direktno.

Izaberimo uobičajenu parametrizaciju kružnice Γ .

$$\Gamma \dots z = a + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Tada za $n = 0, -1, -2, \dots$ stavimo $n = -m$ i slijedi

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{\Gamma} (z-a)^m dz = 0$$

po Cauchyjevom teoremu, jer je podintegralna funkcija analitička unutar područja integracije.

Za $n = 1$ imamo

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}} dt = 2\pi i.$$

Za $n = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{r^n e^{int}} dt \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)it} dt = \frac{i e^{(1-n)it}}{r^{n-1}(1-n)i} \Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Formula (6.7) se može koristiti u računanju integrala Cauchyjevog tipa:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a), \quad (6.8)$$

no ove i slične integrale ćemo računati mnogo jednostavnije primjenom računa ostataka, vidi § 13.2. Ilustrirajmo (6.8) na par primjera.

6.5.

Izračunaj integral po zadanoj krivulji:

- A. $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz, \quad \Gamma \dots |z| = 2;$
- B. $\int_{\Gamma} \frac{z dz}{z^4 - 1}, \quad \Gamma \dots |z-2| = 2;$
- C. $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 - 1}, \quad \Gamma \text{ okružuje točke } +1 \text{ i } -1.$

RJEŠENJE. A. Krivulja Γ obuhvaća točku $a = i$, $f(z) = \cos z$ je analitička svuda. Formula (6.8) daje

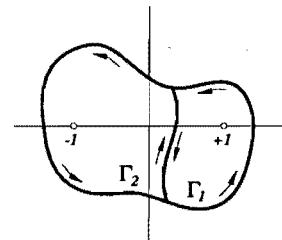
$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)''_{z=i} = \pi i (-\cos i) = -i\pi \operatorname{ch} 1.$$

B. Stavimo $f(z) = \frac{z}{z^3 + z^2 + z + 1}$. Γ obuhvaća točku $a = 1$:

$$\int_{\Gamma} \frac{z dz}{z^4 - 1} = \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z-1} = 2\pi i f(1) = \frac{\pi i}{2}.$$

C. U ovom slučaju moramo rastaviti integral po krivulji Γ na dva integrala po krivuljama Γ_1 , Γ_2 (sl. 6.4) i tek potom iskoristiti Cauchyjevu integralnu formulu:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^2 - 1} &= \int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z+1} \cdot \frac{dz}{z-1} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{z-1} \cdot \frac{dz}{z+1} \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^1}{1+1} + \frac{e^{-1}}{-1-1} \right) = 2\pi i \operatorname{sh} 1.\end{aligned}$$



Slika 6.4.

6.6.

Dokaži Liouvilleov teorem: Ako je f cijela funkcija i ako je ograničena na \mathbf{C} :

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbf{C},$$

tada je f konstantna.

RJEŠENJE. Neka je C_R kružnica sa središtem u proizvoljnoj točki $z \in \mathbf{C}$, polumjera R . Za svaki $R > 0$ vrijedi, po (6.7):

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Zato,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} ds \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Kako je R proizvoljno velik, to mora biti $f'(z) = 0$, za svaki z . Odavde slijedi tvrdnja.

6.7.

Osnovni stavak algebre: Dokaži da svaki polinom stupnja $n \geq 1$ ima barem jednu nul-točku (i stoga točno n nul-točaka, računajući im kratnosti).

RJEŠENJE. Kad polinom P_n ne bi imao nul-točaka, tada bi funkcija $z \mapsto \frac{1}{P_n(z)}$ bila analitička u čitavoj kompleksnoj ravnini \mathbf{C} , dakle, cijela. Međutim, $\frac{1}{P_n(z)}$ bi bila i omedena (dokaži zašto!) i po Liouvilleovom teoremu slijedilo bi $P_n = \text{const.}$

6.3. Zadaci za vježbu

6.8. Izračunaj sljedeće krivuljne integrale

- A. $\int_{\Gamma} e^z dz$, Γ : parabola $y = x^2$ koja spaja točke $z_1 = 0$ i $z_2 = 1 + i$;
- B. $\int_{\Gamma} e^z dz$, Γ : dio pravca od točke $z_1 = 0$ do $z_2 = 1 + i$;
- C. $\int_{\Gamma} (z^2 + z \bar{z}) dz$, Γ : luk kružnice $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$;
- D. $\int_{\Gamma} z \sin z dz$, Γ : dio pravca od točke $z_1 = 0$ do $z_2 = 1 + i$.

6.9. Izračunaj sljedeće integrale, integrirajući po zadanim krivuljama, u pozitivnom smjeru:

- A. $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 16}$;
- B. $\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$;
- C. $\int_{|z|=1} \frac{z \operatorname{sh} z}{z^3} dz$;
- D. $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$;

7.

Möbiusova transformacija

7.1. Reštraktiv Möbiusove transformacije

Möbiusova transformacija (ili razlomljeno linearno preslikavanje) je preslikavanje oblika

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (7.1)$$

pri čemu su a, b, c, d kompleksni brojevi za koje vrijedi $ad - bc \neq 0$. (Ukoliko taj uvjet nije ispunjen, tada je funkcija konstantna.) Korisno je preslikavanje S definirati na cijeloj kompleksnoj ravnini, (kojoj je dodana beskonačno daleka točka ∞), $S: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, na način

$$S\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad S(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Tada će S preslikavati bijektivno upotpunjenu ravninu $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.

Svaka se Möbiusova transformacija može prikazati u obliku kompozicije nekih od sljedeća četiri preslikavanja:

- | | | |
|-------|--------------------------|--------------------------------|
| (i) | $S(z) = z + b,$ | translacija za broj b , |
| (ii) | $S(z) = kz,$ | homotetija za faktor $k > 0$, |
| (iii) | $S(z) = e^{i\varphi} z,$ | rotacija za kut φ , |
| (iv) | $S(z) = \frac{1}{z},$ | inverzija. |
- (7.2)

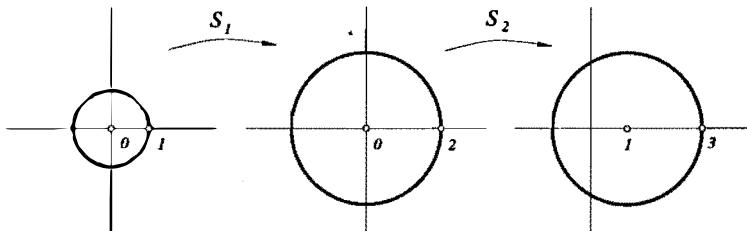
Ta su preslikavanja i sama Möbiusove transformacije. Zovemo ih **elementarne transformacije**.

- 7.1.** Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava kružnicu $\{|z| = 1\}$ na kružnicu $\{|w - 1| = 2\}$.

RJEŠENJE. Traženu Möbiusovu transformaciju možemo dobiti kao kompoziciju dviju elementarnih transformacija: homotetije $S_1(z) = 2z$ i translacije $S_2(z) = z + 1$. Dakle,

$$S(z) = (S_2 \circ S_1)(z) = S_2(2z) = 2z + 1$$

(sl. 7.1.) Dakako, preslikavanje nije jedinstveno. Tako npr. zadovoljavaju i sva preslikavanja $w = 2e^{i\varphi}z + 1$, za proizvoljan realni φ , te $w = \frac{2}{z} + 1$, itd. Provjeri!



Slika 7.1.

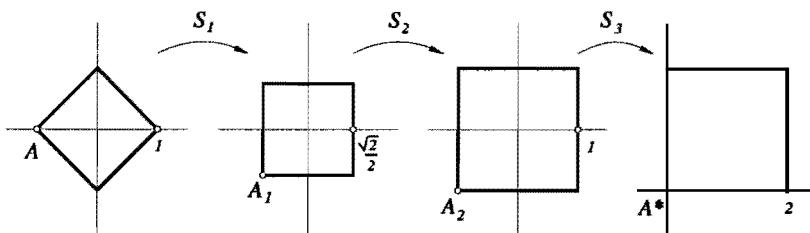
- 7.2.** Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava kvadrat

$$G = \{|x| + |y| \leq 1\}$$

u kvadrat

$$G^* = \{0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\},$$

tako da vrh $A(-1, 0)$ prijeđe u vrh $A^*(0, 0)$.



Slika 7.2.

RJEŠENJE. Postupak je opisan u sl. 7.2. Jednadžbe preslikavanja su

$$S_1 \dots z_1 = e^{i\pi/4}z,$$

$$S_2 \dots z_2 = \sqrt{2}z_1,$$

$$S_3 \dots w = z_2 + 1 + i,$$

te je

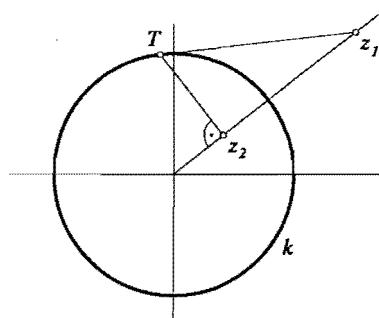
$$S(z) = (S_3 \circ S_2 \circ S_1)(z) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + 1 + i = (1+i)z + 1 + i.$$

Napomenimo da je gornje preslikavanje afino, i da nema drugog takvog preslikavanja među zadanim područjima, koje bi točku A preslikavalo u A^* . Međutim, rastav na elementarne transformacije nije jedinstven. Nije teško opisati i druge mogućnosti, koje će dati, u kompoziciji, isti rezultat (npr, najprije translacija za 1, potom homotetija za faktor $\sqrt{2}$ i potom rotaciju za kut $\pi/4$).

Kažemo da su dvije točke z_1 i z_2 simetrične obzirom na jediničnu kružnicu, ako vrijedi

$$\arg z_1 = \arg z_2, \quad |z_1| \cdot |z_2| = 1.$$

Konstrukcija točke z_2 ako je poznata z_1 (i obratno) vidi se na sl. 7.3: iz točke z_1 povlačimo tangentu na kružnicu k , a zatim iz dirališta T spuštamo okomicu na spojnicu ishodišta i točke z_1 . Ako je početna točka unutar kružnice k , primjenjujemo obratan postupak: najprije dižemo okomicu na spojnicu točke s ishodištem i potom iz presječne točke te okomice s kružnicom povlačimo tangentu.

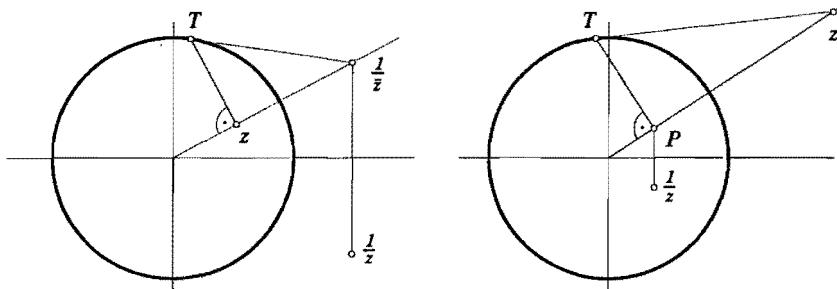


Slika 7.3. Konstrukcija točke simetrične zadanoj s obzirom na je iničnu kružnicu

Za zadanu točku z , njoj simetrična glasi $1/\bar{z}$. Zaista,

$$\arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\arg\bar{z} = \arg z, \quad \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|}.$$

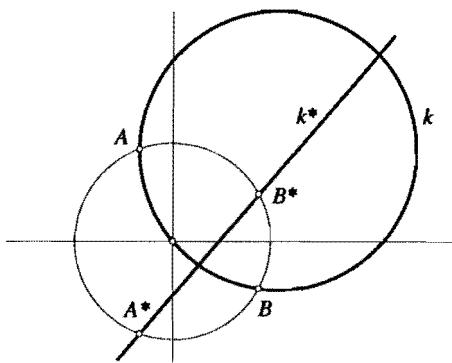
Preslikavanje $w = 1/z$ nazivamo **inverzija**. Ono je kompozicija dviju simetrija, prve s obzirom na jediničnu kružnicu, i druge, s obzirom na realnu os (nevažno u kojem poretku). Geometrijski, slika $w = 1/z$ točke z određuje se konstrukcijom primjenjenom na sl. 7.4.



Slika 7.4. Konstrukcija inverzne točke zadanoj točki z , ako se z nalazi unutar kružnice (lijevo), ili ako je van nje (desno)

Möbiusova transformacija ima sljedeća svojstva:

- Slika jedinične kružnice je ponovo jedinična kružnica (svaka se njena točka zrcali s obzirom na realnu os).
- Slika kružnice koja prolazi ishodištem i siječe jediničnu kružnicu u točkama A , B , jest pravac koji prolazi točkama A^* , B^* , simetričnim točkama A i B s obzirom na realnu os (sl. 7.5).
- Slika pravca koji siječe jediničnu kružnicu u točkama A^* , B^* jest kružnica koja prolazi ishodištem i točkama A , B .



Slika 7.5. Slika kružnice koja prolazi ishodištem je pravac koji siječe jediničnu kružnicu, i obratno

7.3.

Rastavi Möbiusovu transformaciju $w = \frac{-iz + i}{z + 1}$ na elementarne i zatim preslikaj jedinični krug.

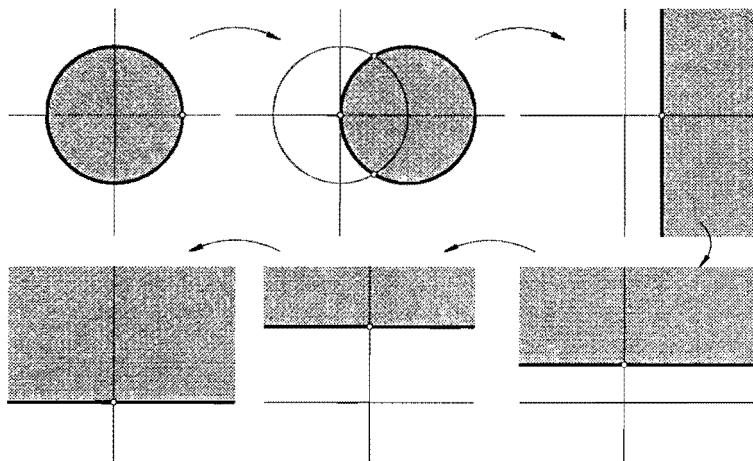
RJEŠENJE.

$$w = -i \frac{z - 1}{z + 1} = -i \frac{z + 1 - 2}{z + 1} = \frac{2i}{z + 1} - i,$$

te imamo sljedeći rastav:

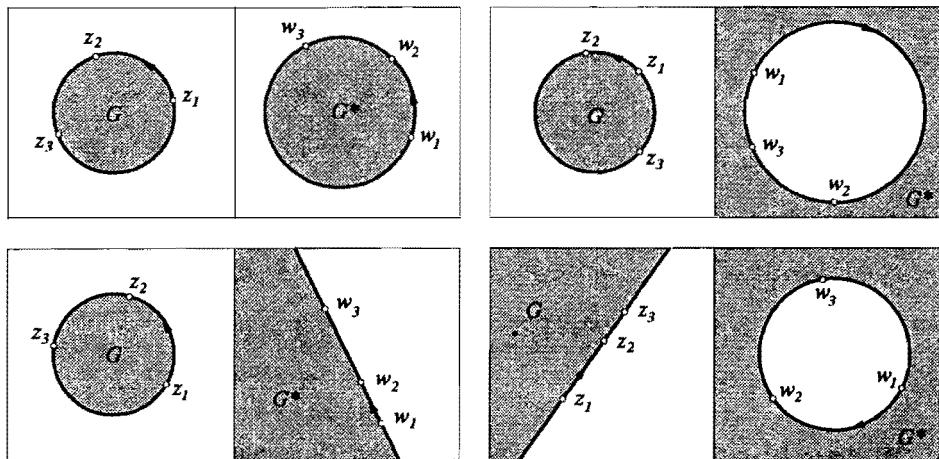
$z_1 = z + 1$,	translacija za 1
$z_2 = \frac{1}{z_1}$,	inverzija
$z_3 = iz_2 = e^{i\pi/2} z_2$,	rotacija za kut $\pi/2$
$z_4 = 2z_3$	homotetija za faktor 2
$z_5 = z_4 - i$	translacija za $-i$

Djelovanja pojedinih preslikavanja opisana su na sl. 7.6.



Slika 7.6.

Osnovno svojstvo Möbiusove transformacije jest da preslikava kružnice u kružnice (pri čemu i pravce smatramo kružnicama beskonačno velikog polumjera). Primijeti da četiri elementarne transformacije imaju ovo svojstvo, a svaka je Möbiusova transformacija kompozicija elementarnih. Svaka je kružnica određena s tri točke. Da bismo odredili sliku područja G omeđenog lukovima kružnica (tu ponovo ubrajamo pravce!) dovoljno je preslikati proizvoljne tri točke iz svakog dijela i kroz njihove slike ponovo povući kružnice. Pri tom će smjer obilaska po krivuljama koje omeđuju zadano područje G ostati sačuvan. Ako biramo poredak točaka tako da G pri obilasku ostaje s lijeve strane, isto će vrijediti i za područje G^* (sl. 7.7).



Slika 7.7. Neke mogućnosti pri preslikavanju Möbiusovom transformacijom. Obrati pozornost na smjerove obilazaka. Područje ostaje uvijek s lijeve strane

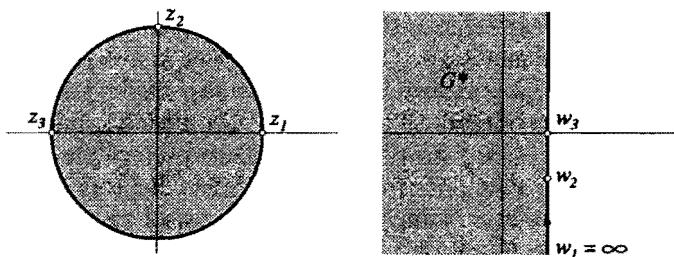
7.4. Preslikaj zadana područja funkcijom $w = \frac{z}{z - 1}$:

- A. jedinični krug $\{|z| < 1\}$;
- B. poluravninu $\{\operatorname{Re} z < 2\}$;
- C. isječak $\{0 < \arg z < \pi/4\}$;
- D. prugu $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

RJEŠENJE. A. Izaberimo tri točke koje određuju kružnicu $\{|z| = 1\}$ i preslikajmo ih:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 1, & w_1 = \infty, \\ z_2 = i, & w_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \\ z_3 = -1, & w_3 = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Slika jedinične kružnice je kružnica koja prolazi točkama w_1, w_2, w_3 . Kako je među njima i točka ∞ , riječ je zapravo o pravcu. Područje G^* nalazi se s lijeve strane tog pravca (sl. 7.8).

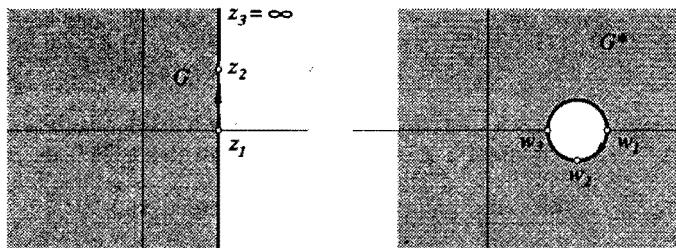


Slika 7.8.

B. Sada ćemo odabrati tri točke s pravca koji određuje područje G (sl. 7.9). U takvom slučaju uvijek biramo i točku ∞ , zbog jednostavnijeg računa. Dobivamo

$$\begin{array}{ll} z_1 = 2, & w_1 = 2, \\ z_2 = 2 + i, & w_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \\ z_3 = \infty, & w_3 = 1. \end{array}$$

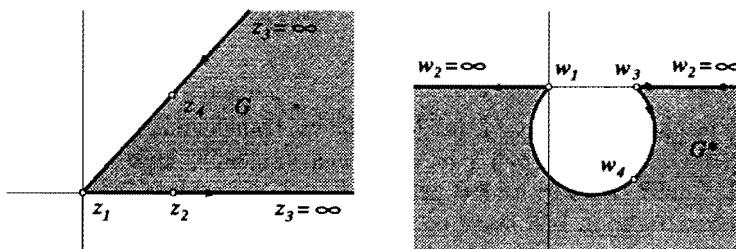
i slika je krug određen točkama w_1 , w_2 i w_3 .



Sl. 7.9.

C. Izabrat ćemo po tri točke sa svake od zadanih dviju zraka $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/4$ (ukupno četiri točke, pošto ishodište i točka ∞ pripadaju objema zrakama). Područje G^* određeno je s dva kružna luka (sl. 7.10).

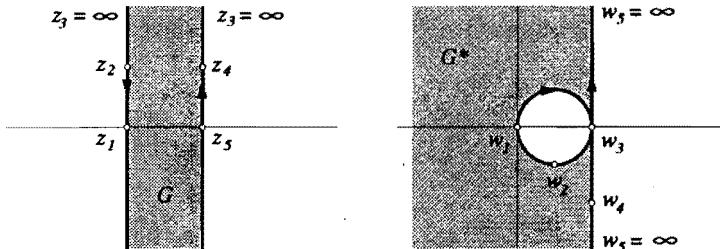
$$\begin{array}{llll} z_1 = 0, & z_2 = 1, & z_3 = \infty, & z_4 = 1 + i \\ w_1 = 0, & w_2 = \infty, & w_3 = 1, & w_4 = 1 - i. \end{array}$$



Sl. 7.10.

D. Pruga je određena s najmanje 5 točaka (sl. 7.11):

$$\begin{array}{lllll} z_1 = 0, & z_2 = i, & z_3 = \infty, & z_4 = 1 + i, & z_5 = 1, \\ w_1 = 0, & w_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, & w_3 = 1, & w_4 = 1 - i, & w_5 = \infty. \end{array}$$



Slika 7.11.

7.2. Implicitni oblik Möbiusove transformacije

Ako su zadana tri para međusobno pridruženih točaka (z_k, w_k) , $k = 1, 2, 3$, tada Möbiusovu transformaciju $w = S(z)$, određenu tim točkama, računamo po formuli:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (7.3)$$

Ako je neka od zadanih točaka jednaka ∞ , tada Möbiusovu transformaciju tražimo u obliku

$$w = \frac{az + b}{z - z_k}, \quad \text{ako je } w_k = \infty, \quad (7.4)$$

ili

$$w = w_k \frac{z + \alpha}{z + \beta}, \quad \text{ako je } z_k = \infty, \quad (7.5)$$

ili

$$w = az + b, \quad \text{ako je } z_k = \infty \text{ i } w_k = \infty. \quad (7.6)$$

Preostale dvije nepoznate konstante odrede se potom pomoću preostala dva para točaka.

U sljedećem zadatku tražena Möbiusova transformacija nije jedinstvena. Njen oblik će ovisiti o izboru parova točaka (z_k, w_k) , koje možemo birati po našoj volji. Činiti ćemo to na što prirodniji način (s nadom, opravdanom, da će tako i traženu funkciju biti lakše izračunati).

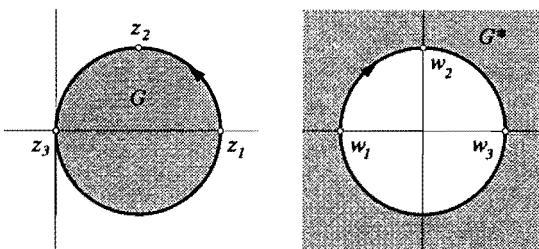
7.5.

Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje G u G^* :

- A. $G = \{|z - 1| < 1\}$, $G^* = \{|w| > 1\}$;
- B. $G = \{|z| < 1\}$, $G^* = \{\operatorname{Im} w > 0\}$;
- C. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G^* = \{|w| < 1\}$;
- D. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G^* = \{\operatorname{Re} w > 0\}$.

RJEŠENJE. A.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2, & w_1 &= -1 \\ z_2 &= 1+i, & w_2 &= i \\ z_3 &= 0, & w_3 &= 1 \end{aligned}$$



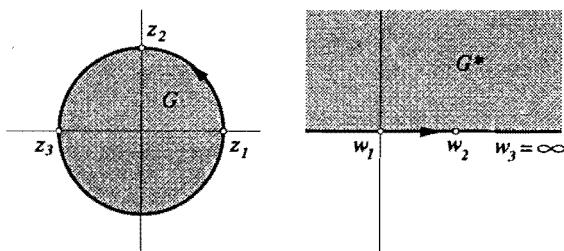
Slika 7.12.

$$\frac{w - (-1)}{w - i} : \frac{1 - (-1)}{1 - i} = \frac{z - 2}{z - 1 - i} : \frac{0 - 2}{0 - 1 - i}.$$

i odavde $w = \frac{1}{1-z}$.

B.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, & w_1 &= 0 \\ z_2 &= i, & w_2 &= 1 \\ z_3 &= -1, & w_3 &= \infty \end{aligned}$$



Slika 7.13.

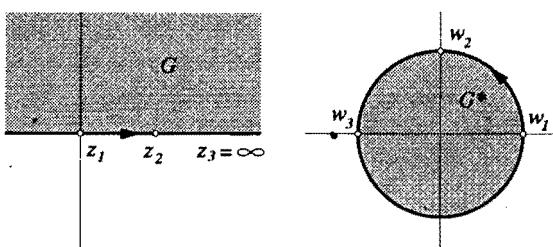
Transformaciju tražimo u obliku $w = \frac{az + b}{z + 1}$, jer je $w_3 = \infty$. Preostala dva para točaka daju

$$0 = \frac{a + b}{1 + 1}, \quad 1 = \frac{ai + b}{i + 1} \implies a = -i, b = i.$$

Zato, $w = \frac{-iz + i}{z + 1}$.

C.

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, & w_1 &= 1 \\ z_2 &= 1, & w_2 &= i \\ z_3 &= \infty, & w_3 &= -1 \end{aligned}$$



Slika 7.14.

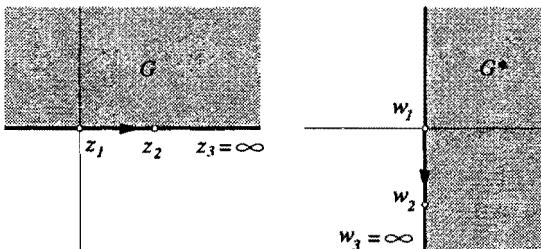
Sada je $w = -\frac{z + \alpha}{z + \beta}$, jer je $z_3 = \infty$. Nadalje,

$$1 = -\frac{0 + \alpha}{0 + \beta}, \quad i = -\frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \implies \alpha = -i, \beta = i$$

i odavde $w = \frac{-z + i}{z + i}$. Provjeri da je ova funkcija inverzna onoj iz B.

D.

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, & w_1 &= 0 \\ z_2 &= 1, & w_2 &= -i \\ z_3 &= \infty, & w_3 &= \infty \end{aligned}$$



Slika 7.15.

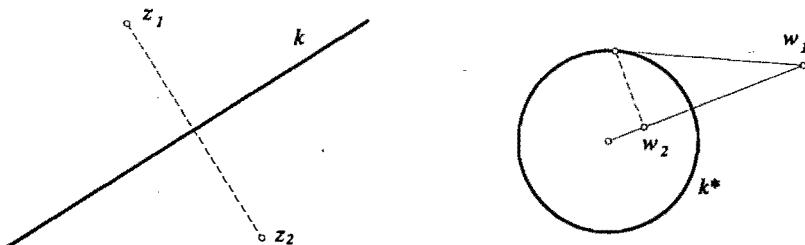
Sada je $w = az + b$ ($z_3 = w_3 = \infty$). Nadalje,

$$0 = a \cdot 0 + b, \quad -i = a \cdot 1 + b \implies a = -i, \quad b = 0.$$

Dakle, $w = -iz$ (rotacija za kut $-\pi/2$).

7.3. Svojstvo simetrije za Möbiusovu transformaciju

Svojstvo simetrije za Möbiusovu transformaciju glasi: ako su točke z_1, z_2 simetrične s obzirom na kružnicu (ili pravac) k , tada su njihove slike w_1, w_2 simetrične s obzirom na sliku k^* (sl. 7.16).

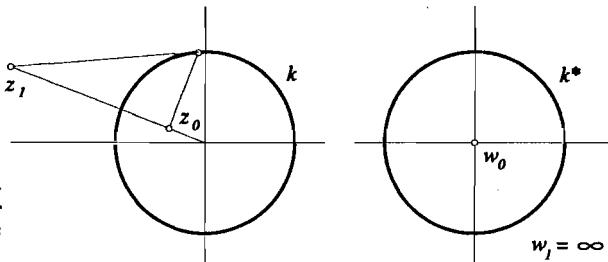


Slika 7.16. Par simetričnih točaka preslikava se Möbiusovom transformacijom ponovo u par simetričnih točaka

7.6. Pokaži da je

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - z \bar{z}_0} \quad (7.7)$$

opći oblik Möbiusove transformacije koja preslikava jedinični krug $\{|z| < 1\}$ u jedinični krug $\{|w| < 1\}$, tako da točka $z = z_0$ prvog kruga prelazi u središte $w = 0$ drugog kruga (φ je proizvoljan realan broj).



Slika 7.17. Par točaka z_0, z_1 simetričnih s obzirom na kružnicu k preslikava se u par točaka w_0, w_1 simetričnih s obzirom na kružnicu k^*

RJEŠENJE. Neka je z_1 točka simetrična točki z_0 s obzirom na jediničnu kružnicu $k = \{|z| = 1\}$ (sl. 7.17). Znamo da vrijedi $z_1 = 1/\bar{z}_0$. Po principu simetrije, njihove slike w_0 i w_1 će također biti simetrične, s obzirom na sliku $k^* = \{|w| = 1\}$. Međutim, kako je $w_0 = 0$, to mora biti $w_1 = \infty$. Zato tražena transformacija ima oblik

$$w = \alpha \frac{z - z_0}{z - z_1} = \alpha \frac{z - z_0}{z - 1/\bar{z}_0} = -\alpha \bar{z}_0 \frac{z - z_0}{1 - z \bar{z}_0} = \beta \frac{z - z_0}{1 - z \bar{z}_0},$$

gdje je β neka konstanta, koja nije potpuno proizvoljna. Odrediti ćemo njen oblik, znajući da mora vrijediti $|w| = 1$, čim je $|z| = 1$. Kako za $|z| = 1$ imamo

$$\begin{aligned} |1 - z \bar{z}_0| &= |z| \cdot |1 - z \bar{z}_0| = |\bar{z}| \cdot |1 - z \bar{z}_0| \\ &= |\bar{z} - \bar{z} z \bar{z}_0| = |\bar{z} - \bar{z}_0| = |z - z_0|, \end{aligned}$$

to mora biti

$$1 = |w| = \left| \beta \frac{z - z_0}{1 - z \bar{z}_0} \right| = |\beta| \cdot \frac{|z - z_0|}{|1 - z \bar{z}_0|} = |\beta|$$

i stoga β ima oblik $\beta = e^{i\varphi}$, φ proizvoljan realan broj.

Broj φ ipak možemo odrediti, ukoliko je poznat još jedan podatak o preslikavanju, npr. derivacija $w'(z_0)$. (Geometrijsko značenje te derivacije biti će opisano u sljedećem poglavljju.) Vrijedi

$$w'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{(1 - z \bar{z}_0)^2}$$

te je

$$w'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{1}{1 - z_0 \bar{z}_0} = \frac{e^{i\varphi}}{1 - |z_0|^2}.$$

Broj $1 - |z_0|^2$ je realan i pozitivan, te je $\arg e^{i\varphi} = \varphi = \arg w'(z_0)$. Dakle,

$$\varphi = \arg w'(z_0).$$

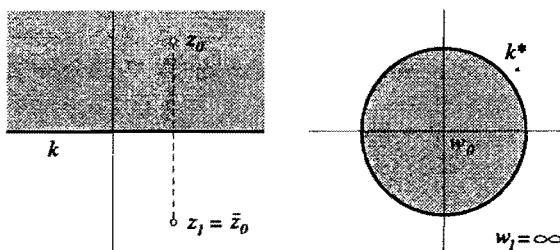
7.7.

Pokaži da je

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (7.8)$$

opći oblik Möbiusove transformacije koja preslikava gornju poluravninu $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ na jedinični krug $\{|w| < 1\}$, tako da točka z_0 iz zadane poluravnine prijeđe u središte $w_0 = 0$ kruga. (φ je proizvoljan realan broj.)

RJEŠENJE.



Slika 7.18. Simetričan par točaka (s obzirom na realnu os) prelazi u par $0, \infty$

Par simetričnih točaka $z_0, z_1 = \bar{z}_0$ prelazi u par $w_0 = 0, w_1 = \infty$. Zato je

$$w = \alpha \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Za sve realne z vrijedi $z = \bar{z}$ i $|z - z_0| = |\bar{z} - \bar{z}_0| = |z - z_0|$. Kako realna os mora prijeći u jediničnu kružnicu, to imamo

$$1 = |w| = |\alpha| \cdot \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|} = |\alpha|$$

i ponovo je $\alpha = e^{i\varphi}$, za neki realni φ .

7.8.

Odredi funkciju $w = f(z)$ koja preslikava jedinični krug u samog sebe, tako da bude $f(\frac{1}{2}) = 0$ i $\arg f'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

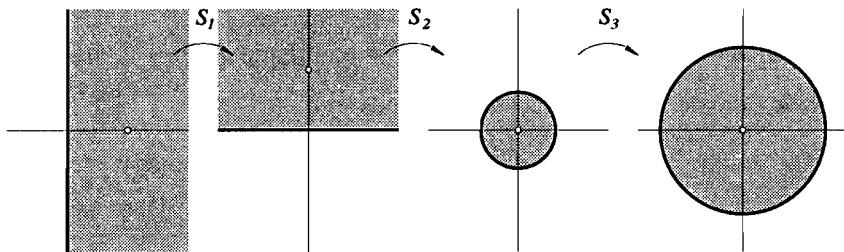
RJEŠENJE. Po Zadatku 7.6 je, za $z_0 = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i

$$w = e^{i\pi/2} \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} = i \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

7.9.

Odredi funkciju $w = S(z)$ koja preslikava desnu poluravninu $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ u krug $\{|w| < 2\}$ tako da bude $S(1) = 0$, $\arg S'(1) = \pi/2$.

RJEŠENJE. Tražena funkcija S je kompozicija triju Möbiusovih transformacija (sl. 7.19) i to: rotacije S_1 (za kut $\pi/2$) koja prevodi desnu poluravninu u gornju, transformacije S_2 koja preslikava gornju poluravninu u jedinični krug te homotetije S_3 (za faktor 2).



Slika 7.19.

$$z_1 = S_1(z) = e^{i\pi/2}z = iz, \quad a_1 := S_1(1) = i,$$

$$z_2 = S_2(z_1) = e^{i\varphi} \frac{z_1 - a_1}{z_1 - \bar{a}_1} = e^{i\varphi} \frac{z_1 - i}{z_1 + i},$$

$$w = S_3(z_2) = 2z_2.$$

Dakle,

$$w = 2e^{i\varphi} \frac{iz - i}{iz + i} = 2e^{i\varphi} \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Nadalje,

$$w' = 4e^{i\varphi} \frac{1}{(z+1)^2} \implies w'(1) = e^{i\varphi}$$

$$\text{te je } \varphi = \arg w'(1) = \frac{\pi}{2}, \quad w = 2i \frac{z-1}{z+1}.$$

- 7.10.** Odredi funkciju $w = S(z)$ koja preslikava jedinični krug $\{|z| < 1\}$ u gornju poluravlinu $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ tako da bude $w(0) = 1 + i$, $\arg w'(0) = -\pi/2$.

RJEŠENJE. Nađimo inverznu transformaciju $z = S^{-1}(w)$! Ona preslikava gornju poluravlinu na jedinični krug i pri tom točka $w_0 = 1 + i$ prelazi u ishodište $z_0 = 0$. Odredimo još $\arg z'(w_0)$. Kako je $(S^{-1} \circ S)(z) = z$, to je $(S^{-1} \circ S)'(z) = 1$ i $\arg(S^{-1} \circ S)'(z) = 0$. Dakle,

$$0 = \arg[(S^{-1})'(w) \cdot S'(z)] = \arg z'(w) + \arg w'(z).$$

Stoga je $\arg z'(w_0) = -\arg w'(z_0) = \pi/2$. Po formuli (7.8) imamo

$$z = e^{i\varphi} \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} = e^{i\varphi} \frac{w - 1 - i}{w - 1 + i}.$$

Odredimo φ . Vrijedi

$$z' = e^{i\varphi} \frac{2i}{(w - 1 + i)^2} \implies z'(1 + i) = -\frac{1}{2}ie^{i\varphi}.$$

te je $\frac{\pi}{2} = \arg z'(1+i) = \arg(-\frac{i}{2}e^{i\varphi}) = -\frac{\pi}{2} + \varphi$, odnosno $\varphi = \pi$. Dakle,

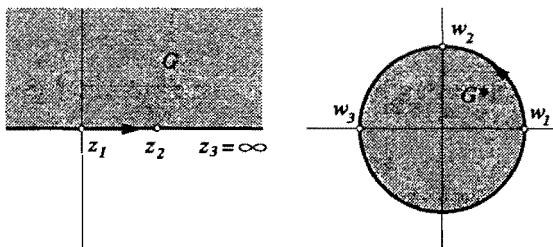
$$z = e^{i\pi} \frac{w-1-i}{w-1+i} = -\frac{w-1-i}{w-1+i}.$$

Izračunavši odavde w dobivamo traženu funkciju:

$$w = \frac{(1-i)z+1+i}{z+1}.$$

- 7.11.** Odredi funkciju $w = S(z)$ koja preslikava gornju poluravninu u samu sebe, tako da bude $S(i) = 1+i$, $\arg S'(i) = \pi/2$.

RJEŠENJE. Preslikajmo obje poluravnine na jedinični krug, pomoću dvoju Möbiusovih transformacija S_1 i S_2 ! Neka pri tom vrijedi $S_1(i) = 0$, $S_2(1+i) = 0$. Tada će naša tražena funkcija imati oblik $S = S_2^{-1} \circ S_1$ (sl. 7.20).



Slika 7.20.

Vrijedi

$$z_1 = e^{i\varphi_1} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} = e^{i\varphi_2} \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}$$

i odavde

$$\frac{w - 1 - i}{w - 1 + i} = e^{i\varphi} \frac{z - i}{z + i}.$$

Da bismo ispunili drugi uvjet, derivirajmo ovu jednakost:

$$\frac{2iw'}{(w-1+i)^2} = e^{i\varphi} \frac{2i}{(z+i)^2} \implies w' = e^{i\varphi} \frac{(w-1+i)^2}{(z+i)^2}.$$

Uvrstimo sada $z = z_0 = i$, $w = w_0 = 1+i$. Dobivamo $w'(i) = e^{i\varphi}$ i odavde $\varphi = \arg w'(i) = \pi/2$. Dakle,

$$\frac{w - 1 - i}{w - 1 + i} = i \frac{z - i}{z + i}$$

što daje $w = \frac{2}{1-z}$.

7.4. Kanonski oblik Möbiusove transformacije

Möbiusova transformacija $w = S(z)$, različita od identiteta, može imati jednu ili dvije fiksne točke. Dobivamo ih rješavajući jednadžbu:

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z$$

koja sređena glasi

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (7.9)$$

Ova jednadžba ima jedno, dva ili pak beskonačno mnogo rješenja. U trivijalnom slučaju, u kome svaki z zadovoljava jednadžbu, mora biti $c = 0$, $b = 0$ i $d = a$. Transformacija tada glasi $S(z) = z$, dakle $S = I$, identično preslikavanje i svaka je točka $z \in \mathbb{C}$ fiksna točka.

Ako je ∞ fiksna točka, tada S ima oblik $S(z) = az + b$. Ukoliko je $a \neq 1$, točka $\frac{b}{1-a}$ je druga fiksna točka takvog preslikavanja.

Preostaju dva netrivialna slučaja: Möbiusova transformacija ima točno jednu fiksnu točku z_0 , ili pak točno dvije različite fiksne točke z_1, z_2 ($z_0, z_1, z_2 \neq \infty$). Odredimo karakterizaciju Möbiusove transformacije u tim slučajevima — **kanonski oblik** Möbiusove transformacije.

7.12. Pokaži da Möbiusova transformacija $w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ima točno jednu fiksnu točku z_0 , ako i samo ako se dade prikazati u obliku

$$\begin{cases} \frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \alpha, & \alpha \neq 0, z_0 \neq \infty, \\ w = z + b, & z_0 = \infty \end{cases} \quad (7.10)$$

U tom je slučaju

$$\alpha = \frac{2c}{a + d}. \quad (7.11)$$

(Ovakvo preslikavanje nazivamo **paraboličkim**.)

RJEŠENJE. Slučaj $z_0 = \infty$ je očigledan. Neka je $z_0 \neq \infty$. z_0 je zaista fiksna točka preslikavanja $w = S(z)$ definiranog sa (7.10): za $z = z_0$ desna strana ima vrijednost ∞ , pa mora biti $w = z_0$, tj. vrijedi $S(z_0) = z_0$. Pokažimo nužnost.

Jednadžba (7.9) ima samo jedno rješenje. Pri tom ne smije biti $c = 0$, jer bi tada preslikavanje glasilo $S(z) = (az + b)/d$ i imalo bi i drugu fiksnu točku ∞ . Neka je z_0 jedina fiksna točka. Ona je dvostruko rješenje jednadžbe (7.9) i glasi

$$z_0 = \frac{a - d}{2c} \quad (7.12)$$

Sada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{w - z_0} &= \frac{1}{\frac{az + b}{cz + d} - z_0} = \frac{cz + d}{az + b - czz_0 - dz_0} \\&= \frac{cz + d}{z(a - cz_0) + b - dz_0} \\&= \frac{c(z - z_0) + d + cz_0}{(z - z_0)(a - cz_0) - (cz_0^2 - az_0 + dz_0 - b)}\end{aligned}$$

z_0 zadovoljava (7.9) pa vrijedi $cz_0^2 - az_0 + dz_0 - b = 0$. Također, (7.12) daje $d + cz_0 = a - cz_0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{w - z_0} &= \frac{c(z - z_0) + a - cz_0}{(z - z_0)(a - cz_0)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{c}{a - cz_0} \\&=: \frac{1}{z - z_0} + \alpha\end{aligned}$$

i broj α zadovoljava (7.11)

$$\alpha = \frac{c}{a - cz_0} = \frac{c}{a - c \frac{a - d}{2c}} = \frac{2c}{a + d}.$$

Spomenimo još da izbor $\alpha = 0$ u formuli (7.10) daje $S = I$ i tad je svaka točka fiksna.

7.13.

Pokaži da Möbiusova transformacija $w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ima točno dvije različite fiksne točke z_1, z_2 ako i samo ako se dade prikazati u obliku

$$\begin{cases} \frac{w - z_1}{w - z_2} = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}, & \lambda \neq 1, z_1, z_2 \neq \infty, \\ w - z_1 = \lambda(z - z_1), & \lambda \neq 1, z_2 = \infty. \end{cases} \quad (7.13)$$

U tom je slučaju

$$\lambda = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \quad (7.14)$$

odnosno

$$\lambda = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}. \quad (7.15)$$

(Za $\lambda > 0$ preslikavanje nazivamo hiperboličkim, za λ oblika $\lambda = e^{i\alpha}$, ($\alpha \neq 0$) eliptičkim, a za $\lambda = re^{i\alpha}$ ($r \neq 1, \alpha \neq 0$) loksodromičkim.)

RJEŠENJE. Dovoljnost je ponovo očigledna: Preslikavanje definirano sa (7.13) ima fiksne točke z_1 i z_2 . Kad bi imalo još i treću fiksnu točku, bilo bi

$w = S(z) = z$ za svaki z , i odavde $\lambda = 1$. Dakle, S ima točno dvije fiksne točke.

Neka su sada $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sve fiksne točke od S . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{w - z_1}{w - z_2} &= \frac{\frac{az + b}{cz + d} - z_1}{\frac{az + b}{cz + d} - z_2} = \frac{az + b - cz_1z - dz_1}{az + b - cz_2z - dz_2} \\ &= \frac{(a - cz_1)z - (dz_1 - b)}{(a - cz_2)z - (dz_2 - b)} \\ &= \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \cdot \frac{z - \frac{dz_1 - b}{a - cz_1}}{z - \frac{dz_2 - b}{a - cz_2}}. \end{aligned}$$

Kako je z_1 fiksna točka, to vrijedi

$$z_1 = S(z_1) = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} \Rightarrow z_1 = S^{-1}(z_1) = \frac{dz_1 - b}{a - cz_1}$$

i slično za z_2 . Zato je

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2} =: \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Tu smo označili

$$\lambda = \frac{a - cz_1}{a - cz_2}.$$

Vidimo da je $\lambda \neq 1$, jer bi $\lambda = 1$ dalo $z_1 = z_2$. Nadalje, z_1 i z_2 su rješenja jednadžbe (7.9):

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (7.16)$$

Neka je z_1 ono rješenje s predznakom $+$, a z_2 s predznakom $-$. Ovako određene vrijednosti za z_1 i z_2 uvrštene u (7.14) daju relaciju (7.15).

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i S Möbiusova transformacija. Definirajmo $S^0 = I$ (identiteta) i dalje induktivno $S^n = S \circ S^{n-1}$. Tada vrijedi, za preslikavanje oblika (7.10)

$$\frac{1}{S^2(z) - z_0} = \frac{1}{S(z) - z_0} + \alpha = \frac{1}{z - z_0} + 2\alpha$$

i indukcijom

$$\frac{1}{S^n(z) - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + n\alpha. \quad (7.17)$$

Za preslikavanje oblika (7.13) dobivamo

$$\frac{S^2(z) - z_1}{S^2(z) - z_2} = \lambda \frac{S(z) - z_1}{S(z) - z_2} = \lambda^2 \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

i indukcijom

$$\frac{S^n(z) - z_1}{S^n(z) - z_2} = \lambda^n \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (7.18)$$

Neka je niz $\{a_n\}$ definiran sa $a_0 \in \mathbb{C}$,

$$a_{n+1} := S(a_n), \quad n \geq 0.$$

Tada je $a_n = S^n(a_0)$. U slučaju kad S ima samo jednu fiksnu točku $z_0 \neq \infty$, relacija (7.17) pokazuju da vrijedi $\lim a_n = z_0$.

Ako S ima dvije fiksne točke $z_1, z_2 \neq \infty$, tada, za $|\lambda| < 1$ vrijedi $\lim a_n = z_1$, za $|\lambda| > 1$, $\lim a_n = z_2$. U slučaju $|\lambda| = 1$, niz može imati više (pa i beskonačno mnogo) gomilišta.

7.14. Odredi gomilišta nizova definiranih rekurzivnim formulama

A. $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \quad a_0 = 2;$

B. $a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}, \quad a_0 = 0;$

C. $a_{n+1} = \frac{a_n + i}{a_n - i}, \quad a_0 = 0.$

RJEŠENJE. A. Definirajmo Möbiusovu transformaciju

$$w = S(z) := 2 - \frac{1}{z} = \frac{2z - 1}{z}.$$

Odredimo njene fiksne točke. Jednadžba

$$\frac{2z - 1}{z} = z \iff z^2 - 2z + 1 = 0$$

ima jedno dvostruko rješenje $z_0 = 1$. Zato S ima točno jednu fiksnu točku i može se napisati, po (7.10) i (7.11) u obliku

$$\frac{1}{w - 1} = \frac{1}{z - 1} + 1.$$

Odavde, po formuli (7.17) slijedi

$$\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{S^n(a_0) - 1} = \frac{1}{a_0 - 1} + n.$$

Kad $n \rightarrow \infty$, dobivamo $a_n \rightarrow 1$, neovisno o izboru početne točke a_0 .

B. Ovog puta pripadna Möbiusova transformacija glasi

$$w = S(z) = \frac{3z + 1}{z + 3}.$$

Njene fiksne točke su $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ (provjeri!). Zato se S može napisati u obliku

$$\frac{w - 1}{w + 1} = \lambda \frac{z - 1}{z + 1}$$

pri čemu je λ dan sa (7.15) i iznosi $\lambda = \frac{1}{2}$. Po formuli (7.18) dobivamo

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{S^n(a_0) - 1}{S^n(a_0) + 1} = \lambda^n \frac{a_0 - 1}{a_0 + 1} = -\frac{1}{2^n}.$$

Stoga $a_n \rightarrow 1$, za svaki $a_0 \neq -1$.

C. Pripadna Möbiusova transformacija

$$w = S(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

ima dvije fiksne točke, $z_{1,2} = \frac{1}{2}(1+i)(1 \pm 3)$ i odgovarajući λ je $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (provjeri!) i vrijedi $\lambda^3 = 1$.

Ponovo po formuli (7.18) dobivamo

$$\frac{a_n - z_1}{a_n - z_2} = \lambda^n \frac{a_0 - z_1}{a_0 - z_2} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n \frac{z_1}{z_2}. \quad (7.19)$$

Niz $\left\{ \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n \right\}$ ima samo tri vrijednosti:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \varepsilon_3 = 1.$$

Zato će niz $\{a_n\}$ imati samo tri gomilišta: A_1, A_2, A_3 , koje ćemo odrediti iz formule (7.19):

$$\frac{A_j - z_1}{A_j - z_2} = \varepsilon_j \frac{z_1}{z_2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Tri vrijednosti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ daju $A_1 = -1, A_2 = -i, A_3 = 0$ (izračunaj ih!), i to su gomilišta niza $\{a_n\}$.

Zadatak ima i direktno, lakonsko rješenje. Uvrštavanjem $a_0 = 0$ u rekurentnu formulu dobivamo niz $a_0 = 0, a_1 = -1, a_2 = -i, a_3 = 0$ i on se dalje periodički ponavlja.

Da objasnimo tu pojavu, primjetimo da vrijedi $\lambda^3 = 1$. Zato je

$$\frac{S^3(z) - z_1}{S^3(z) - z_2} = \lambda^3 \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

i odavde $S^3(z) = z$, tj. $S^3 = I$. Sada je jasno da će za proizvoljnu točku a_0 skup $\{S^n(a_0)\}$ imati samo tri elementa: $a_0, a_1 = S(a_0), a_2 = S^2(a_0)$, jer je potom $a_3 = a_0$ itd. Usporedi s zadatkom 7.34.

7.5. Zadaci za vježbu

7.15. Skiciraj djelovanje sljedećih elementarnih Möbiusovih transformacija na proizvoljno odabranoj točki

A. $w = z + 2i$;

B. $w = z - 5$;

C. $w = iz$;

D. $w = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$;

E. $w = i/z$;

F. $w = -2z + i$.

- 7.16.** Odredi točku simetričnu točki $z_1 = 1 + i$ s obzirom na kružnicu
A. $|z| = 1$; **B.** $|z - i| = 2$.
- 7.17.** Rastavi Möbiusovu transformaciju $w = \frac{-z+i}{z+i}$ na elementarna preslikavanja i odredi potom sliku gornje poluravnine $\operatorname{Im} z > 0$.
- 7.18.** U što preslikava funkcija $w = 1/z$
A. familiju pravaca $y = Cx$; **B.** familiju pravaca $y = x + C$;
C. familiju kružnica $x^2 + y^2 = Cx$?
- 7.19.** Odredi sliku područja $G = \{|z - 1| < 2\}$ pri preslikavanjima
A. $w = iz - 1$; **B.** $w = \frac{2z}{z+3}$; **C.** $w = \frac{2z}{z-3}$; **D.** $w = \frac{z+1}{z-2}$.
- 7.20.** Odredi sliku područja G pri preslikavanju $w = S(z)$, $z = x + iy$:
A. $G = \{x > 0, y > 0\}$, $w = \frac{1-z}{1+z}$;
B. $G = \{z < 1\}$, $w = \frac{z}{z-2}$;
C. $G = \{0 < x < 1\}$, $w = \frac{z-1}{z}$;
D. $G = \{x + y < 1, x > 0, y > 0\}$, $w = \frac{1}{z}$;
E. $G = \{|x| + |y| < 1, y > 0\}$, $w = \frac{z+i}{z-i}$;
F. $G = \{x > -1, y < 1, y - x > 1\}$, $w = \frac{iz}{z-i}$.
- 7.21.** Odredi sliku područja G pri preslikavanju $w = S(z)$:
A. $G = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{z-1}{z+1}$;
B. $G = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{2z-i}{2+iz}$;
C. $G = \{1 < |z| < 2\}$, $w = \frac{2}{z-1}$;
D. $G = \{|z+1| > 1, |z+2| < 2\}$, $w = \frac{z+2}{z}$;
E. $G = \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{z}{z-1}$;
F. $G = \{x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$, $w = \frac{z}{z-1}$.
- 7.22.** Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava točke $0, i, \infty$ redom u točke
A. $1 - i, 2, 1 + i$; **B.** $-1, 0, 1$; **C.** $-2i, -2, 2i$;
i odredi sliku desne poluravnine $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ pri tim preslikavanjima.
- 7.23.** Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava točke $0, 1+i, 2$ redom u točke
A. $0, 2+2i, 4$; **B.** $4, 2+2i, 0$; **C.** $0, 2, \infty$;
i odredi sliku kruga $\{|z - 1| < 1\}$ pri tim preslikavanjima.

7.24. Odredi neku Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje G u G^* , ako je

- A. $G = \{|z| < 1\}$, $G^* = \{\operatorname{Im} w < 0\}$;
- B. $G = \{|z + 1| < 1\}$, $G^* = \{\operatorname{Re} w > -1\}$;
- C. $G = \{|z - 1| < 2\}$, $G^* = \{|w - i| < 1\}$;
- D. $G = \{|z - 1 + i| < 1\}$, $G^* = \{|w + 1| > 2\}$.

7.25. Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava jedinični krug $\{|z| < 1\}$ u jedinični krug $\{|w| < 1\}$ te točku z_0 u točku w_0 , ako je

- A. $z_0 = \frac{1}{2}$, $w_0 = 0$;
- B. $z_0 = 0$, $w_0 = -\frac{1}{2}$;
- C. $z_0 = \frac{i}{2}$, $w_0 = -\frac{1}{2}$;
- D. $z_0 = -\frac{i}{2}$, $w_0 = \frac{i}{3}$;
- E. $z_0 = \frac{1}{2}$, $w_0 = \frac{1}{2}$, $\arg w'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

7.26. Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje G u G^* , ako je

- A. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G^* = \{|w| < 1\}$, $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = \pi$;
- B. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G^* = \{|w| < 1\}$, $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$;
- C. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G^* = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, $w(1+i) = i$, $\arg w'(1+i) = \pi/2$;
- D. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G^* = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, $w(z_0) = w_0$;
 $\arg w'(z_0) = \alpha$, $(\operatorname{Im} z_0 > 0, \operatorname{Im} w_0 > 0)$;
- E. $G = \{|z| < 2\}$, $G^* = \{\operatorname{Re} w > 0\}$, $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \pi/2$;
- F. $G = \{|z| < 2\}$, $G^* = \{|w| < 4\}$, $w(1) = 3$, $\arg w'(1) = \alpha$;
- G. $G = \{|z - 2| < 1\}$, $G^* = \{|w - 2i| < 2\}$, $w(2) = i$, $\arg w'(2) = 0$.

7.27. Dokaži sljedeća svojstva Möbiusove transformacije:

- A. $S'(z) \neq 0$;
- B. Kompozicija Möbiusovih transformacija je opet Möbiusova transformacija (odredi ju!);
- C. Za svaku Möbiusovu transformaciju $w = S(z)$ postoji inverzna funkcija $z = S^{-1}(w)$;
- D. S^{-1} je ponovo Möbiusova transformacija (odredi joj oblik).

7.28. Dokaži da sljedeće Möbiusove transformacije: $S_1(z) = z$, $S_2(z) = \frac{1}{z}$, $S_3(z) = 1 - z$, $S_4(z) = \frac{1}{1-z}$, $S_5(z) = \frac{z-1}{z}$, $S_6(z) = \frac{z}{z-1}$ čine grupu s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju. (Napiši tablicu množenja!)

7.29. Neka su z_1 , z_2 točke simetrične s obzirom na (jediničnu) kružnicu k . Dokaži da svaka kružnica koja prolazi točkama z_1 i z_2 siječe kružnicu k pod pravim kutom.

7.30. Neka je S proizvoljna Möbiusova transformacija koja preslikava gornju poluravninu na samu sebe. Pokaži da S ima oblik $S = \frac{az+b}{cz+d}$, pri čemu su a , b , c , d realni brojevi za koje je $ad - bc > 0$.

7.31. Svakoj regularnoj kvadratnoj matrici drugog reda

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

odgovara Möbiusova transformacija S_A definirana na način:

$$S_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Pokaži da za pridruživanje $A \mapsto S_A$ vrijedi

A. Za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ je $S_{\alpha A} = S_A$;

B. Kompozicija Möbiusovih transformacija je Möbiusova transformacija i vrijedi $S_A \circ S_B = S_{AB}$;

C. Inverz Möbiusove transformacije je Möbiusova transformacija i vrijedi $(S_A)^{-1} = S_{A^{-1}}$.

7.32. Označimo sa $f(\alpha; z_0)$ Möbiusovu transformaciju iz (7.10), s jedinstvenom fiksnom točkom z_0 . Dokaži da za kompoziciju dviju takvih transformacija vrijedi

$$f(\alpha; z_0) \circ f(\beta; z_0) = f(\alpha + \beta; z_0).$$

Dokaži potom da skup $\{f(\alpha; z_0), \alpha \in \mathbb{C}\}$ čini komutativnu grupu uz kompoziciju kao grupovnu operaciju.

7.33. Označimo sa $g(\lambda; z_1, z_2)$ Möbiusovu transformaciju iz (7.13), s fiksnim točkama z_1, z_2 . Dokaži da za kompoziciju dviju takvih transformacija vrijedi

$$g(\lambda; z_1, z_2) \circ g(\mu; z_1, z_2) = g(\lambda\mu; z_1, z_2).$$

Dokaži potom da skup $\{g(\lambda; z_1, z_2), \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0\}$, uz operaciju kompozicije, čini komutativnu grupu.

7.34. Dokaži da za Möbiusovu transformaciju vrijedi $S^n = I$ za neki prirodan broj n ako i samo ako ona ima prikaz

$$\frac{S(z) - z_1}{S(z) - z_2} = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

za neke kompleksne brojeve z_1, z_2, λ , pri čemu je $\lambda^n = 1$.

7.35. Svaka se Möbiusova transformacija dade napisati u obliku $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, pri čemu je $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Dokaži: A. Neka je $\alpha = \delta$, realan broj. Ako je $|\alpha + \delta| < 2$, tada je preslikavanje eliptičko, za $|\alpha + \delta| > 2$ hiperboličko, a za $|\alpha + \delta| = 2$ paraboličko.
B. Ako je $\operatorname{Im}(\alpha + \delta) \neq 0$, tada je preslikavanje loksodromičko.

7.36. Odredi točke gomilanja za niz $\{a_n\}$ definiran formulama

$$a_{n+1} = \frac{2(2+i)a_n + 1 - 2i}{(1-2i)a_n + 2(2+i)}, \quad a_0 = 0.$$

8.

Konformna preslikavanja

Slik. 8.1. Omjer preslikavanja i kut zakretni

Kažemo da je preslikavanje $w = f(z)$ **konformno u točki** $z_0 \in \mathbb{C}$, ako je f analitička u nekoj okolini točke z_0 i ako vrijedi $f'(z_0) \neq 0$. Kažemo da je preslikavanje f **konformno na području** D , ako je konformno u svakoj točki tog područja. Preslikavanje koje je konformno na čitavoj kompleksnoj ravnini \mathbb{C} zvati ćemo naprosto konformnim.

Neka je f konformno na području D . Prepostavljamo da se krivulje γ_1 i γ_2 sijeku u točki $z_0 \in D$ pod kutom α . Tada se njihove slike γ_1^* i γ_2^* sijeku u točki $w_0 = f(z_0)$ pod istim kutom α , pri čemu se taj kut, u odnosu na realnu os, zaratirao za iznos $\varphi = \arg f'(z_0)$ (slika 8.1).

Ako je element luka Δs proizvoljne krivulje γ prešao u element luka Δs^* na krivulji γ^* , tada granična vrijednost $\lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{|\Delta s^*|}{|\Delta s|}$ ne ovisi o krivulji γ i iznosi $|f'(z_0)|$.

Kut

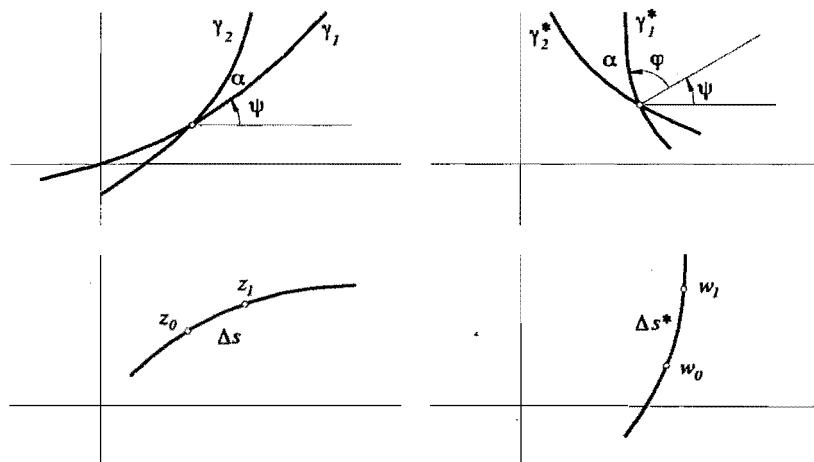
$$\varphi = \arg f'(z_0)$$

nazivamo **kut zakreta**, a broj

$$\lambda = |f'(z_0)|$$

omjer preslikavanja f u točki z_0 .

Ako je $\lambda > 1$, element luka krivulje γ se rasteže, a ako je $\lambda < 1$, element luka krivulje γ se stiče pri preslikavanju funkcijom f .



Slika 8.1. Kut zakreta i omjer preslikavanja. Preslikane krivulje sijeku se pod istim kutem kao i početne, dijelovi luka su zarotirani za kut φ i stegnuti (rastegnuti) za faktor λ .

8.1.

Izračunaj omjer preslikavanja i kut zakreta:

- A. $w = z^2$, u točki $z_0 = 1 + i$; B. $w = \ln z$, u točki $z_0 = i$;
C. $w = e^{\sin z}$, u točki $z_0 = i \ln 2$.

RJEŠENJE.

A. Izračunajmo derivaciju funkcije u zadanoj točki. Vrijedi $w'(z_0) = 2z_0 = 2 + 2i$. Zato je $\lambda = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$.

Općenito, u proizvoljnoj točki z_1 kompleksne ravnine, omjer preslikavanja je $\lambda = 2|z_1|$, a kut zakreta $\varphi = \arg z_1$ (slika 8.2).

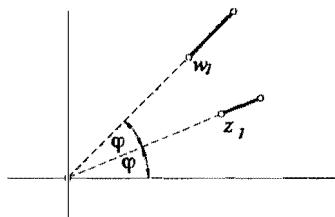
B. Sada je $w'(z_0) = \frac{1}{i} = -i$. Zato $\lambda = 1$, $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$.

C. $w'(z_0) = e^{\sin z} \cos z$. Zato, po formulama (4.5) i (4.6).

$$\sin(i \ln 2) = \frac{e^{i(i \ln 2)} - e^{-i(i \ln 2)}}{2i} = \frac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2i} = \frac{3i}{4},$$

$$\cos(i \ln 2) = \frac{e^{i(i \ln 2)} + e^{-i(i \ln 2)}}{2} = \frac{e^{-\ln 2} + e^{\ln 2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

Dakle, $w'(z_0) = \frac{5}{4}e^{3i/4}$, te je $\lambda = \frac{5}{4}$, $\varphi = \frac{3}{4}$.



Slika 8.2.

8.2.

Koji se dijelovi kompleksne ravnine stežu a koji rastežu pri preslikavanju funkcijama

A. $w = z^2 - 4z$; B. $w = e^z$; C. $w = \frac{1}{z}$.

RJEŠENJE. A. Vrijedi $w' = 2z - 4$. Omjer preslikavanja λ u točki z iznosi $|2z - 4|$. Uvjet $\lambda < 1$ daje $|z - 2| < \frac{1}{2}$. Dakle, nutrina kruga $\{|z - 2| < \frac{1}{2}\}$ se steže, a njegova vanjština rasteže pri preslikavanju funkcijom w .

B. $w' = e^z$, te je $\lambda = |w'| = |e^{x+iy}| = e^x$. $|\lambda| < 1$ vrijedi za $x < 0$. Steže se poluravnina $\{\operatorname{Re} z < 0\}$, a rasteže $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

C. Sada je $w' = -1/z^2$ i $\lambda < 1$ vrijedi za $|z| > 1$. Steže se vanjština jediničnog kruga, a rasteže njegova nutrina.

8.3.

U što se preslikava zraka $a \dots y = x - 1$, $x \geq 1$ funkcijom

A. $w = z^2$; B. $w = z^2 + 2iz$.

RJEŠENJE. A. Rastavimo $w = u + iv = z^2$ na realni i imaginarni dio. Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy, \\ y &= x - 1, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Eliminacijom varijable y :

$$\begin{aligned} u &= 2x - 1 \\ v &= 2x(x - 1), \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Ove jednadžbe predstavljaju parametarsku jednadžbu krivulje a^* u w -ravnini. Kako je $x = (u + 1)/2$, eliminacijom parametra x slijedi (vidi sliku 8.3.b.)

$$a^* \dots v = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}, \quad u \geq 1.$$

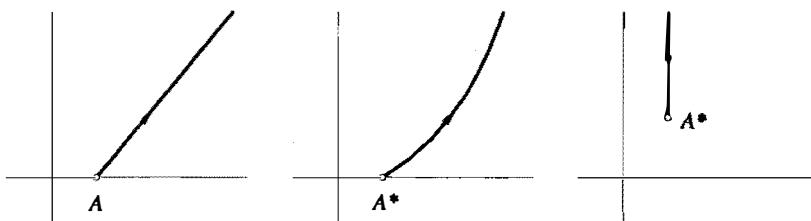
B. Sada imamo

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 - 2y, \\ v &= 2xy + 2x, \\ y &= x - 1, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Eliminacijom nepoznanice y dobivamo

$$\begin{aligned} u &= 1, \\ v &= 2x^2, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Ovaj sustav predstavlja parametarsku jednadžbu zrake a^* , (slika 8.3.c).



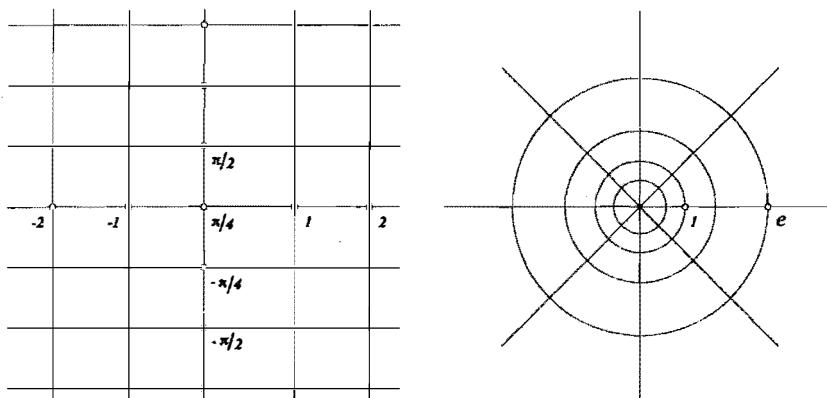
Slika 8.3.

8.4. U što se preslikava kartezijeva koordinatna mreža iz z -ravnine, funkcijom $w = e^z$?

RJEŠENJE. Koordinatnu mrežu čine krivulje duž kojih su pojedine koordinate konstantne: $x = C_1$ i $y = C_2$ opisuju kartezijevu koordinatnu mrežu.

$$w = e^z = e^{x+i y} = e^x \cdot e^{i y} = R \cdot e^{i \Phi}.$$

Zato se pravci $x = C_1$ preslikavaju u kružnice $w = e^{C_1} \cdot e^{i y}$, (s polumjerom e^{C_1}), a pravci $y = C_2$ u zrake $w = e^x \cdot e^{i C_2}$ (slika 8.4). Funkcija $w = e^z$ je konformna u svakoj točki i stoga čuva kutove, dobivene familije su ponovo ortogonalne.



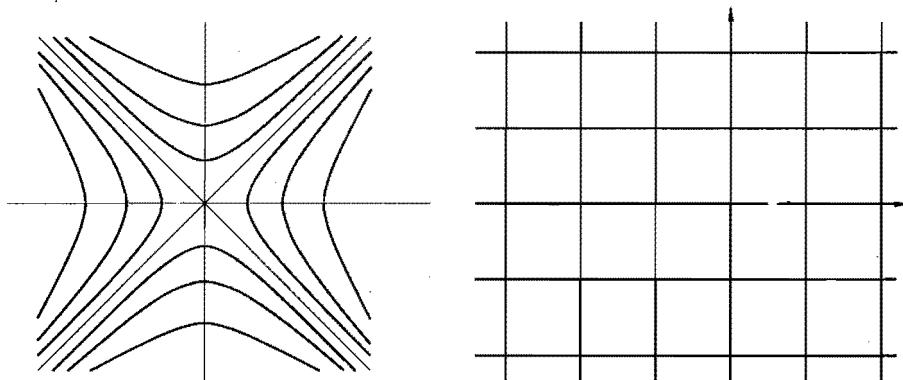
Slika 8.4. Slika kartezijeve (pravokutne) koordinatne mreže je polarna mreža u ravnini

8.5.

Duž kojih krivulja je realni dio funkcije $w = z^2$ konstantan? Duž kojih je konstantan imaginarni dio? Obje familije krivulja čine ortogonalne sisteme, zašto? Kakvo je preslikavanje u ishodištu?

RJEŠENJE. Vrijedi $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Realni i imaginarni dijelovi su: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ i konstantni su duž krivulja $x^2 - y^2 = C_1$, $2xy = C_2$. Ove jednadžbe predstavljaju dvije familije hiperbola (slika 8.5) koje se sijeku pod pravim kutem, pošto je njihova slika preko funkcije $w = z^2$ (kartezijeva) ortogonalna mreža $u = C_1$, $v = C_2$ u w -ravnini. Preslikavanje $w = z^2$ ima derivaciju $w' = 2z$ i konformno je svuda osim u ishodištu.

Kut među krivuljama koje se sijeku u ishodištu se ne čuva. Tako na primjer, pravci $y = 0$ i $y = x$ sijeku se pod kutem 45° , a njihove slike, $u = 0$ i $v = 0$ pod pravim kutom.



Slika 8.5. Realni i imaginarni dio funkcije $w = z^2$ su konstantni duž dvojice međusobno ortogonalnih familija hiperbola. Preslikavanje nije konformno u ishodištu

8.2. Konformna preslikavanja*

Neka je D područje. Kažemo da je funkcija f univalentna (ili jednolisna) na D , ako je f analitička na D i ako je injektivna na D . Kažemo da je f univalentna u točki z_0 , ako je univalentna u nekoj okolini točke z_0 . Nužan i dovoljan uvjet za to jest da bude $f'(z_0) \neq 0$. Prema tome, f je univalentna u točki z_0 ako i samo ako je konformna u toj točki.

Konformna preslikavanja se javlja u pri rješavanju sljedećeg osnovnog problema: Za zadana područja G u z -ravnini i G^* u w -ravnini, odredi preslikavanje koje preslikava G jednoznačno na G^* . Takvo preslikavanje, ako postoji, mora biti konformno. Postojanje takvog preslikavanja je dokazano, uz minimalne pretpostavke u sljedećem teoremu:

Teorem. (Riemann) Ako su G i G^* jednostruko povezana područja čiji se rubovi sastoje od više od jedne točke, tada postoji jednoznačno preslikavanje područja G na G^* .

U principu, postoji beskonačno mnogo analitičkih funkcija koje preslikavaju zadano područje G , jednoznačno na zadano područje G^* . Opišimo opći oblik takvog preslikavanja.

Neka je D jedinični krug (ili gornja poluravnina). Neka je f_1 (neka konkretna) funkcija koja preslikava G jednoznačno na D . Neka je također f_2 (neka konkretna) funkcija koja preslikava G^* na D . Označimo sa S proizvoljnu funkciju koja preslikava D na D (S je Möbiusova transformacija). Tada svaka funkcija oblika

$$f = f_2^{-1} \circ S \circ f_1$$

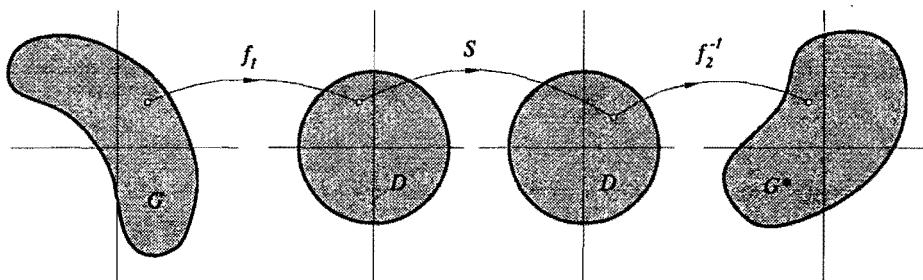
preslikava G na G^* , i to je opći oblik takvog preslikavanja (slika 8.6).

Preslikavanje f je jednoznačno određeno, ako je zadan neki od sljedećih uvjeta:

- (1) Slika jedne točke iz G i kut zakreta u toj točki:

$$w_0 = f(z_0), \quad \varphi = \arg f'(z_0), \quad z_0 \in G.$$

- (2) Dva para točaka (z_0, w_0) , (z_1, w_1) , pri čemu su z_0 , w_0 nutarnje, a z_1 , w_1 točke s rubova područja G , G^* .
- (3) Tri para točaka (z_1, w_1) , (z_2, w_2) , (z_3, w_3) , pri čemu z_1 , z_2 , z_3 leže na rubu od G , a w_1 , w_2 , w_3 na rubu od G^* .



Slika 8.6. Opći oblik preslikavanja područja G na G^*

Ako je zadano preslikavanje f i područje G , njegovu sliku određujemo preslikavajući samo granicu područja G . To nam omogućava sljedeći rezultat:

Teorem. Neka je G područje omeđeno konturom γ i f analitička univalentna funkcija na $\bar{G} = G \cup \gamma$. Neka je $\gamma^* = f(\gamma)$ slika konture γ . Tada je γ^* kontura i f preslikava jednoznačno područje G na područje G^* koje je omeđeno konturom γ^* .

Uvjet univalentnosti nije uvijek jednostavno provjeravati. Pri preslikavanju područja koristimo najčešće sljedeću verziju gornjeg rezultata. To je važni

Princip jednoznačnog pridruživanja granica. Neka su G i G^* jednostruko povezana područja sa granicama γ i γ^* koje su orientirane tako da pri obilasku po njima područja ostaju sa lijeve strane. Neka je G^* omeđeno područje. Ako je funkcija f

- (1) analitička na G i neprekidna na \overline{G} ,
 - (2) preslikava jednoznačno γ na γ^* uz očuvanje smjera obilaska,
- tada f preslikava jednoznačno područje G na G^* .

Primijetimo da ovdje područje G ne mora biti ograničeno. Međutim, ako ni G^* nije ograničeno, princip više ne mora vrijediti (vidi Zadatak 8.6). U takvom slučaju moramo provjeravati univalentnost funkcije f . Ipak, Princip se može donekle primjeniti i u slučaju kad je G neograničeno područje, i kad f ima singularitet unutar G :

Princip ... (nastavak) Ako je umjesto uvjeta (1) zadovoljen

- (1') f je neprekidna na \overline{G} i analitička na G , osim u jednoj nutarnjoj točki $z_0 \in G$ u kojoj ima pol prvog reda,
- tada f preslikava jednoznačno G na G^* .

U ovom je slučaju G^* neograničeno područje, pošto sadrži točku $\infty = f(z_0)$.

Oznaka $[z_1, z_2]$ označavat će ubuduće spojnicu točaka z_1 i z_2 u kompleksnoj ravnini, orijentiranu tako da joj je z_1 početna a z_2 završna točka. Tako se npr. intervali $[-1, 1]$ i $[1, -1]$ razlikuju po smjeru obilaska. Ukoliko je $z_2 = \infty$, gornja oznaka nije definirana. Ipak, za realan broj a definiramo sa $[a, +\infty]$: spojnicu točke a sa točkom ∞ , prema pozitivnom dijelu realne osi, $[-\infty, a]$: spojnicu točke ∞ , od negativnog dijela realne osi do realne točke a ; te $[ai, +\infty]$: spojnicu imaginarnog broja ai s točkom ∞ duž imaginarne osi.

8.6. Da li je primjenjiv Princip o jednoznačnom pridruživanju granica na funkciju $f(z) = z^3$ i područje $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$?

RJEŠENJE. Rub područja G je realna os $\gamma = [-\infty, +\infty]$. On se funkcijom f preslikava također u realnu os $\gamma^* = [-\infty, +\infty]$ i ta granica određuje područje $G^* = \{\operatorname{Im} w > 0\}$. (Pri obilasku po γ^* područje G^* nalazi se s lijeve strane.) Po Principu, moralo bi biti $f(G) = G^*$. Međutim, funkcija f nije univalentna i f ne preslikava G na G^* . Slika područja G je čitava w -ravnina (s izuzetkom ishodišta) i svaka točka gornje poluravnine $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ pokrivena je dvaput. Princip je neprimjenjiv, pošto su oba područja neograničena.

8.7. Da li se može primjeniti Princip na funkciju $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ i područje

$$\text{A. } G = \{|z| < 2\}; \quad \text{B. } G = \{|z| < \frac{1}{2}\}?$$

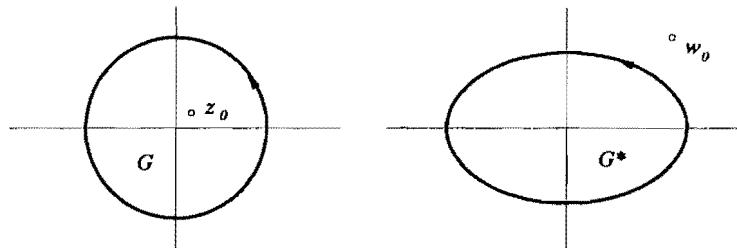
RJEŠENJE. A. Rub područja G je pozitivno orijentirana kružnica

$$\gamma \dots z = 2e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

i on se preslikava funkcijom f u

$$\begin{aligned} \gamma^* \dots w &= \frac{1}{2}\left(2e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}\right) \\ &= \frac{5}{4}\cos\varphi + i\frac{3}{4}\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

To je elipsa u w -ravnini, s poluosima $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{4}$. Pozitivnom obilasku po kružnici γ odgovara pozitivan obilazak po elipsi γ^* . Kad bi princip bio primjenjiv, područje G bi se moralo preslikati u područje G^* , omeđeno elipsom. Međutim, točka 0 leži u G , a njena slika, točka ∞ nije u G^* (slika 8.7)



Slika 8.7.

B. U slučaju kad f nije analitička na G , već ima unutar G pol prvog reda, da bi princip bio primjenjiv, mora obilazak po krivulji γ^* , induciran obilaskom po krivulji γ , biti suprotne orijentacije. Tada će se područje G preslikati jednoznačno u vanjsko područje omeđeno krivuljom γ^* . To će se dogoditi u ovom slučaju. Slika kružnice

$$\gamma \dots z = \frac{1}{2}e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

je ponovo elipsa

$$\gamma^* \dots w = \frac{5}{4}\cos\varphi - i\frac{3}{4}\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

s istim poluosima kao i prije, međutim, pozitivnom obilasku po kružnici γ odgovara negativan obilazak po γ^* . Princip u ovom slučaju vrijedi: funkcija f ima pol prvog reda u ishodištu, analitička je u ostalim točkama kompleksne ravnine. Slika područja G će biti neograničeno područje G^* : vanjsina elipse.

8.8.

Na kakvim područjima G sljedeće funkcije neće biti univalentne?

A. $f(z) = \frac{az + b}{cz + d};$

B. $f(z) = z^2;$

C. $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N};$

D. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$

E. $f(z) = e^z;$

F. $f(z) = \ln z;$

G. $f(z) = \sin z;$

H. $f(z) = \cos z.$

RJEŠENJE. A. Preslikavanje f nije univalentno na G ako postoje točke $z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$, takve da je $f(z_1) = f(z_2)$.

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \implies (ad - bc)(z_1 - z_2) = 0.$$

Kako je $z_1 \neq z_2$, to mora biti $ad - bc = 0$. No, tada je funkcija f konstantna za svaki z . Dakle, Möbiusova transformacija je univalentna na čitavoj ravnini C. Za nju je Princip primjenjiv za proizvoljno jednostruko povezano područje G .

B. $f(z_1) = f(z_2)$ daje $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$ i odavde $z_2 = -z_1$. Preslikavanje neće biti univalentno ako G sadrži sa nekom svojom točkom z_1 i njoj suprotnu točku $-z_1$. To će, npr., uvijek biti slučaj ako G sadrži ishodište.

C. Mora biti $z_1^n = z_2^n$. Napišimo $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Odavde, mora biti $r_1 = r_2$ i $n\varphi_1 + 2k\pi = n\varphi_2$, tj. $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi/n$, za neki $k = 1, 2, \dots, n-1$. Preslikavanje neće biti univalentno na G ako G sadrži za nekom svojom točkom z_1 i bilo koju od $n-1$ točki koje zajedno sa z_1 čine vrhove pravilnog n -terokuta sa središtem u ishodištu.

D. $f(z_1) = f(z_2)$ daje $(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0$ (provjeri!). Odavde $z_2 = \frac{1}{z_1}$.

Preslikavanje f neće biti univalentno na G ako se točke z_1 i $1/z_1$ nalaze unutar G . Obratno, f će biti univalentno ako G ne sadrži takav par točaka. To će vrijediti npr. ako je $G = \{|z| < 1\}$ (ili neki njegov podskup), ako je $G = \{|z| > 1\}$, $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ i slično.

Pogledaj ponovno Zadatak 8:7.A. Preslikavanje f nije univalentno na području $\{|z| < 2\}$ i zato ne može preslikavati jednoznačno to područje.

E. $e^{z_1} = e^{z_2}$ daje $z_1 = z_2 + 2k\pi i$. G ne smije sadržavati dvije točke čiji se imaginarni dijelovi razlikuju za višekratnik broja 2π , ukoliko želimo da f bude univalentna na G .

F. $\ln z_1 = \ln z_2$ daje $\ln r_1 + i\varphi_1 = \ln r_2 + i\varphi_2$ i mora biti $r_1 = r_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, tj. $z_1 = z_2$. Preslikavanje je univalentno svuda gdje je definirano.

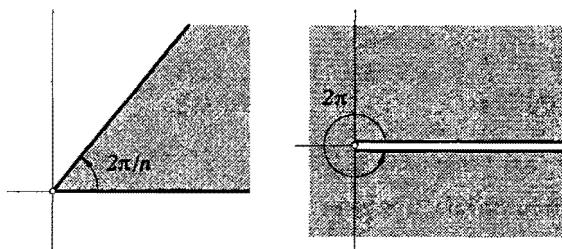
G. $\sin z_1 = \sin z_2$ daje $z_2 = z_1 + 2k\pi$. Preslikavanje nije univalentno na G ako ono sadrži dvije točke čija je razlika višekratnik broja 2π . Isto vrijedi i za funkciju $f(z) = \cos z$.

9.

Preslikavanje elementarnim funkcijama

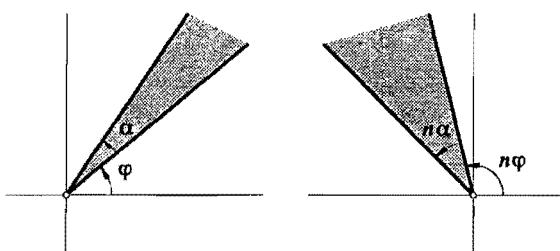
9.1. Funkcija $w = z^n$

Stavimo $z = re^{i\varphi}$, tada je $w = r^n \cdot e^{in\varphi}$. Ova funkcija preslikava jednoznačno isječak $0 < \varphi < 2\pi/n$ na čitavu w -ravninu, osim pozitivne realne osi (kažemo: s razrezom duž pozitivne osi). Vidi sl. 9.1.



Slika 9.1. Isječak s kutom $2\pi/n$ se preslikava u ravninu bez jedne zrake

Zraka $a \dots \varphi = 0$ preslikava se u zraku $a^* \dots \Phi = 0$ (pozitivni dio realne osi u w -ravnini), zraka $b \dots \varphi = 2\pi/n$ preslikava se ponovo u istu zraku $b^* \dots \Phi = 0$. Svaki drugi isječak s kutom $0 < \alpha < 2\pi/n$ preslikava se u isječak s kutom $n\alpha$ (sl. 9.2.).



Slika 9.2. Isječak s kutom α preslikava se funkcijom $w = z^n$ u isječak s kutom $n\alpha$

9.1. Funkcijom $w = z^2$ preslikaj područje

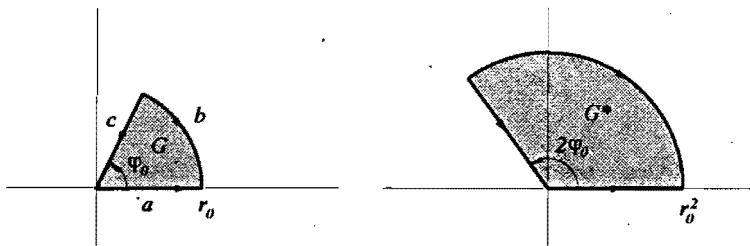
$$G = \{z = re^{i\varphi} : 0 < r < r_0, 0 < \varphi < \varphi_0\}, \quad 0 < \varphi_0 < \pi.$$

RJEŠENJE. Prikažimo z i w u eksponencijalnom obliku:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \implies w = r^2 \cdot e^{i2\varphi} = R \cdot e^{i\Phi}$$

te je $R = r^2$, $\Phi = 2\varphi$.

Preslikajmo svaku od triju krivulja a , b , c koje određuju rub γ područja G . Funkcija je univalentna na G i dovoljno je preslikati tu granicu γ .



Slika 9.3.

$$a \dots r \in [0, r_0], \varphi = 0 \implies a^* \dots R \in [0, r_0^2], \Phi = 0,$$

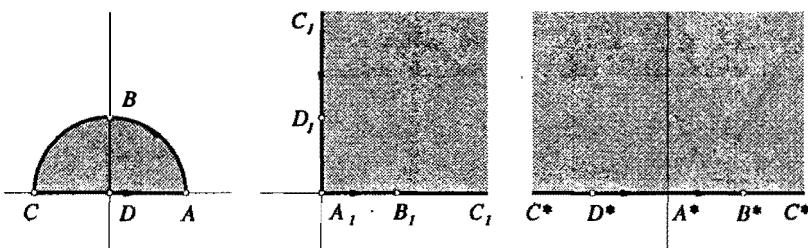
$$b \dots r = r_0, \varphi \in [0, \varphi_0] \implies b^* \dots R = r_0^2, \Phi \in [0, 2\varphi_0],$$

$$c \dots r \in [r_0, 0], \varphi = \varphi_0 \implies c^* \dots R \in [r_0^2, 0], \Phi = 2\varphi_0.$$

Slika kružnog isječka je ponovo kružni isječak (dvostruko većeg kuta). Zapis $r \in [r_0, 0]$ naznačava smjer promjene veličine r , dakle, r poprima sve vrijednosti u intervalu $[0, r_0]$ i to u padajućem poretku.

9.2. Odredi funkciju koja preslikava polukrug $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ u gornju poluravninu, $\{\operatorname{Im} w > 0\}$, tako da točka 1 prijeđe u ishodište.

RJEŠENJE.



Slika 9.4.

Preslikat ćemo najprije polukrug u isječak s vrhom u ishodištu, koristeći Möbiusovu transformaciju. Dovoljno je točku A preslikati u ishodište, te točku C u ∞ . Pri tom će se kružni lukovi ABC i ADC preslikati u zrake s početkom u ishodištu. Izaberimo onu Möbiusovu transformaciju koja preslikava točku $z = i$ u točku $w = 1$. Prema tome, trojku $(1, i, -1)$ moramo preslikati u $(0, 1, \infty)$. Dobivamo

$$z_1 = -i \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Pri tom točka $z = 0$ prelazi u $w = i$, zato je slika polukruga prvi kvadrant. Funkcija $w = z_1^2$ preslikava prvi kvadrant u gornju poluravninu. Dakle, traženo preslikavanje je kompozicija ovih dvaju:

$$w = z_1^2 = -\frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 1}.$$

9.3.

Odredi funkciju koja preslikava područje $G = \{0 < \arg z < \pi/4\}$ na jedinični krug $G^* = \{|w| < 1\}$, tako da točke $e^{i\pi/8}$, 0 iz z -ravnine prijeđu redom u točke 0 , 1 u w -ravnini.

RJEŠENJE. Područje G preslikavamo najprije funkcijom $z_1 = z^4$ na gornju poluravninu u z_1 -ravnini (sl. 9.5). Pri tom točke $e^{i\pi/8}$, 0 prelaze redom u i , 0 . Zatim preslikavamo poluravninu $\{\operatorname{Im} z_1 > 0\}$ Möbiusovom transformacijom na G^* , tako da točka i prijeđe u središte kruga. Po (7.8) tražena transformacija ima oblik

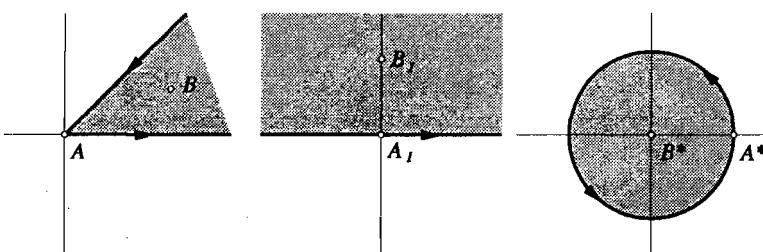
$$w = e^{i\varphi} \cdot \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = e^{i\varphi} \cdot \frac{z_1 - i}{z_1 + i}.$$

Odrediti ćemo φ tako da točka 0 prijeđe u točku 1 :

$$1 = e^{i\varphi} \cdot \frac{0 - i}{0 + i} \Rightarrow e^{i\varphi} = -1,$$

te je

$$w = -\frac{z_1 - i}{z_1 + i} = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i}.$$



Slika 9.5.

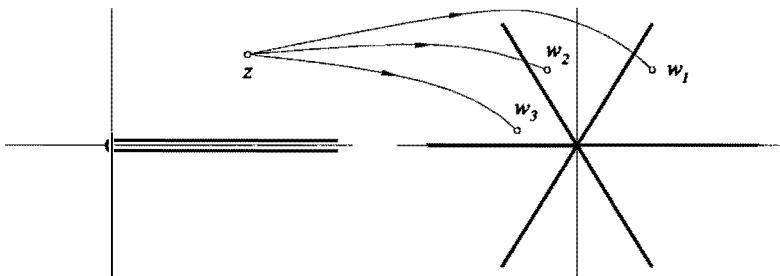
Preslikavanje je jedinstveno, pošto su zadane slike jedne nutarnje točke i jedne točke sa ruba područja G .

9.2. Funkcija $w = \sqrt[n]{z}$

To je višeznačna funkcija, s vrijednostima

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Funkcije w_k su grane višeznačne funkcije. Svaka grana w_k preslikava kompleksnu z -ravninu, s razrezom duž pozitivnog dijela realne osi, na isječak $\left\{ \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}$ (sl. 9.6).



Slika 9.6. Funkcija $\sqrt[n]{z}$ preslikava ravninu s razrezom na isječak širine $2\pi/n$.

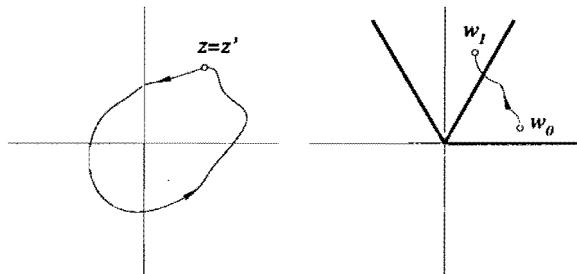
Specijalno, grana w_0 funkcije $w = \sqrt{z}$ preslikava $C \setminus [0, +\infty]$ jednoznačno na gornju poluravninu.

Neka je $z = re^{i\varphi} \in C$ proizvoljan. Opišimo zatvorenu krivulju Γ s početkom i završetkom u točki $z' = z$ tako da ona obuhvaća ishodište. Pretpostavimo da se argumenti brojeva pri obilasku po krivulji neprekidno mijenjaju. Tada se argument broja z nakon obilaska po krivulji Γ povećao na $\varphi + 2\pi$. Promatrajmo vrijednost grane w_0 funkcije n -ti korijen, duž krivulje Γ . Vrijedi

$$w_0(z') = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\varphi+2\pi)/n} = w_1(z).$$

Prema tome, obilazak po krivulji Γ oko ishodišta prevodi nas sa jedne grane funkcije n -ti korijen na drugu granu.

Ukoliko krivulja Γ ne obuhvaća ishodište, vrijedit će $w_0(z') = w_0(z)$. Kazemo da je ishodište razgranište za funkciju $w = \sqrt[n]{z}$.



Slika 9.7. Obilazak oko ishodišta prebacuje nas s jedne grane funkcije n -ti korijen u drugu.

Nakon n obilazaka oko ishodišta, vratit ćemo se ponovo na početnu granu w_0 . Razgranište s takvim svojstvom nazivamo **algebarskim razgraništem** ($n-1$)-**vog reda**. Kako je svaki obilazak oko ishodišta ujedno i obilazak oko točke ∞ , to je i ∞ razgranište ove funkcije.

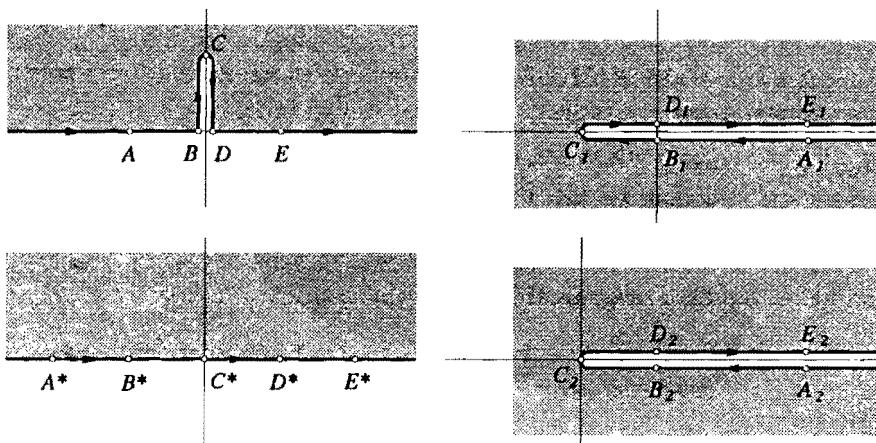
U zadacima koji slijede uvijek ćemo pod funkcijom $w = \sqrt[n]{z}$ promatrati njenu granu w_0 .

- 9.4.** Odredi funkciju koja preslikava područje $G = \{\operatorname{Im} z > 0, z \notin [0, ih]\}$ na gornju poluravninu.

RJEŠENJE. Traženo svojstvo ima funkcija $w = \sqrt{z^2 + h^2}$. Sl. 9.8 opisuje transformaciju zadanoj područja G (gornje poluravnine s razrezom duž segmenta $[0, ih]$) pomoću te funkcije, koju rastavljamo na kompoziciju sljedećih elementarnih preslikavanja:

$$z_1 = z^2, \quad z_2 = z_1 + h^2, \quad w = \sqrt{z_2}.$$

Opišimo djelovanje ovih preslikavanja. Funkcija $z_1 = z^2$ preslikava G u čitavu z_1 -ravninu, s razrezom duž intervala $[-h^2, +\infty)$. Translacija $z_2 = z_1 + h^2$ pomiče taj razrez na interval $[0, +\infty)$, tj. na pozitivni dio realne osi. Funkcija $w = \sqrt{z_2}$ preslikava z_2 -ravninu, s razrezom duž $[0, +\infty)$ na gornju poluravninu. Na slici je prikazano i preslikavanje nekoliko karakterističnih točaka. Točke B i D nalaze se u ishodištu, s raznih strana razreza $[0, ih]$: argument točke B je π (pošto se k njoj stiže duž negativnog dijela realne osi), a argument točke D je 0. Njihove slike B^* i D^* su točke $-h$ i $+h$. Provjeri!

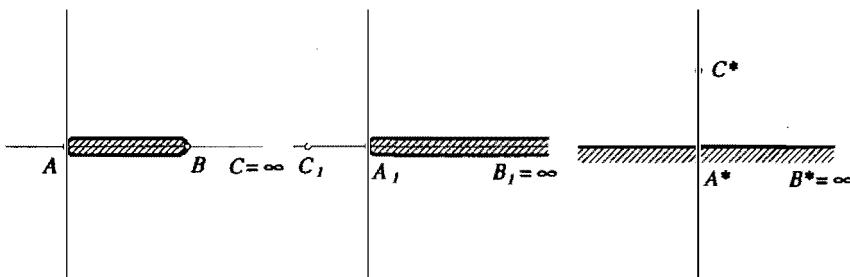


Slika 9.8. "Glačanje" razreza u gornjoj poluravnini

- 9.5.** Odredi funkciju koja preslikava područje $G = \{z \notin [0, 1]\}$ na gornju poluravninu.

RJEŠENJE. Preslikajmo najprije područje G Möbiusovom transformacijom, tako da interval (razrez) $[0, 1]$ pijeđe u $[0, +\infty]$. Dovoljno je točke $(0, 1, \infty)$ preslikati u $(0, \infty, -1)$. Möbiusova transformacija je jednoznačno preslikavanje sa $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$, ako $[0, 1]$ prelazi u $[0, \infty]$, ostatak $\overline{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$ preslikat će se jednoznačno na $\overline{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty]$ (sl. 9.9). Jednadžba ove Möbiusove transformacije glasi $w = \frac{z}{1-z}$ (provjeri!). Zato je G_1 čitava z_1 -ravnina, s razrezom duž pozitivne osi. Funkcija $w = \sqrt{z_1}$ preslikava G_1 na gornju poluravninu. Dakle, rješenje glasi

$$w = \sqrt{\frac{z}{1-z}}.$$



Slika 9.9.

9.3. Funkcija Žukovskog

Funkcijom Žukovskog nazivamo preslikavanje

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Primjetimo da vrijedi $f(z) = f(1/z)$. Zato će f preslikavati točke z i $1/z$ u istu točku. Da bi preslikavanje bilo univalentno na području G , ono ne smije sadržavati niti jedan par točaka $z, 1/z$. To je sigurno ispunjeno ako je područje G sadržano u nutrini ili pak vanjštini jediničnog kruga, te u gornjoj ili donjoj poluravnini.

Jedini singularitet ove funkcije je $z_0 = 0$ i to je pol prvog reda. Stoga će za nju vrijediti Princip jednoznačnog pridruživanja granica.

9.6. Funkcijom Žukovskog preslikaj kružnicu $|z| = r$.

RJEŠENJE. Jednadžba kružnice je $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Zato

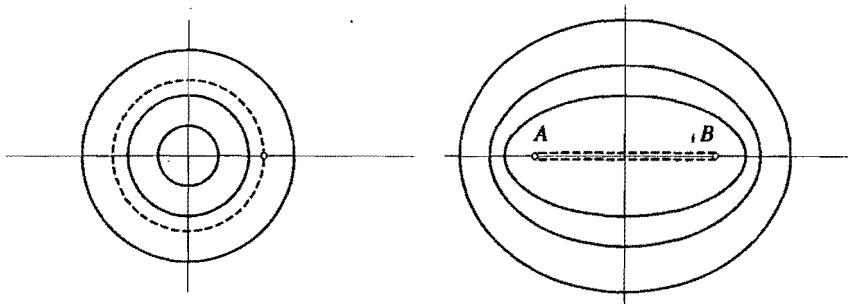
$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}) \\ &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi, \end{aligned}$$

što predstavlja parametarsku jednadžbu elipse $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ s poluosima $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $b = \frac{1}{2}|r - \frac{1}{r}|$, ukoliko je $r \neq 1$ (sl. 9.10). Žarišta ovih elipsi su točke $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, pošto vrijedi $a^2 - b^2 = 1$. Ako je $r > 1$, tada pozitivnom obilasku duž kružnice $|z| = r$ odgovara pozitivan smjer obilaska po elipsi, dok se za $r < 1$ smjer obilaska po elipsi mijenja. Primjetimo da je uvijek $a > 1$, dok za $r \rightarrow 1$ vrijedi $b \rightarrow 0$.

Za $r = 1$ dobivamo $u = \cos\varphi$, $v = 0$. Slika jedinične kružnice je degenerirana elipsa: segment $[-1, 1]$ (prijeđen dva puta), gornja polukružnica preslikava se u $[1, -1]$, donja u $[-1, 1]$.



Slika 9.10. Funkcija Žukovskog preslikava kružnice u elipse. Smjer obilaska po elipsi se mijenja ukoliko je polumjer kružnice manji od 1.

9.7. Funkcijom Žukovskog preslikaj zrake iz ishodišta z -ravnine.

RJEŠENJE. Jednadžbe zraka su $\varphi = \text{const.}$, tj.

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad 0 < r < \infty,$$

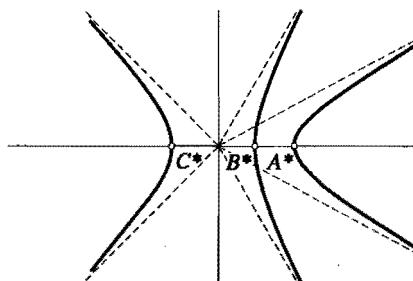
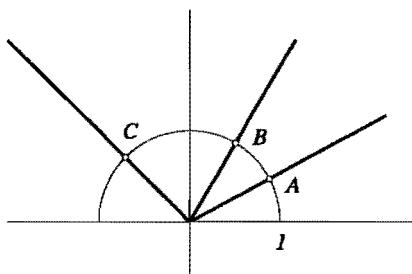
gdje je φ fiksan za pojedinu zraku. Kao u Zadatku 9.6 dobivamo

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, & 0 < r < \infty, \\ v &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi, \end{aligned}$$

no, sada je varijabla φ konstantna. Eliminacijom parametra r dobivamo, za $\varphi \neq k\pi/2$:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \\ \frac{v}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1,$$

a to su jednadžbe hiperbola s žarištim u točkama $A(-1,0)$, $B(1,0)$. Njihove asimptote su pravci $v = \pm \operatorname{tg} \varphi u$, tj. $\arg w = \pm \varphi$. U šta se preslikavaju zrake $\varphi = k\pi/2$?

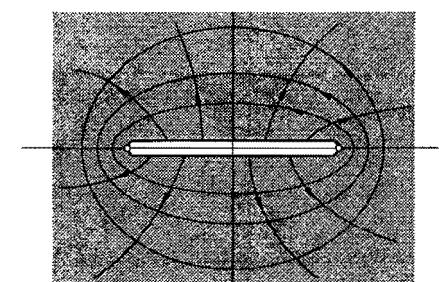
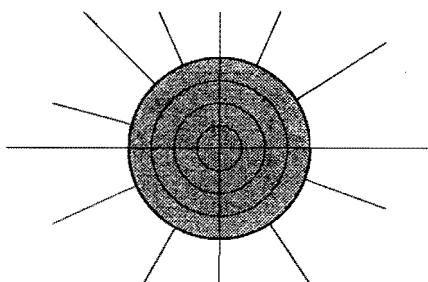


Slika 9.11. Funkcija Žukovskog preslikava zrake u grane hiperbole

9.8.

Funkcijom Žukovskog preslikaj

- A. Nutrinu jediničnog kruga;
- B. Vanjštinu jediničnog kruga;
- C. Gornji polukrug $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;
- D. Donji polukrug $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$.



Slika 9.12. I nutrina i vanjštinu jediničnog kruga preslikavaju se funkcijom Žukovskog u čitavu ravninu (s razrezom $[-1, 1]$)

RJEŠENJE. A. Po Zadatku 9.6, slika kružnice $|z| = r$, $r < 1$ je elipsa s poluosima $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $b = \frac{1}{2}(\frac{1}{r} - r)$. Kad se r mijenja od 0 do 1, ove će elipse ispuniti čitavu w -ravninu, s razrezom duž intervala $[-1, 1]$ (sl. 9.12).

B. Vanjština jediničnog kruga preslikava se također u w -ravninu, s razrezom duž intervala $[-1, 1]$. Točke z i $1/z$ preslikavaju se u istu točku u w -ravnini.

C. Preslikajmo krivulje koje omeđuju gornji polukrug:

$$\alpha \dots z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, \pi], \quad a^* \dots w = \cos \varphi, \varphi \in [0, \pi],$$

$$b \dots z = -r, r \in [1, 0], \quad b^* \dots w = -\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), r \in [1, 0],$$

$$c \dots z = r, r \in [0, 1], \quad c^* \dots w = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), r \in [0, 1].$$

Dakle, granica područja G preslikava se u realnu os $[+\infty, -\infty]$. Zato se G preslikava u donju poluravninu.

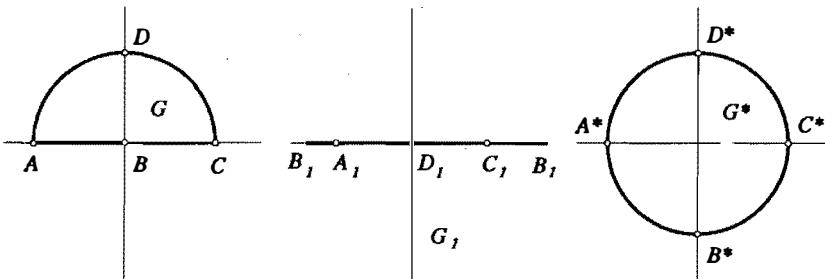
D. Slika donjeg polukruga je gornja poluravnina.

9.9. Preslikaj polukrug $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ u krug $\{|w| < 1\}$, tako da točke $-1, 0, 1$ prijeđu redom u točke $-1, -i, 1$.

RJEŠENJE. Tražena funkcija nije $w = z^2$, pošto će takva preslikati (otvoreni) polukrug u krug s razrezom duž intervala $[0, 1]$. Ispravno preslikavanje ćemo dobiti kompozicijom dva jednostavnijih preslikavanja.

Najprije ćemo funkcijom Žukovskog $f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ preslikati gornji polukrug u donju poluravninu (prošli zadatak). Pri tom će točke $1, -1, 0$ prijeći u točke $1, -1, \infty$. Zatim Möbiusovom transformacijom preslikavamo donju poluravninu u jedinični krug, tako da točke $1, -1, \infty$ prijeđu u točke $1, -1, -i$. Tim je uvjetom Möbiusova transformacija jednoznačno određena. Provjeri da glasi $w = S(z) = -i \frac{z_1 + i}{z_1 - i}$. Odavde

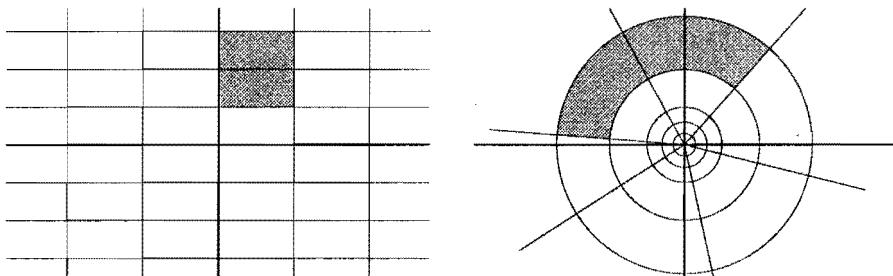
$$w = \frac{z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i}.$$



Slika 9.13.

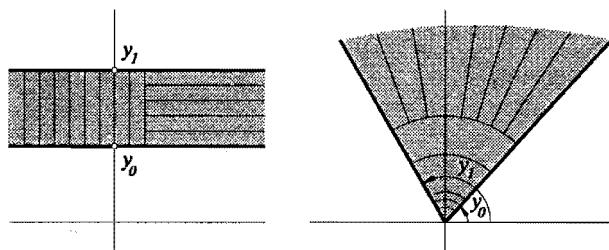
9.4. Eksponencijalna funkcija $w = e^z$

Eksponencijalna funkcija preslikava prugu $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ jednoznačno na čitavu w -ravninu, s razrezom duž pozitivnog dijela realne osi (sl. 9.14). Funkcija je periodička s periodom $2\pi i$, tj. $w(z) = w(z + 2\pi i)$, za sve $z \in \mathbb{C}$.



Slika 9.14. Eksponencijalna funkcija preslikava prugu širine 2π u čitavu ravninu (bez realne poluosi). Pravokutnik paralelan s koordinatnim osima preslikava se u dio kružnog isječka

Općenitije, pruga $\{y_0 < \operatorname{Im} z < y_1\}$, ($y_1 - y_0 < 2\pi$) preslikava se jednoznačno na isječak $\{y_0 < \operatorname{Arg} w < y_1\}$ (sl. 9.15).



Slika 9.15. Pruga širine manje od 2π preslikava se u isječak

Ukoliko G sadrži sa nekom svojom točkom z_1 i točku $z_1 + 2k\pi i$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada preslikavanje neće biti univalentno na G . Kako je $w' = e^z \neq 0$ za svaki z , preslikavanje je konformno u svakoj točki z -ravnine.

- 9.10.** Funkcijom $w = e^z$ preslikaj sljedeća područja ($z = x + iy$):
 A. $\{0 < x < \infty, 0 < y < \pi/2\}$; B. $\{0 < x < 1, 0 < y < \pi\}$;
 C. $\{-\infty < x < 0, 0 < y < 2\pi\}$.

RJEŠENJE. Prikazimo w u trigonometrijskom obliku,

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = R \cdot e^{i\Phi},$$

te je

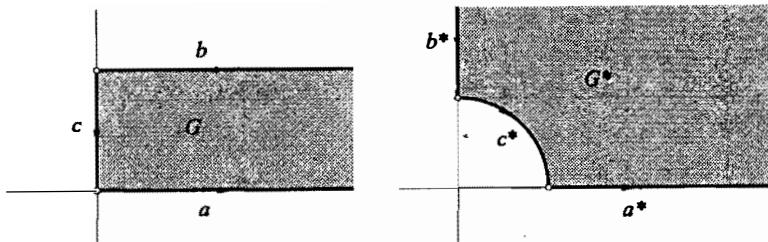
$$R = e^x : \text{modul preslikanih kompleksnih brojeva,}$$

$$\Phi = y : \text{argument preslikanih kompleksnih brojeva.}$$

A. Odredimo slike krivulja a , b , c koje omeđuju zadano područje G

$$\begin{aligned} a \dots x \in [0, \infty], y = 0 &\implies a^* \dots R \in [1, \infty], \Phi = 0, \\ b \dots x \in [\infty, 0], y = \pi/2 &\implies b^* \dots R \in [\infty, 1], \Phi = \pi/2, \\ c \dots x = 0, y \in [\pi/2, 0] &\implies c^* \dots R = 1, \Phi \in [\pi/2, 0]. \end{aligned}$$

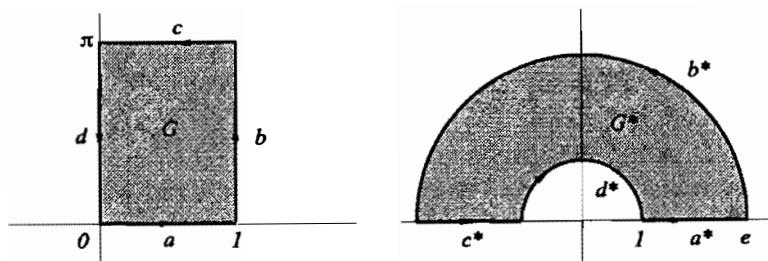
Krivulje a^* , b^* , c^* određuju traženo područje G^* (sl. 9.16).



Slika 9.16.

B. (sl. 9.17)

$$\begin{aligned} a \dots x \in [0, 1], y = 0 &\implies a^* \dots R \in [1, e], \Phi = 0, \\ b \dots x = 1, y \in [0, \pi] &\implies b^* \dots R = e, \Phi \in [0, \pi], \\ c \dots x \in [1, 0], y = \pi &\implies c^* \dots R \in [e, 1], \Phi = \pi, \\ d \dots x = 0, y \in [\pi, 0] &\implies d^* \dots R = 1, \Phi \in [\pi, 0]. \end{aligned}$$

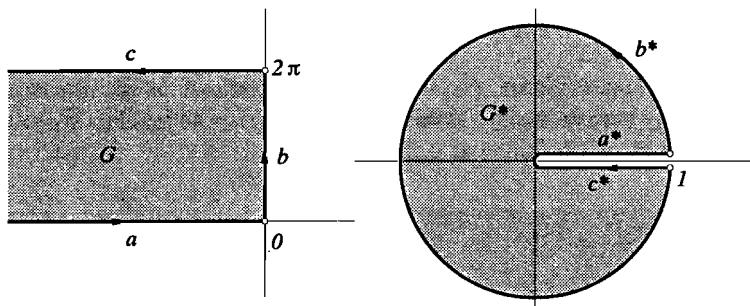


Slika 9.17.

C. (sl. 9.18.)

$$\begin{aligned} a \dots x \in [-\infty, 0], y = 0 &\implies a^* \dots R \in [0, 1], \Phi = 0, \\ b \dots x = 0, y \in [0, 2\pi] &\implies b^* \dots R = 1, \Phi \in [0, 2\pi], \\ c \dots x \in [0, -\infty] y = 2\pi &\implies c^* \dots R \in [1, 0] \Phi = 2\pi. \end{aligned}$$

Područje G preslikava se u G^* : nutrinu jediničnog kruga s razrezom duž intervala $[0, 1]$.



Slika 9.18.

9.11. Funkcijom $w = \left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1} \right)^2$ preslikaj područje $G = \{\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

RJEŠENJE. Funkciju rastavljamo na kompoziciju sljedećih preslikavanja:

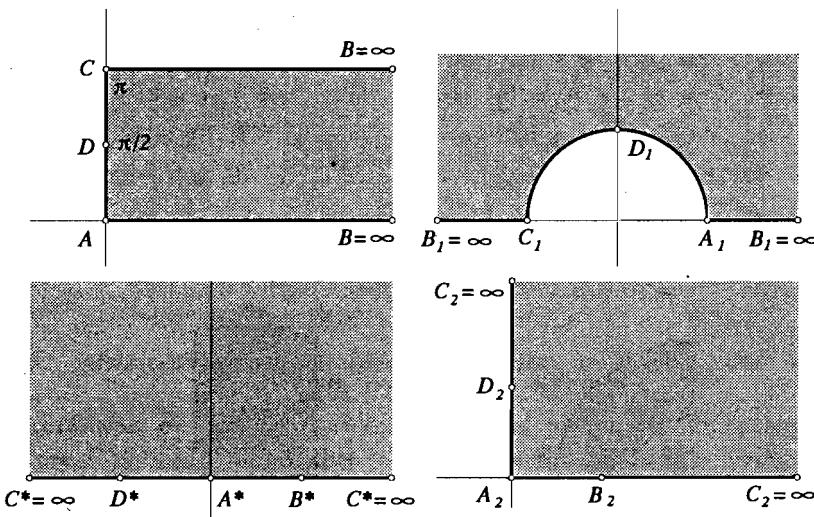
$$z_1 = e^z, \quad z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}, \quad w = z_2^2.$$

Prva funkcija $z_1 = e^z$ preslikava područje G na $G_1 = \{|z_1| > 1, \operatorname{Im} z_1 > 0\}$. (Usporedi s prošlim zadatkom.)

Möbiusova transformacija $z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$ preslikava G_1 na prvi kvadrant.

Naime, točke $1, \infty, -1, i$ preslikavaju se redom u točke $0, 1, \infty, i$ (provjeri!).

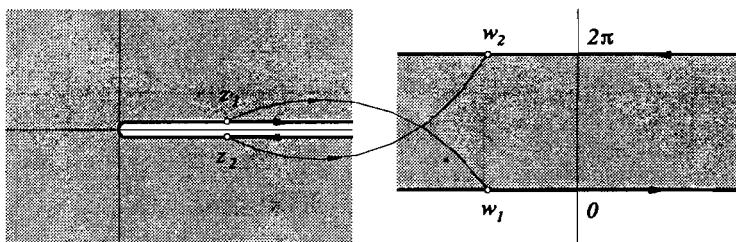
Slika prvog kvadranta preko funkcije $w = z_2^2$ je $G = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, gornja poluravnina (sl. 9.19).



Slika 9.19.

9.5. Logaritamska funkcija $w = \ln z$

To je višeznačna funkcija. Njena glavna vrijednost $w = \ln z = \ln r + i\varphi$ preslikava čitavu z -ravninu (s razrezom duž pozitivne realne osi) na prugu $\{0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$ u w -ravnini (sl. 9.20).



Slika 9.20. Grana logaritamske funkcije preslikava kompleksnu ravninu s razrezom na prugu širine 2π . Tačke s raznih strana razreza preslikavaju se na suprotne krajeve pruge

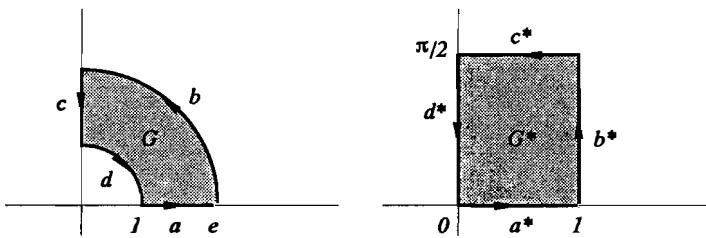
9.12. Funkcijom $w = \ln z$ preslikaj područje

$$G = \{1 < |z| < e, 0 < \arg z < \pi/2\}.$$

RJEŠENJE. Vrijedi $w = \ln z = \ln r + i\varphi = u + iv$, te je $u = \ln r$, $v = \varphi$. Preslikajmo krivulje koje omeđuju G .

$$\begin{aligned} a \dots r \in [1, e], \varphi = 0 &\implies a^* \dots u \in [0, 1], v = 0, \\ b \dots r = e, \varphi \in [0, \pi/2] &\implies b^* \dots u = 1, v \in [0, \pi/2], \\ c \dots r \in [e, 1], \varphi = \pi/2 &\implies c^* \dots u \in [1, 0], v = \pi/2, \\ d \dots r = 1, \varphi \in [\pi/2, 0] &\implies d^* \dots u = 0, v \in [\pi/2, 0]. \end{aligned}$$

Područje G^* je pravokutnik na sl. 9.21.



Slika 9.21.

9.6. Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus su konformne u čitavoj kompleksnoj ravnini. Pri preslikavanju tim funkcijama obično ih rastavljamo na realni i imaginarni dio.

9.13. Preslikaj kartezijsku koordinatnu mrežu funkcijom $w = \cos z$.

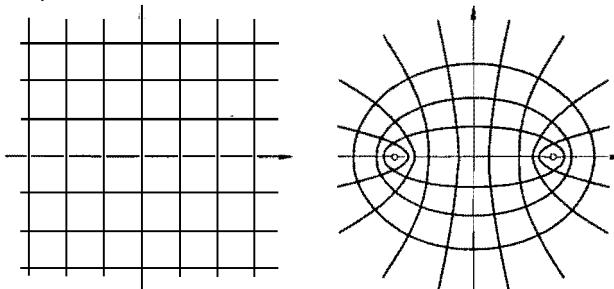
RJEŠENJE. Vrijedi $w = u + iv = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, te je

$$u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin x \operatorname{sh} y$$

i odavde

$$\begin{aligned} x = C_1 &\implies \frac{u^2}{\cos^2 C_1} - \frac{v^2}{\sin^2 C_1} = \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1, \\ y = C_2 &\implies \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C_2} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C_2} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \end{aligned}$$

ukoliko je $C_1 \neq k\pi/2$, $C_2 \neq 0$. Zato se kartezijska mreža preslikava u familije međusobno okomitih hiperbola i elipsi, sa žarištim u točkama $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$ (sl. 9.22).



Slika 9.22. Funkcijom kosinus preslikava se kartezijska koordinatna mreža u familiju međusobno okomitih hiperbola i elipsi

Koordinatna os $x = 0$, i općenito vertikalni pravci $x = 2k\pi$, preslikavaju se u interval $[1, \infty)$, prijeđen dva puta, koji predstavljaju granu degenerirane hiperbole. Pravci $x = \pi + 2k\pi$ preslikavaju se u interval $(-\infty, -1]$, također prijeđen dva puta. Koordinatna os $y = 0$ preslikava se u interval $(-1, 1)$.

Pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ preslikavaju se na koordinatnu os $u = 0$.

9.14.

Funkcijom $w = \cos z$ preslikaj područja

$$\text{A. } G = \{0 < x < \pi/2, y < 0\}; \quad \text{B. } G = \{0 < x < \pi\}.$$

RJEŠENJE. Vrijedi

$$u = \operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y,$$

$$v = \operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

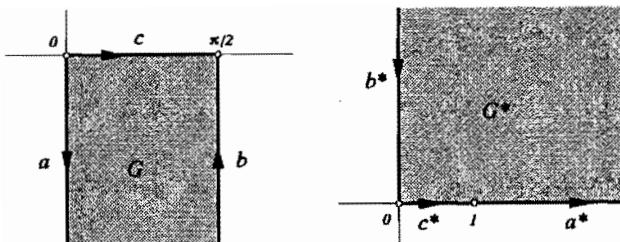
A. Odredimo sliku krivulja koje omeđuju područje G (sl. 9.23).

$$a \dots x = 0, y \in [0, -\infty) \implies a^* \dots u \in [1, +\infty), v = 0;$$

$$b \dots x = \pi/2, y \in (-\infty, 0] \implies b^* \dots u = 0, v \in (+\infty, 0];$$

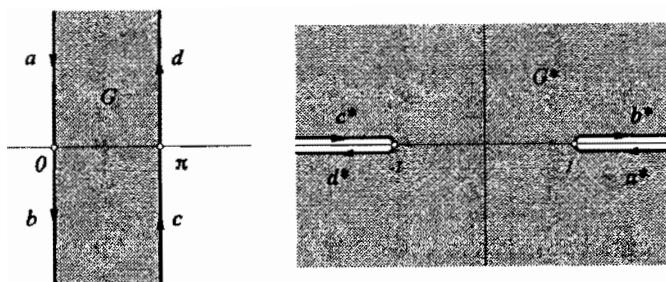
$$c \dots x \in [\pi/2, 0], y = 0 \implies c^* \dots u \in [0, 1], v = 0.$$

Zato je G^* prvi kvadrant w -ravnine.



Slika 9.23.

B. Slike krivulja $a-d$ su (sl. 9.24)



Slika 9.24.

$$a \dots x = 0, y \in [+\infty, 0] \implies a^* \dots u \in [+\infty, 1], v = 0;$$

$$b \dots x = 0, y \in [0, -\infty] \implies b^* \dots u \in [1, +\infty], v = 0;$$

$$c \dots x = \pi, y \in [-\infty, 0] \implies c^* \dots u \in [-\infty, -1], v = 0;$$

$$d \dots x = \pi, y \in [0, +\infty] \implies d^* \dots u \in [-1, -\infty], v = 0.$$

Dakle, slika područja G je w -ravnina, s razrezima duž intervala $[-\infty, -1]$, $[1, +\infty]$ na realnoj osi. Zraka a preslikava se u donji dio razreza $[1, +\infty]$, pošto vrijedi $v < 0$ za brojeve s pozitivnim imaginarnim dijelom. Analogno se određuju i položaji slika preostalih zraka, vidi i prošli zadatak.

9.15. Odredi funkciju koja preslikava područje

$$G = \{z = x + iy : 0 < x < 1, z \notin [0, h]\}$$

na gornju poluravninu (h realan, $0 < h < 1$).

RJEŠENJE. Preslikajmo područje G = pruga $\{0 < x < 1\}$ s razrezom duž intervala $x \in [0, h]$, funkcijom $z_1 = \cos \pi z$, tako što ćemo odrediti slike krivulja $a-f$ koje omeđuju G .

Krivulje $a-d$ određuju dva razreza, kao u prošlom zadatku. Dalje računamo

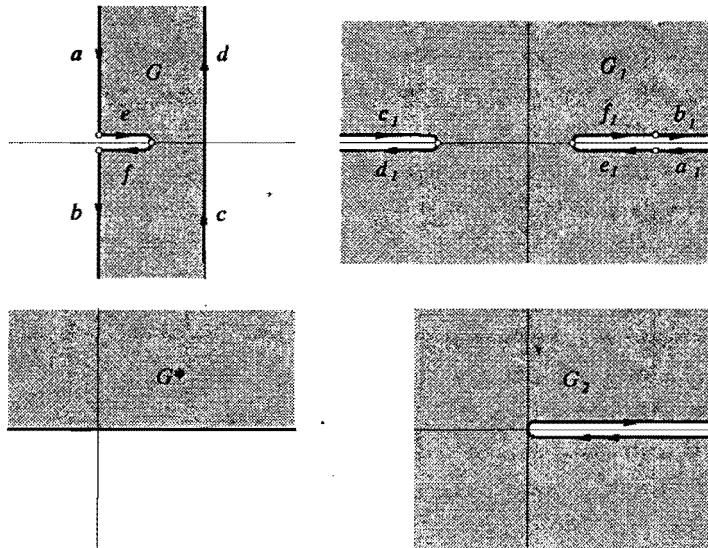
$$e \dots x \in [0, h], y = 0 \implies e_1 \dots u \in [1, \cos \pi h], v = 0;$$

$$f \dots x \in [h, 0], y = 0 \implies f_1 \dots u \in [\cos \pi h, 1], v = 0.$$

Dobivamo područje G_1 = čitava z_1 -ravnina, s razrezom duž intervala $(-\infty, -1]$, $[\cos \pi h, \infty)$ (sl. 9.25). Zatim preslikavamo G_1 Möbiusovom transformacijom tako da točke $(\cos \pi h, \infty, -1)$ prijeđu redom u točke $(0, 1, \infty)$:

$$z_2 = \frac{z_1 - \cos \pi h}{z_1 + 1}.$$

Pri tom se razrez $(-\infty, -1] \cup [\cos \pi h, +\infty)$ preslikava u $[0, +\infty)$. Zato je slika područja G_1 čitava z_2 -ravnina, s razrezom duž intervala $[0, +\infty)$ (sl. 9.25).



Slika 9.25.

Stavimo li $w = \sqrt{z_2}$, G_2 će se preslikati u gornju poluravninu. Prema tome, jedno rješenje predstavlja funkcija

$$w = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h}{\cos \pi z + 1}}.$$

9.7. Zadatak za vježbu

- 9.16.** Odredi neku funkciju koja preslikava zadano područje na gornju poluravninu $\{\operatorname{Im} w > 0\}$:
- A. $G = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\};$
 - B. $G = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\};$
 - C. $G = \{|z| < 1, |z - 1| < 1\};$
 - D. $G = \{|z| < 1, |z - 1| > 1\};$
 - E. $G = \{|z| > 1, |z - i| < 1\};$
 - F. $G = \{|z| < 1, |z - i| > 1\}.$
- 9.17.** Odredi funkciju $w = f(z)$ koja preslikava jedinični polukrug $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ na gornju poluravninu $\{\operatorname{Im} w > 0\}$, takvu da bude
A. $w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = \infty;$ B. $w(1) = -1, w(-1) = 1, w(0) = \infty;$
- 9.18.** Odredi funkciju $w = f(z)$ koja preslikava polukrug $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ na krug $\{|\omega| < 1\}$, takvu da bude A. $w(i/2) = 0, \arg w'(i/2) = 0;$ B. $w(i/2) = 0, \arg w'(i/2) = \pi/2;$ C. $w(1) = 1, w(-1) = -1, w(0) = -i.$
- 9.19.** U što se preslikava kartezijeva koordinatna mreža $\{x = C_1, y = C_2\}$, funkcijom
A. $w = \cos z;$ B. $w = \operatorname{ch} z;$ C. $w = \operatorname{tg} z.$
- 9.20.** Odredi sliku područja G pri preslikavanju sljedećim funkcijama
- A. $G = \{|\operatorname{Im} z| < \pi/2\}, w = e^z;$
 - B. $G = \{|\operatorname{Im} z| < \pi\}, w = e^z;$
 - C. $G = \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}, w = e^z;$
 - D. $G = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}, w = e^{iz};$
 - E. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}, w = \operatorname{Ln} z, w(i) = \pi i/2;$
 - F. $G = \{z \notin [-\infty, 0]\}, w = \operatorname{Ln} z, w(-1) = -\pi i;$
 - G. $G = \{|z| < 1, z \notin [0, 1]\}, w = \operatorname{Ln} z, w(-1) = -\pi i.$
- 9.21.** Odredi sliku područja G pri preslikavanju sljedećim funkcijama ($z = x + iy$):
- A. $G = \{0 < x < \pi, y < 0\}, w = \cos z;$
 - B. $G = \{0 < x < \pi/2, y > 0\}, w = \cos z;$
 - C. $G = \{-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}, w = \cos z;$
 - D. $G = \{0 < x < \pi\}, w = \cos z;$
 - E. $G = \{0 < y < \pi\}, w = \operatorname{ch} z;$
 - F. $G = \{x > 0, 0 < y < \pi\}, w = \operatorname{ch} z;$
 - G. $G = \{0 < x < \pi, y > 0\}, w = \operatorname{tg} z;$
 - H. $G = \{x > 0, -\pi < y < \pi\}, w = \operatorname{sh} z;$

- I. $G = \{0 < x < 2\pi, y > 0\}, w = \sin z;$
 J. $G = \{y > 0\}, w = \arcsin z;$
 K. $G = \{x > 0, y > 0\}, w = \arcsin z;$
- 9.22. U što se preslikavaju sljedeći skupovi (krivulje ili područja) pri zadanim preslikavanjima
 A. $D = \{\arg z = \pi/6\}, w = z^3;$
 B. $D = \{\operatorname{Re} z = 1\}, w = z^3;$
 C. $D = \{|z| = 1, |\arg z| < \pi/3\}, w = z^3;$
 D. $D = \{|\arg z| < \pi/4, z \notin [0, 1]\}, w = z^4;$
 E. $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, w = z^{3/2}, w(i/2) = (1 - i)/4;$
 F. $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}, w = z^2;$
 G. $D = \{\operatorname{Re} z > 1\}, w = z^2.$
- 9.23. Funkcijom Žukovskog, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, preslikaj sljedeće krivulje ili područja:
 A. $D = \{|z| > 2\};$
 B. $D = \{\pi/4 < \arg z < 3\pi/4\};$
 C. $D = \{|z| < 1, z \notin [0, 1]\};$
 D. $D = \{|z| < 1, z \notin [a, 1]\}, (-1 < a < 1);$
 E. $D = \{|z| < 1, 0 < \arg z < \pi/2\}.$
- 9.24. Odredi sliku zadanih područja onom granom funkcije $w = \sqrt{z}$ koja zadovoljava postavljeni uvjet:
 A. $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}, w(1) = -1;$
 B. $G = \{\operatorname{Re} z > 0\}, w(1) = 1;$
 C. $G = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, w(i/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i;$
 D. $G = \{z = x + iy : y^2 > 2x + 1\}, w(-1) = -i;$
 E. $G = \{|z| > 1, \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}, w(2i) = -1 - i.$

10.

Taylorovi redovi

10.1. Redovi potencija

Red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (10.1)$$

naziva se **red potencija** oko točke $z_0 \in \mathbb{C}$. Kompleksni brojevi c_0, c_1, \dots nazivaju se koeficijenti reda potencija. Postavlja se osnovno pitanje: za kakve kompleksne brojeve će ovaj red konvergirati? Odgovor je dan u sljedećem teoremu:

Teorem (Prvi Abelov) Ako red (10.1) konvergira za neki $z = z_1 \in \mathbb{C}$, tada on konvergira (i to apsolutno) za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Obratno, ako red (10.1) divergira za neki $z = z_1 \in \mathbb{C}$, tada on divergira za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Po Abelovom teoremu, **područje konvergencije** reda (10.1) je (otvoreni) krug $K = \{z : |z - z_0| < R\}$, sa središtem u točki z_0 . Polumjer R tog kruga zove se **polumjer konvergencije** reda potencija. Red potencija divergira čim je $|z - z_0| > R$. Na kružnici $|z - z_0| = R$, red može divergirati, ali i konvergirati.

Polumjer konvergencije može se odrediti iz koeficijenata reda (10.1), formulom

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (10.2)$$

ili pak formulom

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (10.3)$$

ukoliko ovaj limes postoji. Najčešće se područje konvergencije određuje primjenom nekog kriterija konvergencije za redove kompleksnih brojeva (D'Alemberto-vog, Cauchyjevog, Raabeovog, ...).

Na krugu K suma reda definira analitičku funkciju

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n =: f(z), \quad z \in K. \quad (10.4)$$

Ovaj red konvergira prema funkciji f uniformno po svakom zatvorenom podsкупu od K . Stoga se on može derivirati i integrirati "član po član", te npr. vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = f'(z), \quad z \in K, \quad (10.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} = \int_{z_0}^z f(z) dz, \quad z \in K. \quad (10.6)$$

Dobiveni redovi potencija imaju isti polumjer konvergencije kao i početni red (konvergencija na rubu područja se može promjeniti).

Teorem (Drugi Abelov) Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ konvergira u točki z_1 , tada on konvergira uniformno za svaki z sa spojnice $[z_0, z_1]$.

Odavde slijedi, za $z_0 = 0$ i $z_1 = 1$, sljedeći rezultat: ako red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergira, tada vrijedi

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \quad (10.7)$$

Ovaj se rezultat ponekad može iskoristiti pri određivanju sume reda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

10.1. Odredi polumjer konvergencije sljedećih redova:

A. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2-i} \right)^n; \quad$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$

C. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}; \quad$ D. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{ch} n)^n z^n.$

RJEŠENJE. A. Vrijedi $c_n = \frac{1}{(2-i)^n}$. Formula (10.2) daje

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|2-i|^n}} = \frac{1}{|2-i|}.$$

te je $R = |2-i| = \sqrt{5}$.

B. Sada je $c_n = n!/n^n$. Formula (10.2) je neprikladna, pošto daje

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

a ovaj se limes teško računa. Primjenimo (10.3):

$$\begin{aligned} R &= \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} \\ &= \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \end{aligned}$$

C. Ovog puta (10.3) neprimjenljiva, pošto su mnogi koeficijenti c_n jednaki nuli. Naime, red potencija glasi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!} = 1 + 2z + 2^2 z^2 + 2^3 z^6 + 2^4 z^{24} + \dots$$

te je $c_{n!} = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, a svi ostali koeficijenti su jednaki nuli.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_k|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n!}|} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/(n-1)!} = 1. \end{aligned}$$

D. Računamo ponovo po (10.2):

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\operatorname{ch} in|^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{ch} in| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |\cos n| = 1.$$

Uvjeri se, s pomoću trigonometrijske kružnice, da je ovaj limes superior zaista jednak 1. (Skup $\{\cos n, n \in \mathbb{N}\}$ je gust podskup intervala $[-1, 1]$). Uvjeri se također da limes (10.3) ne postoji.

10.2. Odredi područje konvergencije redova

$$\text{A. } \sum_{n=0}^{\infty} z^n; \quad \text{B. } \sum_{n=1}^{\infty} n z^n; \quad \text{C. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};$$

i njihove sume na tom području.

RJEŠENJE. A. Vrijedi $c_n = 1$ za svaki n , te je $R = 1$. Red se naziva **geometrijski red**, on konvergira čim je $|z| < 1$ i njegova suma iznosi:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

B. Derivirajmo geometrijski red "član po član". Dobivamo

$$1 + 2z + \dots + nz^{n-1} + \dots = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Polumjer konvergencije se nije promijenio, zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1.$$

C. Ovog puta moramo integrirati članove geometrijskog reda:

$$z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots = \int_0^z \frac{1}{1-z} dz, \quad |z| < 1.$$

Dakle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z), \quad |z| < 1.$$

10.3. Ispitaj ponašanje sljedećih redova na rubu područja konvergencije:

$$\text{A. } \sum_{n=1}^{\infty} z^n; \quad \text{B. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad \text{C. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

RJEŠENJE. Sva tri reda konvergiraju na krugu $|z| < 1$. Na rubu tog područja, tj. na kružnici $|z| = 1$, prvi red divergira u svakoj točki, pošto vrijedi $|z^n| = |z|^n = 1$ za svaki n , te nije ispunjen nuždan uvjet konvergencije.

Kako je $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ za $|z| = 1$, to treći red konvergira apsolutno u svakoj točki kružnice.

Drugi red očigledno divergira za $z = 1$. U ostalim točkama z ima prikaz $z = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi}/n$ konvergira za svaki takav φ . Konvergencija nije apsolutna (vidi Zadatak 3.10).

10.4. Koristeći drugi Abelov teorem, dokazi da vrijedi

$$\begin{aligned} \text{A. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} &= -\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right|, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ \text{B. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} &= \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

RJEŠENJE. Dokazati ćemo istovremeno da vrijede oba rezultata. Najprije, oba reda konvergiraju, pošto su to realni, odnosno imaginarni dijelovi konvergentnog reda $\sum e^{in\varphi}/n$. Stoga možemo primijeniti drugi Abelov teorem:

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} r^n, \quad r < 1,$$

$$B := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} r^n, \quad r < 1.$$

Zato je

$$\begin{aligned} A + iB &= \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{n} r^n \\ &= \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}{n} r^n. \end{aligned}$$

Stavimo $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Vrijedi $|z| < 1$ jer je $r < 1$. Po Zadatku 10.2.C imamo

$$\begin{aligned} A + iB &= \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \lim_{r \uparrow 1} [-\ln(1 - z)] \\ &= -\ln(1 - \cos \varphi - i \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\ln \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi - \pi}{2} + i \sin \frac{\varphi - \pi}{2} \right) \right) \\
 &= -\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| - \frac{\varphi - \pi}{2} i.
 \end{aligned}$$

i odavde slijedi rezultat.

10.2. Taylorovi redovi

Ako je funkcija f jednoznačna i analitička u nekoj okolini G točke $z_0 \in \mathbf{C}$, tada se ona dade prikazati pomoću Taylorovog reda oko točke z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (10.8)$$

Koeficijenti c_n dani su formulom

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (10.9)$$

ili pak

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (10.10)$$

gdje je Γ zatvorena pozitivno orijentirana Jordanova krivulja koja sadrži točku z_0 i koja leži u području G . Obično uzimamo $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$, dakle, kružnicu dovoljno malog polumjera r .

Red (10.8) će konvergirati na krugu

$$K = \{z : |z - z_0| < R\}.$$

Polumjer konvergencije R reda potencija (10.8) može se računati formulom (10.2). Međutim, kako je nama obično poznata eksplicitna formula funkcije koju razvijamo u Taylorov red, polumjer konvergencije obično određujemo znajući da će red (10.8) konvergirati na krugu sa središtem u z_0 i koji se proteže do prvog neuklonjivog singulariteta funkcije f (vidi §11 za opis singulariteta analitičke funkcije).

Formula (10.9), a pogotovo (10.10) nije prikladna za računanje koeficijenata Taylorovog reda. Obično tražimo Taylorov red koristeći se redovima poznatih funkcija, primjenjujući pritom neke algebarske postupke, trigonometrijske identitete ili pak postupke deriviranja i integriranja redova potencija.

Taylorov red oko točke $z_0 = 0$ nazivamo Maclaurinov red.

Evo popisa Taylorovih (Maclaurinovih) redova nekih elementarnih funkcija:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad (10.11)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad (10.12)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{24} - \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad (10.13)$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad (10.14)$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad (10.15)$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad |z| < 1; \quad (10.16)$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < 1; \quad (10.17)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots, \quad |z| < 1; \quad (10.18)$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \dots, \quad |z| < 1. \quad (10.19)$$

10.5. Razvij u Taylorov red u okolini točke z_0 funkcije

$$\text{A. } f(z) = \frac{1}{4-z^2}, \quad z_0 = 0 \qquad \text{B. } f(z) = \frac{z-2}{z^2-z-6}, \quad z_0 = 0$$

$$\text{C. } f(z) = \frac{1}{1+z}, \quad z_0 = i$$

RJEŠENJE. A. Koristit ćemo razvoj (10.18):

$$f(z) = \frac{1}{4-z^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}}.$$

Red konvergira ako je $|z^2/4| < 1$, tj. za $|z| < 2$.

B. Rastaviti ćemo funkciju na parcijalne razlomke.

$$\frac{z-2}{z^2-z-6} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z+2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z-3}.$$

Svaki od pribrojnika možemo razviti u Maclaurinov red:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n, \quad |z| < 2,$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}, \quad |z| < 3.$$

Zato je

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{5 \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{5 \cdot 3^{n+1}} \right) z^n. \end{aligned}$$

Red konvergira za $|z| < 2$.

C.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+z-i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} \\ &= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Red konvergira ako je $|(z-i)/(1+i)| < 1$, tj. za $|z-i| < \sqrt{2}$. Primjeti da je $\sqrt{2}$ upravo udaljenost točke $z_0 = i$ do prvog (i jedinog) singulariteta $z = -1$ zadane funkcije.

10.6. Razvij u Maclaurinov red sljedeće funkcije

$$\text{A. } f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}; \quad \text{B. } f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

RJEŠENJE. Koristit ćemo Maclaurinov razvoj funkcije $g(z) = \frac{1}{1-z}$. Red (10.18) možemo derivirati član po član:

$$g'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Polumjer konvergencije je ostao nepromijenjen, stoga će i ovaj red konvergirati za $|z| < 1$. Prenumeracijom indeksa sumacije dobivamo prikaz

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n. \quad (10.20)$$

B. Dovoljno je u red (10.20) uvrstiti $-z^2$ umjesto z :

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

10.7.

Razvij u Maclaurinov red sljedeće funkcije:

A. $f(z) = \sin^2 z$;

B. $f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z$;

C. $f(z) = e^z \sin z$.

RJEŠENJE. A. Transformirajmo funkciju u prikladniji oblik

$$f(z) = \sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$$

i iskoristimo razvoj funkcije kosinus (10.13):

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Red konvergira za sve $z \in \mathbf{C}$.

B. Koristeći identitet $1 = (\sin^2 z + \cos^2 z)^2 = \sin^4 z + \cos^4 z + 2\sin^2 z \cos^2 z$ dobivamo

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - 2\sin^2 z \cos^2 z = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2z) \\ &= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4z) = 1 - \frac{1}{4} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4z)^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

C. Funkciju sinus možemo prikazati pomoću eksponencijalne:

$$e^z \sin z = e^z \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{z(1+i)} - e^{z(1-i)}).$$

Po Maclaurinovom redu za eksponencijalnu funkciju dobivamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z(1+i)]^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z(1-i)]^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i(n!)} z^n. \end{aligned}$$

Koefficijenti su tek prividno kompleksni brojevi. Vrijedi

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = \sqrt{2^n} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

$$(1-i)^n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = \sqrt{2^n} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

Zato je

$$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Tako dobivamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n} \sin(n\pi/4)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbf{C}.$$

10.8.

Dokaži da vrijede sljedeći razvoji:

$$\text{A. } \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}, \quad |z| < 1;$$

$$\text{B. } \arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

RJEŠENJE. A. Koristit ćemo razvoj (10.17), stavivši $-z^2$ umjesto z i $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$(1-z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-z^2)^n.$$

Izračunajmo koeficijente:

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)}{2^n n! 2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi tražena formula.

B. Kako je $(\arcsin z)' = 1/\sqrt{1-z^2}$, to vrijedi

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

i red za funkciju arkus sinus dobit ćemo integriranjem član po član gore izvedenog reda.

10.9.

Odredi prva tri člana, različita od nule, u razvoju funkcije u MacLaurinov red.

$$\text{A. } f(z) = \ln(1 + \cos z); \quad \text{B. } f(z) = e^{z \cos z};$$

$$\text{C. } f(z) = \frac{1-z+z^2}{1-z-z^2-z^3}; \quad \text{D. } f(z) = \frac{1}{1+e^z}.$$

RJEŠENJE. Ilustrirati ćemo na ovom primjeru nekoliko ponešto različitih metoda.

A. Odredimo nekoliko prvih koeficijenata koristeći formulu (10.9). Vrijedi

$$f(z) = \ln(1 + \cos z),$$

$$f(0) = \ln 2$$

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= -\frac{\sin z}{1 + \cos z}, & f'(0) &= 0 \\
 f''(z) &= -\frac{1}{1 + \cos z}, & f''(0) &= -\frac{1}{2} \\
 f'''(z) &= -\frac{\sin z}{(1 + \cos z)^2}, & f'''(0) &= 0 \\
 f^{IV}(z) &= -\frac{\cos z(1 + \cos z) + \sin^2 z}{(1 + \cos z)^3}, & f^{IV}(0) &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Dakle

$$\ln(1 + \cos z) = \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Polumjer konvergencije je $R = \pi$. Zašto?

B. Iskoristiti ćemo poznate Maclaurinove redove za eksponencijalnu funkciju, na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 e^{z \cos z} &= e^{z(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots)} = e^z \cdot e^{-\frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{24} - \dots} \\
 &= (1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots) \cdot \left(1 + \left(-\frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{24} - \dots\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(-\frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{24} - \dots\right)^2 + \dots\right) \\
 &= (1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots)(1 - \frac{z^3}{2} + \dots).
 \end{aligned}$$

Svi neispisani članovi sadrže potencije s većim eksponentom. Množeći ove redove i uzimajući u obzir samo potencije do z^3 dobivamo

$$e^{z \cos z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \dots$$

C. Odrediti ćemo prvih nekoliko članova dijeleći brojnik s nazivnikom!

$$\begin{aligned}
 (1 - z + z^2) : (1 - z - z^2 - z^3) &= 1 + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \dots \\
 \underline{1 - z - z^2 - z^3} \\
 2z^2 + z^3 \\
 \underline{2z^2 - 2z^3 - 2z^4 - 2z^5} \\
 3z^3 + 2z^4 + 2z^5 \\
 \underline{3z^3 - 3z^4 - 3z^5 - 3z^6} \\
 5z^4 + 5z^5 + 3z^6 \\
 \dots
 \end{aligned}$$

Dakle

$$\frac{1 - z + z^2}{1 - z - z^2 - z^3} = 1 + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \dots$$

D. Primjenit ćemo postupak ekvivalentan prethodnom. Ispišimo red za traženu funkciju s privremeno neodređenim koeficientima:

$$\frac{1}{1+e^z} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

Napišimo red za $1+e^z$ i uvrstimo u gornju jednakost:

$$\begin{aligned} 1 &= (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots)(2 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots) \\ &= 2c_0 + (2c_1 + c_0)z + (2c_2 + c_1 + \frac{c_0}{2})z^2 + \\ &\quad + (2c_3 + c_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6})z^3 + \dots \end{aligned}$$

Odavde dobivamo rekurzivne relacije pomoću kojih možemo lagano odrediti prvih nekoliko koeficijenata:

$$\begin{aligned} 1 &= 2c_0 & \Rightarrow c_0 &= \frac{1}{2} \\ 0 &= 2c_1 + c_0 & \Rightarrow c_1 &= -\frac{1}{4} \\ 0 &= 2c_2 + c_1 + \frac{c_0}{2} & \Rightarrow c_2 &= 0 \\ 0 &= 2c_3 + c_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6} & \Rightarrow c_3 &= \frac{1}{48} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dakle

$$\frac{1}{1+e^z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{48}z^3 + \dots$$

Ako je $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$, tada Maclaurinov red za produkt $f(z)g(z)$ možemo dobiti množenjem gornjih redova:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Koeficijent c_n dan je sa

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}. \quad (10.21)$$

10.10. Dokaži da je

$$\left[\frac{\ln(1-z)}{z} \right]^2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) \frac{z^n}{n+2}.$$

RJEŠENJE. Iskoristit ćemo rastav funkcije $\ln(1-z)$:

$$\frac{\ln(1-z)}{z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}.$$

Zato je

$$\left[\frac{\ln(1-z)}{z} \right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

gdje je

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \cdot \frac{1}{n-j+1}.$$

Da bismo dobili traženu formulu, transformirati ćemo ovaj zbroj:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{n+2} \cdot \frac{(n-j+1)+(j+1)}{(j+1)(n-j+1)} \\ &= \frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{j+1} + \frac{1}{n-j+1} \right] \\ &= \frac{1}{n+2} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} + \sum_{j=0}^n \frac{1}{n-j+1} \right). \end{aligned}$$

Obje se sume sastoje od istovjetnih pribrojnika. Zato je

$$c_n = \frac{2}{n+2} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} = \frac{2}{n+2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right),$$

što je i trebalo pokazati.

10.3. Funkcija izvodnica*

Funkcija $F(t, z)$ dviju kompleksnih varijabli je izvodnica niza funkcija $f_n(z)$, ako za svaki t na nekom krugu $|t| < R$ vrijedi

$$F(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) t^n.$$

Izvodnica pomaže pri proučavanju svojstava niza $\{f_n\}$. Navest ćemo funkcije izvodnice za sisteme ortogonalnih polinoma:

Legendreovi polinomi:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n.$$

Čebiševljevi polinomi:

$$\frac{1 - tz}{1 - 2tz + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z) t^n.$$

Laguerrovi polinomi:

$$\frac{1}{1-t} \exp\left\{-\frac{zt}{1-t}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z) \frac{t^n}{n!}.$$

Hermiteovi polinomi:

$$e^{2zt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!}.$$

10.11. S pomoću funkcije izvodnice dokaži sljedeće rekurzivne formule

- A. $(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z)$,
- B. $T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z)$,
- C. $L_{n+1}(z) = (2n+1-z)L_n(z) - n^2 L_{n-1}(z)$,
- D. $H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z)$.

RJEŠENJE. Dokazati ćemo relaciju A. Krenimo od funkcije izvodnice:

$$(1 - 2zt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n.$$

Diferencirajmo ovu relaciju po t :

$$(z-t)(1 - 2zt + t^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) n t^{n-1}.$$

Odavde:

$$(z-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n = (1 - 2zt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(z) t^{n-1}.$$

Izjednačimo koeficijente uz potenciju t^n :

$$zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1)P_{n+1}(z) - 2zP_n(z) + (n-1)P_{n-1}(z).$$

Nakon sređivanja slijedi relacija A.

10.4. Zadaci za vježbu

10.12. Odredi polumjer konvergencije sljedećih redova:

- | | | |
|---|--|---|
| A. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n;$ | B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n};$ | C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n;$ |
| D. $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n;$ | E. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n;$ | F. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} z^n;$ |
| G. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n};$ | H. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2^n};$ | I. $\sum_{n=1}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n z^n;$ |
| J. $\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n;$ | K. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!(n+1)!\cdots(n+k-1)!} z^n;$ | |
| L. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} z^n.$ | | |

10.13. Odredi polumjer konvergencije sljedećih redova:

- | | | |
|---|---|---|
| A. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n;$ | B. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi/n} z^n;$ | C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+i}\right)^n;$ |
| D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n;$ | E. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n;$ | F. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in}\right)^n;$ |
| G. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+i) z^n;$ | H. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos in z^n.$ | |

10.14. Ako vrijedi

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \geq R \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right), \quad n \geq n_0$$

za neku konstantu $\alpha > 1$ i $R > 0$, dokaži da red $\sum c_n z^n$ konvergira u svim točkama na rubu kruga konvergencije.

10.15. Koristeći drugi Abelov teorem, dokaži

- | |
|---|
| A. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} ;$ |
| B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad (0 < \varphi < 2\pi);$ |
| C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\varphi}{n} = \ln(2 \cos \frac{\varphi}{2});$ |
| D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2}, \quad (-\pi < \varphi < \pi).$ |

10.16. Ispitaj konvergenciju na rubu kruga konvergencije, za redove

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n};$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n}, \quad k \in \mathbb{N};$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2};$

D. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n;$

E. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n};$

F. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3n}}{n \ln n}.$

10.17. Neka je R polumjer konvergencije reda $\sum c_n z^n$. Odredi polumjer konvergencije reda

A. $\sum c_n z^{kn};$

B. $\sum c_n^k z^n;$

C. $\sum (2^n - 1) c_n z^n;$

D. $\sum \frac{c_n}{n!} z^n;$

E. $\sum n^n c_n z^n;$

F. $\sum n^k c_n z^n.$

10.18. Neka je $\{a_n\}$ nerastući niz pozitivnih brojeva. Pokaži da za $|z| < 1$ red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergira, te da je njegova suma uvejk različita od nule.

10.19. Neka je $\{a_n\}$ padajući niz pozitivnih realnih brojeva. Dokaži da red $\sum a_n z^n$ konvergira u svim točkama $|z| \leq 1$ osim možda u točki $z = 1$.

10.20. Razvij u Maclaurinov red

A. $\frac{1}{(1+z^3)^2};$

B. $\frac{1}{1+z+z^2+z^3};$

C. $\frac{1}{(z+1)(z-2)};$

D. $\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)};$

E. $\operatorname{arsh} z;$

F. $\ln(z^2 - 3z + 2);$

G. $\sqrt{z+i}$ ($\sqrt{1} = 1$);

H. $\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz.$

10.21. Razvij u Taylorov red oko točke z_0 :

A. $f(z) = \sin(3z - 1), \quad z_0 = -1;$

B. $f(z) = \operatorname{ch}^2 z, \quad z_0 = 0;$

C. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \pi/4;$

D. $f(z) = \ln(3 - z), \quad z_0 = -1.$

10.22. Odredi prva tri člana, različita od nule, u Maclaurinovom razvoju za funkcije

A. $(1+z)^z;$

B. $e^z \ln(1+z);$

C. $\frac{z}{\ln(1+z)};$

D. $\frac{z}{\operatorname{arctg} z};$

E. $\frac{z}{\operatorname{arc sin} z};$

F. $\frac{1}{1+\sin z};$

G. $\ln(1+e^z);$

H. $\sqrt{\cos z}$ ($\sqrt{1} = 1$).

10.23. Dokaži formule

A. $\ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1};$

B. $\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1};$

C. $\sqrt{1+z^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!} z^{2n};$

D. $\frac{1-z}{z} \ln(1-z) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)};$

E. $\operatorname{sh} \sqrt{z} \sin \sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(4n+2)!} z^{2n+1}.$

10.24. Dokaži formule

$$\text{A. } \operatorname{arctg}^2 z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{z^{2n+2}}{n+1}, |z| < 1;$$

$$\text{B. } \operatorname{arctg} z \cdot \ln(1+z^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, |z| < 1;$$

$$\text{C. } \exp\left\{\frac{z}{1-z}\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1} \right] z^n;$$

$$\text{D. } (\operatorname{arcsin} z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}{(2n)!} z^{2n}.$$

10.25. Neka je funkcija $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ regularna u točki 0. Dokaži da je tada

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

pri čemu su koeficijenti a_n dani formulom

$$a_n = \begin{vmatrix} c_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & -1 \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

10.26. Pokaži da koeficijenti c_n u Maclaurinovom razvoju funkcije

$$\ln(1+e^z) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$$

zadovoljavaju relacije

$$c_0 + nc_1 + n(n-1)c_2 + \dots + n! c_{n-1} + 2n! c_n = 1, \quad n \geq 1.$$

Odredi prvih nekoliko koeficijenata.

10.27. Fibonaccijevi brojevi $\{c_n\}$ definirani su na način

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Dokaži da vrijedi prikaz

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Na osnovu toga pokaži da je

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right\}.$$

10.28. Eulerovi brojevi E_{2n} definiraju se rekurzivnom relacijom

$$E_0 = 1, \quad E_0 + \binom{2n}{n} E_2 + \dots + \binom{2n}{2n} E_{2n} = 0, \quad n \geq 1.$$

Dokaži da vrijedi razvoj

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

10.29. Bernoullijevi brojevi B_n definiraju se ovako:

$$B_0 = 1, \quad B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Dokaži da vrijedi razvoj

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

10.30. Izvedi sljedeće razvoje

A. $\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}(1-2^{2n})}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1};$

B. $z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n};$

C. $\frac{z}{\sin z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n};$

D. $\ln \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n(2n)!} B_{2n} z^{2n};$

E. $\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{n(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$

10.31. Bernoullijevi polinomi imaju funkciju izvodnicu

$$t \frac{e^{tz} - 1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z) \frac{t^n}{n!}.$$

Dokaži sljedeća svojstva:

A. $B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1};$

B. $\frac{B_{n+1}(k)}{n+1} = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (k-1)^n, \quad k \in \mathbb{N};$

C. $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k z^{n-k};$

gdje su B_k Bernoullijevi brojevi.

10.32. Dokazi da ortogonalni polinomi zadovoljavaju sljedeće relacije

- A. $P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n + 1)P_n(z);$
- B. $z P'_n(z) - P'_{n-1}(z) = n P_n(z);$
- C. $L'_n(z) = n(L'_{n-1}(z) - L_{n-1}(z));$
- D. $H'_n(z) = 2n H_{n-1}(z).$

10.33. Izvedi relaciju

$$n P_n(z) = \sum_{k=1}^n T_k(z) P_{n-k}(z).$$

10.34. Dokazi da ortogonalni polinomi zadovoljavaju sljedeće diferencijalne jednadžbe:

- A. Legendreovi, $(1 - z^2)y'' - 2zy' + n(n + 1)y = 0;$
- B. Čebiševljevi, $(1 - z^2)y'' - zy' + n^2y = 0;$
- C. Laguerrovi, $zy'' + (1 - z)y' + ny = 0;$
- D. Hermiteovi, $y'' - 2zy' + 2ny = 0.$

11.

Laurentovi redovi

Laurentov red je red oblika

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Laurentov red konvergira ako konvergiraju istovremeno njegov **glavni dio**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (11.2)$$

i njegov **pravilni dio**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (11.3)$$

Područje konvergencije je u tom slučaju kružni vijenac

$$\{r < |z - z_0| < R\}$$

pri čemu se može dogoditi da bude $r = 0$ ili pak $R = \infty$ (ili oboje).

Svaka jednoznačna funkcija koja je analitička na prstenu $\{r < |z - z_0| < R\}$ može se na jedinstven način razviti u Laurentov red:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

pri čemu su koeficijenti c_n dani formulom

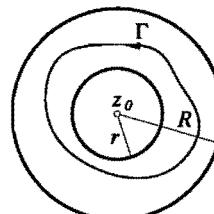
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (11.4)$$

Dakako da se ova formula koristi za račun integrala, a ne koeficijenata c_n . Konkretnu funkciju razvijamo u Laurentov red koristeći pogodno odabran Taylorov red po negativnim potencijama od z .

Γ je proizvoljna zatvorena pozitivno orijentirana Jordanova krivulja koja čitava leži u prstenu i okružuje točku z_0 (slika 11.1).

Koeficijente c_n praktički nikad ne računamo po formuli (11.4). U konkretnim primjerima funkciju razvijamo u Laurentov red koristeći se razvojem u dobro odabrani Taylorov red.

Ako je f analitička unutar kruga $\{|z - z_0| < R\}$, tada Laurentov red ne sadrži glavni dio, tj. on prelazi u Taylorov red.



Slika 11.1.

- 11.1.** Razvij u Laurentov red funkciju $f(z) = \frac{1}{1-z}$ na području
 A. $D_1 = \{z : |z| < 1\}$; B. $D_2 = \{z : |z| > 1\}$.

RJEŠENJE. Jedini singularitet funkcije f je točka $z = 1$.

A. Na području D_1 funkcija je regularna i pripadni red je Taylorov:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

(poluprečnik konvergencije ovog reda je $R = 1$).

B. Na području D_2 red će biti Laurentov. Izvest ćemo ga koristeći se Taylorovim redom pogodno odabrane funkcije:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Razvoj je bio korektan, pošto na području D_2 vrijedi $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$.

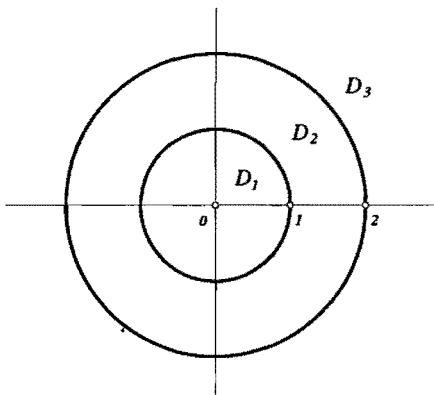
- 11.2.** Razvij u Laurentov red funkciju $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, oko točke $z_0 = 0$, a u područjima
 A. $D_1 = \{z : |z| < 1\}$; B. $D_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$;
 C. $D_3 = \{z : 2 < |z|\}$.

RJEŠENJE. Singulariteti ove funkcije su točke $z = 1$ i $z = 2$. Primjeti da su zadana područja određena pomoću kružnica sa središtem u točki z_0 i koje prolaze singularitetima funkcije f (slika 11.2).

Funkciju f prikazati ćemo pomoću sume

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z} = f_1(z) + f_2(z)$$

i zatim svaku od funkcija f_1 , f_2 razviti u Laurentov red na pojedinim područjima.



Slika 11.2. Prstenovi unutar kojih će funkcija imati različit prikaz u Laurentov red određeni su singularitetima funkcije

A. Razvoj od f_1 i f_2 na području D_1 je Taylorov, pošto su obje funkcije regularne na D_1 :

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Zato je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad z \in D_1.$$

B. Funkcija f_1 je regularna i na području $\{|z| < 2\}$ i zato će imati isti Taylorov razvoj i na području D_2 . Međutim, razvoj od f_2 će biti Laurentov, pošto vrijedi (vidi prošli zadatak)

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1.$$

Dobili smo

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad z \in D_2.$$

C. Na području D_3 obje funkcije imaju Laurentov razvoj. Prikaz od f_2 smo već izveli, a za f_1 vrijedi

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Dakle,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \frac{1}{z^{n+1}}, \quad z \in D_3.$$

- 11.3.** Razvij funkciju $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ u Laurentov red oko točke z_0 , u području D , ako je

$$\text{A. } z_0 = -1, \frac{3}{2} \in D; \quad \text{B. } z_0 = 1, \frac{3}{2} \in D.$$

RJEŠENJE. A. Područje D je vijenac određen singularitetima $z = 1$ i $z = 2$, sa središtem u $z_0 = -1$:

$$D = \{z : 2 < |z + 1| < 3\}.$$

Funkciju rastavljamo u parcijalne razlomke:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}.$$

Na području D vrijediti će slijedeći razvoji:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z+1)-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

jer je $\left|\frac{z+1}{3}\right| < 1$ na D .

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(1+z)} = -\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^{n+1}}$$

pošto je $\left|\frac{2}{z+1}\right| < 1$ na D . Dakle,

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z+1)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}.$$

B. U ovom slučaju funkciju f razvijamo oko točke $z_0 = 1$ koja je njen singularitet. Područje D će biti kružni vijenac (nutarnjeg polumjera $r = 0$), sa središtem u z_0 i koji seže do drugog singulariteta $z = 2$ (slika 11.3):

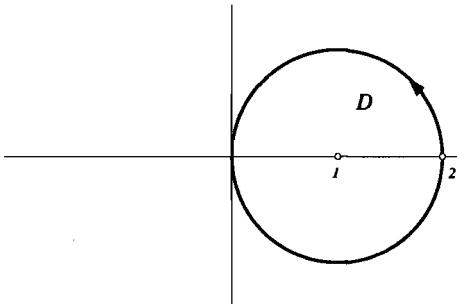
$$D = \{z : 0 < |z-1| < 1\}.$$

Kako vrijedi

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \quad \text{za } |z-1| < 1,$$

to Laurentov red funkcije f u ovom slučaju glasi

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{n-1} \\ &= -(z-1)^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^{n-1} = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n. \end{aligned}$$



Slika 11.3. Za primjene je najvažniji slučaj kad funkciju razvijamo u red u okolini točke koja je singularitet te funkcije. Red će konvergirati na kružnom vijencu do drugog singulariteta

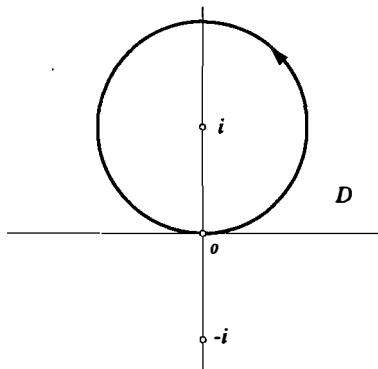
11.4. Razvij u Laurentov red funkciju $f(z) = \frac{z+i}{z^2}$, oko točke $z_0 = i$, a u području D koje sadrži točku $-i$.

RJEŠENJE. Kako je $z = 0$ singularitet funkcije f , to će područje D biti vijenac (slika 11.4).

$$D = \{z : 1 < |z-i| < \infty\}.$$

Vrijedi $f(z) = \frac{(z-i)+2i}{z^2}$. Rastaviti ćemo najprije $1/z^2$ u Laurentov red, koristeći se relacijom $\frac{1}{z^2} = \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{z} \right)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{-1}{z-i+i} \right\} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{-1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} \right\} \\ &= \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+2}}. \end{aligned}$$



Slika 11.4.

Zato je

$$\begin{aligned}
 f(z) &= [(z-i) + 2i] \frac{1}{z^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+1}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{n+1}(n+1)}{(z-i)^{n+2}} \\
 &= \frac{1}{z-i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n (n+1)}{(z-i)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} i^n n}{(z-i)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{z-i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} i^n (n-1)}{(z-i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} i^n (n-1)}{(z-i)^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

11.5.

Razvij u Laurentov red u okolini točke $z_0 = 0$ funkcije

$$\text{A. } f(z) = z^2 e^{1/z}; \quad \text{B. } f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}.$$

RJEŠENJE. A. Upotrebit ćemo Taylorov red za eksponencijalnu funkciju:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} \\
 &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} \\
 &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}.
 \end{aligned}$$

B. Prije razvoja u red transformirat ćemo funkciju na način

$$f(z) = z^2 \sin \left(\pi + \frac{\pi}{z} \right) = z^2 \sin \left(-\frac{\pi}{z} \right) = -z^2 \sin \frac{\pi}{z}.$$

Maclaurinov red za funkciju sinus daje

$$\begin{aligned} f(z) &= -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n+1}}{(2n+1)! z^{2n+1}} \\ &= -\pi z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n+1}}{(2n+1)! z^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Oba razvoja vrijede za sve točke $z \neq 0$. Dakle, područje konvergencije ovih redova je prsten $D = \{z : 0 < |z| < \infty\}$.

Ako funkciju razvijamo u red oko točke z_0 i na području koje obuhvaća tu točku, tada ćemo govoriti da f razvijamo u (Laurentov) red u okolini točke z_0 . Taj je slučaj najvažniji za primjene. Ukoliko je z_0 regularna točka, tada će red biti Taylorov i konvergirati na području $\{|z - z_0| < R\}$. Ukoliko je pak z_0 singularitet funkcije f , tada će područje konvergencije biti prsten $\{0 < |z - z_0| < R\}$, a red će biti Laurentov s netrivijalnim glavnim dijelom. U oba slučaja je R udaljenost do prvog (neuklonjivog) singulariteta funkcije f .

11.6. Odredi glavni dio Laurentovog reda oko točke z_0 za funkciju

A. $f(z) = \frac{(z-1)^3}{(z+1)^2}$, $z_0 = -1$; B. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2}$, $z_0 = ib$;

C. $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$, $z_0 = i$; D. $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$, $z_0 = k$, $k \in \mathbf{Z}$;

RJEŠENJE. A.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z+1-2)^3}{(z+1)^2} = \frac{(z+1)^3 - 6(z+1)^2 + 12(z+1) - 8}{(z+1)^2} \\ &= \frac{-8}{(z+1)^2} + \frac{12}{z+1} - 6 + (z+1). \end{aligned}$$

Ovo je Laurentov razvoj funkcije f oko točke $z_0 = -1$. Vidimo da su mu glavni i pravilni dio konačni. Prva dva člana predstavljaju glavni dio Laurentovog reda.

B. Napišimo funkciju u obliku

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-ib)(z+ib)} = \frac{1}{z-ib} \varphi(z).$$

Funkcija φ je analitička u točki $z_0 = ib$ i dade se razviti u okolini te točke u Taylorov red. Nas zanima samo prvi član tog Taylorovog reda!

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(ib) + \varphi'(ib)(z - ib) + \frac{1}{2}\varphi''(ib)(z - ib)^2 + \dots \\ &= \frac{e^{-b}}{2ib} + a_1(z - ib) + a_2(z - ib)^2 + \dots\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z - ib} \left\{ \frac{e^{-b}}{2ib} + a_1(z - ib) + a_2(z - ib)^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{e^{-b}}{2ib} \cdot \frac{1}{z - ib} + a_1 + a_2(z - ib) + \dots\end{aligned}$$

Glavni dio ima samo jedan član: $\frac{e^{-b}}{2ib} \cdot \frac{1}{z - ib}$.

C. Kao u prošlom primjeru dobivamo

$$f(z) = \frac{1}{(z - i)^2} \cdot \frac{ze^{iz}}{(z + i)^2} = \frac{1}{(z - i)^2} \varphi(z).$$

Kako je $\varphi(i) = -\frac{ie^{-1}}{4}$, $\varphi'(i) = \frac{e^{-1}}{4}$, to slijedi

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{(z - i)^2} \left\{ \frac{-i}{4e} + \frac{1}{4e}(z - i) + a_2(z - i)^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{-i}{4e} \cdot \frac{1}{(z - i)^2} + \frac{1}{4e} \cdot \frac{1}{z - i} + \dots\end{aligned}$$

Ova dva člana čine glavni dio Laurentovog reda.

D.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin \pi z} &= \frac{(-1)^k}{\sin(\pi z - \pi k)} = \frac{(-1)^k}{\sin \pi(z - k)} \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi(z - k) - \frac{\pi^2(z - k)^3}{6} + \dots} \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi(z - k)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\pi^2(z - k)^2}{6} + \dots} = \frac{(-1)^k}{\pi(z - k)} \varphi(z).\end{aligned}$$

Funkcija φ je analitička u okolini točke $z_0 = k$ i vrijedi $\varphi(k) = 1$. Zato će glavni dio Laurentovog reda funkcije f imati samo jedan član: $\frac{(-1)^k}{\pi(z - k)}$.

11.2. Zadaci za vježbu

11.7. Razvij u Laurentov red funkciju $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ oko točke z_0 , u zadanim područjima

- | | |
|--|------------------------------------|
| A. $z_0 = 0, D = \{ z < 1\};$ | B. $z_0 = 0, D = \{ z > 1\};$ |
| C. $z_0 = 1, D = \{0 < z - 1 < 2\};$ | D. $z_0 = 1, D = \{ z - 1 > 2\};$ |
| E. $z_0 = 2, D = \{1 < z - 2 < 3\};$ | F. $z_0 = 1 + i, 0 \in D.$ |

11.8. Razvij sljedeće funkcije u Laurentov red oko zadane točke i u zadanim područjima:

- | |
|---|
| A. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}, z_0 = 0, D_1 = \{2 < z < 3\}, D_2 = \{3 < z \};$ |
| B. $\frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}, z_0 = 0, D_1 = \{1 < z < 2\}, D_2 = \{2 < z \};$ |
| C. $\frac{1}{z^2 + 1}, z_0 = i, D = \{0 < z - i < 2\};$ |
| D. $\frac{1}{(z^2 - 9)z^2}, z_0 = 1, D = \{1 < z - 1 < 2\};$ |
| E. $\frac{1}{(z^2 - 1)(z^2 + 4)}, z_0 = 0, 3 \in D;$ |
| F. $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, z_0 = 0, -\frac{3}{2} \in D.$ |

11.9. Razvij sljedeće funkcije u Laurentov red u okolini točke $z_0 = 0$:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| A. $\frac{\sin^2 z}{z^3};$ | B. $\frac{e^{2z} - 1}{z^2};$ | C. $\frac{1 - \cos(z^2)}{z^5};$ |
| D. $\frac{1 + \cos z}{z^4};$ | E. $\frac{e^z}{z(1-z)};$ | F. $\frac{\sin z}{1-z}.$ |

11.10. Razvij sljedeće funkcije u Laurentov red u okolini zadane točke. Odredi područje konvergencije dobivenog reda.

- A. $z^2 \sin \frac{1}{z-1}, z_0 = 1;$ B. $\sin z \cdot \sin \frac{1}{z}, z_0 = 0;$ C. $e^{z+1/z}, z_0 = 0.$

11.11. Odredi koja se od sljedećih funkcija dade razviti u Laurentov red u okolini zadane točke:

- | | | |
|---------------------------------|---|---|
| A. $\sin \frac{1}{z}, z_0 = 0;$ | B. $\frac{1}{\sin z}, z_0 = 0;$ | C. $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}, z_0 = 0;$ |
| D. $\ln z, z_0 = 0;$ | E. $\operatorname{tg} z, z_0 = \infty;$ | F. $\frac{z}{\sin z - 2}, z_0 = \infty;$ |

11.12. Odredi glavni dio Laurentovog reda u okolini točke z_0 , za funkcije

- | | |
|---|--|
| A. $\frac{e^z + 1}{e^z - 1}, z_0 = 0;$ | B. $\frac{z - 1}{\sin^2 z}, z_0 = 0;$ |
| C. $\frac{(z^2 + 1)^2}{z^2 + 4}, z_0 = \infty;$ | D. $\operatorname{ctg} \pi z, z_0 = k \in \mathbb{Z}.$ |

12.

Nul-točke i izolirani singulariteti

12.1. Nul-točke

Broj z_0 je **nul-točka** funkcije $z \mapsto f(z)$ ako vrijedi $f(z_0) = 0$. Neka je f analitička u okolini točke z_0 . Ako je z_0 njena nul-točka, tada se f dade prikazati u obliku

$$\begin{aligned} f(z) &= f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \\ &= (z - z_0)\varphi(z) \end{aligned} \quad (12.1)$$

gdje je φ ponovo analitička funkcija u okolini točke z_0 . Kažemo da je z_0 **nul-točka kratnosti n** (ili **nul-točka n -tog reda**), ako se f dade prikazati u obliku

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z) \quad (12.2)$$

pri čemu je φ analitička funkcija za koju vrijedi $\varphi(z_0) \neq 0$. Nužan i dovoljan uvjet da bi z_0 bila nul-točka kratnosti n jest da vrijedi

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \dots, \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0, \quad (12.3)$$

jer tada Taylorov red funkcije f oko točke z_0 glasi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0)^{n+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^n \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

12.1. Odredi nul-točke funkcije $f(z) = 1 - \sin z$ i njihove kratnosti.

RJEŠENJE. Rješenja jednadžbe $1 - \sin z = 0$ su nul-točke od f . $\sin z = 1$ daje $z = \text{Arc sin } 1$, tj.

$$\begin{aligned} z_k &= -i \ln(i + \sqrt{1 - 1^2}) = -i \ln i \\ &= -i\{\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi)\} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

(vidi Zadatak 4.7.c). Odredimo kratnosti ovih nul točaka, koristeći kriterij (12.3):

$$f'(z) = -\cos z, \quad f'(z_k) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0,$$

$$f''(z) = \sin z, \quad f''(z_k) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1.$$

Stoga sve nul točke imaju kratnost 2.

12.2. Odredi nul-točke funkcije $f(z) = \frac{z^7}{e^z - 1 - z^2/2 - \sin z}$ i njihove kratnosti

RJEŠENJE. $z_0 = 0$ je nul točka brojnika, ali istovremeno i nul-točka nazivnika. Stoga nije izvjesno da je ona nul-točka funkcije f . Rastaviti ćemo funkciju u nazivniku u Taylorov red (dovoljno je odrediti samo prvih nekoliko članova). Naime, želimo funkciju f prikazati u obliku (12.2), da bismo provjerili da li je z_0 nul-točka i da bismo pri tom odredili njenu kratnost.

$$\begin{aligned} e^z - 1 - \frac{z^2}{2} - \sin z &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots\right) \\ &\quad - 1 - \frac{z^2}{2} - \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right) = \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Zato je

$$f(z) = z^4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{24}z + \dots} = z^4 \varphi(z).$$

Funkcija φ je analitička u točki $z_0 = 0$ i vrijedi $\varphi(0) = 3 \neq 0$. Zato je 0 nul-točka kratnosti 4.

12.3. Neka je z_0 nul-točka kratnosti n za funkciju f i nul-točka kratnosti m za funkciju g . Što je z_0 za funkcije
 A. $f + g$; B. $f \cdot g$; C. f/g ?

RJEŠENJE. Po uvjetima zadatka f i g posjeduju prikaze

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^m \psi(z),$$

pri čemu su φ i ψ analitičke u z_0 i $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) \neq 0$.

A. Neka je $p = \min\{n, m\}$. Tada imamo

$$f(z) + g(z) = (z - z_0)^p \{(z - z_0)^{n-p} \varphi(z) + (z - z_0)^{m-p} \psi(z)\}$$

i odavde zaključujemo da je z_0 nul točka kratnosti p , ukoliko je $n \neq m$. Međutim, u slučaju $n = m$, kratnost može biti i veća, pošto z_0 može poništavati i izraz u zagradi (koji može biti čak i identički jednak nuli).

B. Sada je

$$f(z)g(z) = (z - z_0)^{n+m} \varphi(z) \psi(z)$$

te je z_0 nul-točka kratnosti $n + m$.

C. U ovom je slučaju

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

i z_0 je nul-točka kratnosti $n - m$, ukoliko je $n > m$. Ako je pak $n \neq m$, tada z_0 nije nul-točka.

12.2. Izolirani singulariteti

Točku z_0 u kojoj funkcija f nije analitička, nazivamo **singularitetom (singularnom točkom)** funkcije f . z_0 je **izolirani singularitet**, ukoliko postoji okolina G točke z_0 takva da je f analitička na $G \setminus \{z_0\}$, (tj, ukoliko ne postoji niz singulariteta $\{z_k\}$ koji konvergiraju prema z_0).

Izolirani singularitet može biti uklonjivi singularitet, pol ili bitni singularitet.

z_0 je **uklonjivi singularitet**, ako postoji, i konačan je

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

Ako potom definiramo $f(z_0) := c_0$, točka z_0 prestaje biti singularitet, tj. f postaje regularna u z_0 . Nadalje, z_0 je uklonjivi singularitet ako i samo ako Laurentov razvoj funkcije f oko točke z_0 ne sadrži glavni dio.

z_0 je **pol** funkcije f , ako je

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Da bi z_0 bio pol funkcije f , nužno je i dovoljno da z_0 bude nul-točka funkcije $z \mapsto 1/f(z)$. z_0 je **pol n -tog reda**, ako je ujedno nul točka kratnosti n za funkciju $z \mapsto 1/f(z)$. Prema tome, z_0 je pol n -tog reda ako i samo ako se funkcija f može napisati u obliku

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}. \quad (12.4)$$

pri čemu je φ analitička u z_0 i vrijedi $\varphi(z_0) \neq 0$.

U tom slučaju Laurentov red funkcije f u okolini točke z_0 glasi

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (12.5)$$

z_0 je **bitni (esencijalni) singularitet**, ako ne postoji $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Tada je ponašanje funkcije f u okolini točke z_0 vrlo nepravilno. Naime, po teoremu Sohockog, za proizvoljan kompleksni broj $w \in \bar{\mathbb{C}}$ možemo pronaći niz $\{z_k\}$ koji konvergira prema z_0 , takav da $f(z_k)$ teži prema w . Štoviše, vrijedi — i potpuno je netrivijalan — sljedeći rezultat: funkcija f u svakoj (ma kako malenoj)

okolini bitnog singulariteta poprima za vrijednosti sve kompleksne brojeve (i to, stoga, beskonačno mnogo puta), s izuzetkom možda jednog! (Picardov teorem.) Nadalje, z_0 je bitni singularitet ako i samo ako Laurentov razvoj funkcije f oko točke z_0 ima beskonačan glavni dio.

Gornju klasifikaciju možemo izraziti u obliku tablice:

singularitet	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	glavni dio Laurentovog reda
uklonjivi	postoji i konačan je	ne postoji
pol	∞	konačan
bitni	ne postoji	beskonačan

12.4. Odredi singularitete i ispitaj njihov karakter

$$\mathbf{A. } f(z) = \frac{\sin z}{z};$$

$$\mathbf{B. } f(z) = \frac{z}{\operatorname{tg} z};$$

$$\mathbf{C. } f(z) = \frac{e^{1/z} - 1}{z - 1};$$

$$\mathbf{D. } f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

RJEŠENJE. A. Jedini singularitet je $z_0 = 0$. Razvoj funkcije u Laurentov red u okolini ishodišta, glasi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + \dots \end{aligned}$$

Laurentov red oko točke 0 ne sadrži glavni dio, stoga je ta točka uklonjivi singularitet. Vrijedi $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$.

Do tog limesa možemo doći i s pomoću l'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = 1.$$

Dakako, primjenju ovog pravila na računanje limesa neodređenih oblika kod funkcija kompleksne varijable tek treba opravdati. Vidi Zadatak 12.6.

B. Singularne točke su $k\pi + \pi/2$ (u njima nije definirana funkcija tangens) te $k\pi$ (za koje je nazivnik jednak nuli te nije definiran razlomak).

$$\lim_{z \rightarrow k\pi + \pi/2} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = \lim_{z \rightarrow k\pi + \pi/2} \frac{z}{\sin z} \cos z = 0$$

i ove su točke uklonjivi singulariteti.

Također, 0 je uklonjivi singularitet, pošto je

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} \cos z = 1.$$

Točke $k\pi$, $k \neq 0$ su nul točke kratnosti 1 za funkciju sinus, stoga su to polovi prvog reda za funkciju f .

C. Singularne točke su $z_0 = 0$ i $z_1 = 1$. Prva je točka bitni singularitet funkcije $e^{1/z} - 1$, pošto vrijedi

$$e^{1/z} - 1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots$$

S druge strane, funkcije $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ je analitička u $z_0 = 0$. Stoga je 0 bitni singularitet funkcije f . (Vidi i Zadatak 12.13).

Točka z_1 je regularna točka funkcije $e^{1/z} - 1$ i pol prvog reda za funkciju $z \mapsto \frac{1}{z-1}$. Stoga je ona pol prvog reda funkcije f . Dakako, ovaj zaključak slijedi i po formuli (12.4).

D. Točke $z_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su nul točke kratnosti 1 za funkciju $z \mapsto \sin 1/z$, stoga su to polovi prvog reda funkcije f . Točka $z_0 = 0$ je singularitet, ali nije izolirani! Naime, niz singulariteta $\{z_k\}$ konvergira prema z_0 . Stoga se, npr. funkcija f ne da rastaviti u Laurentov red u okolini točke z_0 (po potencijama od z).

Karakter točke ∞ za funkciju $z \mapsto f(z)$ jednak je, po definiciji, karakteru točke 0 za funkciju $f_1(z) := f(1/z)$. Npr. točka ∞ za funkciju $z \mapsto e^z$ je istog karaktera kao i točka 0 za funkciju $z \mapsto e^{1/z}$ (dakle, bitni singularitet; vidi sljedeći zadatak).

Prema tome, funkcija f je analitička u točki ∞ ako ima prikaz

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots$$

pri čemu ovaj red konvergira u području $|z| > R$. (To područje predstavlja okolinu točke ∞).

12.5. Ispitaj ponašanje u točki ∞ sljedećih funkcija

- A. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$; B. $f(z) = \frac{z}{\operatorname{tg} z}$; C. $f(z) = e^z$;
 D. $f(z) = z(e^{1/z} - 1)$.

RJEŠENJE. A. Vrijedi

$$f_1(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{z}\right)^3} = z^3 \sin \frac{1}{z}.$$

Točka 0 je bitni singularitet ove funkcije. Zato je točka ∞ bitni singularitet za funkciju f . Red funkcije f u okolini točke ∞ glasi

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} z^2 + \dots$$

i on konvergira čim je $z \neq 0$.

B. Točka ∞ je singularitet. Naime, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ ne postoji. Za niz $z_k := k\pi$, koji teži ka ∞ , vrijedi $f(z_k) = \infty$ te je $\lim f(z_k) = \infty$, dok za niz $z'_k := \frac{1}{2}\pi + k\pi$, koji također teži ka ∞ , vrijedi $\lim f(z'_k) = 0$. Međutim, točka ∞ nije izolirani singularitet, pošto su točke z_k polovi funkcije f i svaka okolina točke ∞ sadrži barem jednu (a s tim beskonačno mnogo!) takvih singulariteta. Vrijedi naime $z_k \rightarrow \infty$ i imamo niz singulariteta koji teže prema singularnoj točki $z = \infty$.

C. Pustimo da z teži ka ∞ po realnoj osi (prisjeti se da se kompleksan broj ∞ nalazi sa obje strane realne osi!)

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} e^z = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0.$$

Zato $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ ne postoji. Kako funkcija $z \mapsto e^z$ nema singulariteta u konačnosti, točka $z = \infty$ je njen izolirani singularitet, i to bitni.

Isti zaključak možemo izvesti i iz oblika Laurentovog reda oko točke 0 , za funkciju $f_1(z) = f(1/z) = e^{1/z}$, koji glasi

$$f_1(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! \cdot z^2} + \dots$$

Glavni dio ovog reda je beskonačan te je 0 bitni singularitet za f_1 , dakle, ∞ je bitni singularitet za f .

D. Sada je $f_1(z) = (e^z - 1)/z$ i vrijedi

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1.$$

Zato je 0 uklonjivi singularitet funkcije f_1 , te je ∞ uklonjivi singularitet za f . Laurentov red funkcije f u okolini točke ∞ glasi

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2! \cdot z} + \frac{1}{3! \cdot z^2} + \dots$$

12.6.

Opravdaj primjenu L'Hospitalovog pravila: ako su funkcije f , g regularne u točki $a \in \mathbb{C}$, i ako je $f(a) = g(a) = 0$, dokaži da vrijedi:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

RJEŠENJE. Neka je a nul točka kratnosti n za funkciju f , te kratnosti m za funkciju g . Tada je a nul točka kratnosti $n-1$ za funkciju f' , te kratnosti $m-1$ za funkciju g' . Moguća su tri slučaja:

1) $n > m$. Tada je

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = 0.$$

2) $n < m$. Tada je

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \infty.$$

3) $n = m$. Sada funkcije f i g imaju prikaze

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0,$$

$$g(z) = (z - a)^n \psi(z), \quad \psi(a) \neq 0.$$

Zato je

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}.$$

S druge strane, vrijedi

$$f'(z) = n(z - a)^{n-1} \varphi(z) + (z - a)^n \varphi'(z).$$

$$g'(z) = n(z - a)^{n-1} \psi(z) + (z - a)^n \psi'(z),$$

te je

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z) + \frac{1}{n}(z - a)\varphi'(z)}{\psi(z) + \frac{1}{n}(z - a)\psi'(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}.$$

Prema tome, tražena dva limesa se podudaraju.

Primjetimo još da, za razliku od situacije koja se javlja kod funkcija realnih varijabli, pri neodređenom obliku funkcija kompleksne varijable, nije moguć slučaj da limes izraza $\frac{f(z)}{g(z)}$ postoji, a limes kvocienta $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ ne postoji.

Po Picardovom teoremu, analitička funkcija poprima u svakoj okolini bitnog singulariteta beskonačno mnogo puta kao svoju vrijednost svaki kompleksni broj, s izuzetkom možda jednog.

12.7. Provjeri Picardov teorem za funkcije

A. $f(z) = e^{1/z}$;	B. $f(z) = \sin \frac{1}{z}$.
-----------------------	--------------------------------

RJEŠENJE. A. Bitni singularitet je točka $z = 0$. Neka je $w \in \mathbb{C}$ proizvoljan. Jednadžba $f(z) = e^{1/z} = w$ ima rješenje $1/z = \ln w$, tj.

$$z_k = \frac{1}{\ln |w| + i(\arg w + 2k\pi)}.$$

Vidimo da vrijedi $f(z_k) = w$, čim je $w \neq 0$. S druge strane, u svakoj okolini točke 0 nalazi se beskonačno mnogo točaka z_k , pošto vrijedi $z_k \rightarrow 0$ kad $k \rightarrow \infty$.

B. Bitni singularitet je točka $z = 0$. Uzmimo ponovo proizvoljan $w \in \mathbb{C}$. Rješenje jednadžbe $\sin \frac{1}{z} = w$ glasi $\frac{1}{z} = \text{Arc sin } w = -i \ln i(w + \sqrt{w^2 - 1})$. Označimo $w_{1,2} = i(w + \sqrt{w^2 - 1})$ (za svaki $w \neq 1$ dobivamo dvije različite vrijednosti drugog korijena). Sva rješenja jednadžbe su

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{-i \ln w_{1,2}} = \frac{1}{-i[\ln |w_{1,2}| + i(\arg w_{1,2} + 2k\pi)]} \\ &= \frac{1}{\arg w_{1,2} + 2k\pi - i \ln |w_{1,2}|}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kad $k \rightarrow \infty$, niz $\{z_k\}$ teži ka 0. Zato, u svakoj okolini bitnog singulariteta $z = 0$ funkcija $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ poprima beskonačno mnogo puta svaku kompleksnu vrijednost w .

Isto se može reći za funkciju $z \mapsto \sin z$ i njen bitni singularitet ∞ . Za bilo koji kompleksni broj w možemo pronaći kompleksni broj z s dovoljno velikim modulom $|z|$ tako da vrijedi $\sin z = w$.

12.3. Zadaci za vježbu

12.8. Odredi nul-točke i njihove kratnosti za funkcije

A. $z^6 + 9z^4$; B. $z^3 \sin z$; C. $(z - i) \operatorname{sh} z$; D. $\frac{1 - \operatorname{ch} z}{z}$.

12.9. Odredi kratnost nul-točke $z_0 = 0$ za funkcije

A. $2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$; B. $z^2(e^{z^3} - 1)$; C. $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$;
D. $\frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$.

12.10. Ispitaj karakter singularne točke $z_0 = 0$ i u slučaju pola odredi njegov red:

A. $\frac{1}{z^2 - 2 - 2 \cos z}$; B. $\frac{\operatorname{sh} z}{z - 1 + e^{-z}}$;
C. $\frac{\sin z}{z - \operatorname{sh} z}$; D. $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$.

12.11. Odredi singularitete i njihov karakter za funkcije

A. $\frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$; B. $\frac{z^2 + z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$; C. $z \cdot e^{1/z}$;
D. $z^2 \operatorname{ctg} z$; E. $\exp \frac{z}{1-z}$; F. $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2 + e^{-z}}$;
G. $\frac{1 - \cos z}{z + \pi}$; H. $\sin \frac{1}{z + \pi}$; I. $\sin \left(\frac{1}{\sin z} \right)$;
J. $\sin \left(\frac{1}{\sin(1/z)} \right)$; K. $\frac{1}{1 - \sin z}$; L. $\sin(e^{1/z})$.

12.12. Odredi singularitete i njihov karakter, za funkcije

- | | | |
|--|--|---|
| A. $\frac{z^3}{1+z^6};$ | B. $\frac{z-2}{z(z^2+9)^3};$ | C. $\frac{1-e^z}{2+e^z};$ |
| D. $\exp(z - \frac{1}{z});$ | E. $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z};$ | F. $\operatorname{ctg} z - \frac{2}{z};$ |
| G. $\operatorname{ctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{z};$ | H. $\sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2};$ | I. $\frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z};$ |
| J. $\exp(\operatorname{tg} \frac{1}{z});$ | K. $\exp(\operatorname{ctg} \frac{1}{z}).$ | |

12.13. Ako je z_0 pol (ili bitni singularitet) funkcije f te regularna točka funkcije g , $g(z_0) \neq 0$, dokaži da je z_0 pol (odnosno bitni singularitet) za funkciju $z \mapsto f(z)g(z)$.

12.14. Odredi karakter točke z_0 za svaku od grana zadane višečnačne funkcije

- | | |
|--|---|
| A. $f(z) = \frac{z}{1-\sqrt{z-1}}, \quad z_0 = 2;$ | B. $f(z) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{z}}, \quad z_0 = 1;$ |
| C. $f(z) = \sin \frac{1}{1-\sqrt{z}}, \quad z_0 = 1;$ | D. $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{1+\sqrt{z}}, \quad z_0 = 1;$ |
| E. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}-\sqrt[3]{z}}, \quad z_0 = 1.$ | |

13.

Reziduum. Račun ostataka

13.1. Reziduum analitičke funkcije

Reziduum (ostatak) analitičke funkcije f u točki z_0 jest koeficijent c_{-1} Laurentovog reda funkcije f oko točke z_0 . Pišemo

$$\text{Res}(f, z_0) := c_{-1} \quad (13.1)$$

Po formuli (11.4) slijedi

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz \quad (13.2)$$

gdje je integral uzet po proizvoljnoj zatvorenoj Jordanovoj krivulji orijentiranoj u pozitivnom smjeru, koja obuhvaća singularitet z_0 (i niti jedan drugi osim njega). Formulu (13.2) ne koristimo pri računanju reziduuma, već naprotiv, za računanje krivuljnih integrala.

Ako je z_0 uklonjivi singularitet ili regularna točka, tada glavni dio Laurentovog razvoja funkcije f oko točke z_0 ne postoji, te je i $\text{Res}(f, z_0) = 0$. Ako je z_0 bitni singularitet, reziduum nalazimo isključivo razvojem funkcije u Laurentov red u okolini singulariteta. U slučaju pola, možemo ga naći i na drugi način. Ako je

z_0 : pol n -toga reda,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ (z - z_0)^n f(z) \right\}. \quad (13.3)$$

Specijalno, ako je

z_0 : pol prvog reda,

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (13.4)$$

U tom se slučaju f uvijek dade napisati u obliku kvocijenta, $f(z) = g(z)/h(z)$, pri čemu je $g(z_0) \neq 0$. Tada se reziduum u polu prvog reda može naći i ovako:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (13.5)$$

13.1. Izračunaj reziduum funkcija u njihovim singularitetima:

$$A. \ f(z) = \frac{\sin z}{z^3 - 2z^2};$$

$$B. \ f(z) = \frac{\sin z}{(z - \pi)^3};$$

$$C. \ f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{(z + 1)^2};$$

$$D. \ f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2}.$$

RJEŠENJE. A. Vrijedi

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z - 2)}$$

i jedini singulariteti su točke $z_1 = 0$ i $z_2 = 2$ (ne računajući, zasad, točku ∞). Kako je z_1 nul točka kratnosti 1 za funkciju sinus, to je z_1 pol prvog reda (a ne drugog!) za funkciju f , baš kao i točka z_2 . Po formuli (13.4),

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2(z - 2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z - 2} = -\frac{1}{2}.$$

Drugi reziduum dobivamo na isti način: $\operatorname{Res}(f, 2) = (\sin 2)/4$.

B. Jedini singularitet je točka $z = \pi$. Kako je ona ujedno i nul točka kratnosti 1 za brojnik, to je $z = \pi$ pol drugog reda. Po (13.3) slijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, \pi) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d}{dz} \left((z - \pi)^2 \frac{\sin z}{(z - \pi)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{z - \pi} \right) = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{(z - \pi) \cos z - \sin z}{(z - \pi)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{-(z - \pi) \sin z}{2(z - \pi)} = 0. \end{aligned}$$

Pri računanju limesa koristili smo L'Hôpitalovo pravilo. Bilo bi jednostavnije rješiti zadatak koristeći razvoj u Laurentov red oko singulariteta $z = \pi$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{(z - \pi)^3} = -\frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} = \frac{-1}{(z - \pi)^3} \left\{ (z - \pi) - \frac{(z - \pi)^3}{3!} + \dots \right\} \\ &= -\frac{1}{(z - \pi)^2} + \frac{1}{3!} - \frac{(z - \pi)^2}{5!} + \dots \end{aligned}$$

i kako je $c_{-1} = 0$, to je i $\operatorname{Res}(f, \pi) = 0$.

Primijetimo još da bismo lakše došli do traženog rezultata da smo pogrešno odredili red pola: ako za $z = \pi$ kažemo da je pol trećeg reda, tada po (13.3) imamo:

$$\operatorname{Res}(f, \pi) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d^2}{dz^2} \{\sin z\} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \pi} \{-\sin z\} = 0.$$

Pogreška ove vrste vodi uvijek na točan rezultat, vidi Zadatak 13.21.

C. Vrijedi $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z(z + 1)^2}$ i f ima polove: -1 , pol drugog reda, te $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, polovi prvog reda. Vrijedi

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z + 1)^2 \frac{\operatorname{ctg} z}{(z + 1)^2} \right\} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{\sin^2 z} = \frac{-1}{\sin^2 1}.$$

Reziduum u točkama $k\pi$ računamo po (13.5):

$$\text{Res}(f, k\pi) = \frac{\cos z}{(\sin z)' \Big|_{z=k\pi}} = \frac{1}{(k\pi + 1)^2}.$$

D. Singulariteti racionalne funkcije su polovi, to su nul točke nazivnika. Dakle, singulariteti su: 0, pol drugog reda, te 1, -1 , polovi prvog reda.

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{1}{z^2(z+1)(z-1)} = \frac{1}{2},$$

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \frac{1}{z^2(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left\{ z^2 \cdot \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2z}{(z^2 - 1)^2} = 0.$$

13.2. Izračunaj reziduumme funkcija u njihovim singularitetima:

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| A. $f(z) = \frac{1}{z^n - 1};$ | B. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^n};$ |
| C. $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^n};$ | D. $f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z}.$ |

RJEŠENJE. A. Singulariteti su nul-točke nazivnika:

$$z^n - 1 = 0 \implies z_k = \sqrt[n]{1} = e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

To su polovi prvog reda. Zato je, po (13.5)

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_k) &= \frac{1}{(z^n - 1)'} \Big|_{z=z_k} = \frac{1}{n z_k^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n \cdot e^{2k\pi i(n-1)/n}} = \frac{1}{n} e^{2k\pi i/n}. \end{aligned}$$

B. Točka $z = -1$ je pol n -toga reda. Po formuli (13.3), za $n > 1$ slijedi

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ (z+1)^n \frac{1}{(z+1)^n} \right\} = 0.$$

Rezultat je očigledan ako uočimo da je

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^n}$$

upravo Laurentov razvoj funkcije f oko singulariteta -1 , te on ne sadrži član s potencijom $(z+1)^{-1}$.

C. Imamo dva singulariteta: 0, pol prvog reda, te -1 , pol n -tog reda.

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z(z+1)^n} = 1,$$

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, -1) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ (z+1)^n \frac{1}{z(z+1)^n} \right\} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(-1)(-2) \cdots (-n+1)}{z^n} = -1.\end{aligned}$$

Do istog rezultata možemo doći pomoću Laurentovog razvoja funkcije f , oko točke $z = -1$:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{(z+1)^n} \frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)^n} \frac{-1}{1-(z+1)} \\ &= \frac{-1}{(z+1)^n} [1 + (z+1) + (z+1)^2 + \dots] \\ &= \frac{-1}{(z+1)^n} + \frac{-1}{(z+1)^{n-1}} + \dots + \frac{-1}{z+1} - 1 - (z+1) - \dots\end{aligned}$$

te je $c_{-1} = \text{Res}(f, -1) = -1$.

D. Singularitet (bitni) je točka $z = 0$. Stoga funkciju moramo razviti u Laurentov red u okolini ishodišta:

$$\begin{aligned}f(z) &= z^4 \sin \frac{1}{z} = z^4 \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots \right\} \\ &= z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5! z} - \frac{1}{7! z^3} + \dots\end{aligned}$$

Vidimo da je $\text{Res}(f, 0) = c_{-1} = \frac{1}{5!}$.

* * *

Ako je točka a pol prvog reda funkcije f , i ako je φ analitička u točki a , tada vrijedi

$$\text{Res}(\varphi(z)f(z), a) = \varphi(a) \cdot \text{Res}(f(z), a). \quad (13.6)$$

Specijalno,

$$\text{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{z-a}, a\right) = \varphi(a). \quad (13.7)$$

13.3. Izračunaj reziduum u točki $z = 0$ za funkcije

A. $\frac{z(1 - \cos 3z)}{\sin z(\sin z - z)}$;

B. $\frac{z^{n-1}}{\sin^n z}$.

RJEŠENJE. A. Točka $z = 0$ je nul-točka kратnosti 3 za brojnik, te nul-točka kратnosti 4 za nazivnik, dakle, pol prvog reda. Reziduum ćemo najlakše izračunati ako iskoristimo nekoliko prvih članova Maclaurinovog reda:

$$\begin{aligned} \frac{z(1 - \cos 3z)}{\sin z(\sin z - z)} &= \frac{z(1 - 1 + \frac{9z^2}{2} - \frac{81z^4}{24} + \dots)}{(z - \frac{z^3}{6} + \dots)(z - \frac{z^3}{6} + \dots - z)} \\ &= \frac{\frac{9}{2} - \frac{81z^2}{24} + \dots}{(1 - \frac{z^2}{6} + \dots)(-\frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} - \dots)} \cdot \frac{1}{z} = \varphi(z) \cdot \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Zato je, po (13.7)

$$\text{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{z}, 0\right) = \varphi(0) = \frac{9/2}{-1/6} = -27.$$

B. $z = 0$ je pol prvog reda, a funkcija se može napisati u obliku

$$\frac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \frac{z^{n-1}}{z^n(1 - z^2/6 + \dots)^n} = \varphi(z) \frac{1}{z}$$

te je $\text{Res}(\varphi(z) \frac{1}{z}, 0) = \varphi(0) = 1$.

13.4. Izračunaj reziduum u ishodištu, za funkciju $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$.

RJEŠENJE. Točka 0 je bitni singularitet funkcije f . Razvijmo f u Laurentov red oko ishodišta:

$$f(z) = (1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots)(1 + z + z^2 + z^3 + \dots).$$

Da bismo odredili $\text{Res}(f, 0)$, potreban nam je samo koeficijent uz $1/z$, koji ćemo dobiti množenjem ovih dvaju redova:

$$c_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e - 1.$$

Zato je $\text{Res}(f, 0) = e - 1$.

Reziduum funkcije f u točki ∞ definira se formulom

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz \quad (13.8)$$

pri čemu je R dovoljno velik da kružnica $|z| = R$ obuhvaća sve singularitete funkcije f u kompleksnoj ravnini \mathbf{C} . (Takva kružnica postoji ukoliko je ∞ izolirani singularitet.)

Ova formula ima za posljedicu da je reziduum funkcije f u ∞ suprotan po predznaku zbroju reziduuma te funkcije u svim singularitetima u \mathbf{C} (pod pretpostavkom da ih je konačno mnogo).

Reziduum u točki ∞ može biti različit od nule, čak i onda kada je ∞ regularna točka funkcije f . Formula (13.8) nikad ne služi za računanje reziduuma, već koristimo, kao i kod singulariteta u konačnosti, prikaz funkcije preko Laurentovog reda. Ako za $|z| > R$ vrijedi prikaz

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (13.9)$$

tada je

$$\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1}. \quad (13.10)$$

Sljedeća dva kriterija mogu biti korisna pri računanju reziduuma u beskonačnosti: ako je f regularna u točki ∞ , tada vrijedi

$$\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)). \quad (13.11)$$

Ako pak definiramo novu funkciju f_1 na način $f_1(z) = f(1/z)$, pri čemu je f_1 regularna u točki 0, tada vrijedi

$$\text{Res}(f, \infty) = -f'_1(0). \quad (13.12)$$

13.5.

Izračunaj reziduum u točki ∞ za funkcije

- | | |
|---|--|
| A. $f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^3 - 2z + 1};$ | B. $f(z) = \frac{z^2 - z - 1}{z^2 + z - 1};$ |
| C. $f(z) = z \sin \frac{1}{z + 1};$ | D. $f(z) = \sin \frac{z}{z + 1}.$ |

RJEŠENJE. A. Točka ∞ je regularna točka, pošto vrijedi $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Po formuli (13.11) imamo

$$\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(-\frac{z^2 - z + 1}{z^3 - 2z + 1} \right) = -1.$$

B. Točka ∞ je ponovo regularna točka (pošto je 0 regularna za funkciju $f_1(z) = f(1/z)$). Provjerimo to i iskoristimo formulu (13.12) za računanje reziduuma:

$$f_1(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1} = \frac{1 - z - z^2}{1 + z - z^2}.$$

i 0 je regularna za f_1 . Nadalje,

$$\text{Res}(f, \infty) = -f'_1(0) = 2.$$

C. Jedini singularitet (u konačnosti) je točka $z = -1$. Zato ćemo reziduum u točki ∞ računati koristeći formulu

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}(f, -1)$$

(vidi zadatak 13.21). Kako je

$$\begin{aligned} f(z) &= [(z+1)-1] \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^2} + \frac{1}{3!(z+1)^3} - \dots \end{aligned}$$

to je $\text{Res}(f, -1) = -1$ i $\text{Res}(f, \infty) = 1$.

D. Točka -1 je jedini singularitet u konačnosti za funkciju f , no situacija je sada upravo obrnuta od one u prošlom primjeru. Reziduum u točki ∞ ćemo izračunati lakše od onog u točki -1 , jer je ∞ regularna točka funkcije f . Vrijedi

$$f_1(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sin \frac{1/z}{1/z + 1} = \sin \frac{1}{1+z}$$

te imamo

$$\text{Res}(f, \infty) = -f'_1(0) = -\cos \frac{1}{1+z} \cdot \frac{-1}{(1+z)^2} \Big|_{z=0} = \cos 1.$$

Stoga je npr. $\text{Res}(f, -1) = -\cos 1$. Izvedi ovaj rezultat direktno!

13.6. Odredi reziduum za svaku od jednoznačnih grana sljedećih višeznačnih funkcija, u naznačenim točkama

$$\text{A. } f(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}-1}, \quad z=2; \quad \text{B. } f(z) = \frac{z+1}{6\pi i - \ln(1+z)}, \quad z=0.$$

RJEŠENJE. A. Funkcija f ima dvije grane, f_1 za koju vrijedi $\sqrt{1} = 1$ i f_2 , za koju je $\sqrt{1} = -1$. Za prvu je točka $z = 2$ singularitet, jer je

$$f_1(2) = \frac{1}{+\sqrt{z-1}-1} \Big|_{z=2} = \frac{1}{0}$$

a za drugu je regularna točka:

$$f_2(2) = \frac{1}{-\sqrt{z-1}-1} \Big|_{z=2} = -\frac{1}{2}$$

(predznak ispred korijena sugerira na koji se način računaju pojedine grane). Da bismo odredili reziduum za granu f_1 , moramo znati karakter singularne točke. Napišimo f_1 u obliku

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{z-1}+1}{\sqrt{z-1}+1} = \frac{\sqrt{z-1}+1}{z-2}$$

i vidimo da je $z=2$ pol prvog reda. Zato je, po formuli (13.5)

$$\text{Res}(f_1, 2) = \left. \frac{\sqrt{z-1}+1}{1} \right|_{z=2} = 2.$$

B. Grane logaritamske funkcije definirane su sa

$$\text{Ln}_{(k)} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Točka $z=0$ je singularitet samo za funkciju $z \mapsto \text{Ln}_{(3)} z$ jer za nju vrijedi

$$\left. \text{Ln}_{(3)}(1+z) \right|_{z=0} = \text{Ln}_{(3)}(1) = 6\pi i.$$

Imamo

$$[6\pi i - \text{Ln}(1+z)]' = -\frac{1}{1+z}$$

i zato je $z=0$ nul točka prvog reda za nazivnik (jer nije nul-točka derivacije), te je ona pol prvog reda funkcije f . Zato

$$\left. \text{Res}(f, 0) = \frac{z+1}{-\frac{1}{1+z}} \right|_{z=0} = -1.$$

13.2. Račun ostataka

Primjenu reziduuma na računanje krivuljnih integrala funkcija kompleksne varijable omogućava sljedeći Cauchyjev teorem:

Ako je funkcija f analitička na području G , osim u konačnom broju izoliranih singulariteta z_1, \dots, z_n , i ako zatvorena krivulja $C \subset G$ obuhvaća te singularitete, tada vrijedi

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \quad (13.13)$$

Integrira se u pozitivnom smjeru obilaska po krivulji C .

Ako krivulja C obuhvaća i točku ∞ , ona se priključuje singularitetima u konačnosti, čak i onda kad je f analitička u ∞ (pošto i tada može biti $\text{Res}(f, \infty) \neq 0$).

13.7. Izračunaj integral

A. $\int_C \frac{dz}{1+z^4}$, $C = \{z : |z-1|=1\}$;

B. $\int_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)}$, $C = \{z : |z+1-i|=2\}$.

RJEŠENJE. A. Funkcija $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ ima četiri singulariteta: $z_k = \sqrt[4]{-1}$, $k = 1, 2, 3, 4$. To su, redom, $z_1 = \sqrt{2}(1+i)/2$, $z_2 = \sqrt{2}(-1+i)/2$, $z_3 = \sqrt{2}(-1-i)/2$, $z_4 = \sqrt{2}(1-i)/2$ i svi su oni polovi prvog reda. Krivulja integracije obuhvaća točke z_1 i z_4 (slika 13.1.a). Zato je

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_4) \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_1} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_4} \right\} = \frac{\pi i}{2} \left[\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_4^3} \right]. \end{aligned}$$

Ovaj zbroj lakše računamo ako prikažemo z_1 i z_4 u obliku $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_4 = e^{-i\pi/4}$. Tada je

$$I = \frac{\pi i}{2} \left(e^{-3i\pi/4} + e^{3i\pi/4} \right) = \frac{\pi i}{2} 2 \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

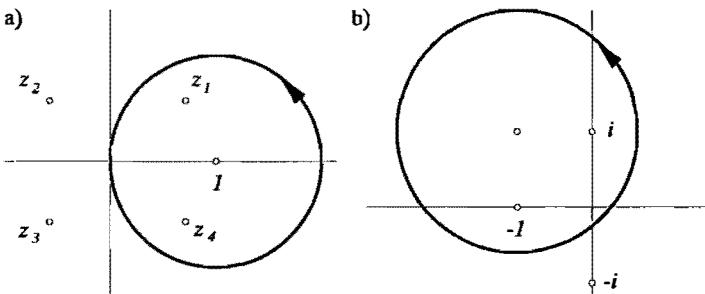
B. Podintegralna funkcija ima singularitete $z_1 = -1$, pol drugog reda, te $z_2 = i$, $z_3 = -i$, polove prvog reda. Krivulja integracije obuhvaća točke z_1 i z_2 (slika 13.1.b). Kako je

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+1)^2(z+i)} = \frac{1}{(i+1)^2 2i} = -\frac{1}{4}.$$

to vrijedi

$$I = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}(f, -1) + \operatorname{Res}(f, i) \right\} = \frac{\pi i}{2}.$$



Slika 13.1.

13.8. Izračunaj integral

A. $\int_C z^2 \sin \frac{1}{z} dz$, $C = \{z : |z| = 1\}$;

B. $\int_C \frac{z}{z+1} e^{1/z} dz$, $C = \{z : |z| = 2\}$.

RJEŠENJE. A. Funkcija f ima samo jedan singularitet, u točki $z_1 = 0$, i to je bitni singularitet. Vrijedi

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3} - \dots$$

te je $\text{Res}(f, 0) = c_{-1} = -1/6$. Stoga je i

$$\int_C z^2 \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = -\frac{\pi i}{3}.$$

B. Dva su singulariteta, $z_1 = 0$, bitni singularitet, te $z_2 = -1$, pol prvog reda. Oba su obuhvaćena krivuljom C . Da bismo odredili $\text{Res}(f, 0)$, moramo funkciju rastaviti u Laurentov red, točnije, moramo odrediti samo koeficijent c_{-1} u tom razvoju:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z+1} e^{1/z} = (z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots)(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots) \\ &= \dots + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

Dakle, $\text{Res}(f, 0) = c_{-1} = (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots) = e^{-1}$.

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{z e^{1/z}}{1} \Big|_{z=-1} = -e^{-1}$$

i stoga je zbroj reziduuma unutar krivulje C , a samim tim i integral po krivulji C , jednak nuli.

13.9. Izračunaj integral $\int_C \frac{z^3}{z^4 - 1} dz$, po krivulji $C = \{z : |z| = 2\}$.

RJEŠENJE. Funkcija ima četiri singulariteta i svi se nalaze unutar područja integracije. Stoga je jednostavnije preći na integraciju po vanjskom području:

$$I = \int_{C^+} f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz$$

gdje je C^+ pozitivno, a C^- negativno orientirana krivulja C . Krivulja C^- ne obuhvaća niti jedan singularitet, ali obuhvaća točku $z = \infty$, u kojoj je funkcija regularna. Vrijedi, po formuli (13.11)

$$\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} -z \frac{z^3}{z^4 - 1} = -1$$

i stoga je $I = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 2\pi i$.

13.3. Princip argumenta. Rouchéov teorem*

Neka je f analitička funkcija i neka je $z = a$ njena nul-točka n -tog reda. Tada f ima oblik $f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$, pri čemu je φ analitička u okolini točke a i $\varphi(a) \neq 0$. Zato je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} =: \frac{n}{z - a} + g(z)$$

i g je analitička u okolini točke a . Dakle, $z = a$ je pol prvog reda funkcije $\frac{f'(z)}{f(z)}$ i vrijedi

$$\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = n. \quad (13.14)$$

Slično, ako je $z = b$ pol m -tog reda funkcije f , tada vrijedi

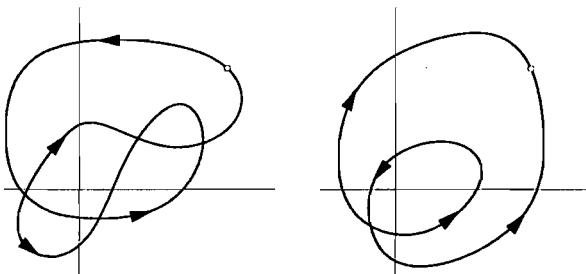
$$\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, b\right) = -m. \quad (13.15)$$

Neka je sada Γ pozitivno orientirana zatvorena Jordanova krivulja (kontura) koja omeđuje područje G . Pretpostavimo da je f analitička na području D koje sadrži G , osim možda u konačno mnogo točaka koje smiju biti samo njeni polovi. (Za takvu funkciju kažemo da je **meromorfna**). Tada po (13.14), (13.15) vrijedi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(f, G) - P(f, G) \quad (13.16)$$

gdje je $N(f, G)$ broj nul-točaka funkcije f u području G , uzetih s pripadnim kratnostima, $P(f, G)$ broj polova funkcije f u području G , uzetih s pripadnim redovima.

Formulu (13.16) koristimo pri određivanju broja nul-točaka (rjeđe polova) funkcije f . Pri tom integral s lijeve strane ne možemo računati primjenom teorema o reziduuima, pošto reziduum znamo odrediti samo u poznatim točkama,



Slika 13.2. Promjeni argumenta $\Delta_{\Gamma} \arg(f)$ određujemo tako da preslikamo krivulju Γ funkcijom f u w -ravninu. Na slici su nacrtane slike krivulje Γ pri preslikavanju dvjema funkcijama f . Kod prve je $\Delta_{\Gamma} \arg(f) = 0$, a kod druge $\Delta_{\Gamma} \arg(f) = 4\pi$ (točka w dva puta je obišla oko ishodišta)

a nama su te točke nepoznate (čak i njihov broj). Taj se integral može iskazati pomoću formule

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg(f) = N(f, G) - P(f, G) \quad (13.17)$$

koju nazivamo **princip argumenta**. Tu je $\Delta_{\Gamma} \arg(f)$ promjena argumenta funkcije f duž krivulje Γ .

13.10. Odredi broj rješenja jednadžbe $z^7 - 2z - 5 = 0$ u desnoj poluravnini $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

RJEŠENJE. Kako polinom nema singulariteta, to je po principu argumenta broj nultočaka polinoma $Q(z) = z^7 - 2z - 5$ unutar konture Γ jednak

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg Q(z).$$

Za konturu Γ ćemo izabrati polukružnicu u desnoj poluravnini

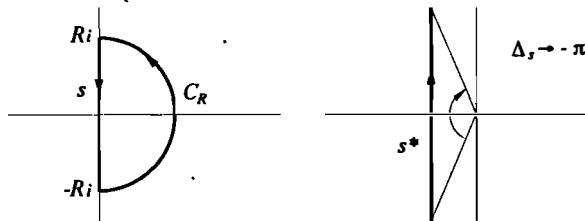
$$\Gamma = \{z : |z| = R, \operatorname{Re} z > 0\}$$

dovoljno velikog polumjera R tako da obuhvaća sve korijene u desnoj poluravnini. Kontura Γ sastoji se od polukružnice C_R i adreska $s = [Ri, -Ri]$ (slika 13.3.a). Imamo

$$\begin{aligned} \arg Q(z) &= \arg z^7 \left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) \\ &= 7 \arg z + \arg \left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right). \end{aligned}$$

Kad z prođe polukružnicom C_R , tada mu se argument poveća za π , stoga je promjena argumenta funkcije f duž luka C_R :

$$\Delta_{C_R} \arg Q(z) = 7\pi + \Delta_{C_R} \arg \left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) \rightarrow 7\pi \text{ kad } R \rightarrow \infty.$$



Slika 13.3.

Odredimo još promjenu argumenta duž segmenta $[Ri, -Ri]$. Tu je $z = it$, $t \in [R, -R]$. Također,

$$Q(z) = (it)^7 - 2(it) - 5 = -5 + i(-t^7 - 2t)$$

Kad točka z opiše segment $s = [Ri, -Ri]$, tada $w = Q(z)$ opiše pravac s^*

$$u = -5, \quad v = -t^7 - 2t.$$

(slika 13.3.b). Pri tom se njen argument smanji sa π . Zato $\Delta_s Q(z) = -\pi$. Konačno dobivamo

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma Q(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot 6\pi = 3,$$

tj. zadana jednadžba ima tri korijena u desnoj poluravnini.

Jedna od posljedica principa argumenta je sljedeći rezultat.

Rouchéov teorem. Neka kontura Γ omeđuje područje G i neka su funkcije f i g meromorfne na području $D \supset G$, bez polova na Γ . Ako vrijedi

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \Gamma$$

tada je

$$N(f, G) - P(f, G) = N(g, G) - P(g, G).$$

Specijalno, ako su f i g cijele funkcije, tada se broj njihovih nul-točaka u području G podudara (računajući im kratnosti).

13.11. Odredi broj nul-točaka polinoma $P(z) = z^8 - 6z^6 - z^3 + 2$ unutar jediničnog kruga $\{|z| < 1\}$.

RJEŠENJE. Izaberimo funkciju $f(z) = -6z^6$. Tada za z sa konture $\Gamma = \{|z| = 1\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(z)| &= 6|z|^6 = 6, \\ |f(z) - P(z)| &= |-z^8 - z^3 + 2| \leq |z|^8 + |z|^3 + 2 = 4 \end{aligned}$$

te je $|f(z) - P(z)| < |f(z)|$. Po Pouchéovom teoremu, polinom P ima unutar jediničnog kruga jednak broj nul-točaka kao i polinom $f(z) = -6z^6$, dakle, šest nul-točaka.

13.12. Pokaži da jednadžba $e^{z-\lambda} = z$, $\lambda > 1$ ima unutar jediničnog kruga $\{|z| < 1\}$ samo jedan korijen. Pokaži da je on realan i pozitivan.

RJEŠENJE. Označimo sada $f(z) = -z$, $g(z) = e^{z-\lambda} - z$. Na kružnici $|z| = 1$ vrijedi ocjena $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ jer je tu $|f(z)| = |-z| = 1$, te, za $z = x+iy$,

$$|f(z) - g(z)| = |e^{z-\lambda}| = |e^{x-\lambda} \cdot e^{iy}| = e^{x-\lambda} < 1$$

jer je $-1 \leq x \leq 1$, $\lambda > 1$ te stoga $x - \lambda < 0$.

Po Rouchéovom teoremu, funkcija $g(z)$ ima samo jednu nul točku unutar jediničnog kruga. Kako je pri tom ispunjeno $g(0) > 0$, $g(1) < 0$ a vrijednost $g(z)$ je za realne z također realna, to je ta nul točka pozitivni realni broj.

13.13. Dokaži da za čvrsti broj $r < 1$ polinom

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$$

za dovoljno veliki n nema nul-točaka unutar kruga $|z| < r$.

RJEŠENJE. Prikažimo polinom u obliku

$$P_n(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right).$$

Kako za $|z| < 1$ niz $\left\{ \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right\}$ konvergira ka funkciji $\frac{1}{1-z}$, uniformno na kompaktu $|z| \leq 1$, to će po Weierstrassovom teoremu i niz derivacija $\{P_n(z)\}$ konvergirati uniformno ka derivaciji $\frac{1}{(1-z)^2}$. Stavimo $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$. Zbog uniformne konvergencije vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : n \geq n_0 \implies \max_{|z|=r} |P_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Izaberimo sada $\varepsilon := \min_{|z|=r} \left| \frac{1}{(1-z)^2} \right|$. Tada je za svaki $n \geq n_0$ ispunjeno $|P_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$, čim je $|z| = r$.

Po Rouchéovom teoremu zaključujemo da funkcije $P_n(z)$ i $f(z)$ imaju jednak broj nul-točaka unutar kruga $|z| < r$, dakle niti jednu, pošto je f svuda različita od nule.

13.4. Zadaci za vježbu

13.14. Odredi reziduum u svim singularitetima sljedećih funkcija

- | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| A. $\frac{z^2 + z + 1}{z^2(z + 1)}$ | B. $\frac{1}{z(z^2 + 1)}$ | C. $\frac{1}{z - z^3}$ |
| D. $\frac{z^2}{1 + z^4}$ | E. $\frac{z^2}{(1+z)^3}$ | F. $\frac{1}{(z^2 + 1)^3}$ |
| G. $\frac{z + 2}{(z + 1)^2(z - 1)^3}$ | H. $\frac{1 + z^8}{z^4(z^2 + 4)}$ | I. $\frac{z^{2n}}{(z - 1)^n}$ |
| J. $\frac{1 + z^{2n}}{z^n(z - 2)}$ | | |

13.15. Odredi reziduum u svim singularitetima sljedećih funkcija

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| A. $\frac{1 - \cos z}{z^3(z - 1)}$ | B. $\frac{e^{3z} - 1}{z^3}$ | C. $\frac{\sin \pi z}{(z - 1)^3}$ |
| D. $\frac{1}{\sin z}$ | E. $\sin \frac{1}{1-z}$ | F. $\frac{1}{e^z - 1}$ |
| G. $z^4 \sin \frac{1}{z-2}$ | H. $\frac{1}{\sin(1/z)}$ | I. $e^{z+1/z}$ |
| J. $\sin \frac{1}{z} - \frac{1}{z}$ | | |

13.16. Odredi reziduum u točki ∞ , za funkcije

A. $\frac{1}{z^4(z+1)}$;

B. $\frac{z^4+1}{z^6+1}$;

C. $z \cos^2 \frac{\pi}{z}$;

D. $\frac{\cos z}{(z^4-1)^2}$;

E. $\sin z \sin \frac{1}{z}$;

F. $\frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

13.17. Izračunaj reziduum u ishodištu, za funkcije

A. $\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$;

B. e^{z^2+1/z^2} ;

C. $\frac{z^3}{(e^z-1-z)^2}$;

D. $\frac{z^{n-3}}{\operatorname{tg}^n z}$, $n \geq 2$;

E. $\frac{\sin 2z - 2 \sin z}{z \sin z (1 - \cos z)}$;

F. $\frac{\operatorname{tg} z - z}{(1 - \cos z)^2}$.

13.18. Dokaži da je

$$\operatorname{Res}(e^{\frac{x}{2}}(z + \frac{1}{z}), 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

13.19. Izračunaj reziduum sljedećih višeznačnih funkcija za svaku granu koja je analitička u nekoj okolini točke z_0 (osim možda u samoj toj točki):

A. $f(z) = \frac{z-2}{3+\sqrt{10-z}}$, $z_0 = 1$; B. $f(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2+1}}$, $z_0 = 0$;

C. $f(z) = \ln \frac{z-1}{z+1}$, $z_0 = \infty$; D. $f(z) = \ln z \sin \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$;

E. $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, $z_0 = \infty$.

13.20. Neka funkcije φ i ψ imaju u točki z_0 nulu reda m . Dokaži da je tada

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \cdot \frac{1}{z-z_0}, z_0\right) = \frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)},$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^2}, z_0\right) = \frac{1}{m+1} \frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)} \left[\frac{\varphi^{(m+1)}(z_0)}{\varphi^{(m)}(z_0)} - \frac{\psi^{(m+1)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)} \right].$$

13.21. Neka je z_0 pol reda n za funkciju f i $m > n$. Dokaži da vrijedi

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-z_0)^m f(z) \right\}.$$

13.22. Neka je funkcija φ analitička u točki a , i neka funkcija f ima u točki a pol n -tog reda. Ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f oko točke a glasi

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

pokaži da je tada

$$\operatorname{Res}(\varphi(z)f(z), a) = c_{-1}\varphi(a) + c_{-2}\varphi'(a) + \dots + c_{-n} \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Izvedi odavde formulu (13.6)

13.23. Izračunaj $\operatorname{Res}(\frac{f'(z)}{f(z)}, a)$ ako je točka a : A. nul točka kratnosti n za funkciju f , B. pol reda n za funkciju f .

13.24. Izračunaj $\operatorname{Res}\left(\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}, a\right)$ ako je a regularna točka funkcije φ , te za funkciju f

- nul točka reda m ,
- pol reda m .

13.25. Neka su $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ svi singulariteti (u konačnosti) analitičke funkcije f . Dokaži da vrijedi

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

13.26. Dokaži da za parnu funkciju vrijedi $\operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$.

13.27. Izračunaj integrale (integrirajući po navedenim krivuljama u pozitivnom smjeru):

- $\int_C \frac{z \, dz}{(z-2)(z+1)^2}, C = \{z : |z+1|=2\};$
- $\int_C \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} \, dz, C = \{z : |z|=2\};$
- $\int_C \frac{e^z \, dz}{z^4 + z^3}, C = \{z : |z|=2\};$
- $\int_C \frac{e^{2z} \, dz}{z^3 - 1}, C = \{z : |z-1|=1\};$
- $\int_C \frac{e^z \, dz}{z^4 + 2z^2 + 1}, C = \{z : |z-i|=1\};$
- $\int_C \frac{z \operatorname{tg} \pi z}{z-1} \, dz, C = \{z : |z|=2\}.$

13.28. Izračunaj integrale

- $\int_C \frac{\sin \frac{1}{z-1}}{z-1} \, dz, C = \{z : |z-1|=1\};$
- $\int_C \frac{\sin \frac{z}{z+1}}{z+1} \, dz, C = \{z : |z|=2\};$
- $\int_C z \sin \frac{z+1}{z-1} \, dz, C = \{z : |z|=2\};$
- $\int_C \operatorname{tg}(nz) \, dz, C = \{z : |z|=\pi\}.$

13.29. Izračunaj integrale

- $\int_C \frac{dz}{z^4(z^8 - 16)}, C = \{z : |z|=2\};$
- $\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5 - 1)}, C = \{z : |z|=2\};$
- $\int_C \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)}, C = \{z : |z|=2\};$
- $\int_C \frac{z^5 \, dz}{z^6 - 1}, C = \{z : |z|=2\}.$

13.30. Izračunaj integrale

- A. $\int_C \frac{z^3}{z+1} e^{1/z} dz, C = \{z : |z| = 2\};$
 B. $\int_C \frac{dz}{2 + \ln(z+3)}, C = \{z : |z| = 2,5\};$
 C. $\int_C \sqrt[4]{z^4 + 1} dz, C = \{z : |z| = 2\};$
 D. $\int_C \ln \frac{z-1}{z+1} dz, C = \{z : |z| = 2\}.$

13.31. Odredi broj nul-točaka u desnoj poluravnini za sljedeće polinome

- A. $z^3 - 2z - 5;$ B. $z^5 + 5z^4 - 5;$
 C. $z^{12} - z + 1;$ D. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2;$

13.32. Odredi broj nul-točaka polinoma $P(z) = z^5 + 5z - 1$ A. unutar kruga $|z| < 1;$
B. u prstenu $1 < |z| < 2.$ **13.33.** Odredi broj nul-točaka zadanih polinoma u zadanim područjima

- A. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2, \{|z| < 1\};$ B. $z^3 + z + 1, \{|z| < 1/2\};$
 C. $4z^4 - 29z^2 + 25, \{2 < |z| < 3\};$ D. $z^4 - z^3 - 4z + 1 = 0, \{1 < |z| < 2\}.$

13.34. Odredi broj rješenja zadanih jednadžbi u zadanim područjima

- A. $z^2 - \cos z = 0, \{|z| < 2\};$ B. $\operatorname{ch} z = z^2 - 4z, \{|z| < 1\};$
 C. $z^4 - \sin z = 0, \{|z| < \pi\};$ D. $e^z - 4z^n + 1 = 0, \{|z| < 1\}.$

13.35. Pokaži, koristeći Rouchéov teorem, osnovni stavak algebre: polinom stupnja n ima točno n nul-točaka, računajući njihove kratnosti.**13.36.** Dokaži da jednadžba $z = \lambda - e^z, \lambda > 1$ ima u desnoj poluravnini jedinstveni korijen (koji je pri tom realan broj).**13.37.** Dokaži da polinom $P_n(z) = \alpha z^n + z + 1, n \geq 1$ ima za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$ barem jedan korijen unutar kruga $\{|z| \leq 2\}.$ **13.38.** Dokaži da za $r < \pi/2$ polinom

$$P_n(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

za dovoljno veliki n nema nul-točaka unutar kruga $|z| \leq r.$ **13.39.** Dokaži da za svaki $R > 0$ polinom

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

za dovoljno veliki n nema nul-točaka unutar kruga $|z| \leq R.$

14.

Računanje realnih integrala

14.1. I. tip integrala

Neke određene i neprave realne integrale možemo računati tako da se podintegralna funkcija analitički proširi na kompleksno područje, a zatim primjeni teorem o reziduumu.

Promotrimo najprije integrale oblika

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt \quad (14.1)$$

gdje je R racionalna funkcija, definirana za svaki t iz intervala $[0, 2\pi]$. Uvedimo supstitucije

$$\begin{aligned} z &= e^{it}, \quad dz = i e^{it} dt = iz dt, \\ \cos t &= \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \\ \sin t &= \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}). \end{aligned}$$

Kad t prolazi segmentom $[0, 2\pi]$, z opisuje jediničnu kružnicu u kompleksnoj ravnini. Prelaskom na integraciju po kompleksnoj varijabli, dobivamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right) \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_{|z|=1} F(z) dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \text{Res}(F, z_k), \end{aligned} \quad (14.3)$$

gdje se suma uzima po svim singularitetima funkcije F unutar jediničnog kruga.

14.1. Izračunaj $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$.

RJEŠENJE. Ovdje je $R(x, y) = \frac{1}{2+y}$. Supstitucija $z = e^{it}$ daje, po formuli (14.2):

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

Podintegralna funkcija ima singularitetu u točkama

$$z_1 = i(-2 + \sqrt{3}), \quad z_2 = i(-2 - \sqrt{3})$$

i to su polovi prvog reda. Samo z_1 leži unutar jedinične kružnice.

$$\text{Res}(F, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)} (z - z_1) = \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

Dakle, $I = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

14.2. Izračunaj integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 - 2a \cos t + a^2)^2}, (0 < a < 1)$.

RJEŠENJE. Primjenom supstitucije $z = e^{it}$ dobivamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(1 - 2a \frac{z^2 + 1}{2z} + a^2\right)^2} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(z - az^2 - a + a^2 z)^2} = -i \int_{|z|=1} \frac{z}{[az^2 - (a^2 + 1)z + a]^2} dz. \end{aligned}$$

Singulariteti podintegralne funkcije su

$$z_1 = a, \quad z_2 = \frac{1}{a},$$

i to su polovi drugog reda. Zbog uvjeta $0 < a < 1$, samo z_1 leži unutar jediničnog kruga.

$$\begin{aligned} I &= \frac{-i}{a^2} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z - a)^2 \left(z - \frac{1}{a}\right)^2} dz \\ &= -\frac{i}{a^2} 2\pi i \text{Res} \left[\frac{z}{(z - a)^2 \left(z - \frac{1}{a}\right)^2}, a \right] = \frac{2\pi}{a^2} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{\left(z - \frac{1}{a}\right)^2} \right] \\ &= \frac{2\pi}{a^2} \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - \frac{1}{a} - 2z}{\left(z - \frac{1}{a}\right)^3} = \frac{2\pi(1 + a^2)}{(1 - a^2)^3} \end{aligned}$$

14.2. II tip integrala

Neprave integrale oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (14.4)$$

možemo u nekim slučajevima računati primjenom računa ostataka. Prepostavimo da je funkcija f definirana na čitavoj realnoj osi, te da se može analitički proširiti na gornju poluravninu, do funkcije $z \mapsto f(z)$, pri čemu ova funkcija ima najviše konačno mnogo singulariteta z_1, z_2, \dots, z_n u gornjoj poluravnini $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

Da bismo izračunali integral (14.3) promotrit ćemo integral po zatvorenoj krivulji Γ_R koja se sastoji od intervala $[-R, R]$ te polukružnica C_R (slika 14.1), a R je izabran tako da Γ_R obuhvaća sve singularitete funkcije f koji leže u gornjoj poluravnini $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Tada, po teoremu o reziduumu, vrijedi

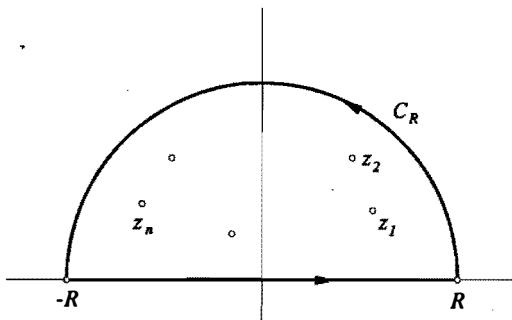
$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

za sve dovoljno velike R . Pustimo da R teži u ∞ . Ako je pri tom ispunjeno

$$\int_{C_R} f(z)dz \rightarrow 0 \text{ kad } R \rightarrow \infty, \quad (14.5)$$

tada će vrijediti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (14.6)$$



Slika 14.1. Krivulja Γ_R mora biti dovoljno velika da obuhvati sve singularitete funkcije f u gornjoj poluravnini

Jordanova lema daje jednostavan kriterij pomoću kojeg možemo osigurati (14.5). Iskazati ćemo je u nešto općenitijem obliku nego što nam je ovog trenutka potrebno:

Jordanova lema. Neka je

$$\max_{z \in C_R} |f(z)| \leq M(R).$$

(1) Ako $R \cdot M(R) \rightarrow 0$ kad $R \rightarrow \infty$, tada vrijedi

$$\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ kad } R \rightarrow \infty.$$

(2) Ako $M(R) \rightarrow 0$ kad $R \rightarrow \infty$, tada za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$\int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0 \text{ kad } R \rightarrow \infty.$$

Neka je f racionalna funkcija,

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Ako je $n \leq m - 2$ (tj. stupanj brojnika je za barem dva manji od stupnja nazivnika), tada je ispunjen uvjet (1) Jordanove leme i stoga vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, z_k\right)$$

pri čemu reziduumi računamo po singularitetima (nul točkama funkcije Q_m) koji leže u gornjoj poluravnini. (Po pretpostavci Q_m nema nul točaka na realnoj osi.)

14.3. Izračunaj integral $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

RJEŠENJE. Funkcija $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ je parna, zato je

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Analitičko produljenje funkcije f na cijelu kompleksnu ravninu je funkcija koju ćemo označiti istim slovom, definirana sa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

Ona je analitička svuda osim u točkama $z_1 = i$, $z_2 = -i$ koje su polovi drugog reda.

Provjerimo uvjet (1) Jordanove leme. Na kružnici C_R (tj. za $z \in C_R$) vrijedi $|z| = R$ i

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{|(z^2 + 1)^2|} = \frac{1}{|z^2 + 1|^2} \leq \frac{1}{(|z|^2 - 1)^2} \\ &= \frac{1}{(R^2 - 1)^2} = M(R), \end{aligned}$$

te je $R \cdot M(R) = \frac{R}{(R^2 - 1)^2} \rightarrow 0$ kad $R \rightarrow \infty$. Dakle, vrijedi (14.5):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \operatorname{Res}(f, i) \\ &= \pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ (z - i)^2 \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right\} \\ &= \pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z + i)^3} = \frac{-2\pi i}{8i^3} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

14.3. III tip integrala

Integralne oblike

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx, \quad (\alpha > 0) \quad (14.7)$$

svodimo na oblik

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} \, dx \quad (14.8)$$

i rješavamo poput prethodnih u tipu II. Za krivulju integracije biramo ponovo onu sa slike 14.1. Za dovoljno veliki R će vrijediti

$$\int_{-R}^R f(x) e^{i\alpha x} \, dx + \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} \, dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_k).$$

Ako pri tom vrijedi

$$\begin{aligned} \max_{z \in C_R} |f(z)| &\leq M(R), \\ M(R) &\rightarrow 0 \text{ kad } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

tada su ispunjeni uvjeti (2) Jordanove leme i integral po krivulji C_R težiti će ka nuli, te ćemo imati

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} \, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(F(z), z_k) \quad (14.9)$$

gdje je $F(z) := f(z) e^{i\alpha z}$, a z_k su svi singulariteti funkcije f u gornjoj poluravnini. (Još uvijek pretpostavljamo da f nema singulariteta na realnoj osi.)

14.4. Izračunaj $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx$, ($b > 0$).

RJEŠENJE. Vrijedi

$$I = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + b^2} dx.$$

Stavimo $f(z) = \frac{1}{z^2 + b^2}$. Singulariteti ove funkcije su $z_1 = bi$, $z_2 = -bi$, to su polovi prvog reda, od kojih se z_1 nalazi u gornjoj poluravnini. Na krivulji C_R (gdje je $|z| = R$) vrijedi

$$\max_{|z|=R} |f(z)| = \max_{|z|=R} \frac{1}{|z^2 + b^2|} \leq \frac{1}{R^2 - b^2} \rightarrow 0$$

kad $R \rightarrow \infty$. Zato vrijedi (14.8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(F, bi) = 2\pi i \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=bi} = \frac{\pi}{b} e^{-b}.$$

Stoga je i $I = \frac{\pi}{b} e^{-b}$.

14.5. Izračunaj $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$.

RJEŠENJE. Vrijedi

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

Stavimo ponovo $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$. Jedini singularitet ove funkcije u gornjoj poluravnini je točka $z_1 = i$, pol prvog reda. Nadalje, imamo

$$\max_{|z|=R} |f(z)| = \max_{|z|=R} \frac{|z|}{|z^2 + 1|} \leq \frac{R}{R^2 - 1} \rightarrow 0$$

kad $R \rightarrow \infty$, i vrijedi ponovo (14.8):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2 + 1}, i\right) \\ &= 2\pi i \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \pi i e^{-1}. \end{aligned}$$

Konačno imamo

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{\pi i}{e} = \frac{\pi}{2e}.$$

Zaobilaženje singulariteta.

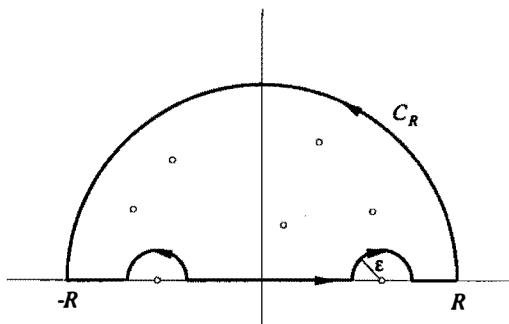
Dovolimo sada da funkcija f ima singularitete na realnoj osi. Da bi postojala glavna vrijednost nepravog integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, ti singulariteti moraju biti isključivo polovi prvog reda, i u tom se slučaju glavna vrijednost integrala računa na način

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k = 0} \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (14.10)$$

Do ove formule dolazimo birajući krivulju integracije kao na slici 14.2. Tu su singulariteti na realnoj osi "zaobiđeni", integriranjem po polukružnicama γ_r proizvoljno malog polumjera r . Za dovoljno veliki R i dovoljno maleni r vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k),$$

a krivulja integracije Γ sastoji se od polukružnice C_R , dijelova realne osi unutar intervala $[-R, R]$ i polukružnica γ_r koje zaobilaze singularitete na realnoj osi.



Slika 14.2. Velika polukružnica obuhvaća sve singularitete funkcije u gornjoj poluravnini, a male polukružnice obila e polove koji se nalaze na realnoj osi

Prepostavljamo da integral po C_R teži u nulu kad $R \rightarrow \infty$.

Neka je sada $z_0 \in \mathbb{R}$ pol prvog reda. Da bismo dokazali (14.10), dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Napišimo funkciju f u obliku

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z)$$

gdje je φ analitička funkcija u okolini točke z_0 . Zato je

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = c_{-1} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_r} \varphi(z)dz.$$

Kako je

$$\left| \int_{\gamma_r} \varphi(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_r} |\varphi(z)| \cdot \int_{\gamma_r} ds = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \cdot \pi r \rightarrow 0 \text{ kad } r \rightarrow 0$$

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\pi}^0 \frac{ri e^{i\varphi} d\varphi}{r e^{i\varphi}} = -i\pi,$$

to je

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = -c_{-1} i\pi = -i\pi \operatorname{Res}(f, z_0).$$

14.6. Izračunaj integrale

$$\text{A. } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx; \quad \text{B. } \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx, \quad a, b > 0.$$

RJEŠENJE. A. Stavimo $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Po Jordanovoj lemi, $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$. Zato,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\pi i \operatorname{Res}(f, 0)] = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

jer je

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{e^{iz}}{1} \Big|_{z=0} = 1.$$

B. Stavimo $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$. Točke $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm bi$ su polovi prvog reda.

Kako je

$$\left| \frac{1}{z(z^2 + b^2)} \right| \leq \frac{1}{R(R^2 - b^2)} \rightarrow 0 \text{ kad } R \rightarrow \infty,$$

to su ispunjeni uvjeti Jordanove leme.

Po formuli (14.10) imamo

$$\int_{-\infty}^\infty f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, bi) + \pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Račun daje

$$\operatorname{Res}(f, bi) = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{(z - bi)e^{iaz}}{z(z - bi)(z + bi)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2},$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iaz}}{x(x^2 + b^2)} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [2\pi i \frac{-e^{-ab}}{2b^2} + \pi i \frac{1}{b^2}] = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}). \end{aligned}$$

14.7. Izračunaj integral $I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2 + b^2)} dx$, $a, b > 0$.

RJEŠENJE. Primijetimo najprije da je integral konačan, podintegralna funkcija ima limes u nuli jednak a^2/b^2 . Da bismo izračunali vrijednost ovog integrala, uvedimo funkciju

$$f(z) = \frac{\sin(az) e^{iaz}}{z^2(z^2 + b^2)}.$$

Tada vrijedi

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty f(z) dz.$$

Točka $z_1 = 0$ je pol prvog reda za funkciju f , baš kao i točke $+bi$, $-bi$. Reziduum funkcije u tim točkama je (provjeri!)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \frac{a}{b^2}, \\ \operatorname{Res}(f, bi) &= \frac{\operatorname{sh}(ab) e^{-ab}}{-2b^3}. \end{aligned}$$

Međutim, ovog puta nije očigledno da integral $\int_{C_R} f(z) dz$ teži k nuli kad $R \rightarrow \infty$. Naime, funkcija sinus nije ograničena na polukružnici C_R , štoviše, ne postoji konstanta M za koju bi vrijedilo

$$\max_{|z|=R} \left| \frac{\sin(az)}{z^2(z^2 + b^2)} \right| < M.$$

Da bismo mogli primjeniti Jordanovu lemu, potrebno je neznatno transformirati podintegralnu funkciju, na oblik

$$\frac{\sin(az)e^{iaz}}{z^2(z^2 + b^2)} = \frac{(e^{iaz} - e^{-iaz})e^{iaz}}{2iz^2(z^2 + b^2)} = \frac{e^{2iaz}}{2iz^2(z^2 + b^2)} - \frac{1}{2iz^2(z^2 + b^2)}.$$

Na svaki od ova dva pribrojnika može se primjeniti Jordanova lema. Zato je

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{2\pi i \operatorname{Res}(f, bi) + \pi i \operatorname{Res}(f, 0)\} \\ &= \pi \left[\frac{\operatorname{sh}(ab)e^{-ab}}{-2b^3} + \frac{a}{2b^2} \right] = \frac{\pi a}{2b^2} - \frac{\pi}{4b^3} (1 - e^{-2ab}). \end{aligned}$$

14.4. IV tip integrala

Promatramo integrale oblika

$$I = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (14.11)$$

gdje je f racionalna funkcija bez singulariteta na pozitivnom dijelu realne osi. Da bi integral konvergirao, moramo pretpostaviti da je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika. Taj uvjet osigurava postojanje konstante M takve da vrijedi

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m},$$

za svaki dovoljno veliki $|z|$, pri čemu je $m \geq 1$.

Analitičko produljenje podintegralne funkcije

$$F(z) = \frac{f(z)}{z^\alpha}$$

je funkcija koja ima samo konačan broj polova z_1, \dots, z_n (koji ne leže na pozitivnoj osi), točka ∞ je nul točka barem prvog reda, a točka $z = 0$ je singularitet funkcije f . F je višeznačna funkcija. Napravimo razrez duž pozitivnog dijela realne osi i promatrajmo granu funkcije F koja je jednoznačna na području $D = \{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$ (kompleksna ravnina s razrezom duž pozitivnog dijela realne osi). Kako vrijedi

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha(\arg z + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

to ćemo odabratи granu funkcije $z \mapsto z^\alpha$ za $k = 0$. Za nju je

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}.$$

Put integracije biramo kao na slici 14.3:

C_R : kružnica $z = Re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, koja obuhvaća sve singularitete z_1, \dots, z_n ;

c_r : kružnica $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$ dovoljno malog polumjera da ne sadrži niti jedan singularitet;

L_1 : interval $[r, R]$ "s gornje strane" realne osi. Vrijednost funkcije F na L_1 dobivamo limesom funkcijskih vrijednosti $F(z)$ kad $z \rightarrow x$, tako da $\operatorname{Im} z > 0$. Tada je $\arg z > 0$ i vrijedi

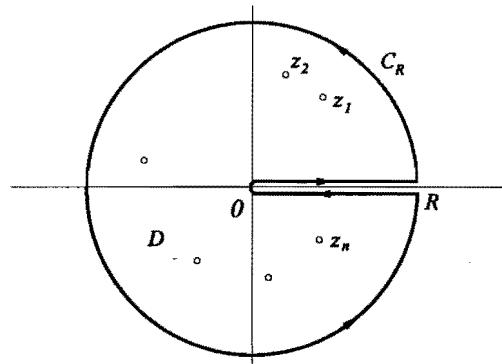
$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \rightarrow x^\alpha;$$

L_2 : interval $[R, r]$ "s donje strane" realne osi. Vrijednost funkcije F na L_2 dobivamo limesom vrijednosti $F(z)$ kad $z \rightarrow x$, $\operatorname{Im} z < 0$, pri čemu $\arg z$ teži ka 2π . Tada je

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \rightarrow x^\alpha e^{i\alpha 2\pi}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{f(x)}{x^\alpha} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^\alpha} dz + \int_R^r \frac{f(x)}{x^\alpha e^{2\alpha i\pi}} dx + \int_{c_r} \frac{f(z)}{z^\alpha} dz \\ = 2\pi i \sum_{z_i \in D} \text{Res}\left(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z_i\right). \end{aligned} \quad (14.12)$$



Slika 14.9.

Ocijenimo integrale po kružnicama:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^\alpha} dz \right| &\leq \int_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha} |dz| \\ &\leq \int_{C_R} \frac{M}{|z|^m} \cdot \frac{1}{|z|^\alpha} ds = \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^m} \cdot \frac{1}{R^\alpha} R d\varphi \\ &= \frac{2M\pi}{R^{m+\alpha-1}} \rightarrow 0 \text{ kad } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Za integral po maloj kružnici dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_r} \frac{f(z)}{z^\alpha} dz \right| &\leq \int_{c_r} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha} |dz| \leq \int_{c_r} \frac{K}{r^\alpha} r d\varphi \\ &= K r^{1-\alpha} 2\pi \rightarrow 0, \text{ kad } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tu smo iskoristili činjenicu da je funkcija f omeđena (konstantom K) na okolini točke 0.

Pustimo u relaciji (14.12) da $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx + \frac{1}{e^{2\pi i\alpha}} \int_\infty^0 \frac{f(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{z_i \in D} \text{Res}\left(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z_i\right),$$

i odavde

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_{z_i \in D} \text{Res}\left(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z_i\right). \quad (14.13)$$

14.8. Izračunaj integral $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

RJEŠENJE. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ispunjava uvjete: točka $z = \infty$ je nul-točka prvog reda, singularitet $z = -1$ nije na pozitivnom dijelu realne osi. Po (14.13) slijedi, za $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}, -1\right) \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-\pi i}} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{z+1}{\sqrt{z}(z+1)} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{1 - (-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{2\pi i}{2} \cdot \frac{1}{i} = \pi. \end{aligned}$$

14.5. Vjet tip integrala

Promatramo integrale oblika

$$I = \int_0^\infty f(x) \ln x \, dx, \quad (14.14)$$

pri čemu je f racionalna funkcija. Da bi ovaj nepravi integral konvergirao, moramo zahtijevati da f nema polove na pozitivnom dijelu realne osi, te da je stupanj polinoma u nazivniku barem za dva veći od stupnja polinoma u brojniku.

Uvedimo pomoćnu funkciju

$$F(z) = f(z)(\ln z)^2$$

i izaberimo glavnu vrijednost $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ za granu logaritamske funkcije. Područje integracije biramo ponovo kao na slici 14.3.

S gornje strane realne osi vrijedi $\ln z \rightarrow \ln x$, jer $\arg z \rightarrow 0$. S donje strane je pak $\ln z \rightarrow \ln x + 2\pi i$, jer $\arg z \rightarrow 2\pi$. Funkcija F je analitička u području $D = \{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$, osim u konačnom broju izoliranih singulariteta z_1, \dots, z_n : polova koji ne leže na pozitivnom dijelu realne osi. Uzmimo dovoljno veliki R i dovoljno maleni r da krivulja integracije obuhvaća sve te singularitete:

$$\begin{aligned} \int_r^R f(x)(\ln x)^2 \, dx + \int_{C_R} F(z) dz + \int_R^r f(x)(\ln x + 2\pi i)^2 \, dx \\ + \int_{c_r} F(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j \in D} \text{Res}(F(z), z_j) \end{aligned}$$

Kad $R \rightarrow \infty$ i $r \rightarrow 0$, integrali po kružnicama iščezavaju:

$$\int_0^\infty f(x)(\ln x)^2 \, dx + \int_\infty^0 f(x)(\ln x + 2\pi i)^2 \, dx = 2\pi i \sum_{z_j \in D} \text{Res}(F(z), z_j)$$

i odavde

$$-4\pi i \int_0^\infty f(x) \ln x \, dx + 4\pi^2 \int_0^\infty f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{z_j \in D} \operatorname{Res}(F(z), z_j).$$

Prema tome, vrijedi

$$\int_0^\infty f(x) \ln x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{z_j \in D} \operatorname{Res}(f(z)(\ln z)^2, z_j) \right\}. \quad (14.15)$$

14.9. Izračunaj integral $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} \, dx$.

RJEŠENJE. Funkcija $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$ ima samo jedan singularitet: $x = -1$, pol trećeg reda, i ispunjava tražene uvjete za integrale tipa V. Po (14.15) imamo

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Res} \left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}, -1 \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}, -1 \right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3} (1+z)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ 2 \ln z \cdot \frac{1}{z} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left\{ \frac{1}{z^2} - \ln z \cdot \frac{1}{z^2} \right\} = 1 - \pi i. \end{aligned}$$

Zato je

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (1 - \pi i) = -\frac{1}{2}.$$

14.6. Razni primjeri

14.10. Pokaži da je $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, ($0 < a < 1$).

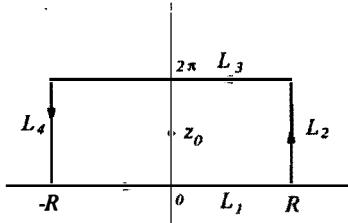
RJEŠENJE. Integrirati ćemo funkciju

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

duž konture Γ , pravokutnika na slici.

Na adresku L_1 je $z = x$, $x \in [-R, R]$, zato je

$$\int_{L_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$



Slika 14.4.

Na adresku L_2 je $z = R + iy$, $y \in [0, 2\pi]$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} i dy \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1} dy = \frac{e^{aR}}{e^R - 1} 2\pi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kad $R \rightarrow \infty$, pošto je $0 < a < 1$.

Analogno, na L_4 je $z = -R + iy$, $y \in [2\pi, 0]$ i vrijedi ocjena

$$\left| \int_{L_4} f(z) dz \right| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} 2\pi = \frac{e^{R(1-a)}}{e^R - 1} 2\pi \rightarrow 0$$

kad $R \rightarrow \infty$.

Na adresku L_3 je $z = x + 2\pi i$, $x \in [+R, -R]$. Zato

$$\int_{L_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = e^{2\pi ai} \int_R^{-R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

Funkcija f ima singularitete $z_k = \pi i + 3k\pi i$, od kojih se samo $z_0 = \pi i$ nalazi unutar konture Γ . Vrijedi

$$\text{Res}(f, \pi i) = -e^{a\pi i}.$$

Stoga je

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Razbijmo konturu Γ na adreske L_1, L_2, L_3, L_4 i pustimo da $R \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Odavde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2\pi ai} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

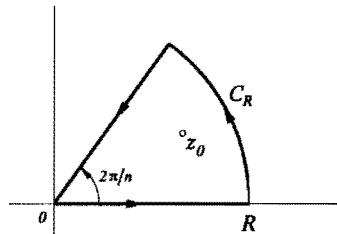
14.11. Izračunaj integral $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

RJEŠENJE. Neka je funkcija f definirana sa $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$. Integrirati ćemo tu funkciju po zatvorenoj krivulji Γ_R koja se sastoji od dijelova zraka $\arg z = 0$, $\arg z = \frac{2\pi}{n}$, te luka kružnice C_R koji ih spaja (slika 14.5).

Singulariteti funkcije f su polovi prvog reda: rješenja jednadžbe $z^n = -1$, dakle,

$$z_k = \exp\left\{i\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right\},$$

gdje je $k = 0, 1, \dots, n-1$. Samo se singularitet $z_0 = e^{i\pi/n}$ nalazi u području omeđenom krivuljom integracije. Zato vrijedi, za svaki $R > 1$,



Slika 14.5.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) \\ &= 2\pi i \frac{1}{n \cdot z^{n-1}} \Big|_{z=z_0} = 2\pi i \frac{1}{n \cdot e^{i\pi - i\pi/n}} = -2\pi i \frac{e^{i\pi/n}}{n}. \end{aligned}$$

Dovedimo u vezu integral po krivulji Γ_R sa početnim integralom I . Na krivulji $\arg z = 0$ vrijedi $z = x$ i x se mijenja u granicama od 0 do R . Na krivulji $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ vrijedi

$$z = |z| e^{2\pi i/n} = x e^{2\pi i/n},$$

gdje smo ponovo označili $|z| = x$, $x \in [0, R]$. Zato je

$$dz = e^{2\pi i/n} dx, \quad z^n = x^n e^{2\pi i} = x^n.$$

Pri tom se x mijenja od R do 0, zbog smjera integracije po ovoj zraci. Integral po dijelu luka C_R teži ka nuli kad R teži ka ∞ . Kako taj rezultat ne slijedi direktno po Jordanovoj lemi, napraviti ćemo potrebnu ocjenu. Za svaki $z \in C_R$ vrijedi $|z| = R$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &\leqslant \int_{C_R} \frac{1}{|z^n + 1|} |dz| \leqslant \int_{C_R} \frac{1}{|z|^n - 1} |dz| \\ &= \frac{1}{R^n - 1} \int_{C_R} ds = \frac{1}{R^n - 1} R \frac{2\pi}{n} \rightarrow 0 \text{ kad } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^n} &= \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_R^0 \frac{e^{2\pi i/n} dx}{1+x^n} \\ &= \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} \left(1 - e^{2\pi i/n}\right) + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = -2\pi i \frac{e^{i\pi/n}}{n}.\end{aligned}$$

U graničnom prijelazu $R \rightarrow \infty$ dobivamo

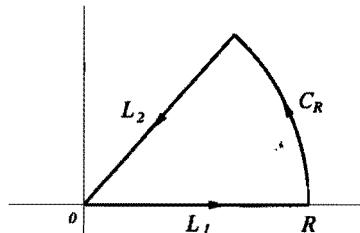
$$\begin{aligned}I &= -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\pi i/n}}{1 - e^{2\pi i/n}} = -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{e^{-\pi i/n} - e^{\pi i/n}} \\ &= -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{-2i \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.\end{aligned}$$

14.12. Izračunaj Fresnelove integrale

$$I_1 = \int_0^\infty \cos(x^2) dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \sin(x^2) dx,$$

znajući da je $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

RJEŠENJE. Za pomoćnu funkciju ćemo uzeti $f(z) := e^{-z^2}$, a za konturu Γ rub kružnog isječka polujmera R , s kutom od $\pi/4$, kao na slici 14.6:



Slika 14.6.

Na pojedinim krivuljama koje određuju ovu konturu, vrijedi

$$L_1 \dots z = x, \quad x \in [0, R],$$

$$C_R \dots z = Re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$L_2 \dots z = r e^{i\pi/4}, \quad r \in [R, 0].$$

Kako je funkcija f cijela funkcija, to vrijedi $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\varphi}} R i e^{i\varphi} d\varphi + \int_R^0 e^{-r^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} dr = 0.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} R i e^{i\varphi} d\varphi - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-ir^2} dr = 0. \quad (14.16)$$

Ocijenimo drugi integral. Na intervalu $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ vrijedi ocjena $\cos 2\varphi \geq 1 - \frac{4\varphi}{\pi}$, pošto se graf funkcije $\cos 2\varphi$ nalazi iznad pravca određenog točkama $A(0, 1)$, $B(\frac{\pi}{4}, 0)$ (nacrtaj sliku!). Zato je

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} R i e^{i\varphi} d\varphi \right| &\leqslant R \int_0^{\pi/4} |e^{-R^2 \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}| d\varphi \\ &\leqslant R \int_0^{\pi/4} \exp \left\{ -R^2 \left(1 - \frac{4\varphi}{\pi} \right) \right\} d\varphi = R e^{-R^2} \cdot \frac{\pi}{4R^2} \cdot \exp \left\{ R^2 \cdot \frac{4\varphi}{\pi} \right\} \Big|_{\varphi=0}^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4R} e^{-R^2} (e^{R^2} - 1) = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

i ovaj izraz teži k nuli kad $R \rightarrow \infty$. Relacija (14.16) sada daje, nakon prelaska $R \rightarrow \infty$,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^\infty (\cos(r^2) - i \sin(r^2)) dr = 0.$$

Uvrstimo poznatu vrijednost prvog integrala i odijelimo realni od imaginarnog dijela u ovoj relaciji. Dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \cos(x^2) dx + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \sin(x^2) dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \cos(x^2) dx - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \sin(x^2) dx &= 0 \end{aligned}$$

i odavde slijedi $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

14.7. Zadaci za vježbu

14.13. Izračunaj integrale

A. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4 \cos t};$

C. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{13 + 12 \cos t} dt;$

B. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t};$

D. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 t}{1 + \sin^2 t} dt.$

14.14. Izračunaj integrale

A. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}, (a > 1);$

C. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{1 - a \sin^2 t} dt, (0 < a < 1);$

B. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}, (a > b > 0);$

D. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos^2 t)^2}, (a > 0, b > 0).$

14.15. Izračunaj integrale za $-1 < a < 1$

A. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2};$
 C. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{1 - 2a \cos x + a^2} dx;$

B. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 - 2a \cos x + a^2};$
 D. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{1 - 2a \cos x + a^2} dx.$

14.16. Izračunaj integrale ($n \in \mathbb{N}$)

A. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(nx - \sin x) dx;$

B. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx.$

14.17. Izračunaj integrale

A. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$
 C. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2};$
 E. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$

B. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$
 D. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25};$
 F. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$

14.18. Izračunaj integrale ($a > 0, b > 0$)

A. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2};$
 C. $\int_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^4)^2};$
 E. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2};$

B. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3};$
 D. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)};$
 F. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, n \in \mathbb{N}.$

14.19. Izračunaj integrale

A. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx;$
 C. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx;$
 E. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2 - 4x + 5} dx;$
 G. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + x^2 + 1} dx;$

B. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx;$
 D. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx;$
 F. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 8x^2 + 16} dx;$
 H. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

14.20. Izračunaj integrale ($a > 0, b > 0$)

A. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx;$
 D. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2 + b^2)^3};$

B. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx;$
 E. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + b^2)^3};$

C. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2 + b^2)^2} dx;$
 F. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$

14.21. Izračunaj integrale (glavne vrijednosti)

A. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx;$
 C. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x(x^2 + 4)} dx;$

B. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx;$
 D. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx.$

14.22. Izračunaj integrale ($a, b > 0$)

- A. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^3} dx;$ B. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1-x^4} dx;$ C. $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos ax}{x^2} dx;$
 D. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx;$ E. $\int_0^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2} \cdot \frac{\sin ax}{x} dx;$
 F. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2} dx;$ G. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$ H. $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 dx.$

14.23. Izračunaj integrale

- A. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)};$ B. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)};$
 C. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(x+1)}, (0 < p < 1);$ D. $\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1+x^2}, (-1 < p < 1);$
 E. $\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2}, (-1 < p < 3);$
 F. $\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{x^2+2x \cos \lambda + 1}, (-1 < p < 1, -\pi < \lambda < \pi).$

14.24. Izračunaj integrale

- A. $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, (0 < p < 3);$
 B. $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}, (0 < p < n).$

14.25. Izračunaj integrale ($a > 0$)

- A. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2+a^2};$ B. $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^2+a^2};$
 C. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)};$ D. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}.$

14.26. Izračunaj integrale ($a > 0$)

- A. $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx;$ B. $\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx;$ C. $\int_0^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{(e^x+1)(e^x+2)};$
 D. $\int_0^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{e^{2x}+e^x+1};$ E. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x} dx;$ F. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x} dx.$

Rješenja zadataka

§ 1

1.16. $20 + 38i, 20 - 38i$

1.17. Vrijedi $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (zadatak 1.3), odavde indukcijom $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$. Zato $f(\bar{z}) = a_n(\bar{z})^n + \dots + a_1\bar{z} + a_0 = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{f(z)}$.

1.18. A. $-2 + \frac{3}{2}i$ B. 2 C. $-\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$ D. 0

1.19. $x = 1, y = -2$

1.20. A. $z = x + iy$ daje $x - iy = x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - y^3i$ i odavde $x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0$ i $y(3x^2 - y^2 + 1) = 0$. Mogućnost $x = 0$ daje $y(-y^2 + 1) = 0$, tj. $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = -1$. Ako je $x^2 - 3y^2 - 1 = 0$, tada iz $x^2 = 3y^2 + 1$ dobivamo $y(8y^2 + 4) = 0$ i odavde $y = 0, x = \pm 1$. Postoji dakle pet rješenja: $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i, z_4 = -1, z_5 = -i$. B. Za $n = 2, \bar{z} = z$ i rješenje je proizvoljan realan broj. Neka je $n > 2$. Tada $|z| = |\bar{z}| = |z^{n-1}| = |z|^{n-1}$ daje $|z| = 0$ ili $|z|^{n-2} = 1$, tj. $|z| = 1$. Pomnožimo relaciju sa z : $z\bar{z} = z^n \implies |z|^2 = z^n$, tj. $1 = z^n$ te je $z = \sqrt[n]{1}$. Rješenja su $z_0 = 0$ i $z_k = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n, k = 1, 2, \dots, n$. Usporedi s rješenjem A. i Zadatkom 1.2.

1.21. Vrijedi $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = 0 \iff x^2+y^2=1$, tj. $|z|=1$.

1.22. Neka su $a := z_1 + z_2, b := z_1 z_2$ realni. Tada su z_1, z_2 rješenja kvadratne jednadžbe $z^2 - az + b$ s realnim koeficijentima, te su zato konjugirano-kompleksni. Obratno, ako su z_1, z_2 konjugirano-kompleksni, tada su $z_1 + z_2 = 2\operatorname{Re} z_1$ i $z_1 z_2 = |z_1|^2$ realni brojevi.

1.23. Vrijedi $|z|^2 = z\bar{z}, \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$. Zato $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = 2(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. B. $|1-z_1z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = (1-\overline{z_1}z_2)(1-z_1\overline{z_2}) - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = 1 + \overline{z_1}z_1z_2\overline{z_2} - z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$. C. i D. se pokazuju na isti način.

1.26. A. $z = 3/4 + i$. B. Za $a \neq 0, \pm \frac{1}{2}$ rješenje glasi $z_{1,2} = \frac{-4a \pm \sqrt{4a^2 + 3}}{4(1-4a^2)} + \frac{i}{4}$. Za

$a = \pm \frac{1}{2}, z_{1,2} = \pm \frac{3}{8} + \frac{i}{4}$. Za $a = 0$ ne postoji rješenje. C. Postoje samo realna rješenja: $z = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4})$, za proizvoljni $a \in \mathbb{R}$ i k tome $z = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4})$, za $a \leq -2$.

1.27. A. Stavimo $z = x + iy$. Drugi uvjet daje $x = y$ i potom iz prvog $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 - i$. B. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. C. Iz prvog je uvjeta $r = |z| = 1$, iz drugog ćemo odrediti argument: $\arg(2z) = \arg z = \arg i - \arg z + 2k\pi$ te je $\varphi = \arg z = \pi/4 + k\pi$.

1.28. A. $|z| = \sqrt{2(1 - \sin \alpha)}$. Da odredimo φ izračunajmo

$$tg\varphi = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha/2 + \sin \alpha/2}{\cos \alpha/2 - \sin \alpha/2} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha/2}{1 - \operatorname{tg} \alpha/2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

te je $\varphi = \pi/4 + \alpha/2$. Trigonometrijski prikaz je

$$z = \sqrt{2(1 - \sin \alpha)}[\cos(\pi/4 + \alpha/2) + i \sin(\pi/4 + \alpha/2)].$$

B. z je modula 1. Rješenje: $z = \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)$. C. Računanjem algebarskog prikaza broja z dobivamo $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$. D. $z = \cos 4\pi/5 + i \sin 4\pi/5$.

1.29. Vrijedi $|z| = 2m$ i $\varphi = \pi/3$ te je $\operatorname{Re}(z^8) = (2m)^8 \cos 8\pi/3$. Odavde slijedi rješenje $m = 1$.

1.30. A. $1 - i$. B. 1. C. Vrijedi $\frac{1}{2} + i = \sqrt{5}/2(\cos 63,43^\circ + i \sin 63,43^\circ)$. Zato je $(\frac{1}{2} + i)^{10} = \frac{3125}{1024}(\cos 634,3^\circ + i \sin 634,3^\circ) = 0,2314 - 3,0430i$. D. Provjeri da vrijedi $z = 1 + \cos \pi/3 + i \sin \pi/3 = \sqrt{3}(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$. Odavde $z^{18} = 3^9(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -3^9$.

1.31. Argument broja $1 + i$ je $\pi/4$. Zato je argument od $(1 + i)^{4k}$ jednak $k\pi$, te je broj realan.

1.32. Jednadžba je ekvivalentna sa $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n = 1$. Kako je $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, to najmanji n za koji vrijedi $z^n = 1$ dobivamo iz $n \frac{\pi}{3} = 2\pi$, $n = 6$.

1.33. Vrijedi $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k \alpha \cos^{n-k} \alpha$. Zato je $\cos n\alpha = \operatorname{Re}(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k} \alpha \cos^{n-2k} \alpha$. Slično za $\sin n\alpha$.

1.34. $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{1 - i \operatorname{tg} \varphi}\right)^n = \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}\right)^n = \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{\cos n\varphi - i \sin n\varphi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\varphi}{1 - i \operatorname{tg} n\varphi}$.

1.35. Jednadžba $z + 1/z = 2 \cos \varphi$ je ekvivalentna sa $z^2 - 2 \cos \varphi z + 1 = 0$, s rješenjima $z_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Zato je $|z| = 1$ i $1/z = \cos \varphi \mp i \sin \varphi$. Dakle, $z^n + 1/z^n = (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^n + (\cos \varphi \mp i \sin \varphi)^n = 2 \cos n\varphi$.

1.36. $z^2 + z + 1 = 0$ je ekvivalentno sa $z + 1/z = -1 = 2 \cos(2\pi/3)$. Po prošlom zadatku, $z^{1991} + 1/z^{1991} = 2 \cos(1991 \cdot 2\pi/3) = -1$.

1.37. Nul točke polinoma Q su $z_{1,2} = \lambda(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)$. Koristeći se de Möivreovom formulom, lako se provjerava da su z_1 i z_2 ujedno i nul točke polinoma P . Zato je $P(x)$ djeljiv sa $(x - z_1)(x - z_2) = x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2 = Q(x)$.

1.38. A. Stavimo $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Tada je $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \operatorname{Im}(z + z^2 + \dots + z^n)$. Vrijedi

$$\begin{aligned} z + z^2 + \dots + z^n &= z \frac{1 - z^n}{1 - z} = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{1 - \cos n\alpha - i \sin n\alpha}{1 - \cos \alpha - i \sin \alpha} \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{2 \sin n\alpha/2 (\sin n\alpha/2 - i \cos n\alpha/2)}{2 \sin \alpha/2 (\sin \alpha/2 - i \cos \alpha/2)} \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{\sin n\alpha/2}{\sin \alpha/2} \cdot \frac{\cos n\alpha/2 + i \sin n\alpha/2}{\cos \alpha/2 + i \sin \alpha/2} \\ &= \frac{\sin n\alpha/2}{\sin \alpha/2} [\cos(\alpha + \frac{n\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}) + i \sin(\alpha + \frac{n\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2})] \\ &= \frac{\sin n\alpha/2}{\sin \alpha/2} [\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + i \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}] \end{aligned}$$

i odavde slijedi rezultat. B. Na isti način kao u A.

1.39. Rješenje analogno zadatku 1.38.

1.40. A. $z_0 = 2, 12 + 0, 71i$, $z_1 = -2, 12 - 0, 71i$. B. $z_0 = 1, 29 + 0, 20i$, $z_1 = -0, 82 + 1, 02i$, $z_2 = -0, 47 - 1, 22i$. C. $z_0 = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} - i)$, $z_1 = 4\sqrt{2}(-\sqrt{3} + i)$.

D. $z_0 = 0, 81 + 0, 59i$, $z_1 = -0, 31 + 0, 95i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -0, 31 - 0, 95i$, $z_4 = 0, 81 - 0, 59i$.

E. $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$. F. $z_0 = 0, 99 + 0, 57i$, $z_1 = -0, 24 + 1, 12i$, $z_2 = -1, 14 + 0, 12i$, $z_3 = -0, 47 - 1, 05i$, $z_4 = 0, 85 - 0, 77i$.

1.41. A. Jednadžba se svodi na $z^3 = -2 + 2i$, s rješenjima $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1,37 + 0,37i$, $z_2 = 0,37 - 1,37i$. B. Dobivamo $z^2 = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ i odavde $z_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $z_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $z_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$, $z_4 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$. C. Jednadžba se svodi na $(z^3 + i)^2 = 0$, sa rješenjima (dvostrukim) $z_1 = i$, $z_2 = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $z_3 = \sqrt{3}/2 - i/2$.

D. Jednadžba se svodi na $(z + 1)^2 = -2$, s rješenjima $z_1 = -0,37 + 1,09i$, $z_2 = -2,26$, $z_3 = -0,37 - 1,09i$. E. $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $z_4 = \sqrt{3}/2 - i/2$.

1.42. Svi n -ti korijeni iz jedinice su rješenja jednadžbe $z^n - 1 = 0$ i glase: $z_k = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Faktorizacija polinoma $z^n - 1$ pomoću njegovih nul-točaka daje: $z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})$. Kako je $z_0 = 1$, to iz identiteta $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + \dots + z^2 + z + 1)$ dobivamo $(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) = z^{n-1} + \dots + z + 1$. Uvrstimo ovdje $z = 1$ i uzmimo apsolutnu vrijednost obiju strana: $|1 - z_1| \cdot |1 - z_2| \cdots |1 - z_{n-1}| = n$. Kako je $|1 - z_k| = |\cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n| = 2 \sin k\pi/n$, to slijedi $2^{n-1} \sin \pi/n \sin 2\pi/n \cdots \sin (n-1)\pi/n = n$.

1.44. Vrijedi $a\bar{a} = r^2$ i odavde $\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{r^2}$. Slično, $\frac{1}{b} = \frac{\bar{b}}{r^2}$, $\frac{1}{c} = \frac{\bar{c}}{r^2}$.

$$\left| \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \right| = \left| \frac{abc(1/a+1/b+1/c)}{a+b+c} \right| = \frac{|abc|}{r^2} \left| \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}} \right| = \frac{|a|\cdot|b|\cdot|c|}{r^2} \left| \frac{(a+b+c)}{|a+b+c|} \right| = r.$$

1.45. Dovoljno je staviti $a = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $z = x + iy$, $x > 0$. Tada je $\left| \frac{a-z}{\bar{a}-z} \right| = \sqrt{\frac{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2}{(\alpha+x)^2 + (\beta-y)^2}} < 1$, pošto je $|\alpha-x| > |\alpha+x|$.

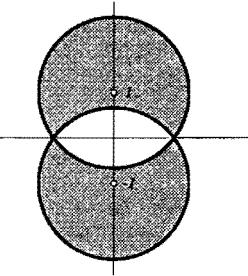
1.47. Iz $\lambda = 1$, $\mu = 0$ te potom $\lambda = 0$, $\mu = 1$ dobivamo $A \geq 0$, $C \geq 0$. Neka je $B = |B|e^{i\varphi}$ trigonometrijski prikaz kompleksnog broja B . Izaberimo broj $\mu = e^{i\varphi}$ i λ proizvoljan ali realan. Tada je $B\bar{\mu} = \bar{B}\mu = |B|$, $A|\lambda|^2 + B\lambda\bar{\mu} + \bar{B}\lambda\mu + C|\mu|^2 = A\lambda^2 + 2|B|\lambda + C$. Da bi ovaj izraz bio nenegativan za sve vrijednosti od λ , mora vrijediti $4|B|^2 - 4AC \leq 0$.

1.48. Izraz $\sum_{k=1}^n |\lambda z_k + \mu \bar{w}_k|^2$ je pozitivan, za sve kompleksne brojeve λ i μ . Kako je $\sum |\lambda z_k + \mu \bar{w}_k|^2 = \sum (\lambda z_k)(\mu \bar{w}_k)(\bar{\lambda} z_k + \bar{\mu} w_k) = (\sum |z_k|^2)|\lambda|^2 + (\sum z_k w_k)\lambda \bar{\mu} + (\sum \bar{z}_k \bar{w}_k)\bar{\lambda} \mu + (\sum |w_k|^2)$, stoga mora biti $(\sum |z_k|^2)(\sum |w_k|^2) \geq (\sum z_k w_k)^2$, po rezultatu prošlog zadatka.

1.49. Indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. $|\prod_{k=1}^{n+1} z_k - 1| = |z_{n+1} \prod_{k=1}^n z_k - z_{n+1} + z_{n+1} - 1| \leq |z_{n+1}| \cdot \left| \prod_{k=1}^n z_k - 1 \right| + |z_{n+1} - 1| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k - 1|$.

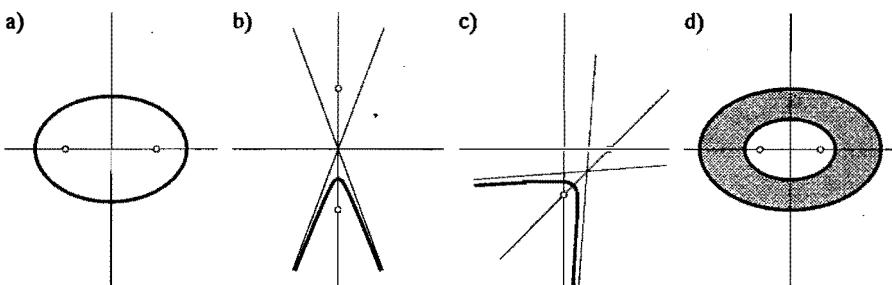
§ 2

2.13. Stavimo $z = x + iy$. A. $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$ dakle $0 \leq y \leq 1$, x proizvoljan. Rješenje je pruga $\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1\}$. B. $|x+iy-1| < |x+iy-i|$ daje $(x-1)^2+y^2 < x^2+(y-1)^2$. tj. $y < x$; poluravnina. C. $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$ daje $1+x = \sqrt{x^2+y^2}$, tj. $x = \frac{1}{2}(y^2-1)$; parabola. D. Geometrijski, ovaj uvjet zadovoljavaju sve točke $z = x+iy$ čije su udaljenosti do dviju fiksnih točaka z_1 i z_2 jednake. To je, dakle, simetrala dužine s krajnjim točkama z_1 i z_2 . Jednadžbu tog pravca dobivamo sredjivanjem jednadžbe $|x+iy-(z_1+iy_1)| = |x+iy-(z_2+iy_2)|$ i ona glasi $y - \frac{y_1+y_2}{2} = -\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x - \frac{x_1+x_2}{2})$. E. Parabola $y = \frac{1}{8}(x^2-1)$. F. Uvrstimo $z = x+iy$ u $|2z| > |1+z^2|$, tj. $2|z| > |z-i| \cdot |z+i|$. Kvadriranjem i sredjivanjem dobivamo $(x^2+(y-1)^2-2)(x^2+(y+1)^2-2) < 0$. Točka (x, y) mora se nalaziti u samo jednom od krugova $x^2+(y-1)^2 < 2$, $x^2+(y+1)^2 < 2$ (slika 15.1).



Slika 15.1.

2.14. A. Uvjet zadovoljavaju sve točke (x, y) za koje je $\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2$. To je kružnica čiji je promjer dužina $[z_1, z_2]$. B. Rješenje je pravac $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$. On prolazi točkama z_1 i z_2 . C. Elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, sa žarištima $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ i velikom osi $2a = 8$ (slika 15.2.a). D. Jedna grana hiperbole $12y^2 - 4x^2 = 3$, sa žarištima $F_1(0, 1)$, $F_2(0, -1)$ i realnom osi $2a = 1$ (slika 15.2.b). E. Jedna grana hiperbole, čije su osi zarotirane prema kartezijevim osima. Žarišta su joj u točkama $F_1(3, 0)$, $F_2(0, -3)$, realna os $2a = 5$ (slika 15.2.c). Izvedi njenu jednadžbu! F. Rješenje je podskup $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \geq 1, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} \leq 1\}$ između dvije elipse, sa zajedničkim žarištima $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$ i realnim osima $2a = 4$, $2a = 8$ (sl. 15.2.d)



Slika 15.2.

2.15. A. Stavimo $z(t) = x(t) + iy(t)$. Sredjivanjem dobivamo $x(t) = (r + \frac{1}{r}) \cos t$, $y(t) = (r - \frac{1}{r}) \sin t$. Za $r \neq 1$ to je parametarska jednadžba elipse s žarištima $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ i poluosima $a = r + \frac{1}{r}$, $b = |r - \frac{1}{r}|$. Ako je $r > 1$, elipsa se obilazi u pozitivnom, a za $r < 1$ u negativnom smjeru. Za $r = 1$ elipsa se degenerira u dužinu $[-2, 2]$ koja se prelazi dva puta, od točke $B(2, 0)$ do $A(-2, 0)$ i natrag. B. Kružnica sa središtem $S(1, 0)$ i polumjerom $R = 1$, koja se obilazi u negativnom smjeru. C. Kružnica se

središtem $S(-1, 0)$, polumjerom $R = 1$, koja se obilazi dva puta, u pozitivnom smjeru. D. Krivulja se sastoji od luka jedinične kružnice i odreska $[-1, 1]$. Zatvorena je i ima pozitivnu orientaciju. E. Segment \overline{AB} na imaginarnoj osi, od točke $A(0, 1)$ do $B(0, -1)$, koji se prelazi dvaput, od A do B i natrag. F. Segment pravca $x = 1$, određen točkama $A(1, 1)$, $B(1, 0)$. Promjenom parametra t taj se segment prođe četiri puta, s početkom u točki A .

2.16. Jednadžba pravca koji prolazi točkama z_1, z_2 glasi $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$, $t \in \mathbb{R}$. Zato, z_3 leži na tom pravcu ako i samo ako je $(z_3 - z_1)(z_2 - z_1) = t$ realan broj.

2.17. Ako točke leže na jednom pravcu, tada su, po prošlom zadatku, oba kvocijenta realni brojevi. Pretpostavimo zato da su z_1, z_2, z_3, z_4 nekolinearne. Spojimo ih u poretku $z_1 \rightarrow z_3 \rightarrow z_2 \rightarrow z_4 \rightarrow z_1$. Dvije su mogućnosti: ta spojnica se presjeca ili ne (slika 15.3)

Označimo kutove kao na slici 15.3. Vrijedi

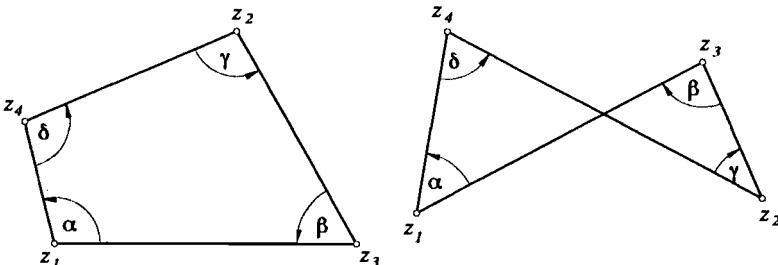
$$\alpha = \arg(z_3 z_1 z_4) = \arg(z_4 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3},$$

$$\gamma = \arg(z_3 z_2 z_4) = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_4 - z_2) = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

Točke z_1, z_2, z_3, z_4 leže na kružnici ako i samo ako vrijedi: u prvom slučaju $\alpha + \gamma = \pi$ (lik je tetivni četverokut), ili, u drugom slučaju $\alpha = -\gamma$ (tetiva $\overline{z_3 z_4}$ vidi se iz točaka z_1, z_2 pod istim kutom, predznak minus je zbog suprotne orientacije). U prvom slučaju je

$$\alpha + \gamma = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3} + \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \pi$$

te je ovaj produkt realan broj. U drugom slučaju je $\alpha + \gamma = 0$, s istom posljedicom.



Slika 15.3.

2.18. $|z - z_1| = k|z - z_2|$ daje $(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = k^2(z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2)$. Množenje i sređivanje daje jednadžbu $(1 - k^2)|z|^2 - (\bar{z}_1 - k^2 \bar{z}_2)z - (z_1 - k^2 z_2)\bar{z} + |z_1|^2 - k^2|z_2|^2 = 0$, tj. $z^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + \beta = 0$, gdje smo označili $a = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$, $\beta = \frac{|z_1|^2 - k^2 |z_2|^2}{1 - k^2}$. Po zadatku 2.7, ova jednadžba predstavlja kružnicu, sa središtem u točki a i polumjerom $r = \sqrt{|a|^2 - \beta} = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}|z_1 - z_2|$. Primijeti da se središte S ove kružnice nalazi na spojnici točaka z_1 i z_2 i dijeli ju u omjeru $\overline{z_1 S} : \overline{z_2 S} = k^2 : 1$.

2.19. Stavimo $a = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$. Sređivanjem jednadžbi dobivamo jednadžbe pravaca $2\alpha x + 2\beta y + b = 0$, odnosno $-2\beta x + 2\alpha y + b = 0$.

2.20. Razvojem determinante po prvom retku dobivamo

$$\begin{vmatrix} \bar{z_1} & 1 \\ \bar{z_2} & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{vmatrix} \bar{z} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z_1} \\ z_2 & \bar{z_2} \end{vmatrix} = 0$$

tj. oblik $\bar{a}z - a\bar{z} + ib = 0$ što predstavlja, po prošlom zadatku, pravac. Uvrštavanjem u determinantu $z = z_1, z = z_2$ ona ima vrijednost 0, zato taj pravac prolazi kroz točke z_1, z_2 .

2.21. Jednadžba kružnice glasi, po Zadatku 2.7,

$$z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + \beta = 0.$$

Ako ona prolazi točkama z_1, z_2, z_3 , tada vrijedi

$$z_1\bar{z_1} - \bar{a}z_1 - a\bar{z_1} + \beta = 0,$$

$$z_2\bar{z_2} - \bar{a}z_2 - a\bar{z_2} + \beta = 0,$$

$$z_3\bar{z_3} - \bar{a}z_3 - a\bar{z_3} + \beta = 0.$$

Ove četiri jednadžbe možemo shvatiti kao homogeni sustav linearnih jednadžbi po nepoznanimama $1, \bar{a}, a, \beta$. Pošto on ima netrivijalno rješenje, njegova determinanta mora biti jednaka nuli. To je upravo tražena determinanta u zadatku.

2.22. Jednadžba kružnice dana je determinantom iz prošlog zadatka. Razvojem te determinante po prvom retku dobivamo $D|z|^2 - \overline{D_1}z + D_1\bar{z} + D_2 = 0$, odnosno $|z|^2 - \frac{\overline{D_1}}{D}z + \frac{D_1}{D}\bar{z} + \frac{D_2}{D} = 0$. Kako je $\overline{D} = -D$, to ova jednadžba glasi $|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + \beta = 0$, gdje smo stavili $a = -\frac{D_1}{D}$, $\beta = \frac{D_2}{D}$. Vrijedi $\bar{\beta} = \beta$, dakle, β je realan broj. Po Zadatku 2.7, središte kružnice je točka $z_0 = a = -\frac{D_1}{D}$, a njen polumjer $r^2 = -\beta + |a|^2 = |z_0|^2 - \frac{D_2}{D}$.

2.23. $z = (2 - 5i)(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = (2 - 5i)i = 5 + 2i$.

2.24. Iz $z_1e^{i\varphi} = z_2$ dobivamo $e^{i\varphi} = z_2/z_1 = \frac{7\sqrt{2}}{26} - i\frac{17\sqrt{2}}{26}$. Odavde, $\varphi = 292^\circ 22'$.

2.25. $x' = \cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ = 1,6237$, $y' = -\sin 20^\circ + 2 \cos 20^\circ = 1,5373$.

2.26. A. $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$ te je $\alpha = 35^\circ 47'$ Veza između starih i novih koordinata je $x = 0,8112x' - 0,5847y', y = 0,5847x' + 0,8112y'$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo jednadžbu krivulje u novom sustavu: $-\frac{x'^2}{123,25} + \frac{y'^2}{3,245} = 1$. Riječ je o hiperboli. B. Sada je $\operatorname{tg} 2\alpha = 0,5$, $\alpha = 13^\circ 17'$. Slijedi $x = 0,8944x' - 0,4472y', y = 0,4472x' + 0,8944y'$ i odavde nová jednadžba $x'^2 - y'^2 = 8,9443$. C. $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$ daje $\alpha = 22^\circ 30'$, $x = 0,9239x' - 0,3827y', y = 0,3827x' + 0,9239y'$. Dobivamo hiperbolu $\frac{x'^2}{3,3137} - \frac{y'^2}{19,3137} = 1$. Njene su asymptote $y = -x$, $x = 0$, što vidimo i iz jednadžbe $y = \frac{4}{x} - x$ te hiperbole u starom sustavu.

2.27. Neka je $z_1 = e^{i\varphi}$. Množeći relaciju $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ sa $e^{-i\varphi}$, dobivamo $1 + z'_2 + z'_3 = 0$ (*), $|z'_2| = |z'_3| = 1$ (**), gdje smo stavili $z'_2 = z_2e^{-i\varphi}$, $z'_3 = z_3e^{-i\varphi}$. Brojevi 1, z'_2 , z'_3 dobiveni su rotacijom (za kut $-\varphi$) od brojeva z_1, z_2, z_3 . Dovoljno je pokazati da su te točke vrhovi jednakostraničnog trokuta. Stavimo $z'_2 = x'_2 + iy'_2$, $z'_3 = x'_3 + iy'_3$. Iz (*) slijedi $y'_2 = -y'_3$, pa (**) daje $|x'_2| = |x'_3|$ i ponovo po (*) dobivamo $x'_2 = x'_3 = -\frac{1}{2}$. Sada je $y'_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ i zato $z'_1 = 1$, $z'_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z'_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, a to su vrhovi jednakostraničnog trokuta upisanog u jediničnu kružnicu.

2.28. Neka je $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, n -ti korijen iz jedinice. Vrhovi pravilnog n -terokuta glase $z_k = z_0 + (z_1 - z_0)\varepsilon^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

2.29. Neka su $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ svi n -ti korijeni iz broja 1. Ti su brojevi rješenje jednadžbe $z^n - 1 = 0$, i stoga, po Viéteovim formulama zadovoljavaju relaciju $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 0$. Međutim, ti su brojevi ujedno vrhovi pravilnog mnogokuta upisanog u jediničnu kružnicu (od kojih se jedan nalazi u točki $z = 1$). Vrhovi proizvoljnog pravilnog mnogokuta upisanog u tu kružnicu mogu se dobiti rotacijom, odnosno množenjem s brojem $e^{i\varphi}$. Dakle, vrijedi $z_k = e^{i\varphi} \varepsilon_k$ i stoga je i $\sum_{k=1}^n z_k = 0$. Sada imamo $\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = \sum_{k=1}^n (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) = \sum_{k=1}^n (|z|^2 + |z_k|^2) + z \sum_{k=1}^n \bar{z}_k + \bar{z} \sum_{k=1}^n z_k = 2n$ pošto vrijedi $|z| = 1$ i $|z_k| = 1$.

2.30. $|z|_{\max} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4} + a)$, $|z|_{\min} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4} - a)$.

§ 3

3.13. **A.** $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 - e^{i\varphi} + \dots + (-1)^n e^{ni\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1 - (-e^{i\varphi})^{n+1}}{1 - (-e^{i\varphi})}$. Zato vrijedi ocjena $|z_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 + |(-1)^n e^{i(n+1)\varphi}|}{|1 + \cos \varphi + i \sin \varphi|} = \frac{2}{\sqrt{n} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}} \rightarrow 0$. **B.** Stavimo $w_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{n-k}{n}} z^k$. Definirajmo $z_n := 1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$. Vrijedi $z_n \rightarrow \frac{1}{1 - z}$. Također, $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \{z_n + (\sqrt{2} - 1)z_{n-1} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})z_{n-2} + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})z_1\}$ i po Zadatku 3.4.C vrijedi $w_n \rightarrow \frac{1}{1 - z}$.

3.17. **A.** Divergira. Opći član $\cos(in)/2^n = \operatorname{ch}(n)/2^n$ ne teži u nulu. **B.** Konvergira absolutno. Stavi $\sin(in) = i \operatorname{sh}(n)$ i primjeni d'Alembertov kriterij. **C.** Konvergira absolutno, $\cos(in^2) = \operatorname{ch}(n^2)$. **D.** Konvergira absolutno. **E.** Divergira. Red realnih dijelova $\sum \frac{\cos(\pi/n)}{\sqrt{n}}$ ponaša se poput divergentnog reda $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. **F.** Vrijedi $|z_n| = \frac{1}{\operatorname{ch}(n)}$. Red konvergira absolutno, primjeni d'Alembertov ili Cauchyjev kriterij. **G.** Konvergira absolutno. Majoriran je konvergentnim redom $\sum \frac{1}{\operatorname{sh}(n)}$. **H.** Divergira. Nije ispunjen nuždan uvjet konvergencije. **I.** Konvergira absolutno. Majoriran je npr. sa redom $\sum \frac{1}{n^2}$. **J.** Divergira. Opći član $z_n = \frac{n}{\operatorname{th}(\pi n)}$ teži u ∞ .

3.18. **A.** Konvergira absolutno. Primjeni Cauchyjev kriterij. **B.** Konvergira absolutno. Po d'Alembertovom kriteriju je

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

C. Kako je $|e^{in}| = 1$, to red divergira. **D.** Red konvergira uvjetno. Po Zadatku 3.10., za $a_n = n$ dobivamo da je red konvergentan, a kako je $\left| \frac{e^{in}}{n} \right| = \frac{1}{n}$, to on ne konvergira absolutno.

3.19. **A.** Vrijedi $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = |z| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \rightarrow \frac{|z|}{e}$ i ako je $|z| < e$, tada red konvergira absolutno, po d'Alembertovom kriteriju.

B. $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{2n(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \frac{|1+z^n|}{|1+z^{n+1}|} \rightarrow 4|z|$. Tvrđnja slijedi po d'Alembertovom kriteriju. C. Red realnih brojeva $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ je konvergentan, pa stoga konvergira i red $\sum \frac{1}{(n+x) \ln^2 n}$, za svaki realni x , $x \neq -2, -3, \dots$. Kako je

$$|z_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+x)^2 + y^2 \ln^2 n}} \leq \frac{1}{|n+x| \ln^2 n},$$

to red konvergira apsolutno. D. Vidi Zadatak 3.7.C. E. Po d'Alembertovom kriteriju, $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+2+x)^2 + y^2}} \rightarrow \frac{1}{2}$ i red konvergira apsolutno za svaki z za koji su njegovi članovi definirani. F. $\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| = \frac{|z+2n+1|}{2(n+1)}$ i red konvergira apsolutno, po Raabeovom kriteriju, kao u Zadatku 3.7.C.

3.20. Možemo napisati, kao u Zadatu 3.9,

$$\left| \sum_{k=m}^n w_k z_k \right| \leq \max_{m \leq k \leq n-1} |S_k| \sum_{k=m}^{n-1} |w_{k+1} - w_k| + |S_n - S_{m-1}| |w_n| + |S_{m-1}| |w_n - w_m|.$$

Provjeri da je u svakom od ova tri pribrojnika jedan član ograničen, a drugi proizvoljno malen. Stoga je red Cauchyjev pa zato i konvergentan.

3.21. Vrijedi $z_n = |z_n|(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, $\sum z_n = \sum |z_n| \cos \varphi_n + i \sum |z_n| \sin \varphi_n$ i oba ova reda konvergiraju. Kako je $\varphi_n = \arg z_n \leq \alpha$, to vrijedi $\cos \alpha \leq \cos \varphi_n$. Zato je $\sum |z_n| \leq \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \sum |z_n| \cos \varphi_n$ i red konvergira apsolutno.

3.22. Ako je $|z| < 1$, tada vrijedi $\left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| \leq \frac{|z|^n}{1-|z|^n} \leq \frac{|z|^n}{1-|z|}$ i red konvergira. Za $|z| \geq 1$ imamo pak $\left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| \geq \frac{|z|^n}{1+|z|^n} \geq \frac{1}{2}$.

4.9. Stavimo $z = x+iy$ i razdvojimo realni od imaginarnog dijela. A. $u = x^2 - y^2 - 2x$, $v = 2xy + 2y + 5$. B. $u = x^3 - 3xy^2 - \frac{y}{x^2+y^2}$, $v = -3x^2y + y^3 - \frac{x}{x^2+y^2}$. C. $u = \frac{(x+1)(x^2+y^2-1) + 2xy^2}{(x^2-y^2-1)^2 + 4x^2y^2}$, $v = \frac{y(x^2-y^2-1) - 2xy(x+1)}{(x^2-y^2-1)^2 + 4x^2y^2}$.

4.10. A. -4 . B. $-i$. C. $\sqrt{2}(-1+i)/2$

4.11. Dovoljno je uvrstiti $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ i provjeriti identitet. Npr. B. $\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) = \frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin(z_1 + z_2)$. C. Na isti način.

4.12. A. $w = e^{1-z} = e^{1-x} e^{-iy}$, $u = e^{1-x} \cos y$, $v = -e^{1-x} \sin y$. B. $w = \operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(iy)$, $u = \operatorname{sh} x \cos y$, $v = \operatorname{ch} x \sin y$. C. $w = \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}$, $u = \frac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$, $v = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$.

4.13. A. $w_0 = -3i/4$, $r = 3/4$, $\varphi = 3\pi/2$. B. $w_0 = i \operatorname{ch} 1$, $r = \operatorname{ch} 1$, $\varphi = \pi/2$. C. $w_0 = 0$, $r = 0$, φ je neodređen.

4.14. A. $w = \operatorname{Arc sin} z$ ako i samo ako je $z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})$. Množenjem sa e^{iw} slijedi $(e^{iw})^2 - 2iz e^{iw} - 1 = 0$ i odavde $e^{iw} = iz + i\sqrt{z^2 - 1}$ (kvadratna funkcija ima dvije vrijednosti). Logaritmiranjem slijedi rezultat. B. Na isti način. C. $w = \operatorname{Arsh} z \iff z = \operatorname{sh} w = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w})$. Jednadžba $(e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0$ sada daje $e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}$ i odavde logaritmiranjem slijedi tražena formula. D. Na isti način.

4.15. A. $1 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $(3\pi/2 + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$. C. $\ln \sqrt{13} + i(2(k+1)\pi - \operatorname{arc tg}(2/3))$. D. $1^i = e^{i \operatorname{Ln} 1} = e^{-2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. E. $2^i = e^{i \operatorname{Ln} 2} = e^{-2k\pi}[\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)]$, $k \in \mathbb{Z}$ (trigonometrijski oblik). F. $\exp(\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

G. $5 \exp[\operatorname{arc tg}(3/4) - 2(k+1)\pi] [\cos(\ln 5 - \operatorname{arc tg}(3/4)) + i \sin(\ln 5 - \operatorname{arc tg}(3/4))]$, $k \in \mathbb{Z}$.

H. $i \operatorname{th}(\pi/2)$. I. $\operatorname{Arc cos} i = -i \operatorname{Ln}(i + \sqrt{i^2 - 1}) = -i \operatorname{Ln}[i(1 \pm \sqrt{2})] = \pi/2 + 2k\pi - i \operatorname{Ln}(\sqrt{2} + 1)$ ili $3\pi/2 + 2k\pi - i \operatorname{Ln}(\sqrt{2} - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. J. $\operatorname{Arc sin} \frac{1}{2} = -i \operatorname{Ln} i(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}) = -i \operatorname{Ln}(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ili $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. K. $k\pi + i \operatorname{Ln} \sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. L. i . M. $i \operatorname{sh} 2$. N. $\cos 2 \operatorname{ch} 1 - i \sin 2 \operatorname{sh} 1$. O. $\cos[\sqrt{2}(\pi + 2k\pi)] + i \sin[\sqrt{2}(\pi + 2k\pi)]$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.16. A. $z = \operatorname{Ln}(-i) = i(3\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $\cos x + i \sin x = \cos \pi x$ da je $x = 0$. C. $z = \operatorname{Arc sin} 3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \operatorname{Ln}(3 + \sqrt{8})$, $k \in \mathbb{Z}$. D. $z = i - e$. E. $z = 1 - i$. F. $e^z = -1 \pm 2$, $z = 2k\pi i$ ili $z = \operatorname{Ln} 3 + i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. G. $z = \operatorname{Arc cos}(-5/4) = (2k+1)\pi \pm i \operatorname{Ln} 2$, H. $z = \operatorname{Arc sin} \pi i = \pi + 2k\pi - i \operatorname{Ln}(\sqrt{\pi^2 + 1} + \pi)$ ili $z = 2k\pi - i \operatorname{Ln}(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi)$. I. $z = \operatorname{Arc sin}(-1) = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. J. Stavimo $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$. Sređivanjem dobivamo $(1+i)e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 + i = 0$ i odavde $e^{iz} = (1 \pm \sqrt{2}/2)(1+i)$. Logaritmiranjem, $z = \pi/4 + 2k\pi - i \operatorname{Ln}(\sqrt{2} \pm 1)$.

§ 5

5.20. A. Vrijedi $u = x^3 + xy^2$, $v = x^2y + y^3$, $u'_x = 3x^2 + y^2$, $v'_y = x^2 + 3y^2$. w nije analitička (niti na kojem području u C). B. $u = e^x(\operatorname{ccos} y - y \operatorname{sin} y)$, $v = e^x(x \operatorname{sin} y + y \operatorname{cos} y)$. w je analitička na čitavom C i vrijedi $w' = u'_x + iv'_x = e^x(x \operatorname{cos} y - y \operatorname{sin} y + \operatorname{cos} y) + ie^x(x \operatorname{sin} y + y \operatorname{cos} y + \operatorname{sin} y) = (x+iy)e^x(\operatorname{cos} y + i \operatorname{sin} y) + e^x(\operatorname{cos} y + i \operatorname{sin} y) = (z+1)e^z$. C. Nije analitička. D. Nije analitička. E. $u = \sin 2x \operatorname{ch} 2y$, $v = \cos 2x \operatorname{sh} 2y$, $w' = 2 \cos 2(x+iy) = 2 \cos 2z$. F. Nije analitička. G. Nije analitička. I. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arc tg}(y/x)$. w je analitička na svakom području $G \subset C \setminus \{0\}$, $w' = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{z}$. J. Analitička za svaki $z \in C \setminus \{0\}$, $w' = \frac{ze^z - e^z}{z^2}$. K. Funkcija je analitička na svakom području $G \subset C \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, $w' = 1/\cos^2 z$.

5.21. A. $u = x$, $v = 0$. w nije diferencijabilna niti u jednoj točki. B. $u = y$, $v = 0$. w nije diferencijabilna niti u jednoj točki. C. $u = x^2y^2$, $v = 0$. Cauchy-Riemannovi uvjeti su ispunjeni samo u točki $(0,0)$, $w'(0) = 0$. D. $u = x^2 + y^2$, $v = 0$. w je diferencijabilna samo u $z = 0$ i vrijedi $w'(0) = 0$. E. $u = x^2$, $v = y^2$; $u'_x = 2x$, $v'_y = 2y$, $u'_y = 0$, $v'_x = 0$. Cauchy-Riemannovi uvjeti su ispunjeni u svakoj točki pravca $y = x$. Zato je funkcija diferencijabilna na pravcu $z = (1+i)t$, $t \in \mathbb{R}$, $w' = 2t(1+i)$. Primijeti da w nije analitička niti na jednom području. F. w je diferencijabilna samo u $z = 0$, $w'(0) = 0$. G. w je diferencijabilna na čitavoj ravnini C, $w' = 2y - 2xi = -2iz$.

5.22. A. $v(x, y) = \int_0^x -u'_y(x, y) dx + \int_1^y u'_x(x_0, y) dy + C = -\frac{y}{x^2+y^2} + C$. Odavde $f(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + iC = \frac{1}{z} + iC$. $z = \pi$ daje $C = 0$, $f(z) = \frac{1}{z}$. B. $u(x, y) = \int_0^x v'_y(x, y) dx + \int_0^y -v'_x(x_0, y) dy = 2 \operatorname{sh} x \cos y - x^2 + y^2 + C$. Slijedi $f(z) = 2 \operatorname{sh} x \cos y - x^2 + y^2 + C + i 2 \operatorname{ch} x \sin y - 2ixy = 2 \operatorname{sh} z - z^2 + C$. $f(0) = 0$ daje $C = 0$. C. Na isti način, $v(x, y) = 2 \cos x \operatorname{sh} y - y + C$. $f(0) = 0$ daje $C = 0$, $f(z) = 2 \sin(x+iy) - (x+iy) = 2 \sin z - z$. D. $u(x, y) = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + x - 2 + C$. Dobivamo $C = 2$ i $f(z) = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y - i \sin 2x \operatorname{sh} 2y + x + iy = 2 \cos 2z + z$. E. $u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{sh} y + 2xy + C$. Uvjet $f(0) = 2$ daje $C = 2 - 2i$. $f(z) = 2i \cos z - iz^2 + 2 - 2i$. F. $v(x, y) = -2x^3 + 3x^2 + 6y^2x - y^3 + C$. Slijedi $C = 0$ i $f(z) = (x+iy)^3 - 2i(x+iy)^3 = (1-2i)z^3$. G. $v(x, y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y + C$. Dalje je $C = 0$, $f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y) = (x+iy)e^x e^{iy} = z \cdot e^z$.

5.23. Deriviranjem se lako provjerava da u sva četiri primjera vrijedi $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Pripadne konjugirane funkcije računamo formulom (5.11) i one glase A. $v = 2xy + 2y + C$, B. $2e^x \sin y + C$, C. $v = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C$, D. $v = -x^2/2 + y^2/2 + C$.

5.24. Vrijedi $\Delta u = 2(a+c)$. Funkcija u će biti harmonijska ako i samo ako je $a = -c$. b može biti proizvoljan. Primjeti da je tada $u = a(x^2 - y^2) + 2bxy$, linearna kombinacija dviju harmonijskih funkcija.

5.25. A. Stavimo $\psi(x, y) = |f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$. Provjeri sljedeće derivacije: $\psi'_x = \frac{u \cdot u'_x + v \cdot v'_x}{(u^2 + v^2)^{1/2}}$, $\psi''_{xx} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \left[u^3 u''_{xx} + v^3 v''_{xx} + u^2 (v'_x)^2 + v^2 (u'_x)^2 + u^2 v u''_{xx} - 2uv u'_x v'_x \right]$. Analogno, $\psi''_{yy} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \left[u^3 u''_{yy} + v^3 v''_{yy} + u^2 (v'_y)^2 + v^2 (u'_y)^2 + u^2 v \cdot v''_{yy} + uv^2 u''_{yy} - 2uv u'_y v'_y \right]$. Zato je $\Delta \psi = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \left[u^2 (v'^2_x + v'^2_y) + v^2 (u'^2_x + u'^2_y) - 2uv(u'_x v'_x + u'_y v'_y) \right]$ (iskoristili smo činjenicu da su u , v harmonijske funkcije).

Nadalje, u , v zadovoljavaju Cauchy–Riemannove uvjete: $v'_y = u'_x$, $v'_x = -u'_y$. Uvrštanjem dobivamo $\Delta \psi = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \left[(u^2 + v^2)(u'^2_x + u'^2_y) \right] = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \left[u'^2_x + u'^2_y \right]$. Zato je $\Delta \psi \neq 0$ i ψ nije harmonijska. B. i C. Funkcija $\ln \psi(z)$ je (kao kompozicija dviju analitičkih funkcija) analitička funkcija (tamo gdje je definirana). Njen realni dio je $h(x, y) = \ln |\psi(z)|$, a imaginarni dio $g(x, y) = \arg \psi(z)$. Stoga su h i g harmonijske funkcije. (Provjeri i direktno, poput računa u A., da vrijedi $\Delta h = 0$, $\Delta g = 0$).

5.26. Pogledaj Zadatak 5.19. A. Vrijedi $\Delta u = h''(x)$ i zato $\Delta u = 0$ daje $h(x) = C_1 x + C_2$. B. Stavimo $t = ax + by$. Vrijedi $u'_x = h'(t) \cdot t'_x = h' \cdot a$, slično za u'_y i derivacije drugog reda. Dobivamo $\Delta u = h'' \cdot (a^2 + b^2) = 0 \implies h(t) = C_1 t + C_2$, tj. $h(ax + by) = C_1(ax + by) + C_2$. C. $t = x^2 y$ daje $u''_{xx} = h''(t)4x^2 y^2 + h'(t)2y$, $u''_{yy} = h''(t)x^4$ te je $\Delta u = (4x^2 y^2 + x^4)h''(t)2y + h'(t)$. Ne postoji funkcija $h = h(t)$ za koju je ovaj izraz identički jednak nuli. D. Sada je $\Delta u = (x^2 + y^2)h''(t) = 0$, za $h(t) = C_1 t + C_2$. Dakle, $h(xy) = C_1 xy + C_2$ je harmonijska funkcija, jedina tog oblika. E. Supstitucija $t = x^2 + y^2$ vodi do jednadžbe $\Delta u = 4(x^2 + y^2)h''(t) + 4h'(t) = 4t h''(t) + 4h'(t) = 0$. Odavde, $h(t) = C_1 \ln t + C_2$, tj. $h(x^2 + y^2) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$. F. $\Delta u = 0$ vodi do jednadžbe $(4x^2 + 1)h''(t) + 2h'(t) = 0$, koja nema rješenja. G. Sada dobivamo $t^2 h''(t) + 2t h'(t) = 0$,

s rješenjem $h(t) = -C_1/t + C_2$, tj. $h\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right) = -C_1 \frac{x}{x^2+y^2} + C_2$. **H.** Ne postoji harmonijska funkcija tog oblika. **I.** $h(x^2-y^2) = C_1(x^2-y^2)+C_2$ je harmonijska funkcija.

5.27. A. Vrijedi $U+iV = e^u \cos v + ie^u \sin v = e^u(\cos v + i \sin v) = e^{u+iv} = e^{f(z)}$. f je analitička funkcija, pa je i $e^{f(z)}$ analitička funkcija. Zato su U , V realni odnosno imaginarni dio analitičke funkcije i stoga čine par konjugiranih harmonijskih funkcija. B. Sada je $U+iV = (u+iv)^2 = f(z)^2$. C. $U+iV = e^{u^2-v^2}(\cos 2uv + i \sin 2uv) = e^{u^2-v^2}e^{i2uv} = e^{(u+iv)^2} = e^{f(z)^2}$ i U , V su ponovo konjugirane harmonijske funkcije. D. U i V su funkcije varijabli x , y : $U(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$, slično za V . Moramo provjeriti da vrijedi $U'_x = V'_y$, $U'_y = -V'_x$ (i tada slijedi $\Delta U = \Delta V = 0$). Imamo, $U'_x = \varphi'_u \cdot u'_x + \varphi'_v \cdot v'_x = \psi'_v \cdot v'_y + \psi'_u \cdot u'_y = V'_y$. Tu smo iskoristili Cauchy-Riemannove uvjete za oba para konjugiranih funkcija (u, v) i (φ, ψ) . Analogno se dobiva $U'_y = -V'_x$. Provjeri da se pogodnim izborom para (φ, ψ) dobivaju slučajevi A, B i C.

§ 6

6.8. A. $e(\cos 1 + i \sin 1) - 1$. B. kao u A. C. $-8/3$.

6.9. A. 0. B. πi . C. $2\pi i$. D. $2\pi i \sin 1$.

§ 7

7.16. A. $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. B. $z_2 = 4 + i$.

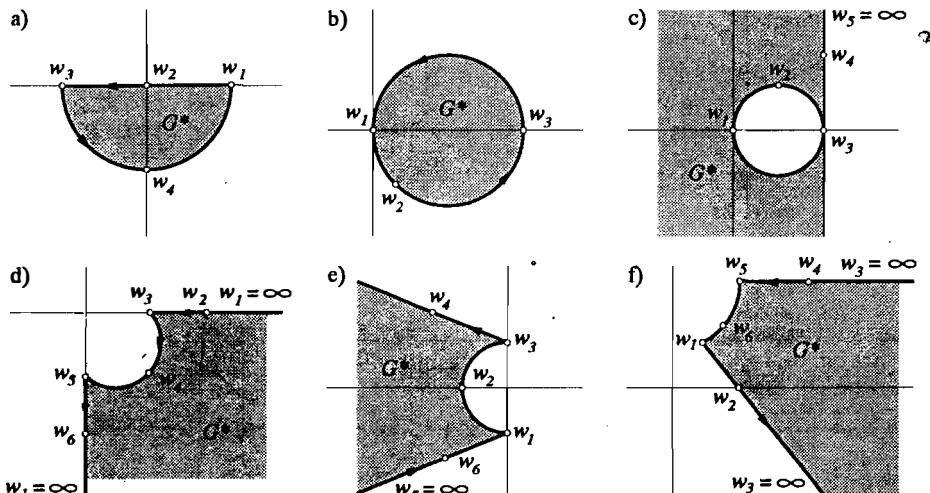
7.17. $w = \frac{-z+i}{z+i} = \frac{2i}{z+i} - 1$. Slika gornje poluravnine je krug $\{|w| < 1\}$.

7.18. A. Familijsa pravaca $v = -Cu$. B. Familijsa kružnica $(u + \frac{1}{2C})^2 + (v + \frac{1}{2C})^2 = \frac{1}{2C^2}$, $C \neq 0$ i pravac $v = -u$ za $C = 0$. C. Familijsa pravaca $u = 1/C$.

7.19. Dovoljno je preslikati tri točke područja G , recimo $z_1 = 3$, $z_2 = 1+2i$, $z_3 = -1$. A. $w_1 = -1 + 3i$, $w_2 = -3 + i$, $w_3 = -1 - i$; $G^* = \{|w - (-1 + i)| < 2\}$, krug. B. $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, $w_3 = -1$; $G^* = \{|w| < 1\}$, krug. C. $w_1 = \infty$, $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, $w_3 = \frac{1}{2}$; $G^* = \{\operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\}$, poluravnina. D. $w_1 = 4$, $w_2 = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$, $w_3 = 0$; $G^* = \{|w - 2| > 2\}$, vanjsština kruga. Jednadžbe kružnica koje su određeni točkama w_1 , w_2 , w_3 nisu očigledne. Središta možemo pronaći npr. traženjem presjeka simetrala stranica trokuta čiji su vrhovi u tim točkama.

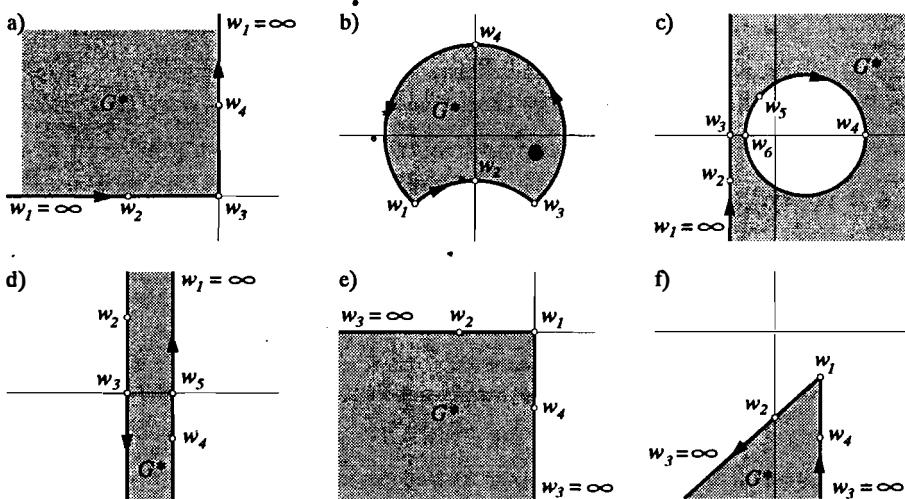
7.20. Područje G određujemo tako da preslikamo odgovarajući broj točaka s ruba područja G (po tri točke sa svakog kružnog luka). Jednadžbu ruba područja G^* možemo izvesti znajući preslikane točke, no ona nije nužna za skiciranje područja G^* . Rezultati su skicirani na slici 15.4.a-f. A. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$, $z_4 = i$; $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = -1$, $w_4 = -i$; $G^* = \{|w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$, slika 15.4.a. B. $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$; $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, $w_3 = 1$; $G^* = \{|w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$, slika 15.4.b. C. $z_1 = 1$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = \infty$, $z_4 = i$, $z_5 = 0$; $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_3 = 1$, $w_4 = 1+i$, $w_5 = \infty$; $G^* = \{|w - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} w < 1\}$, slika 15.4.c. D. $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = 1$, $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_5 = i$, $z_6 = \frac{1}{2}i$; $w_1 = \infty$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1$, $w_4 = 1-i$, $w_5 = -i$, $w_6 = -2i$; $G^* = \{|w + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i| > \sqrt{2}/2, \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w < 0\}$, slika 15.4.d. E. $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_5 = i$, $z_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $w_1 = -i$, $w_2 = -1$, $w_3 = i$, $w_4 = -1+2i$, $w_5 = \infty$, $w_6 = -1-2i$; $G^* = \{|w| > 1, \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w < 1, \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w < 1\}$,

slika 15.4.e. F. $z_1 = -1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = i$, $z_4 = -\frac{1}{2} + i$, $z_5 = -1 + i$, $z_6 = -1 + \frac{1}{2}i$; $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$, $w_4 = 2 + i$, $w_5 = 1 + i$, $w_6 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$; $G^* = \{|w - \frac{1}{2} - i| > \frac{1}{2}, \operatorname{Im} w < 1, \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w > 1\}$, slika 15.4.f.



Slika 15.4.

7.21. A. $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = i$, $w_1 = \infty$, $w_2 = -1$, $w_3 = 0$, $w_4 = i$; $G^* = \{\operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w > 0\}$, slika (15.5.a). B. $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = i$, $w_1 = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$, $w_2 = -\frac{1}{2}i$, $w_3 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$, $w_4 = i$; $G^* = \{|w| < 1, |w + \frac{5}{4}i| > \frac{3}{4}\}$, slika (15.5.b). C. $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = 2$, $z_5 = 2i$, $z_6 = -2$, $w_1 = \infty$, $w_2 = -1 - i$, $w_3 = -1$, $w_4 = 2$, $w_5 = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$, $w_6 = -\frac{2}{3}$; $G^* = \{|w - \frac{2}{3}| > \frac{4}{3}, \operatorname{Re} w > -1\}$, slika (15.5.c). D. $z_1 = 0$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2 + 2i$, $z_5 = -4$, $w_1 = \infty$, $w_2 = i$, $w_3 = 0$, $w_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $w_5 = \frac{1}{2}$; $G^* = \{0 < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\}$.



Slika 15.5.

slika (15.5.d). E. $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = 1$, $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_1 = 0$, $w_2 = -1$, $w_3 = \infty$, $w_4 = -i$; $G^* = \{\operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w < 0\}$, slika (15.5.e). F. $z_1 = i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = 1$, $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $w_2 = -i$, $w_3 = \infty$, $w_4 = \frac{1}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2}i$, $G^* = \{\operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w > 1, \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\}$, slika (15.5.f).

7.22. A. $w = (1+i) \frac{z+i}{z-1}$, $G^* = \{|w-1| > 1\}$, vanjskina kruga. B. $w = \frac{z-i}{z+i}$, $G^* = \{\operatorname{Im} w < 0\}$, donja poluravnina. C. $w = 2i \frac{z-1}{z+1}$, $G^* = \{|w| < 2\}$, krug.

7.23. A. $w = 2z$, $G^* = \{|w-2| < 2\}$. B. $w = \frac{2z-4}{z-1}$, $G^* = \{|w-2| > 2\}$. C. $w = \frac{2iz}{z-2}$, $G^* = \{\operatorname{Im} w < 0\}$.

7.24. Preslikavanje nije jednoznačno, svaki izbor točaka sa rubova područja G i G^* će dati odgovarajuću Möbiusovu transformaciju. Mi ćemo odabrat po mogućnosti što jednostavniji izbor. A. $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$; $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = \infty$ daje $w = \frac{(1+i)z+1-i}{z+1}$. B. $z_1 = 0$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -2$; $w_1 = 0$, $w_2 = -i$, $w_3 = \infty$; $w = \frac{-z}{z+2}$. C. $z_1 = 3$, $z_2 = 1+2i$, $z_3 = -1$; $w_1 = 1+i$, $w_2 = 2i$, $w_3 = -1+i$; $w = \frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2} + i}{(i-1)z + 2 - 4i}$. D. $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1$, $z_3 = -i$; $w_1 = 1$, $w_2 = -1-2i$, $w_3 = -3$; $w = \frac{(i-1)z + 2 - 4i}{(1-i)z + 2i}$.

7.25. A. Po Zadatku 7.6, tražena Möbiusova transformacija ima oblik $w = e^{i\varphi} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}z_0} = e^{i\varphi} \frac{2z-1}{2-z}$, gdje je $\varphi \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Npr. za $\varphi = 0$, $w = \frac{2z-1}{2-z}$. B. Inverzna transformacija $z = S^{-1}(w)$ preslikava $w_0 = -\frac{1}{2}$ u $z_0 = 0$, i ima oblik $z = e^{i\varphi} \frac{w-w_0}{1-w\bar{w}_0} = e^{i\varphi} \frac{2w+1}{w+2}$. Odavde $w = \frac{-2z+e^{i\varphi}}{z-2e^{i\varphi}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ proizvoljan. C. Usporedi s Zadatkom 7.11. Neka S_1 preslikava krug $\{|z| < 1\}$ na jedinični krug, tako da bude $S_1(\frac{1}{2}i) = 0$, i neka S_2 preslikava krug $\{|w| < 1\}$ na jedinični krug, tako da vrijedi $S_2(-\frac{1}{2}) = 0$. Tada je tražena transformacija oblika $S = S_2^{-1} \circ S_1$. Vrijedi $S_1(z) = e^{i\varphi_1} \frac{2z-i}{iz+2}$, $S_2 = e^{i\varphi_2} \frac{2w+1}{w+2}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Odavde $\frac{2w+1}{w+2} = e^{i\varphi} \frac{2z-i}{iz+2}$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in \mathbb{R}$, proizvoljan. Rješavanjem po w dobivamo traženo preslikavanje: $w = S(z) = \frac{(-4e^{i\varphi} + 2i)z + 2 + 2ie^{i\varphi}}{(2e^{i\varphi} - 2i)z - 4 - 2ie^{i\varphi}}$. Specijalno, za $\varphi = \pi/2$ dobivamo najjednostavnije: $w = iz$. D. Na isti način kao u prošlom primjeru, $e^{i\varphi} \frac{3w-i}{iw+3} = \frac{2z+i}{-iz+2}$, tj. $w = \frac{(6+e^{i\varphi})z+3i+2ie^{i\varphi}}{(-2i-3ie^{i\varphi})z+1+6e^{i\varphi}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ proizvoljan. E. Opći oblik Möbiusove transformacije koja preslikava točku $\frac{1}{2}$ u $\frac{1}{2}$ (i jedinični krug u jedinični krug) dobivamo kao u prošla dva primjera, iz $e^{i\varphi} \frac{2w-1}{-w+2} = \frac{2z-1}{-z+2}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ proizvoljan. φ ćemo odrediti tako da bude zadovoljen uvjet $\arg w'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Prijе nego što odredimo w , derivirat ćemo gornju relaciju: $e^{i\varphi} \frac{3w'}{(-w+2)^2} = \frac{3}{(-z+2)^2}$. Uvrš-

tavanje $z = w = \frac{1}{2}$ daje $w'(\frac{1}{2}) = e^{-i\varphi}$ i odavde $\varphi = -\arg w'(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. Dobivamo $-i \frac{2w-1}{-w+2} = \frac{2z-1}{-z+2}$, tj. $w = \frac{(4i-1)z+2-2i}{(2i-2)z+4-i}$.

7.26. A. Po Zadatku 7.7, preslikavanje ima oblik $w = e^{i\varphi} \frac{z-i}{z+i}$. Odredimo φ tako da bude $\arg w'(i) = \pi$. Vrijedi $w'(i) = \frac{1}{2} \cdot e^{i(\varphi+3\pi/2)}$ i zato je $\varphi = -\pi/2$. Dakle, $w = \frac{-iz-1}{z+i}$. B. Preslikajmo oba područja G i G^* na jedinični krug $\{|p| < 1\}$, tako da se točke z_0 i w_0 preslikaju u točku $p_0 = 0$. (Vidi zadatak 7.11.) Rezultat: $\frac{w-w_0}{1-w\bar{w}_0} = e^{i\alpha} \frac{i(z-z_0)}{z-\bar{z}_0}$. C. Na isti način kao u primjeru B.; $w = -\frac{z}{z-2}$. D. $\frac{w-w_0}{w-\bar{w}_0} = e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$. E. Preslikavanje možemo dobiti kao kompoziciju triju Möbiusovih transformacija: Homotetije S_1 s faktorom $1/2$, koja krug steže na jedinični, preslikavanja S_2 koje prevodi jedinični krug $\{|p| < 1\}$ u gornju poluravninu $\{\operatorname{Im} q > 0\}$, te rotacije S_3 koja gornju poluravninu prevodi u desnu poluravninu. Pri tom moramo pripaziti da bude $S_2(0) = 1$. Jednadžbe preslikavanja glase: $p = S_1(z) = \frac{z}{2}$, $p = S_2^{-1}(q) = e^{i\varphi} \frac{q-i}{q+i}$, $w = S_3(q) = -iq$. Odavde dobivamo $\frac{w-1}{w+1} = e^{-i\varphi} \frac{z}{2}$. Kut φ možemo odrediti tako da bude $\arg w'(0) = \pi/2$. Rezultat: $w = \frac{2+iz}{2-iz}$. F. $\frac{w-3}{16-3w} = e^{i\alpha} \cdot \frac{z-1}{8-2z}$. G. $w = \frac{2z-4+2i}{iz+2-2i}$.

7.27. A. $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ daje $S'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$. B. Neka su $S_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $S_2(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$. Vrijedi $S_1 \circ S_2(z) = \frac{(a\alpha+b\beta)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)}$. C. Ukoliko je $ad-bc \neq 0$, tada je Möbiusova transformacija injektivna funkcija, iz $S(z_1) = S(z_2)$, tj. $\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$ sređivanjem slijedi $(ad-bc)(z_1-z_2) = 0$ i odavde $z_1 = z_2$. Preslikavanje je surjekcija, za proizvoljan $w \in \mathbb{C}$ iz $S(z) = w$ slijedi $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$. D. Po gornjem je $S^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$ i to je Möbiusova transformacija.

7.28. Vrijedi npr. $(S_3 \circ S_5)(z) = S_3(S_5(z)) = 1 - S_5(z) = 1 - \frac{z-1}{z} = \frac{1}{z} = S_2(z)$. Kompletna tablica množenja glasi

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_2	S_2	S_1	S_4	S_3	S_6	S_5
S_3	S_3	S_5	S_1	S_6	S_2	S_4
S_4	S_4	S_6	S_2	S_5	S_1	S_3
S_5	S_5	S_3	S_6	S_1	S_4	S_2
S_6	S_6	S_4	S_5	S_2	S_3	S_1

Odavde je, npr. $S_4^{-1} = S_5$, $S_6^{-1} = S_6$, itd.

7.31. A. $S_{\alpha A}(z) = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d} = \frac{az + b}{cz + d} = S_A(z)$. B. Račun daje $S_A \circ S_B(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} = S_{AB}(z)$. C. Vrijedi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ c & a \end{bmatrix} =: \frac{1}{\det A} B$, i zato, po svojstvu A, $S_{A^{-1}}(w) = S_B(w) = \frac{dw - b}{-cw + a} = (S_A)^{-1}(w)$.

7.32. A. Označimo $f_2 := f(\alpha; z_0)$, $f_1 := f(\beta; z_0)$ i stavimo $w = f_1(z)$, $h = f_2(w)$. Tada je $h = (f_2 \circ f_1)(z)$ i vrijedi

$$\frac{1}{h - z_0} = \frac{1}{w - z_0} + \beta = \frac{1}{z - z_0} + \alpha + \beta.$$

Zato je $h = f(\alpha + \beta; z_0)$. Druga je tvrdnja očigledna. Preslikavanje $\alpha \mapsto f(\alpha, z_0)$ je izomorfizam grupe $(C, +)$ i $(f(\cdot; z_0), \circ)$.

7.33. Uz iste oznake, vrijedi

$$\frac{h - z_1}{h - z_2} = \lambda \frac{w - z_1}{w - z_2} = \lambda \mu \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Zato je $h = g(\lambda \mu; z_1, z_2)$. Sada je pridruživanje $\lambda \mapsto g(\lambda; z_1, z_2)$ izomorfizam multiplikativne grupe $(C \setminus \{0\}, \cdot)$ i grupe $(g(\cdot; z_1, z_2), \circ)$.

7.34. Ako je $\frac{S(z) - z_1}{S(z) - z_2} = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}$, tada vrijedi $S = g(\lambda; z_1, z_2)$ i zato $S^n = g(\lambda^n; z_1, z_2) = g(1; z_1, z_2)$. Međutim, $g(1; z_1, z_2)$ je identiteta, stoga je $S^n = I$. Time je dokazana dovoljnost. Neka je sada $S^n = I$. Tvrdimo da S mora biti oblika $S = g(\lambda; z_1, z_2)$ za neki λ za kojeg je $\lambda^n = 1$. Naime, ako S ima tri fiksne točke, tada je $S = I$ i stoga $S = g(1; z_1, z_2)$. Ako pak S ima jednu fiksnu točku, tada je $S = f(\alpha, z_1)$ i stoga $S^n = f(n\alpha; z_1)$ te ne može biti $S^n = I$. Zato S mora imati dvije fiksne točke, z_1 i z_2 i pri tom je $S = g(\lambda; z_1, z_2)$. Kako je $I = S^n = g(\lambda^n; z_1, z_2)$, to mora biti $\lambda^n = 1$.

§ 9

9.16. A. $w = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$. B. $w = \left(i \frac{1+z}{1-z} \right)^{2/3}$. E. $w = - \left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i} \right)^{3/2}$. F. $w = - \left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i} \right)^3$.

9.17. A. Funkcija Žukovskog $t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ preslikava gornji polukrug u donju poluravninu. Pri tom točke $(-1, 0, 1)$ prelaze redom u točke $(-\infty, 1)$. Sada je dovoljno Möbiusovom transformacijom preslikati donju poluravninu u gornju, tako da trojka $(-1, \infty, 1)$ prijeđe u trojku $(0, 1, \infty)$. Ta transformacija glasi $w = \frac{t+1}{t-1}$. Rješenje je kompozicija ovih dvaju preslikavanja: $w = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 2z + 1}$. Ovo se preslikavanje dade napisati u obliku $w = \left(\frac{z+1}{-z+1} \right)^2$. Preslikaj stoga područje s pomoću kompozicije preslikavanja $t = \frac{z+1}{-z+1}$ i $w = t^2$. B. Preslikavanje je kompozicija funkcije Žukovskog $t = dr12(z + \frac{1}{z})$ te simetrije $w = -t$ (Möbiusove transformacije) koja će preslikati točke $(-1, \infty, 1)$ u $(1, \infty, -1)$. Rezultat $w = -\frac{1}{2}(z + \frac{5}{1}z)$.

9.18. B. $w = \frac{2z^2 + 3iz + 2}{2z^2 - 3iz + 2}$. C. $w = \frac{2z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i}$.

9.19. A. Pravci $x = C$ preslikavaju se u familiju hiperbola $\frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\sin^2 C} = 1$ s žarištim u točkama -1 i $+1$, pravci $y = C$ u familiju elipsi $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1$ s istim žarištim. B. Rezultat su identične dvije familije kao u primjeru A, međutim, sada se pravci $x = C$ preslikavaju u elipse, a pravci $y = C$ u hiperbole. C. Familija kružnih luka koja spajaju točke $+i$ i $-i$ na imaginarnoj osi, s jednadžbama $(u-a)^2 + v^2 = 1 + a^2$ ($a = \operatorname{ctg} 2C$); te familija Apolonijevih kružnica $u^2 + (v-b)^2 = b^2 - 1$ ($b = \operatorname{cth} 2C$).

9.20. A. Gornja poluravnina. B. $w \notin (-\infty, 0]$. C. Prsten $1 < |w| < e$ s razrezom duž intervala $[1, e]$. D. Gornji polukrug $\{|w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$. E. Pruga $\{0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. F. Pruga $\{-2\pi < \operatorname{Im} w < 0\}$. G. Polupruga $\{-2\pi < \operatorname{Im} w < 0, \operatorname{Re} w < 0\}$.

9.21. A. Gornja poluravnina $\{v > 0\}$. B. Četvrti kvadrant $\{u > 0, v < 0\}$. C. Desna poluravnina s razrezom duž intervala $[0, 1]$: $\{u > 0, w \notin [0, 1]\}$. D. Cijela ravnina s razrezom duž zraka $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ na realnoj osi. E. Isto područje kao u D. F. Gornja poluravnina. G. Gornja poluravnina s razrezom duž intervala $[0, i]$ na imaginarnoj osi. H. $w \notin (-\infty, 0] \cup [-i, i]$. I. $w \notin (-1, 1] \cup [0, +\infty)$. J. Pruga $\{-\pi/2 < u < \pi/2\}$. K. Polupruga $\{0 < u < \pi/2, v > 0\}$.

9.22. A. Zraka $\arg w = \pi/2$. B. Semikubna parabola $81v^2 = (1-u)(8+u)^2$. C. Jedinična kružnica $\{|w| = 1\}$ bez točke $w = -1$. D. Cijela ravnina s razrezom $w \notin (-\infty, 1]$. E. $\{|w| < 1, -\pi < \arg w < \pi/2\}$. F. Cijela ravnina s razrezom $w \notin [0, +\infty)$. G. $\{u > 1 - \frac{1}{4}v^2\}$.

9.23. A. Vanjština elipse $\{\frac{16}{25}u^2 + \frac{16}{9}v^2 > 1\}$. B. $\{u^2 - v^2 < 1\}$. C. $w \notin [-1, +\infty)$. D. Cijela kompleksna ravnina s razrezima duž intervala $[-1, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})]$ za $a > 0$, odnosno duž zraka $(-\infty, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}))$, $[-1, +\infty)$ za $a < 0$. E. $\{-\pi/2 < \arg w < 0\}$.

9.24. A. Isječak $\{-\pi < \arg w < -\pi/2\}$. B. Isječak $\{-\pi/4 < \arg w < \pi/4\}$. C. $\{|w| < 1, 0 < \arg w < \pi/2\}$. D. $\{w < -\sqrt{2}/2\}$. E. $\{|w| > 1, 9\pi/8 < \arg w < 11\pi/8\}$.

§ 10

10.12. Primjeni D'Alambertov ili Cauchyjev kriterij. A. 0 B. ∞ . C. 2. D. 0. E. $\frac{1}{4}$. F. $1/e$. G. 1. H. 1. I. 1. J. $1/a$ za $|a| > 1$; 1 za $|a| \leq 1$. K. $1/k^k$. L. 1.

10.13. Primjeni D'Alambertov ili Cauchyjev kriterij. A. 1. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. ∞ . E. 1. F. ∞ . G. 1. H. $1/e$.

10.14. Može se pokazati da red $\sum c_n z^n$ konvergira apsolutno na kružnici $|z| = R$. Naime, iz uvjeta slijedi

$$|c_{n_0+k}| \leq \frac{|c_{n_0}|}{R^k \left(1 + \frac{\alpha}{n_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{\alpha}{n_0+k-1}\right)}.$$

Odavde dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n \leq C + |c_{n_0}| R^{n_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_0(n_0+1)\cdots(n_0+k-1)}{(n_0+\alpha)(n_0+\alpha+1)\cdots(n_0+\alpha+k-1)}.$$

Ovaj pak red konvergira, po Raabeovom kriteriju.

10.15. A i B rješavamo zajedno. Neka je

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} \cdot r^{2n+1}$$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} \cdot r^{2n+1}$$

Odavde

$$A + iB = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

gdje smo stavili $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Oduzimajući redove za $\ln(1+z)$ i $\ln(1-z)$, dobivamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$. Zato je

$$\begin{aligned} A + iB &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln \frac{1+r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1-r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(i \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right| + i \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

i odavde slijedi rezultat. C i D se dobivaju analogno.

10.16. A. Po rezultatu zadatka 10.15. C. i D., red konvergira u svim točkama kružnice $|z|=1$, osim u točki $z=1$.

10.17. A. $\sqrt[k]{R}$. B. R^k . C. $R/2$. D. ∞ . E. 0. F. R .

10.20. A. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{3n}$. Iskoristi Zadatak 10.6. B. Pomnožimo brojnik i nazivnik sa $1-z$. Dobivamo $\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+1} = 1-z+z^4-z^5+z^8-\dots$

C. Rastavi na parcijalne razlomke. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3}(-1)^{n+1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{-(n+1)} \right] \cdot z^n$. D. Iskoristi stav oblika $-\frac{z}{5} \cdot \frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{20} \cdot \frac{1}{1-z^2/4}$. Rezultat: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} \left((-1)^{n+1} - 4^{-(2n+1)} \right) \cdot z^{2n+1}$.

E. Vrijedi $(\operatorname{arsh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$. Red dobivamo integriranjem članova binomnog reda $(1+z^2)^{-1/2}$. Rezultat: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. F. Funkcija se dade napisati u obliku $\ln 2 + \ln(1-z) + \ln(1-\frac{1}{2}z)$. $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n n} \right] \cdot z^n$. G. Binomni red.

$\sqrt{z+i} = \sqrt{i} \cdot (1-iz)^{1/2}$. Po uvjetu je $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n i^n \cdot z^n$.

H. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$.

10.21. A. Prije razvijanja u Taylorov red, funkciju dovodimo na oblik $f(z) = \sin[3(z+1)-4] = \sin 3(z+1) \cdot \cos 4 - \cos 3(z+1) \cdot \sin 4$ i zatim iskoristimo red za sinus i kosinus funkciju. B. Vrijedi $\operatorname{ch}^2 z = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2z)$. Odavde slijedi rezultat $f(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} \right)$.

z^{2n}). C. $f(z) = \cos[(z - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos(z - \frac{\pi}{4}) - \sin(z - \frac{\pi}{4}) \right)$. Sada razvijemo sinus i kosinus funkciju. D. $f(z) = \ln 4 + \ln \left(1 - \frac{z+1}{4} \right) = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{(z+1)^n}{n \cdot 4^n}$.

10.22. A. Funkciju napišemo u obliku $f(z) = e^{z \ln(1+z)}$. Deriviravši ju tri puta, dobivamo $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = -3$. Zato prva tri člana u Maclaurinovom razvoju glase $f(z) = 1 + z^2 - z^3/2 + \dots$ B. Množenjem redova dobivamo $e^z \cdot \ln(1+z) = z + z^2/2 + z^3/3 + \dots$ C. Napišimo funkciju u obliku $\frac{z}{\ln(1+z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ Odavde slijedi identitet

$$z \equiv c_0 z + (c_1 - \frac{c_0}{2}) z^2 + (c_2 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{3}) z^3 + \dots$$

Iz jednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo rekurzivne relacije za koeficijente c_n : $c_0 = 1$, $c_1 = c_0/2 = 1/2$, $c_2 = c_1/2 - c_0/3 = -1/12$ itd. Dakle, $f(z) = 1 + z/2 - z^2/12 + \dots$

D. Red za funkciju arkus tangens dobivamo integriranjem reda potencija funkcije $\frac{1}{1+z^2}$,

$\arctg z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. Odavde, postupajući kao u prošlom primjeru, dobivamo

$$\frac{z}{\arctg z} = 1 + \frac{1}{3} z^2 + \frac{14}{45} z^4 + \dots$$

E. Na isti način, $f(z) = 1 - \frac{1}{6} z^2 - \frac{17}{360} z^4 + \dots$

F. Deriviranjem, $f(z) = 1 - z + z^2 - \dots$ G. $f(z) = \ln 2 + z/2 + z^2/8 + \dots$ H. $\sqrt{\cos z} = 1 - \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{96} z^4 - \dots$

§ 11

11.7. A. $f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$. B. $f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-1/z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}$. C. $f(z) = \frac{1}{2(z-1)}$.

$\frac{1}{1+(z-1)/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$. D. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1+2/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{(z-1)^{n+2}}$.

E. Funkciju rastavljamo na proste razlomke: $f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1}$ i zatim svaki od pribrojnika razvijamo po potencijama od $z-2$. Kao rezultat dobivamo red $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$. F. $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-1-i)^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1-i)^n}{(2+i)^{n+1}}$.

11.8. A. $f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$, $z \in D_1$. Na području D_2

vrijedi $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}$. B. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{2^{n+1}}$,

$z \in D_1$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n + n+1}{z^{n+1}}$, $z \in D_2$. C. $f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i(z-i)}$.

$\frac{1}{1+(z-i)/(2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$. D. $f(z) = -\frac{1}{27} \left\{ 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(z-1)^{n+2}} + \right.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{(-1)^n}{2^{2n+3}} \right] (z-1)^n \}. \text{ E. } f(z) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z^2-1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-4)^n}{z^{2n+2}},$$

$2 < |z|$. F. $f(z) = \frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}$, $1 < |z| < 2$.

11.9. A. $f(z) = \frac{1-\cos 2z}{2z^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n-1} z^{2n-3}}{(2n)!}$. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^{n-2}}{n!}$. C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{4n-5}}{(2n)!} = \frac{1}{2z} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^7}{6!} - \dots$. D. $\frac{2}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots$. E. $f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \cdot e^z = \left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \right) \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) = \frac{1}{z} + 2 + \frac{5z}{2} + \frac{8z^2}{3} + \dots$. F. $f(z) = \left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots \right) \left(z - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \frac{5}{6}z^4 + \frac{101}{120}z^5 + \dots$

11.10. A. Potrebno je z^2 rastaviti po potencijama od $z-1$. Dobivamo $f(z) = [(z-1)^2 + 2(z-1) + 1] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$ i rezultat je umnožak ovih dva ju izraza. Kako je $z=1$ jedini singularitet, područje konvergencije je $0 < |z-1|$. B. Rezultat je umnožak dvaju redova: $\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right)$, a područje konvergencije $\{z \neq 0\}$.

11.11. A. Točka $z_0 = 0$ je bitni singularitet. Funkcija se dade razviti u Laurentov red. Glavni dio će biti beskonačan. B. Singularitet $z_0 = 0$ je pol prvog reda. Glavni dio imati će jedan član. Vidi Zadatak 10.30.C. C. $z_0 = 0$ je singularitet, ali nije izolirani. Niz singulariteta $z_k = \frac{1}{k\pi}$ (polovi prvog reda) teže ka 0. Funkcija se ne da razviti u Laurentov red oko točke z_0 . D. Točka $z_0 = 0$ je razgranište. Funkcija se u okolini takve točke ne da razviti u Laurentov red. E. Točka $z_0 = \infty$ nije izolirani singularitet, pošto polovi $z_k = k\pi$ teže u ∞ . Funkcija se ne da rastaviti u Laurentov red u okolini točke ∞ (tj. po potencijama od $1/z$). Taj se razvoj ne smije brkati s razvojem funkcije u okolini točke $z=0$, koji postoji (Zadatak 10.30.A) pošto taj red konvergira samo na intervalu $0 < |z| < \pi$. Inače, funkcija se dade razviti u (Laurentov) red po potencijama od z unutar svakog prstena $k\pi < |z| < (k+1)\pi$, ali nijedan rastav neće konvergirati niti na jednom području oblika $R < |z|$, kako izgleda okolina točke ∞ . F. Kao i gore, ∞ nije izolirani singularitet. Jednadžba $\sin z = 2$ ima beskonačno mnogo rješenja čiji moduli teže u ∞ .

§ 12.

12.8. A. $z_1 = 0$, kratnosti 4, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$, kratnosti 1. B. $z_0 = 0$, kratnosti 4, $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, kratnosti 1. C. Nul točke dobivamo iz $z-i=0$ ili $\operatorname{sh} z=0$, tj. $z=\operatorname{Ar sh} 0$. Dobivamo redom točke i te $2k\pi i$, $(2k+1)\pi i$, sve kratnosti 1. D. $\operatorname{ch} z=1$ daje $z=\operatorname{Ar ch} 1=\ln(1+\sqrt{1^2-1})=2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Ispitajmo kratnost. Stavimo $g(z)=1-\operatorname{ch} z$. Vrijedi $g'(z)=-\operatorname{sh} z$, $g'(2k\pi i)=-i\sin(2k\pi)=0$. $g''(z)=-\operatorname{ch} z$, $g''(2k\pi i)=-\cos(2k\pi)=-1$. Stoga su sve nul točke kratnosti 2, osim točke 0 koja je kratnosti 1 (jer je i nul točka nazivnika).

12.9. A. Vrijedi $f'(z)=2\operatorname{sh} z-2z$, $f''(z)=2\operatorname{ch} z-2$. $f'''(z)=2\operatorname{sh} z$, $f^{IV}(z)=2\operatorname{ch} z$. Kako je $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, $f^{IV}(0)=2$, to je 0 nul točka kratnosti 4. B. $f(z)=z^5(1+z^3/2!+\dots)=z^5\varphi(z)$, $\varphi(0)=1$. Kratnost je 5. C. Izračunaj

f' , f'' , f''' . Kratnost je 3. D. $f(z) = \frac{1}{4z}(e^{2z} - 2 + e^{-2z}) = z(1 + z^2/3 + \dots)$. Kratnost je 1.

12.10. $z_0 = 0$ je nul-točka kratnosti 2, za funkciju $1/f(z) = z^2 - 2 - 2\cos z$, zato je pol drugog reda funkcije f . B. Odredimo prvih nekoliko članova Taylorovog reda za brojnik i nazivnik:

$$f(z) = \frac{z(1 + z^2/6 + \dots)}{z^2(1/2 - z/6 + \dots)} = \frac{\varphi(z)}{z}, \quad \varphi(0) = 2.$$

Zato je $z_0 = 0$ pol prvog reda. C. Pol drugog reda. D. Vrijedi $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = -\frac{1}{2}$ te je $z_0 = 0$ uklonjivi singularitet.

12.11. A. $z_1 = 0$, pol prvog reda, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, polovi drugog reda. B. $z_1 = 0$, pol drugog reda, $z_2 = -1$, pol prvog reda. C. $z_1 = 0$, bitni singularitet. D. $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, polovi prvog reda, $z_0 = 0$ uklonjivi singularitet. E. $z_1 = 1$ je bitni singularitet, $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$ ne postoji. F. $z_0 = 0$, pol trećeg reda; $z_k = -\ln 2 - i(\pi + 2k\pi)$, polovi prvog reda. G. $z_1 = -\pi$, pol prvog reda. H. $z_1 = -\pi$, bitni singularitet. Glavni dio Laurentovog reda je beskonačan. I. $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, bitni singularitet. Ne postoji limes funkcije u tim točkama. J. $\sin 1/z = 0$ daje $z_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. To su bitni singulariteti. Točka $z_0 = 0$ je singularitet, ali nije izolirani. K. $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, polovi prvog reda. L. $z_0 = 0$, bitni singularitet.

12.12. A. $z_k = \cos \frac{\pi+2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{6}$, $k = 0, 1, \dots, 5$, polovi prvog reda. B. $z = 0$, pol prvog reda, $z = 3i$, $z = -3i$, polovi trećeg reda. C. $z_k = \ln 2 + i\pi(2k+1)$, polovi prvog reda. D. $z = 0$, bitni singularitet. E. $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, polovi prvog reda, $z_0 = 0$, uklonjivi singularitet. F. $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, polovi prvog reda. G. $z_k = 1/(k\pi)$, polovi prvog reda, $z_0 = 0$ je njihovo gomilište i zato nije izolirani singularitet. H. $z = 0$, bitni singularitet. I. $z = 0$, pol drugog reda. Vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1 + z^2/6 + \dots}{-1/6 - z^2/120 - \dots} = \frac{\varphi(z)}{z^2}.$$

J. $z_k = 2/(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su bitni singulariteti. $z = 0$ je njihovo gomilište.

K. $z_k = 1/k\pi$, bitni singulariteti, $z = 0$ njihovo gomilište (neizolirani singularitet).

12.13. Razvij funkciju f u Laurentov red, a funkciju g u Taylorov red u okolini točke z_0 . Pomnoži dobivene redove. U prvom slučaju će dobiveni red imati konačan, a u drugom slučaju beskonačan glavni dio.

12.14. Funkcija $\sqrt[3]{z}$ ima dvije grane. Ako označimo sa $g_1(z) = \sqrt[3]{z}$ prvu granu, za koju je $\sqrt[3]{1} = 1$, tada za drugu granu vrijedi $g_2(z) = -g_1(z) = -\sqrt[3]{z}$. Analogno, funkcija $\sqrt[3]{z}$ ima tri grane. Neka je $h_1(z) = \sqrt[3]{z}$ ona grana za koju je $\sqrt[3]{1} = 1$. Tada su druge dvije $h_2(z) = e^{2\pi i/3}h_1(z) = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})h_1(z)$, $h_3 = e^{4\pi i/3}h_1(z) = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})h_1(z)$.

A. Postoje dvije grane, $f_1(z) = \frac{z}{1 - g_1(z-1)}$, $f_2(z) = \frac{z}{1 - g_2(z-1)}$. Za prvu vrijedi

$$f_1(z) = \frac{z}{1 - \sqrt[3]{z-1}} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{z-1}}{1 + \sqrt[3]{z-1}} = \frac{z(1 + \sqrt[3]{z-1})}{2 - z}$$

te je $z_0 = 2$ pol prvog reda za granu f_1 . Za drugu granu vrijedi $f_2(2) = 1$ i z_0 je regularna točka. B. Postoje tri grane: $f_j(z) = \frac{1}{1 - h_j(z)}$, $j = 1, 2, 3$. Vrijedi

$f_1(z) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{z}} = \frac{1 + \sqrt[3]{z} + (\sqrt[3]{z})^2}{1 - z}$ i $z_0 = 1$ je pol prvog reda funkcije f_1 . Grane f_2 i f_3 se regularne u toj točki. C. $z_0 = 1$ je bitni singularitet za prvu granu $f_1(z) = \sin \frac{1}{1 - g_1(z)}$, a regularna točka za drugu granu. D. $z_0 = 1$ je regularna točka

za granu $f_1(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{1+g_1(z)}$. Za drugu granu vrijedi $f_2(1) = \operatorname{ctg}(\infty)$. Pokažimo da je $z_0 = 1$ neizolirani singularitet. Uzmimo $z_k := (1 - \frac{1}{k\pi})^2$. Tada je $g_2(z_k) = -(1 - \frac{1}{k\pi})$ i te točke su singulariteti (polovi) funkcije f_2 . Točka $z_0 = 1$ je njihovo gomilište. E. Postoji šest grana ove funkcije: $f_{jk} = \frac{1}{g_j(z) - h_k(z)}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$. Točka $z_0 = 1$ je singularitet samo za granu f_{11} , i to pol prvog reda:

$$f_{11}(z) = \frac{1}{\sqrt{z} - \sqrt[3]{z}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}(\sqrt[6]{z} - 1)} = \frac{(\sqrt[6]{z})^5 + \dots + (\sqrt[6]{z}) + 1}{\sqrt[3]{z}(z - 1)}.$$

§ 13

13.14. A. Singulariteti su $z_1 = 0$, pol drugog reda, $z_2 = -1$, pol prvog reda. $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$, $\operatorname{Res}(f, -1) = -1$. B. Singulariteti su $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, polovi prvog reda. $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$, $\operatorname{Res}(f, i) = -1/2$, $\operatorname{Res}(f, -i) = -1/2$. C. Polovi prvog reda, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$. $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$, $\operatorname{Res}(f, 1) = -1/2$, $\operatorname{Res}(f, -1) = -1/2$. D. Singulariteti su $z_k = \cos(\pi + 2k\pi)/4 + i \sin(\pi + 2k\pi)/4$, $k = 0, 1, 2, 3$: polovi prvog reda. $\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{z^2}{(1+z^4)'} \Big|_{z=z_k} = \frac{1}{4z_k}$. E. $z = -1$, pol trećeg reda. $\operatorname{Res}(f, -1) = 1$.

F. $z_1 = i$, $z_2 = -i$, polovi trećeg reda. $\operatorname{Res}(f, i) = -\frac{3}{16}i$, $\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{3}{16}i$. G. $z_1 = -1$, pol drugog reda, $z_2 = 1$ pol trećeg reda. $\operatorname{Res}(f, -1) = -\frac{5}{16}$, $\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{5}{8}$. H. $z_1 = 0$, pol četvrtog reda, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$, polovi prvog reda. $\operatorname{Res}(f, 0)$ najlakše nalazimo razvijajući funkciju u Laurentov red oko $z_1 = 0$: $f(z) = \frac{1+z^8}{z^4} \frac{1}{4(1+z^2/4)} = \frac{1}{4}(z^4 + \frac{1}{z^4})(1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{16} - \frac{z^6}{64} + \dots)$. Vidimo da će Laurentov red sadržavati samo parne potencije. Zato $c_{-1} = \operatorname{Res}(f, 0) = 0$, $\operatorname{Res}(f, 2i) = -\frac{257}{64}i$, $\operatorname{Res}(f, -2i) = \frac{257}{64}i$. I. $z = 1$ pol n -tog reda. $\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^{2n}) = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n-1}$. J. $z_1 = 2$, pol prvog reda, $z_2 = 0$, pol n -tog reda. $\operatorname{Res}(f, 2) = 2^{-n} + 2^n$. Reziduum u točki z_2 ćemo odrediti razvojem u Laurentov red: $f(z) = \frac{1+z^{2n}}{z^n} \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}(z^{-n} + z^n) \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}(z^{-n} + z^n)(1 + \frac{z}{2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{z^n}{2^n} + \dots)$. Koeficijent uz z^{-1} glasi $-\frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} = -2^{-n} = \operatorname{Res}(f, 0)$.

13.15. A. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$: polovi prvog reda. $\operatorname{Res}(f, 0) = -1/2$, $\operatorname{Res}(f, 1) = 1 - \cos 1$. B. $z = 0$, pol drugog reda. $\operatorname{Res}(f, 0) = 9/2$, najlakše razvojem u Laurentov red. C. $z = 1$, pol drugog reda. Razvojem u red: $f(z) = \frac{\sin[\pi(z-1) + \pi]}{(z-1)^3} = -\frac{\sin \pi(z-1)}{(z-1)^3} = -\frac{1}{(z-1)^3} \left\{ \pi(z-1) - \frac{[\pi(z-1)]^3}{3!} + \frac{[\pi(z-1)]^5}{5!} - \dots \right\}$ te je $\operatorname{Res}(f, 1) = 0$. D. $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, polovi prvog reda. $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\frac{1}{(-1)^k}$. E. $z = 1$, bitni singularitet. $f(z) = \sin \frac{1}{1-z} = -\sin \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{3!(z-1)^3} - \dots$, $\operatorname{Res}(f, 1) = -1$. F. $e^z - 1 = 0$ daje $z = \ln 1 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, $z_k = 2k\pi i$, polovi prvog reda. $\operatorname{Res}(f, z_k) = 1$. G. $z = 2$, bitni singularitet. Razvojem u Laurentov red, $f(z) = [(z-2)+2]^4 \sin \frac{1}{z-2} =$

$$\{(z-2)^4 + 8(z-2)^3 + 24(z-2)^2 + 32(z-2) + 16\} \left\{ \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3!(z-2)^3} + \frac{1}{5!(z-2)^5} - \dots \right\}$$

slijedi $\text{Res}(f, 2) = 16 - \frac{24}{3!} + \frac{1}{5!} = 12 + \frac{1}{120}$. H. $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, polovi

prvog reda. $\text{Res}(f, z_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 \pi^2}$. I. $z = 0$, bitni singularitet. $f(z) = e^z e^{1/z} =$

$$(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots)(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots), \text{ Res}(f, 0) = c_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!3!} + \dots + \frac{1}{n!(n+1)!} + \dots$$

J. $z = 0$, bitni singularitet, $f(z) = -\frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$, $\text{Res}(f, 0) = 0$.

13.16. A. Vrijedi $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 = f(\infty)$ te je ∞ regularna točka. Po (13.11), $\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] = 0$ B. Na isti način, $\text{Res}(f, \infty) = 0$. C. Vrijedi

$$f(z) = \frac{\pi}{2}(1 + \cos \frac{2\pi}{z}) = z - \frac{\pi^2}{z} + \frac{(2\pi)^4}{2 \cdot 4! \cdot z^3} + \dots \text{ te je } \text{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = \pi^2.$$

D. $\text{Res}(f, \infty) = 0$. Parna funkcija u razvoju u Laurentov red neće sadržavati članove uz neparne potencije, zato je $c_{-1} = 0$. E. $\text{Res}(f, \infty) = 0$, zbog istog razloga. F. $z = \infty$ je bitni singularitet. Razvojem u Laurentov red,

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \sin z \frac{1}{(1 + 1/z^2)^2} = \frac{1}{z^4} (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots)(1 - \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^4} - \frac{4}{z^6} + \dots)$$

dobivamo $\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = \frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \dots$

13.17. A. Pol prvog reda, $\text{Res}(f, 0) = -1/6$. B. bitni singularitet, $\text{Res}(f, 0) = 0$, pošto je funkcija parna. C. Vrijedi

$$f(z) = \frac{z^3}{\left[\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right]^2} = \frac{1}{z} \frac{1}{\left[\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots \right]^2} = \frac{\varphi(z)}{z}$$

gdje je φ analitička u 0, $\varphi(0) = 4$. Zato je 0 pol prvog reda i $\text{Res}(f, 0) = \varphi(0) = 4$.

D. $f(z) = z^{n-3} \operatorname{ctg}^n z$. $z = 0$ je pol trećeg reda. Vrijedi $f(z) = \frac{1}{z^3} \left(\frac{\cos z}{\sin z/z} \right)^n =$

$\frac{1}{z^3} \varphi(z)$. Reziduum ćemo naći razvojem funkcije u Laurentov red. Imamo $f(z) =$

$$\frac{\varphi(0)}{z^3} + \frac{\varphi'(0)}{z^2} + \frac{\varphi''(0)}{2z} + \frac{\varphi'''(0)}{6} + \dots \text{ te je } \text{Res}(f, 0) = c_{-1} = \frac{1}{2} \varphi''(0).$$

Izračunajmo $\varphi''(0)$. Prikažimo funkciju φ u obliku $\varphi(z) = \left(\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \right)^n$, gdje je $\varphi_1(z) = \cos z$,

$$\varphi_2(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \text{ Vrijedi}$$

$$\varphi'(z) = n \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right)^{n-1} \frac{\varphi'_1 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi'_2}{\varphi_2^2}$$

$$\varphi''(z) = n(n-1) \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right)^{n-2} \left(\frac{\varphi'_1 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi'_2}{\varphi_2^2} \right)^2$$

$$+ n \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right)^{n-1} \frac{(\varphi''_1 \varphi_2 - \varphi'_1 \varphi''_2) \varphi_2 - (\varphi'_1 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi'_2) 2 \varphi_1 \varphi'_2}{\varphi_2^4}$$

Kako je $\varphi'_1 = -\sin z$, $\varphi''_1 = -\cos z$, $\varphi'_2 = -\frac{2}{3!}z + \frac{4}{5!}z^3 - \dots$, $\varphi''_2 = -\frac{2}{3!} + \frac{12}{5!}z^2 - \dots$,

to imamo $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi''_1(0) = -1$, $\varphi'_2(0) = 0$, $\varphi''_2(0) = -\frac{1}{3}$. Uvrštavanjem slijede-

di $\varphi''(0) = -\frac{2n}{3}$, te je $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}\varphi''(0) = -n/3$. E. Korištenjem trigonometrijskih identiteta, funkcija se dade svesti na oblik $f(z) = -2/z$. $\text{Res}(f, 0) = -2$. F. Transformirajmo funkciju na oblik $f(z) = \frac{\sin z - z \cos z}{\cos z(1 - \cos z)^2}$ i iskoristimo Taylorove redove:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots) - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots)z}{\cos z \left[1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots) \right]^2} \\ &= \frac{z^3 \left[(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + (-\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!})z^2 + \dots \right]}{z^4 \cos z \left[\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right]^2} = \frac{1}{z} \varphi(z) \end{aligned}$$

i vrijedi odavde $\varphi(0) = 4/3$. Zato je $z = 0$ pol prvog reda, $\text{Res}(f, 0) = \varphi(0) = 4/3$.

13.18. Prikažimo funkciju kao produkt dvaju redova i izdvojimo član uz z^{-1} :

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp(\frac{xz}{2}) \exp(\frac{x}{2z}) \\ &= \left(1 + \frac{xz}{2} + \left(\frac{xz}{2} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{xz}{2} \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x}{2z} + \left(\frac{x}{2z} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{x}{2z} \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right). \end{aligned}$$

$$\text{Zato, } \text{Res}(f, 0) = c_{-1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{x}{2} \right)^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1}.$$

13.19. A. Funkcija ima dvije grane, $f_1(z) = \frac{z-2}{3+\sqrt{10-z}}$, $f_2(z) = \frac{z-2}{3-\sqrt{10-z}}$ (predznaci + i - sugeriraju načine na koji se određuju vrijednosti dvoznačne funkcije $\sqrt{}$). Vrijedi $f_1(1) = -1/6$, $f_2(1) = \infty$. $z_0 = 1$ je pol prvog reda za granu f_2 : $f_2(z) = \frac{(z-2)(3+\sqrt{10-z})}{z-1}$ te je $\text{Res}(f_2, 1) = -6$. B. $z_0 = 0$ je singularitet za granu f_2 koja se računa na način

$$f_2(z) = \frac{z}{-\sqrt{1-z^2}+1} = \frac{z(1+\sqrt{1-z^2})}{1-(1-z^2)} = \frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}.$$

Vidimo da je z_0 pol prvog reda, $\text{Res}(f_2, 0) = 2$.

13.22. Razvijimo funkciju φ u Taylorov red, funkciju f u Laurentov red i izdvojimo član uz z^{-1} . Vrijedi

$$\begin{aligned} \varphi(z)f(z) &= \left(\varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + \dots \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + c_0 + c_1(z-a) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\text{Zato } \text{Res}(\varphi(z)f(z), a) = c_{-1}\varphi(a) + c_{-2}\frac{\varphi'(a)}{1!} + \dots + c_{-n}\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

13.23. A. Funkcija f ima prikaz $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, pri čemu je φ analitička i $\varphi(a) \neq 0$. Vrijedi $f'(z) = n(z-a)^{n-1} \varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)$. Zato je $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ i kako je drugi pribrojnik analitička funkcija u okolini točke a , to je $z = a$ pol prvog

reda, $\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = n$. B. Iz prikaza $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, na sličan način dobivamo $\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = -n$.

13.25. Izaberimo kružnicu dovoljno velikog polumjera da obuhvaća sve singularitete z_1, \dots, z_n funkcije f . Tada je

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

i odavde $\text{Res}(f, \infty) = -\sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$.

13.27. A. $z_1 = -1$, pol drugog reda, $z_2 = 2$, pol prvog reda koji nije obuhvaćen krivuljom C , $I = -4\pi i/9$. **B.** C obuhvaća $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, polove prvog reda. $I = 2\pi i \sin 1$.

C. $z_1 = 0$, pol trećeg reda; $z_2 = -1$, pol prvog reda. $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(f, -1) = -\frac{1}{e}$.

I. $I = \pi i(1 - \frac{2}{e})$. **D.** C obuhvaća samo $z_1 = 1$, pol prvog reda. $I = \frac{2}{3}\pi e^2 i$. **E.** C obuhvaća samo pol $z = i$ drugog reda, $I = \pi e^i(1 - i)/2$. **F.** Napišimo podintegralnu funkciju u obliku $f(z) = \frac{z \sin \pi z}{(z-1) \cos \pi z}$. $\cos \pi z = 0$ daje $\pi z = \text{Arccos} 0 = -i \ln(\pm i)$ i odavde $z_k = \pm \frac{1}{2} + 2k = \frac{1}{2} + l$, $l \in \mathbb{Z}$. To su nul-točke kratnosti 1 funkcije $\cos \pi z$, stoga i polovi prvog reda funkcije f . Točka $z = 1$ nije pol za f , već uklonjivi singularitet, jer je nul-točka brojnika. Krivulja C obuhvaća četiri singulariteta: točke $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. **I.** $I = -\frac{88}{15} i$.

13.28. $z = 1$: bitni singularitet. Iz razvoja $\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots$ slijedi $\text{Res}(f, 1) = c_{-1} = 1$ i $I = 2\pi i$. **B.** $z = -1$: bitni singularitet. Da bismo odredili Laurentov red, moramo transformirati funkciju na oblik $\sin \frac{z}{z+1} = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z+1} - \cos 1 \sin \frac{1}{z+1}$. Razvojem u Laurentov red dobivamo $\text{Res}(f, -1) = -\cos 1$, $I = -2\pi i \cos 1$. **C.** $z = 1$, bitni singularitet. Ovog puta pišemo $f(z) = [(z-1)+1] \sin(1 + \frac{2}{z-1}) = (z-1) \sin 1 \cos \frac{2}{z-1} + (z-1) \cos 1 \sin \frac{2}{z-1} + \sin 1 \cos \frac{2}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{2}{z-1}$. Iz razvoja u red slijedi $\text{Res}(f, 1) = -2 \sin 1 + 2 \cos 1$. $I = 4\pi i(\cos 1 - \sin 1)$. **D.** Singulariteti su nul-točke nazivnika, $\cos nz = 0$ daje $nz = \frac{\pi}{2} + k\pi$, tj. $z_k = \frac{\pi}{2n}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. To su polovi prvog reda. Vrijedi $\text{Res}(\operatorname{tg} nz, z_k) = -\frac{1}{n}$, za svaki k . Krivulja C obuhvaća singularitete $z_{-n}, z_{-n+1}, \dots, z_{n-2}, z_{n-1}$. Zato je $I = 2\pi i(-\frac{1}{n} \cdot 2n) = -4\pi i$.

13.29. A. Svi singulariteti podintegralne funkcije su polovi i nalaze se unutar područja integracije. Naime, $z^8 = 16$ daje $|z| = \sqrt{2} < 2$. Koristimo rezultat Zadatka 13.20. $I = 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k) = -2\pi i \text{Res}(f, \infty)$. Točka $z = \infty$ je regularna točka funkcije f , te je $\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] = 0$. Dakle, $I = 0$. **B.** Sada se singularitet $z = 3$ nalazi izvan krivulje C . Vrijedi $\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] = 0$,

$\text{Res}(f, 3) = \frac{1}{342}$. Zato je $I = 2\pi i \sum_{k=1}^5 \text{Res}(f, z_k) = 2\pi i [\text{Res}(f, \infty) - \text{Res}(f, 3)] = -\frac{\pi i}{171}$.

C. Singularne točke su polovi, koji svi leže unutar C . $I = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 0$.

D. Ponovo svi singulariteti leže unutar C . Kako je ∞ regularna točka za funkciju f , imamo $\text{Res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] = -\lim_{z \rightarrow \infty} z^6/(z^6 - 1) = -1$. Zato je $I = 2\pi i$.

13.30. A. Singulariteti su $z_1 = -1$, pol prvog reda i $z_2 = 0$, bitni singularitet. Vrijedi $\text{Res}(f, -1) = -1/e$. Razvojem u Laurentov red dobivamo $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \dots = \frac{1}{e} - \frac{1}{3}$. Zato je $I = -2\pi i/3$. B. Jedini singularitet je rješenje jednadžbe $\ln(z+3) = -2$, tj., $z = e^{-2} - 3$ i on leži izvan područja omeđenog krivuljom C . Zato je $I = 0$.

13.31. A. 1. B. 2. C. 5. D. 2.

13.32. A. Izabereti $f(z) = 5z$. Odgovor: 1. B. Na kružnici $|z| = 2$ je primjenjiv Rouchéov teorem na funkciju $f(z) = z^5$. Odgovor: 4.

13.33. A. 4. B. 0. C. 2. D. 3.

13.34. A. 2. B. 1. C. 4. D. n.

13.35. Neka je $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ zadani polinom. Dovoljno je pokazati da za dovoljno veliki $|z| = R$ vrijedi $|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| < |z^n| = R^n$. (To će biti ispunjeno ako je npr. $R > |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|$.) Tada je $|P_n(z) - z^n| < |z^n|$ za svaki z sa kružnicice $|z| = R$ i možemo primijeniti Rouchéov teorem.

§ 14

14.13. A. $2\pi/3$. B. $\pi/2$. C. $\frac{13}{45}\pi$. D. $(14\sqrt{2} - 5)\pi$.

14.14. A. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$. B. $\frac{2a\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}$. C. $\frac{2\pi}{a}$. D. $\frac{(2a+b)\pi}{[a(a+b)]^{3/2}}$.

14.15. A. $\frac{2\pi}{1-a^2}$. B. $\frac{1+a^4}{1-a^2}\pi$. C. Uputno je zamijeniti $\cos nx$ sa e^{inx} , tako da je $I = \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx} dx}{1-2a \cos x + a^2}$. Rezultat $\frac{2\pi a^n}{1-a^2}$. D. $I = 0$. Imaginarni dio gornjeg integrala.

14.16. A. Integral je realni dio integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cdot e^{i(nx - \sin x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x - i \sin x} \cdot e^{inx} dx.$$

Nakon supstitucije $z = e^{ix}$ dobivamo $I = \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{|z|=1} e^{1/z} \cdot z^{n-1} dz = \operatorname{Re} 2\pi \operatorname{Res}(F, 0)$,

gdje je $F(z) = z^{n-1} e^{1/z}$. Razvijanjem u Laurentov red, $I = 2\pi/n!$. B. Na sličan način, $I = \pi/n!$.

14.17. A. $\frac{5}{12}\pi$. B. π . C. $-\frac{1}{27}\pi$. D. $\pi/4$. E. $\pi/\sqrt{2}$. F. $2\pi/3$.

14.18. A. $\frac{\pi}{4a^2}$. B. $\frac{\pi}{16a^3}$. C. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16a}$. D. $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$. E. $\frac{2b^3 - 3ab^2 + a^3}{4ab^3(a^2 - b^2)}\pi$.

F. $\frac{(2n-2)!\pi}{((n-1)!)^2(2a)^{2n-1}}$.

- 14.19.** A. $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)$. B. $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1)$. C. $-\frac{\pi \sin 1}{e}$. D. $\frac{\pi \cos 2}{e^2}$.
 E. $\frac{\pi}{e^2}(\cos 4 - \sin 4)$. F. $\frac{3\pi}{16e^2}$. G. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\sqrt{3}/2} \sin \frac{1}{2}$. H. $\frac{\pi}{3}(4e^{-2} - e^{-1})$.
- 14.20.** A. $\frac{\pi}{2b}e^{-ab}$. B. $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. C. $\frac{\pi a}{4b}e^{-ab}$. D. $\frac{\pi(ab+1)}{4b^3}e^{-ab}$.
 E. $\frac{\pi(b^2+3b+3)}{16}e^{-b}$. F. $\frac{\pi(be^{-a}-ae^{-b})}{2ab(b^2-a^2)}$.
- 14.21.** A. $\pi(2\sin 2 - 3\sin 3)$. B. $\frac{\pi}{5}(\cos 1 - e^{-2})$. C. $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-6})$.
 D. $\pi(\frac{1}{2} - e^{-1})$.
- 14.22.** A. $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{3}e^{-a\sqrt{3}/2} \cos(a/2) + \sin a)$. B. $\frac{\pi}{2}(e^{-a} + \sin a)$. C. $\frac{\pi a}{2}$.
 D. $\pi(b-a)$. E. $\frac{\pi}{4b^4}[2 - (ab+2)e^{-ab}]$. F. $\frac{\pi}{2}(2e^{-ab} - 1)$. G. $\frac{\pi}{2}$. H. $\frac{\pi}{3}$.
- 14.23.** A. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6\sqrt[3]{2}}$. C. $\frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. D. $\frac{\pi}{2\cos(\pi p/2)}$. E. $\frac{\pi(1-p)}{4\cos(\pi p/2)}$.
 F. $\frac{\pi \sin \lambda p}{\sin \lambda \sin \pi p}$.
- 14.24.** A. $\frac{\pi}{\sin \pi p} \left(\frac{1}{2} - \frac{2^p}{2} + \frac{3^p}{6} \right)$. B. $\frac{\pi}{n! \sin \pi p} \left\{ \binom{n}{1} 1^p - \binom{n}{2} 2^p + \binom{n}{3} 3^p - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} n^p \right\}$.
- 14.25.** A. $\frac{\pi}{2a} \ln a$. B. $\frac{\pi}{2a} \left(\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4} \right)$. C. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4a\sqrt{a}}(2\ln a - \pi)$. D. $\frac{\pi}{2a\sqrt{a}}$.
- 14.26.** A. $\frac{\pi}{2n \cos \frac{\pi}{2n}}$. B. $\frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$. C. $\frac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin a \pi}$.
 D. $\frac{\pi(3\cos(a\pi/3) - \sqrt{3}\sin(a\pi/3))}{3\sin a \pi}$. E. $\frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}$. F. $\frac{\pi}{2 \operatorname{ch}(\pi a/2)}$.

LITERATURA

- [1] И.М. Ангилейко, Р.В. Козлова, *Задачи по теории функций комплексной переменной*, Вышэйшая школа, Минск, 1976.
- [2] М.А. Евграфов і ост., *Сборник задач по теории аналитических функций*, Наука, Москва, 1969.
- [3] А.Е. Грищенко, Н.И. Нагнибida, П.П. Настасиев, *Теория функций комплексного переменного*, Вища школа, Київ, 1986.
- [4] I. Ivanšić, *Funkcije kompleksne varijable. Laplaceova transformacija, skripta*, Elektrotehnički fakultet, Zagreb, 1978.
- [5] N. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza – Funkcije kompleksne varijable*, prvi svezak, Tehnička Knjiga, Zagreb, 1986.
- [6] М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, *Функции комплексного переменного – Операционное исчисление – Теория устойчивости*, Наука, Москва, 1971.
- [7] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Москва, 1958.
- [8] D.S. Mitrinović, *Kompleksna analiza*, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.
- [9] Е.Д. Соломенцев, *Функции комплексного переменного и их применение*, Высшая школа, Москва, 1988.
- [10] Л.И. Волковский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович, *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, Физматгиз, Москва, 1960.