

Особенности в данных



План

- В реальности случайные величины часто зависят друг от друга: поговорим как эту зависимость можно измерить



План

- В реальности случайные величины часто зависят друг от друга: поговорим как эту зависимость можно измерить
- На практике часто встречается нормальное распределение: поговорим про его свойства и как с ним работать



План

- В реальности случайные величины часто зависят друг от друга: поговорим как эту зависимость можно измерить
- На практике часто встречается нормальное распределение: поговорим про его свойства и как с ним работать
- Данные не бывают идеальными: поговорим про то, какие проблемы в них могут возникать и как с ними бороться



План

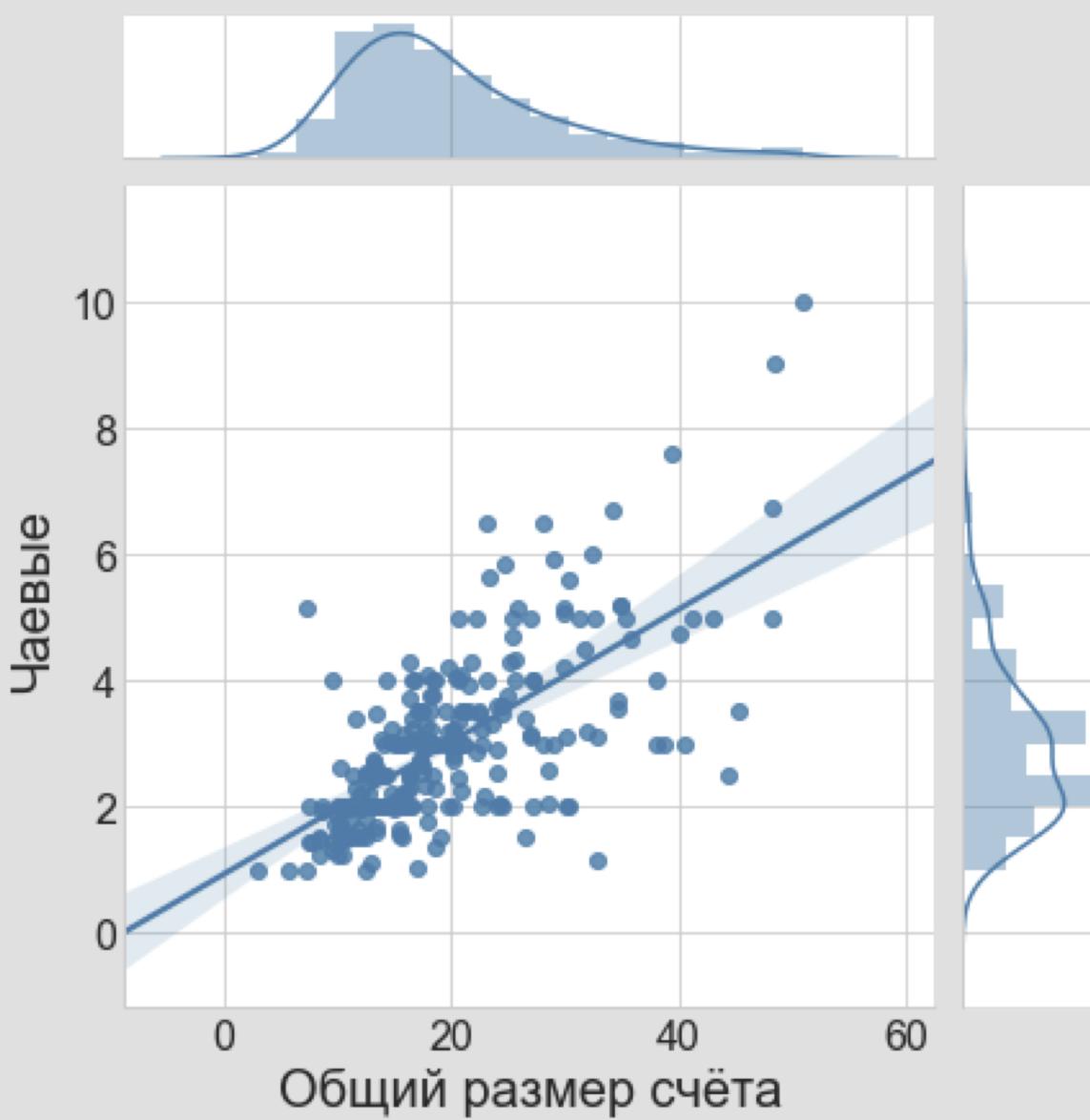
- В реальности случайные величины часто зависят друг от друга: поговорим как эту зависимость можно измерить
- На практике часто встречается нормальное распределение: поговорим про его свойства и как с ним работать
- Данные не бывают идеальными: поговорим про то, какие проблемы в них могут возникать и как с ними бороться
- В том числе о том, как описательные статистики помогают в этой борьбе



Зависимые и независимые случайные величины



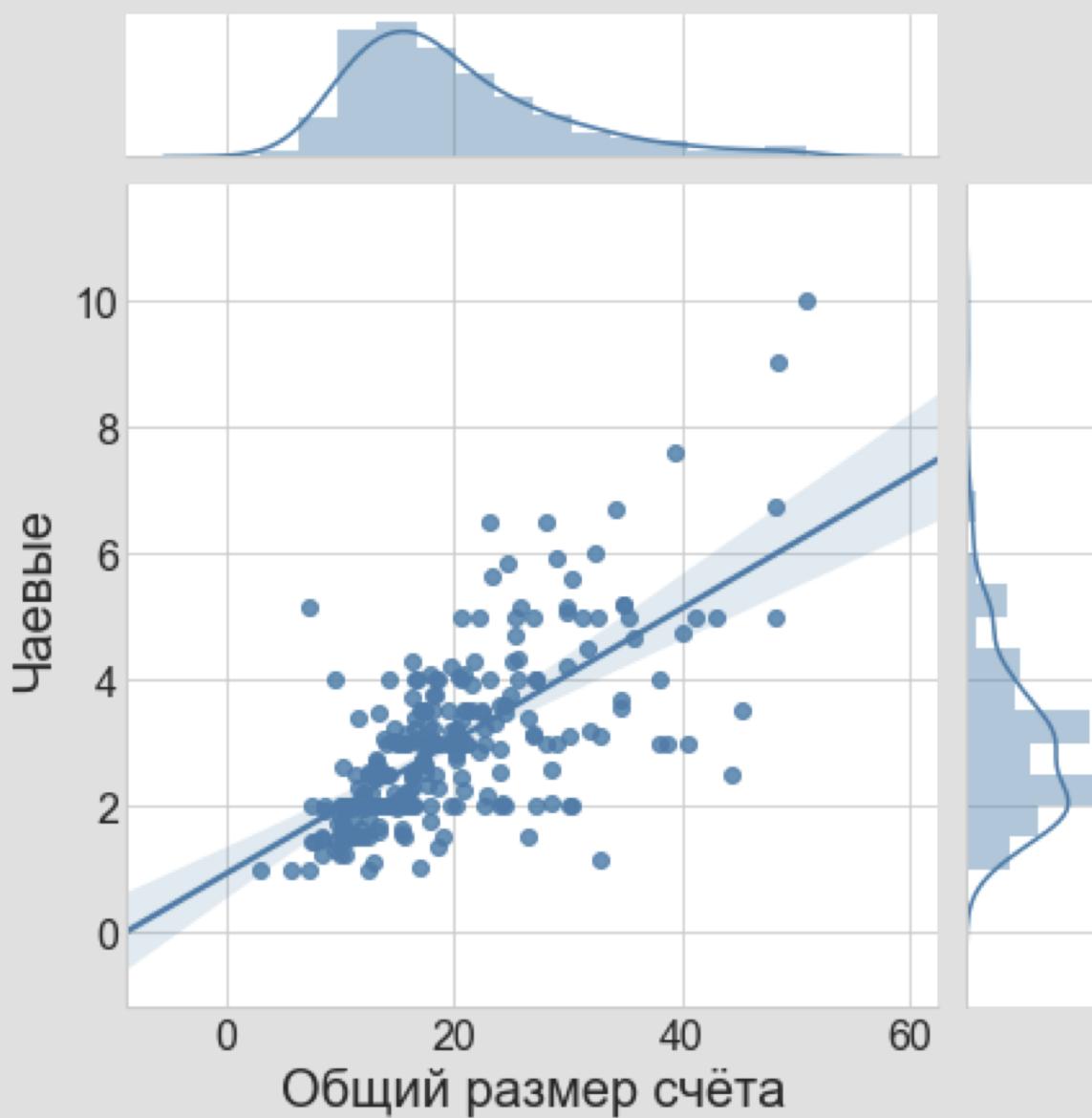
Зависимые случайные величины



- Случайные величины часто взаимосвязаны между собой



Зависимые случайные величины



- Случайные величины часто взаимосвязаны между собой
- Нужен какой-то способ измерять взаимосвязь между ними



Независимость

Говорят, что события A и B **независимы**, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$



Независимость

Говорят, что события A и B **независимы**, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Говорят, что случайные величины X и Y **независимы**, если

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) =$$

$$\mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$



Независимость

Говорят, что события A и B **независимы**, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Говорят, что случайные величины X и Y **независимы**, если

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) =$$

$$\mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Можно сформулировать это же определение в терминах плотностей:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$



Ковариация

Ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, вычисляется как

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$



Ковариация

Ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, вычисляется как

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

По аналогии с дисперсией, раскрыв скобки, получаем более простую формулу для вычисления:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] =$$



Ковариация

Ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, вычисляется как

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

По аналогии с дисперсией, раскрыв скобки, получаем более простую формулу для вычисления:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y - X \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \cdot Y + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \end{aligned}$$



Ковариация

Ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, вычисляется как

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

По аналогии с дисперсией, раскрыв скобки, получаем более простую формулу для вычисления:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y - X \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \cdot Y + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot Y) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \end{aligned}$$



Ковариация

Ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, вычисляется как

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

По аналогии с дисперсией, раскрыв скобки, получаем более простую формулу для вычисления:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y - X \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \cdot Y + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot Y) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \end{aligned}$$



Ковариация

Ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, вычисляется как

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

По аналогии с дисперсией, раскрыв скобки, получаем более простую формулу для вычисления:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y - X \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \cdot Y + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot Y) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

$$1. \ Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

$$2. \ Cov(a, b) = 0$$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

$$1. \ Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

$$2. \ Cov(a, b) = 0$$

$$3. \ Cov(a \cdot X, Y) = a \cdot Cov(X, Y)$$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(a, b) = 0$
3. $Cov(a \cdot X, Y) = a \cdot Cov(X, Y)$
4. $Cov(X + a, Y) = Cov(X, Y)$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

$$1. \ Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

$$2. \ Cov(a, b) = 0$$

$$3. \ Cov(a \cdot X, Y) = a \cdot Cov(X, Y)$$

$$4. \ Cov(X + a, Y) = Cov(X, Y)$$

$$5. \ Cov(X + Z, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Z, Y)$$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(a, b) = 0$
3. $Cov(a \cdot X, Y) = a \cdot Cov(X, Y)$
4. $Cov(X + a, Y) = Cov(X, Y)$
5. $Cov(X + Z, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Z, Y)$
6. $Cov(X, X) = Var(X)$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

7. Если случайные величины независимы,

$$Cov(X, Y) = 0$$



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

7. Если случайные величины независимы,

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

8. Обратное неверно. Если ковариация равна нулю, случайные величины могут быть зависимы.



Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

7. Если случайные величины независимы,

$$Cov(X, Y) = 0$$

8. Обратное неверно. Если ковариация равна нулю, случайные величины могут быть зависимы.
9. Если X и Y зависимы, тогда

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + Cov(X, Y)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$$



Корреляция Пирсона

Ковариация имеет размерность равную произведению размерностей случайных величин



Корреляция Пирсона

Ковариация имеет размерность равную произведению размерностей случайных величин

Пример: если X – рост, Y – вес, ковариация измеряется в рост · вес



Корреляция Пирсона

Ковариация имеет размерность равную произведению размерностей случайных величин

Пример: если X – рост, Y – вес, ковариация измеряется в $\text{рост} \cdot \text{вес}$

Это неудобно \Rightarrow вводится безразмерный коэффициент корреляции:



Корреляция Пирсона

Ковариация имеет размерность равную произведению размерностей случайных величин

Пример: если X – рост, Y – вес, ковариация измеряется в рост · вес

Это неудобно \Rightarrow вводится безразмерный коэффициент корреляции:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$



Корреляция Пирсона

Ковариация имеет размерность равную произведению размерностей случайных величин

Пример: если X – рост, Y – вес, ковариация измеряется в $\text{рост} \cdot \text{вес}$

Это неудобно \Rightarrow вводится безразмерный коэффициент корреляции:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

Коэффициент корреляции характеризует тесноту и направленность линейной связи между случайными величинами и принимает значение от -1 до 1 .



Выборочные аналоги:

Выборочная ковариация:

$$\widehat{Cov}(X, Y) = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)$$



Выборочные аналоги:

Выборочная ковариация:

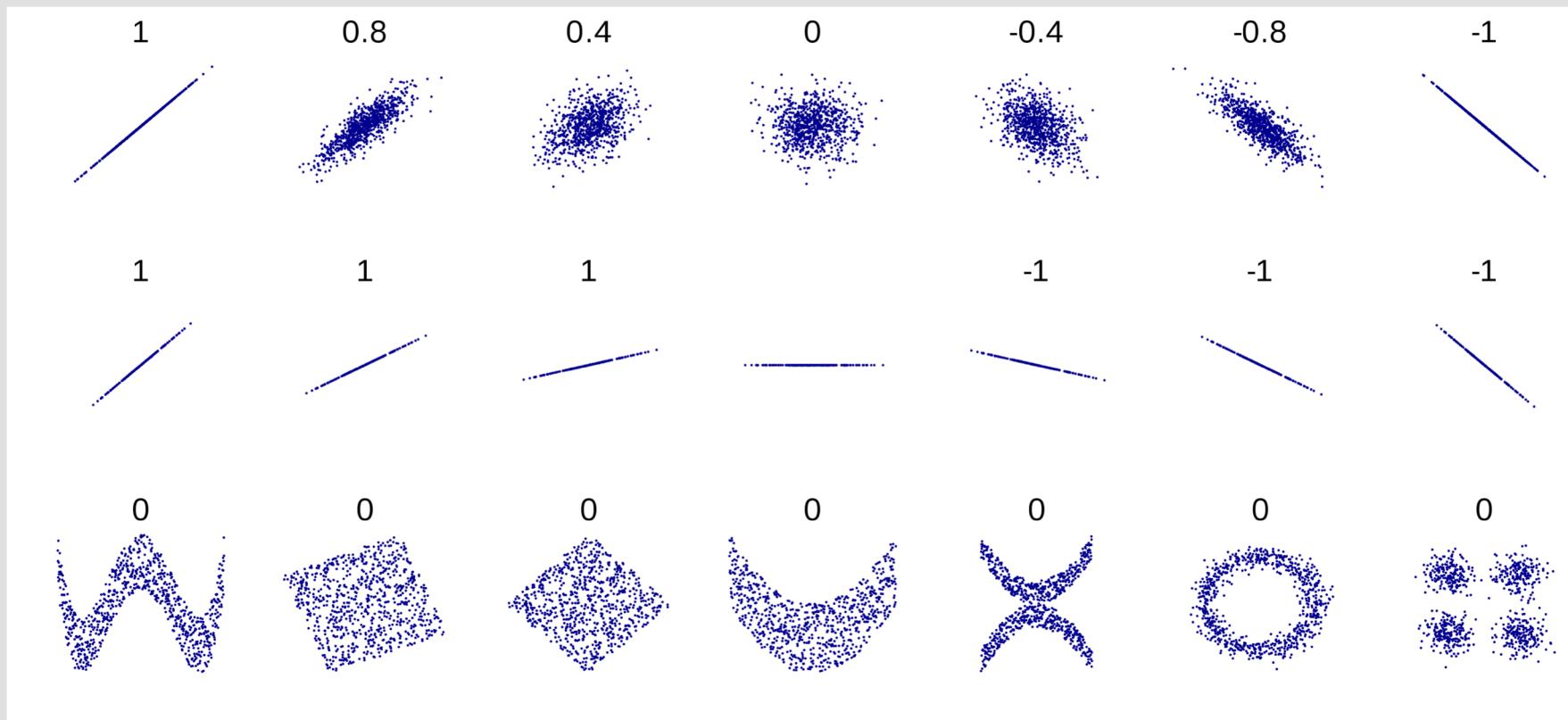
$$\widehat{Cov}(X, Y) = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

Выборочная корреляция (корреляция Пирсона):

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_y}$$



Корреляция Пирсона



wikipedia.org



Корреляция Пирсона



Корреляция Пирсона улавливает только линейную взаимосвязь и чувствительна к выбросам

- Угадай корреляцию: <http://guessthecorrelation.com/>



Корреляция Спирмена

Корреляция Спирмена – мера силы монотонной взаимосвязи. Вычисляется как корреляция Пирсона между рангами наблюдений.



Корреляция Спирмена

Корреляция Спирмена – мера силы монотонной взаимосвязи. Вычисляется как корреляция Пирсона между рангами наблюдений.

x_1, x_2, \dots, x_n – выборка



Корреляция Спирмена

Корреляция Спирмена – мера силы монотонной взаимосвязи. Вычисляется как корреляция Пирсона между рангами наблюдений.

x_1, x_2, \dots, x_n – выборка

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

Упорядочим
по возрастанию



Корреляция Спирмена

Корреляция Спирмена – мера силы монотонной взаимосвязи. Вычисляется как корреляция Пирсона между рангами наблюдений.

x_1, x_2, \dots, x_n – выборка

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

Упорядочим
по возрастанию

Правила выставления ранга:

1. Порядковый номер наблюдения – ранг
2. Если встречаются несколько одинаковых значений, им присваивается одинаковое значение ранга, равное среднему арифметическому их порядковых номеров



Корреляция Спирмена

Пример:

X

Y

Выборка:

10, 8, 6, 7, 4, 10, 9, 5

9, 9, 4, 5, 6, 8, 10, 7



Корреляция Спирмена

Пример:

X

Y

Выборка:

10,8,6,7,4,10,9,5

9, 9, 4, 5, 6, 8, 10, 7

Порядок:

7, 5, 3, 4, 1, 8, 6, 2

6, 7, 1, 2, 3, 5, 8, 4



Корреляция Спирмена

Пример:

X

Y

Выборка: 10, 8, 6, 7, 4, 10, 9, 5

9, 9, 4, 5, 6, 8, 10, 7

Порядок: 7, 5, 3, 4, 1, 8, 6, 2

6, 7, 1, 2, 3, 5, 8, 4



Корреляция Спирмена

Пример:

X

Y

Выборка: 10, 8, 6, 7, 4, 10, 9, 5 9, 9, 4, 5, 6, 8, 10, 7

Порядок: 7, 5, 3, 4, 1, 8, 6, 2 6, 7, 1, 2, 3, 5, 8, 4

Ранг: 7.5, 5, 3, 4, 1, 7.5, 6, 2 6.5, 6.5, 1, 2, 3, 5, 8, 4

r_x

r_y



Корреляция Спирмена

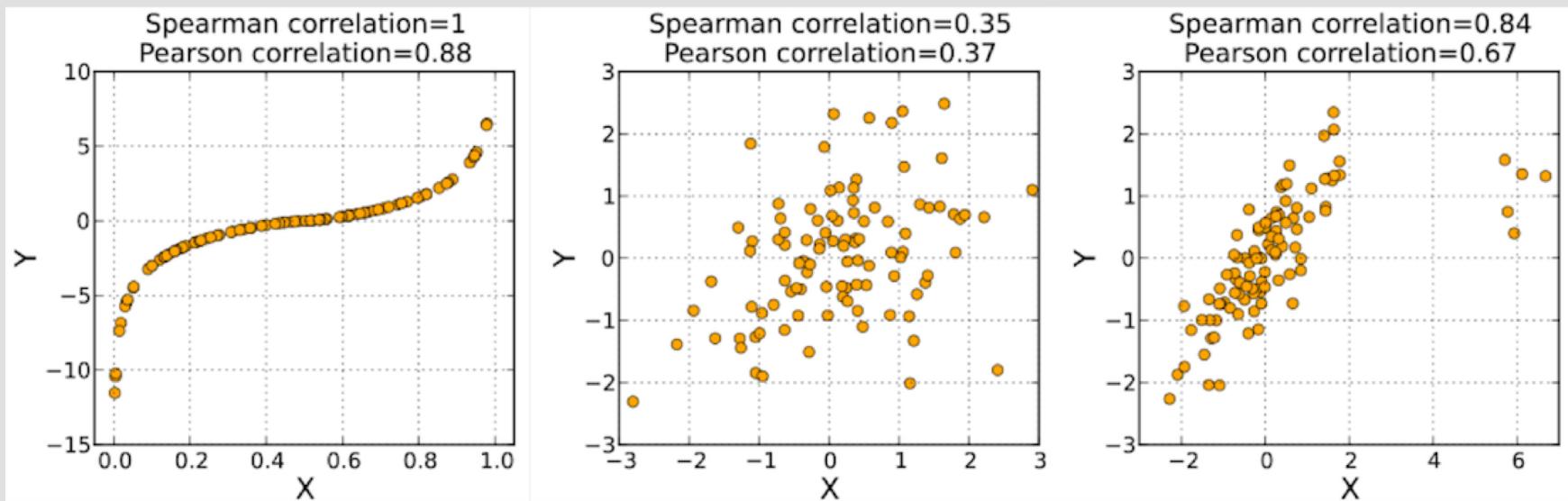
Пример:

	X	Y
Выборка:	10, 8, 6, 7, 4, 10, 9, 5	9, 9, 4, 5, 6, 8, 10, 7
Порядок:	7, 5, 3, 4, 1, 8, 6, 2	6, 7, 1, 2, 3, 5, 8, 4
Ранг:	7.5, 5, 3, 4, 1, 7.5, 6, 2	6.5, 6.5, 1, 2, 3, 5, 8, 4
	r_x	r_y

$$\hat{\rho}_s(X, Y) = \hat{\rho}_p(r_x, r_y) \approx 0.645$$



Корреляция Спирмена



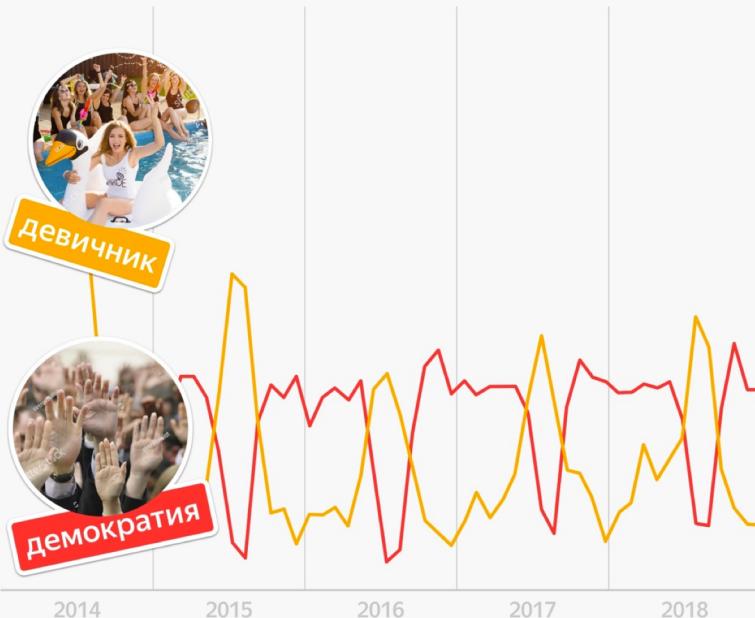
Корреляция Спирмэна пытается уловить
в данных монотонность



Корреляция не означает причинность

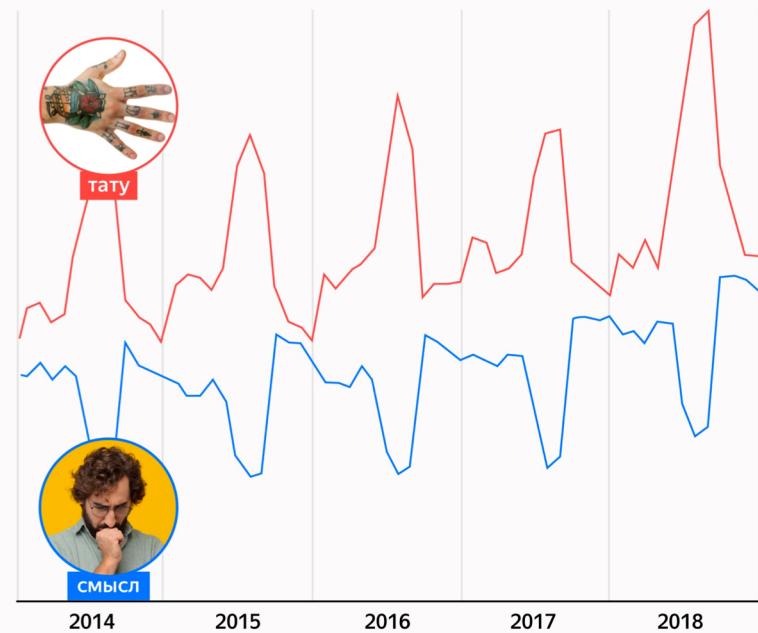
Парадоксы в Поиске — Яндекс

Когда в Поиске снижается доля запросов со словом **демократия**, становится больше запросов со словом **девичник**



Парадоксы в Поиске — Яндекс

Когда в Поиске растёт интерес к **тату**, снижается доля запросов со словом **смысл**

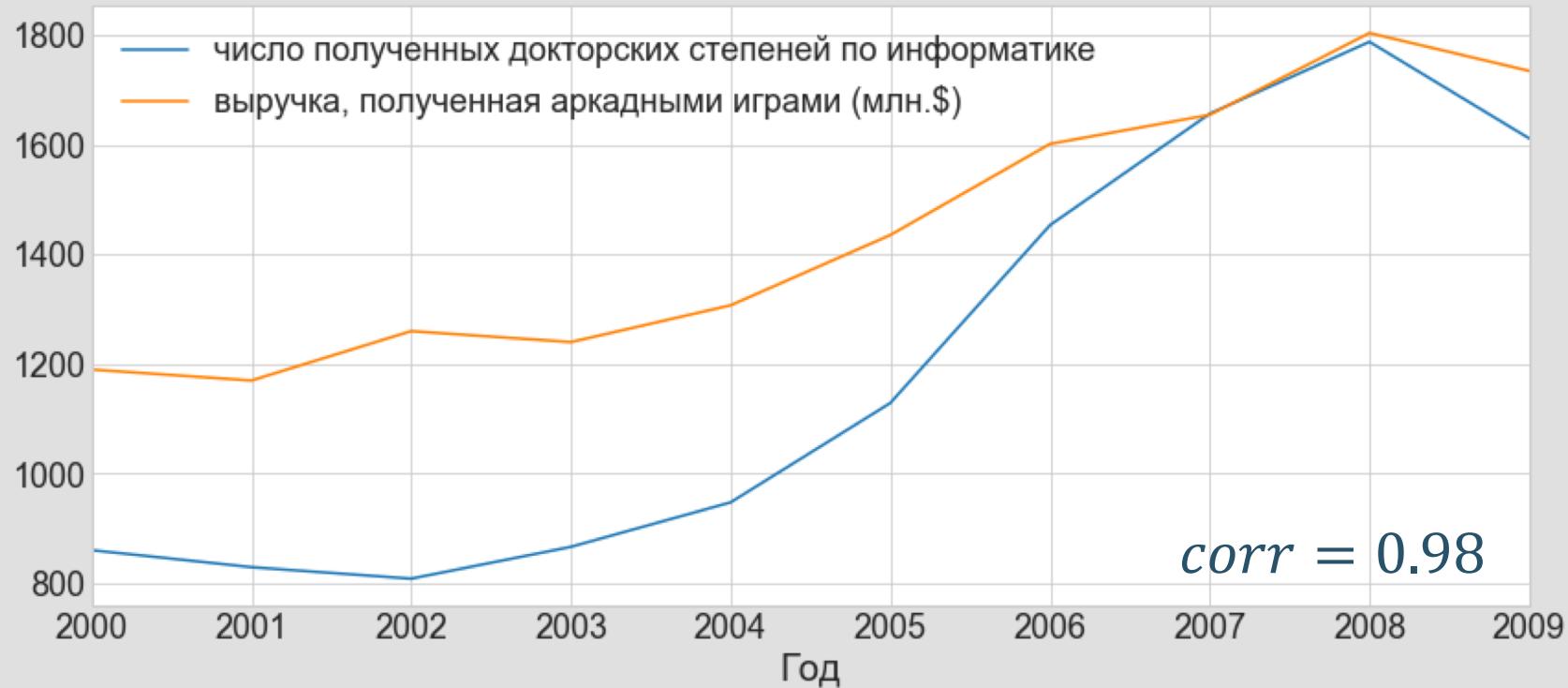


► Больше примеров в пабликах Яндекса в социальных сетях по тегу #ПарадоксыВПоиске



Ложная корреляция

Это связь, которая не имеет содержательного смысла

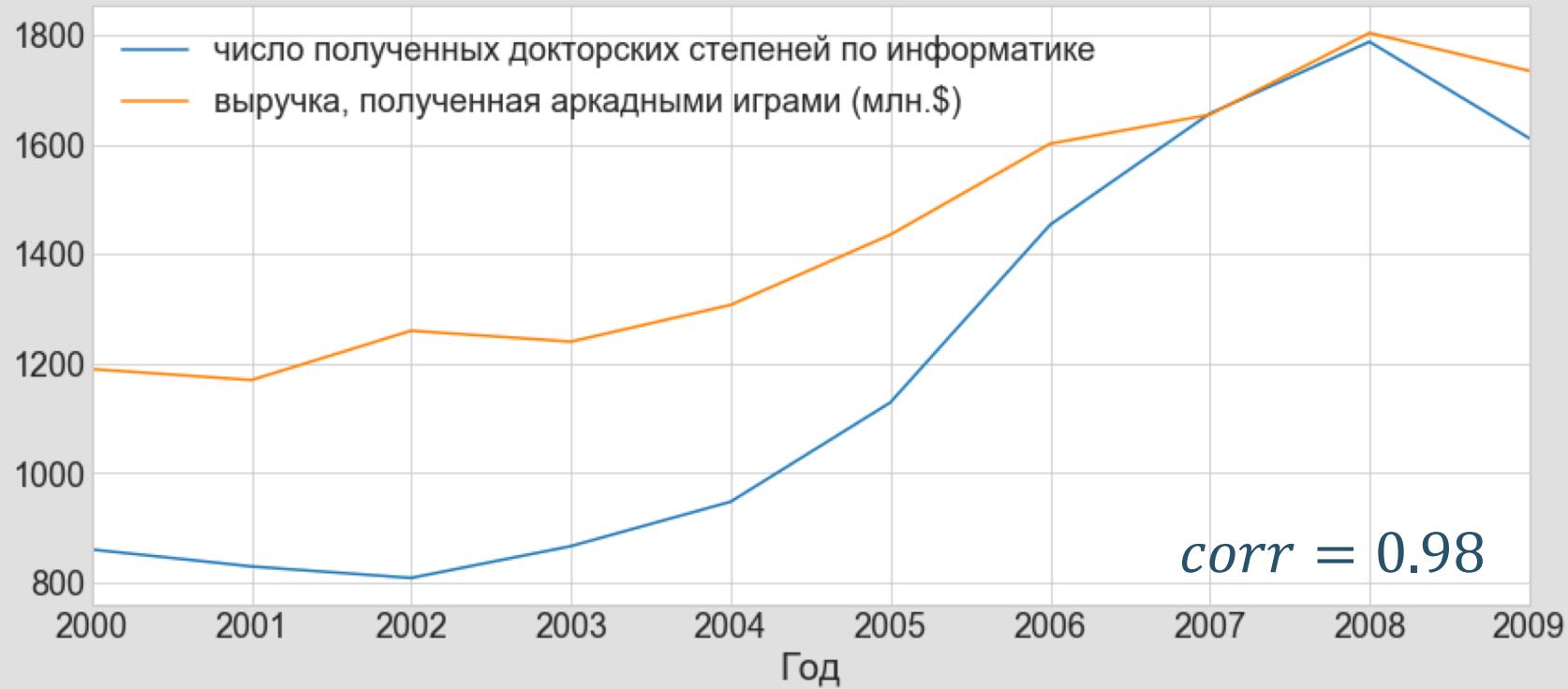


► Ещё примеры: <http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>



Ложная корреляция

Это связь, которая не имеет содержательного смысла



Разгадка: в динамике обоих рядов присутствует тренд. Если провести очистку от него, корреляция пропадёт.

- Ещё примеры: <http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>



Ложная корреляция

Корреляция между величинами может быть вызвана общей причиной:



Ложная корреляция

Корреляция между величинами может быть вызвана общей причиной:

- Общий тренд в данных



Ложная корреляция

Корреляция между величинами может быть вызвана общей причиной:

- Общий тренд в данных
- Спрос на мороженое и число грабежей коррелируют из-за погоды



Ложная корреляция

Корреляция между величинами может быть вызвана общей причиной:

- Общий тренд в данных
- Спрос на мороженое и число грабежей коррелируют из-за погоды
- Цены на различные продукты могут коррелировать из-за инфляции



Резюме

- Ковариация и корреляция Пирсона задают меру линейной связи между случайными величинами



Резюме

- Ковариация и корреляция Пирсона задают меру линейной связи между случайными величинами
- Корреляция Спирмена пытается измерить меру монотонной взаимосвязи



Резюме

- Ковариация и корреляция Пирсона задают меру линейной связи между случайными величинами
- Корреляция Спирмена пытается измерить меру монотонной взаимосвязи
- Корреляции между переменными не достаточно для наличия причинно-следственной связи



Резюме

- Ковариация и корреляция Пирсона задают меру линейной связи между случайными величинами
- Корреляция Спирмена пытается измерить меру монотонной взаимосвязи
- Корреляции между переменными не достаточно для наличия причинно-следственной связи
- Иногда в данных присутствует ложная корреляция



Резюме

- Ковариация и корреляция Пирсона задают меру линейной связи между случайными величинами
- Корреляция Спирмена пытается измерить меру монотонной взаимосвязи
- Корреляции между переменными не достаточно для наличия причинно-следственной связи
- Иногда в данных присутствует ложная корреляция
- При работе с корреляцией надо быть осторожным: про то, как делать свои выводы аккуратно, мы поговорим на будущих неделях нашей специализации



Нормальное распределение и его свойства



Нормальное распределение

- В статистике часто встречается нормальное распределение



Нормальное распределение

- В статистике часто встречается нормальное распределение
- Оно используется для проверки гипотез и для того, чтобы понимать насколько точными у нас получаются прогнозы и оценки



Нормальное распределение

- В статистике часто встречается нормальное распределение
- Оно используется для проверки гипотез и для того, чтобы понимать насколько точными у нас получаются прогнозы и оценки
- Его обычно используют, когда у нас есть в распоряжении большая выборка, это разрешает делать Центральная Предельная Теорема (о ней поговорим на будущих неделях)



Нормальное распределение

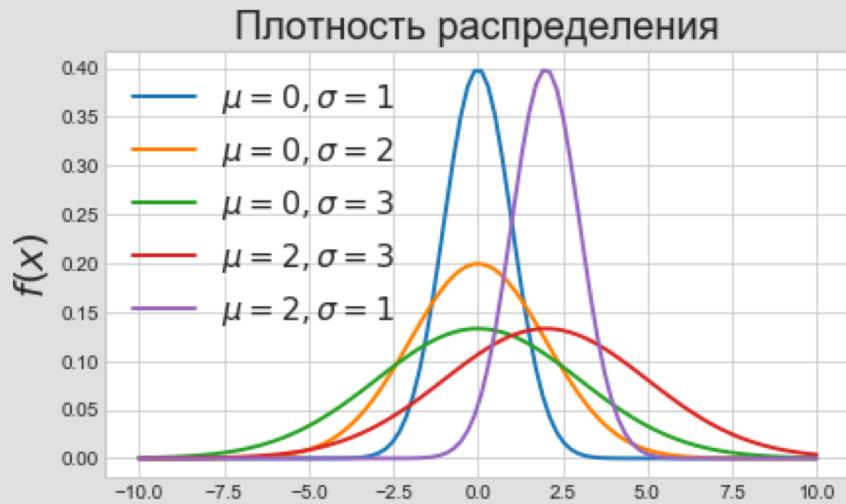
- В статистике часто встречается нормальное распределение
- Оно используется для проверки гипотез и для того, чтобы понимать насколько точными у нас получаются прогнозы и оценки
- Его обычно используют, когда у нас есть в распоряжении большая выборка, это разрешает делать Центральная Предельная Теорема (о ней поговорим на будущих неделях)
- Давайте познакомиться с нормальным распределением поближе



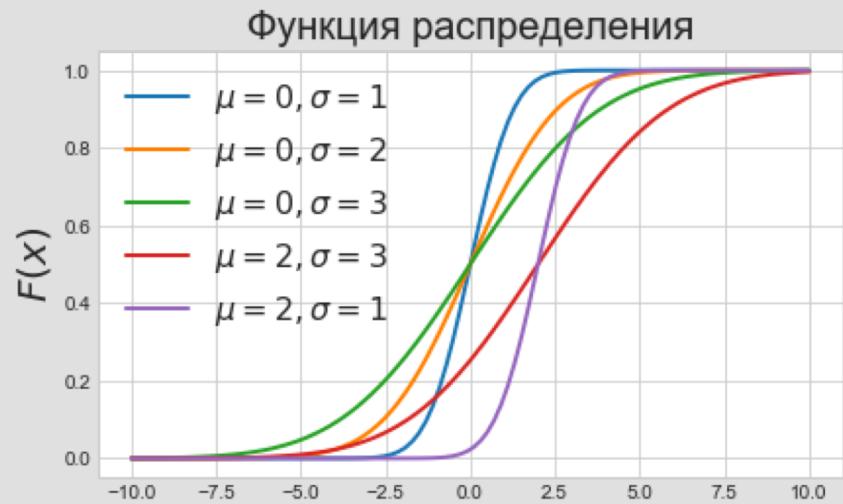
Нормальное распределение

Нормальная случайная величина: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$$



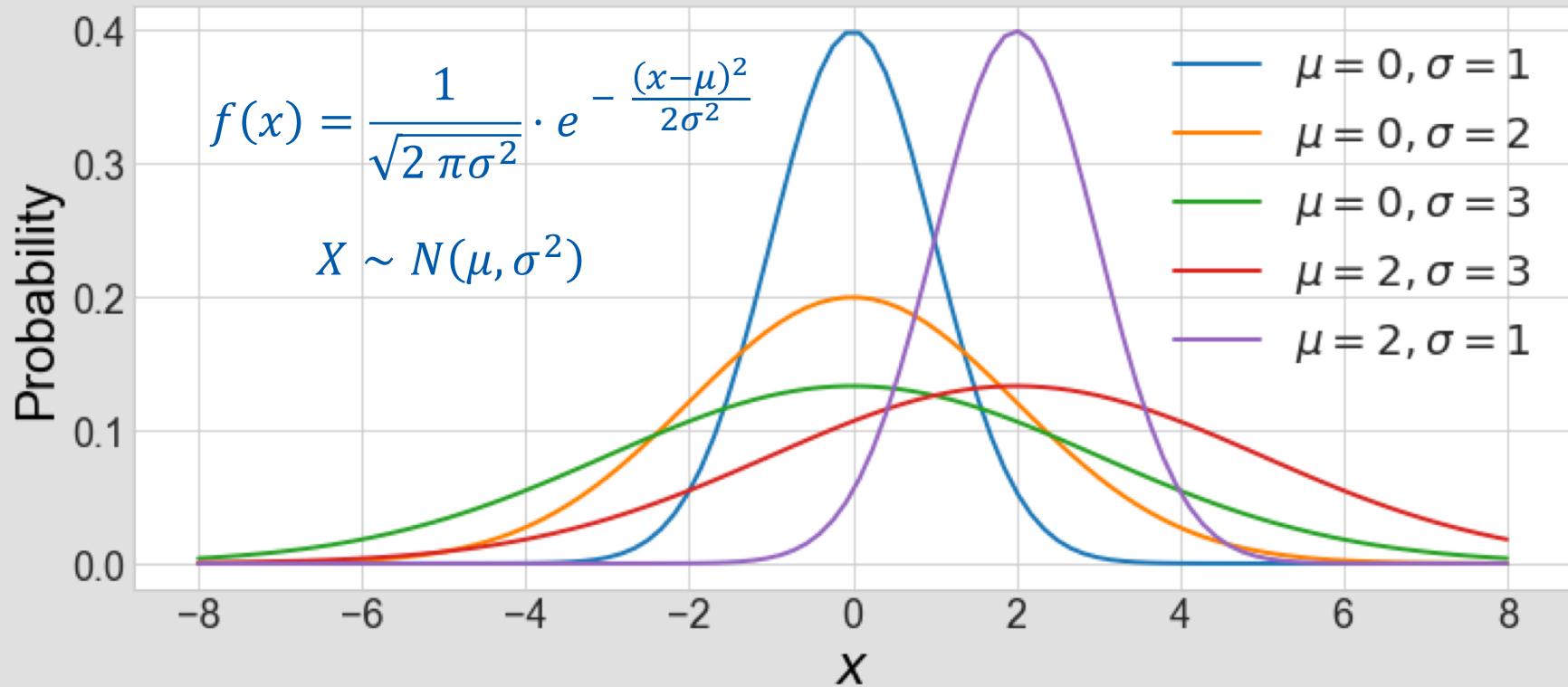
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \, dx$$



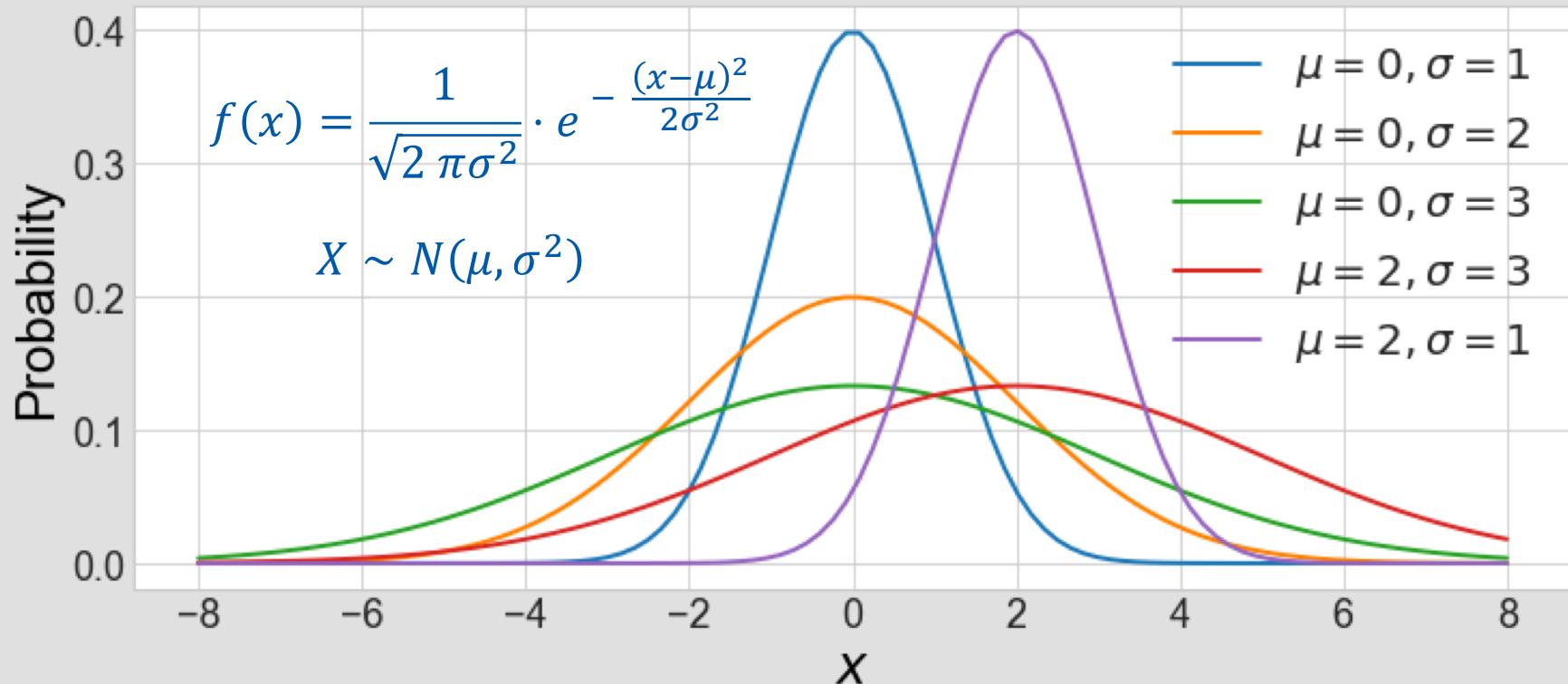
Свойства нормального распределения



1. Распределение симметрично относительно точки $\mathbb{E}(X) = \mu$



Свойства нормального распределения



1. Распределение симметрично относительно точки $\mathbb{E}(X) = \mu$
2. Параметр μ не влияет на форму кривой и отвечает за её сдвиг кривой вдоль оси x , параметр σ определяет степень “размытости” кривой



Свойства нормального распределения

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

a – константа



Свойства нормального распределения

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

a – константа

3. $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$



Свойства нормального распределения

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

a – константа

3. $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

4. $X + a \sim N(\mu_x + a, \sigma_x^2)$



Свойства нормального распределения

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

a – константа

3. $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

4. $X + a \sim N(\mu_x + a, \sigma_x^2)$

5. $a \cdot X \sim N(a \cdot \mu_x, a^2 \cdot \sigma_x^2)$

Нормальная случайная величина устойчива
к суммированию и линейным преобразованиям



Центрирование и нормирование

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



Центрирование и нормирование

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

центррирование

$$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$



Центрирование и нормирование

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

центрирование

$$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

нормирование

$$\frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$



Центрирование и нормирование

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

центрирование

$$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

нормирование

$$\frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

- Распределение $N(0, 1)$ называется **стандартным нормальным распределением**



Стандартное нормальное распределение

- Функцию распределения для нормального распределения нельзя найти в аналитическом виде



Стандартное нормальное распределение

- Функцию распределения для нормального распределения нельзя найти в аналитическом виде
- Для функции распределения случайной величины $N(0, 1)$ составлены таблицы



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15)$$



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15)$$

Искать такую вероятность неудобно, нужны были бы таблицы для всех возможных μ и σ



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{4} \leq \frac{15 - 7}{4}\right)$$



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 15) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{4} \leq \frac{15 - 7}{4}\right) \\ &= \mathbb{P}(N(0, 1) \leq 2)\end{aligned}$$



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{4} \leq \frac{15 - 7}{4}\right)$$

$$= \mathbb{P}(N(0, 1) \leq 2) = F_{N(0,1)}(2)$$



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{4} \leq \frac{15 - 7}{4}\right)$$

$$= \mathbb{P}(N(0, 1) \leq 2) = F_{N(0,1)}(2) = \Phi(2) \approx 0.98$$



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{4} \leq \frac{15 - 7}{4}\right)$$

$$= \mathbb{P}(N(0, 1) \leq 2) = F_{N(0,1)}(2) = \Phi(2) \approx 0.98$$



Обозначение
для функции
распределения $N(0,1)$



Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{4} \leq \frac{15 - 7}{4}\right)$$

$$= \mathbb{P}(N(0, 1) \leq 2) = F_{N(0,1)}(2) = \Phi(2) \approx 0.98$$



Обозначение
для функции
распределения $N(0,1)$

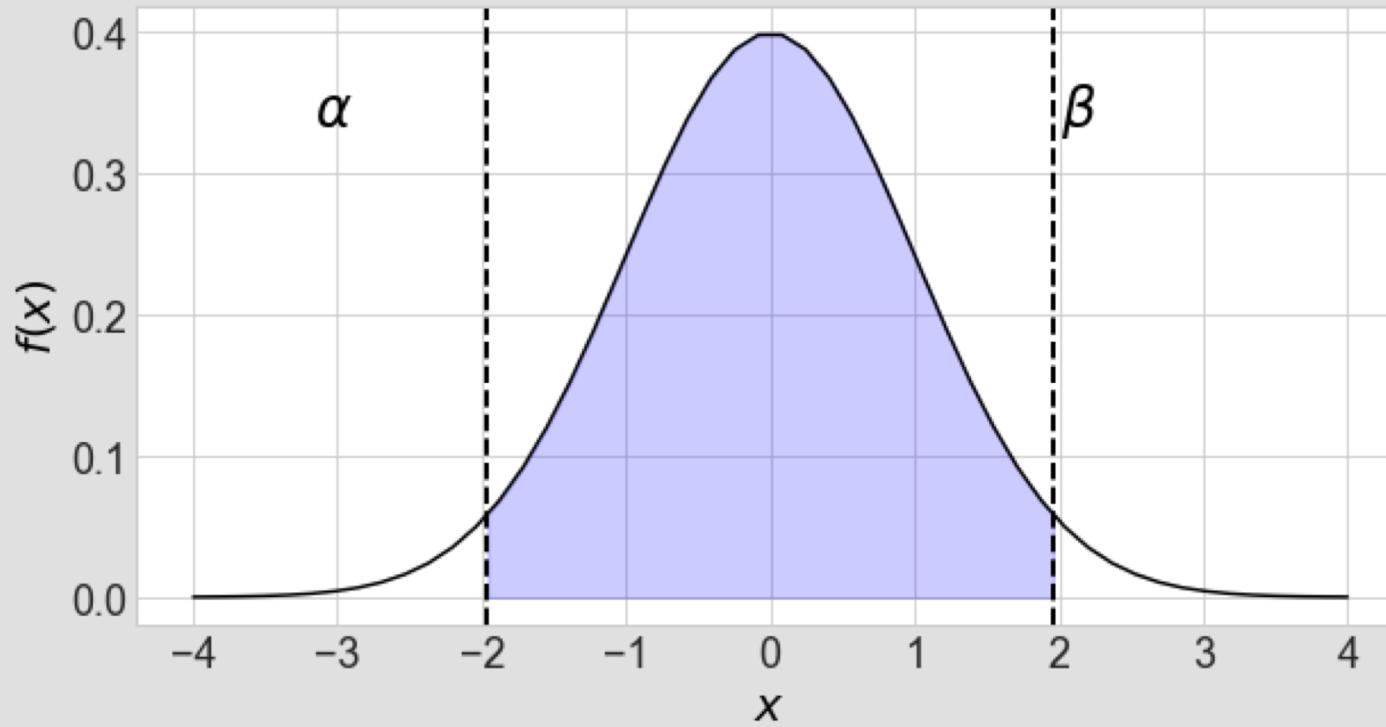
Раньше активно пользовались таблицами для распределения $N(0, 1)$, сегодня для любого распределения расчёты делает компьютер



Как найти вероятность

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

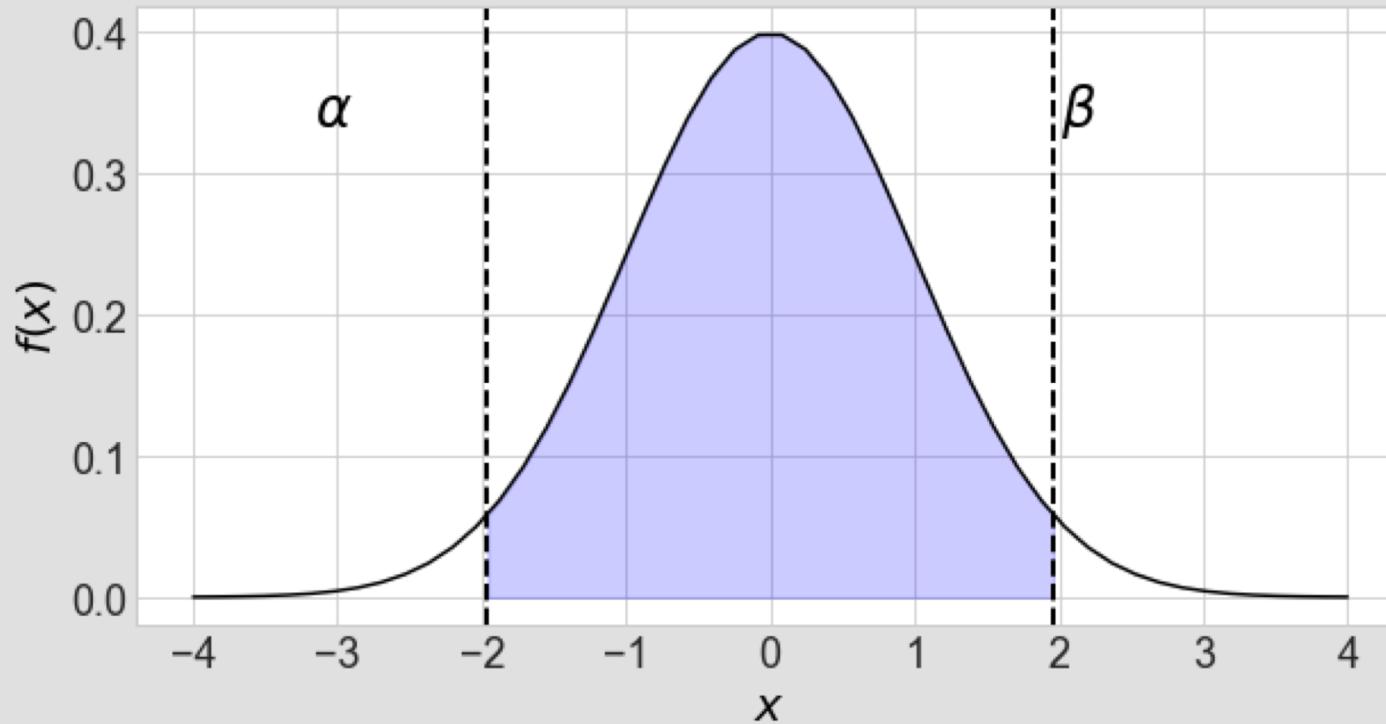
$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta)$$



Как найти вероятность

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

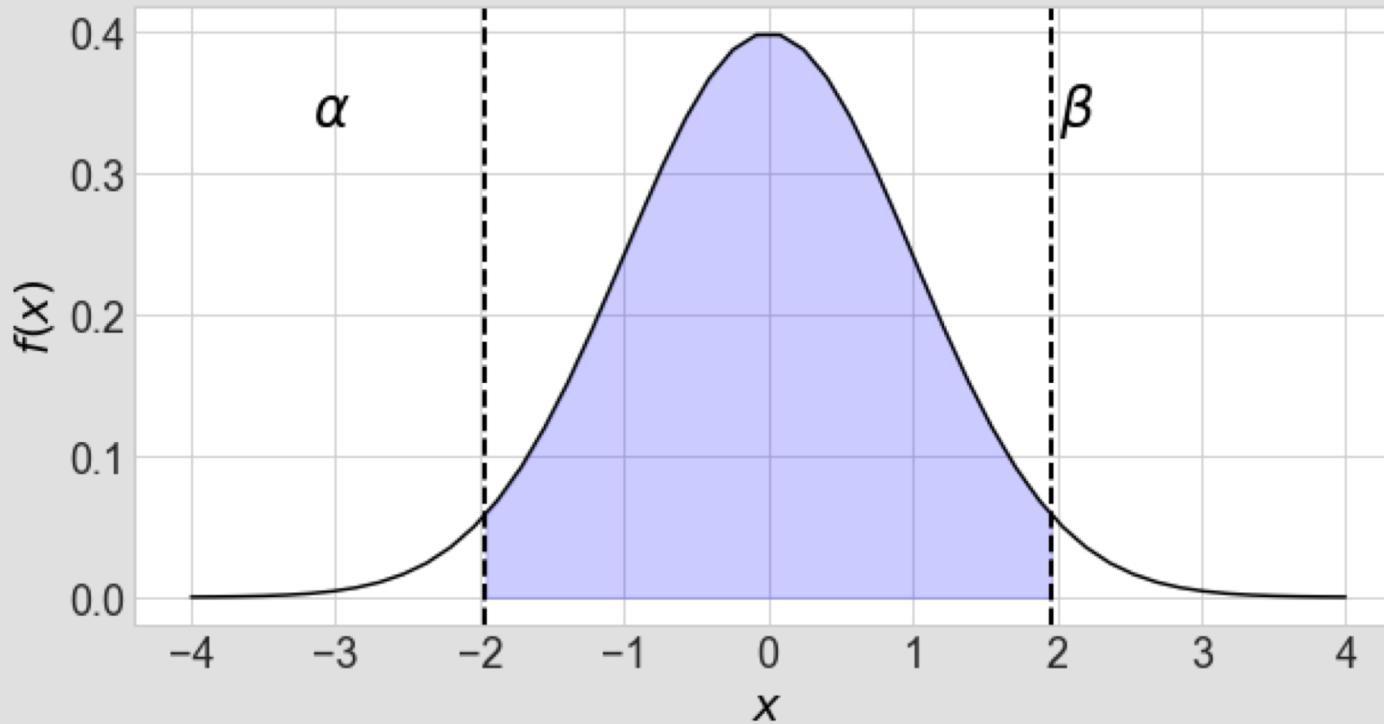
$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \mathbb{P}\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) =$$



Как найти вероятность

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) &= \mathbb{P}\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

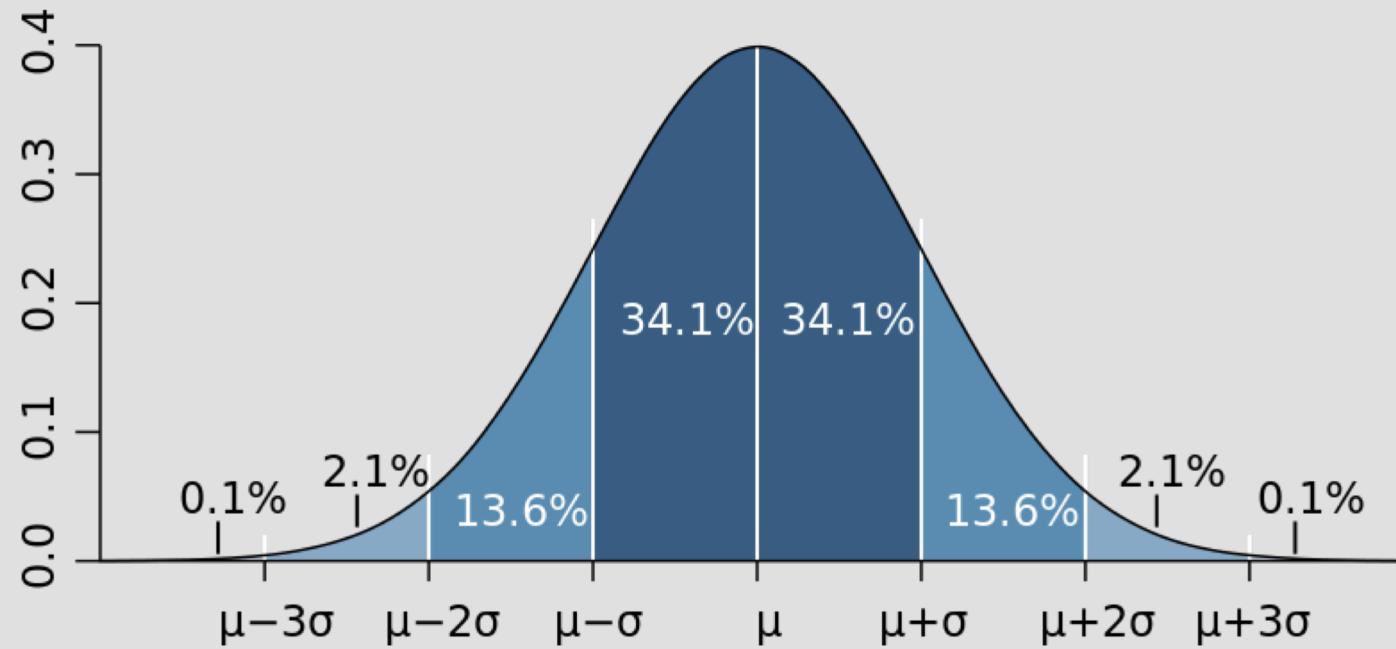


Правила сигм

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Правило сигмы:

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$$

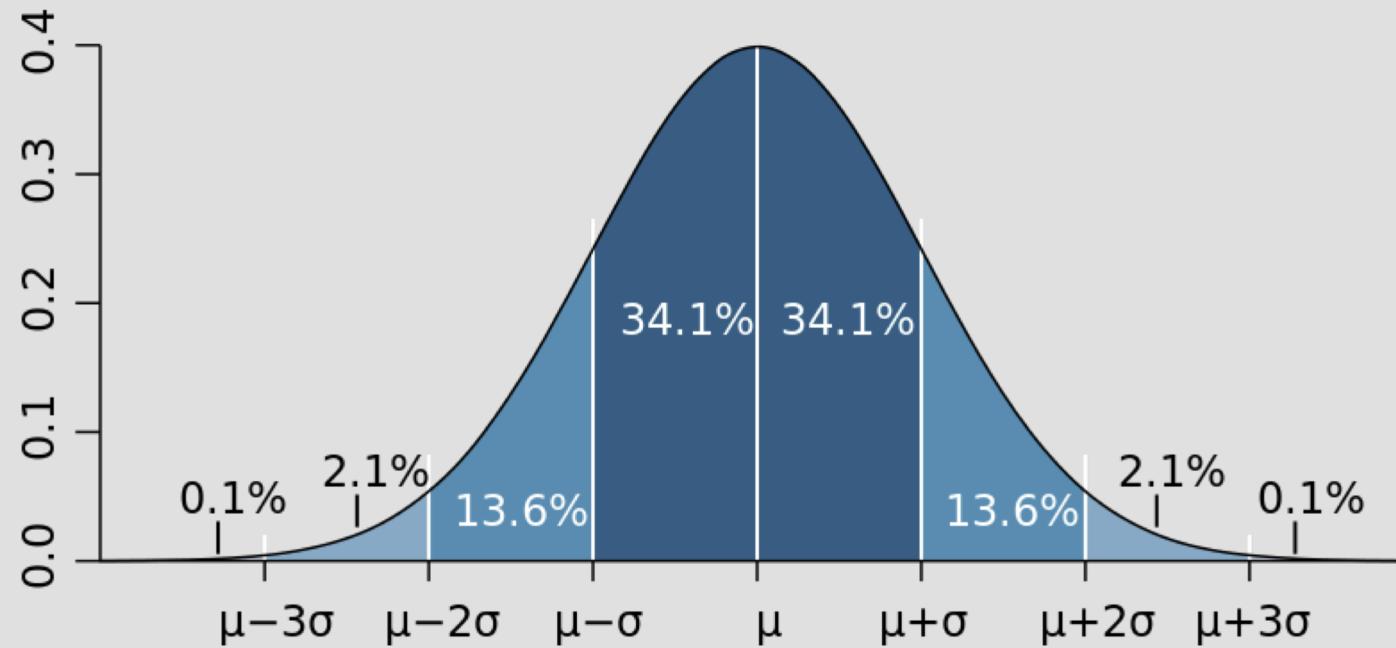


Правила сигм

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Правило двух сигм:

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

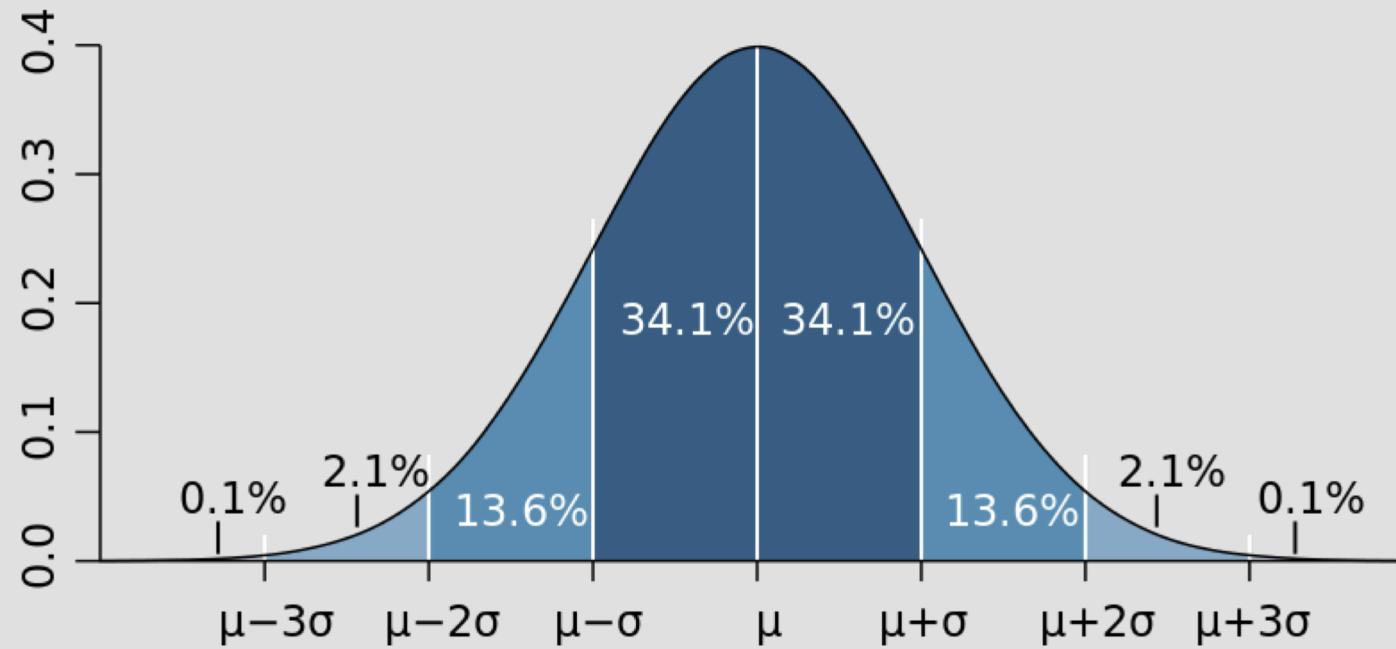


Правила сигм

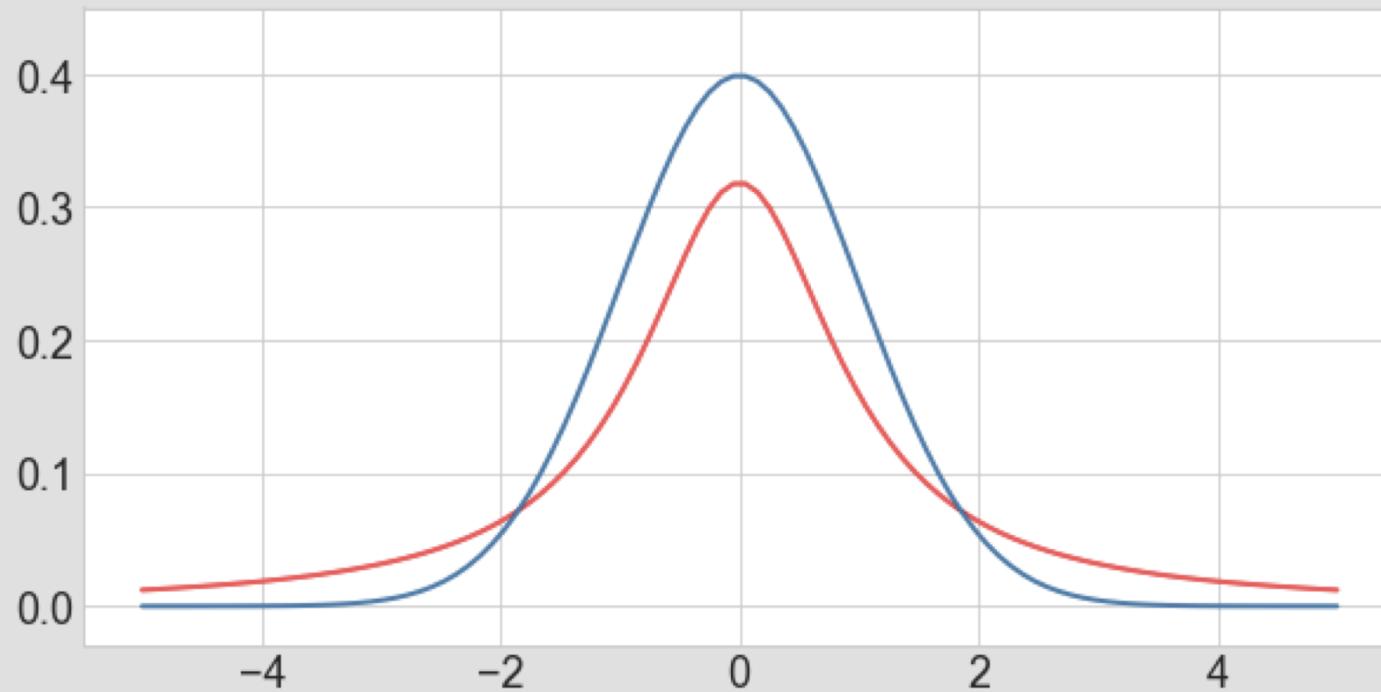
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Правило трех сигм:

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$$



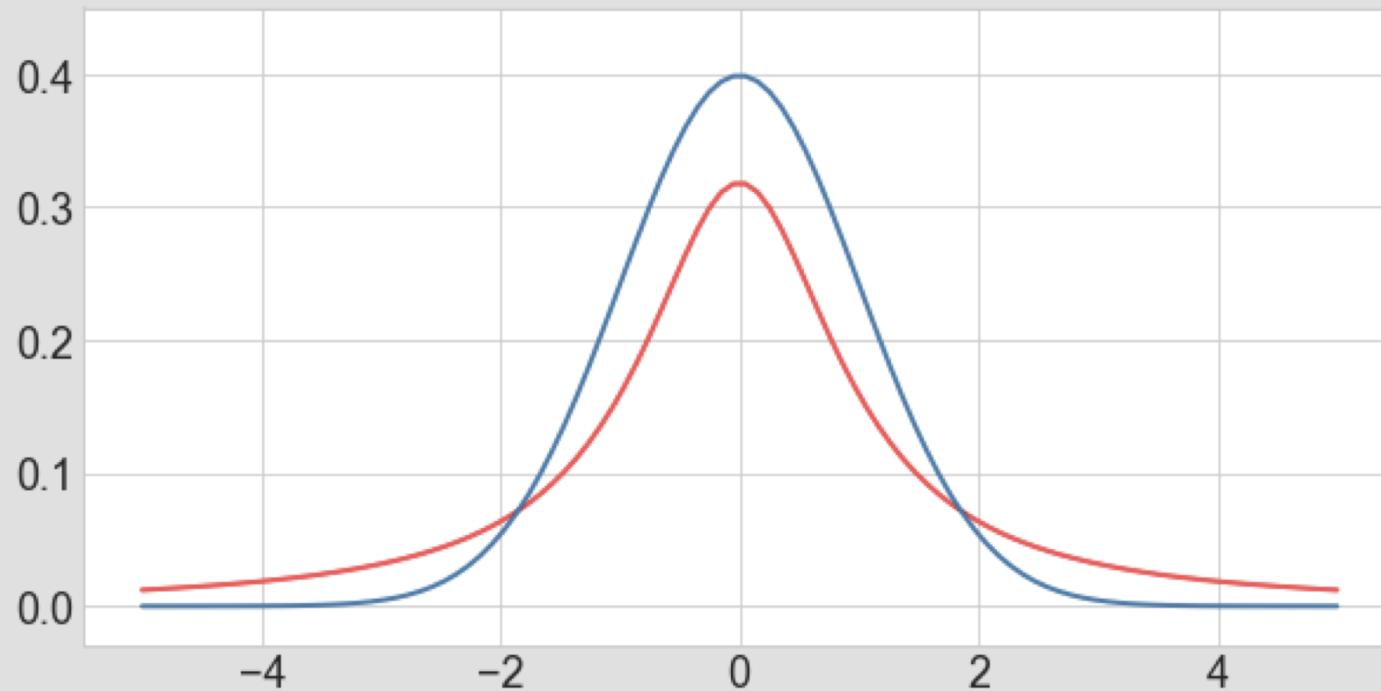
Тяжёлые хвосты



- Хвосты красного распределения тяжёлые



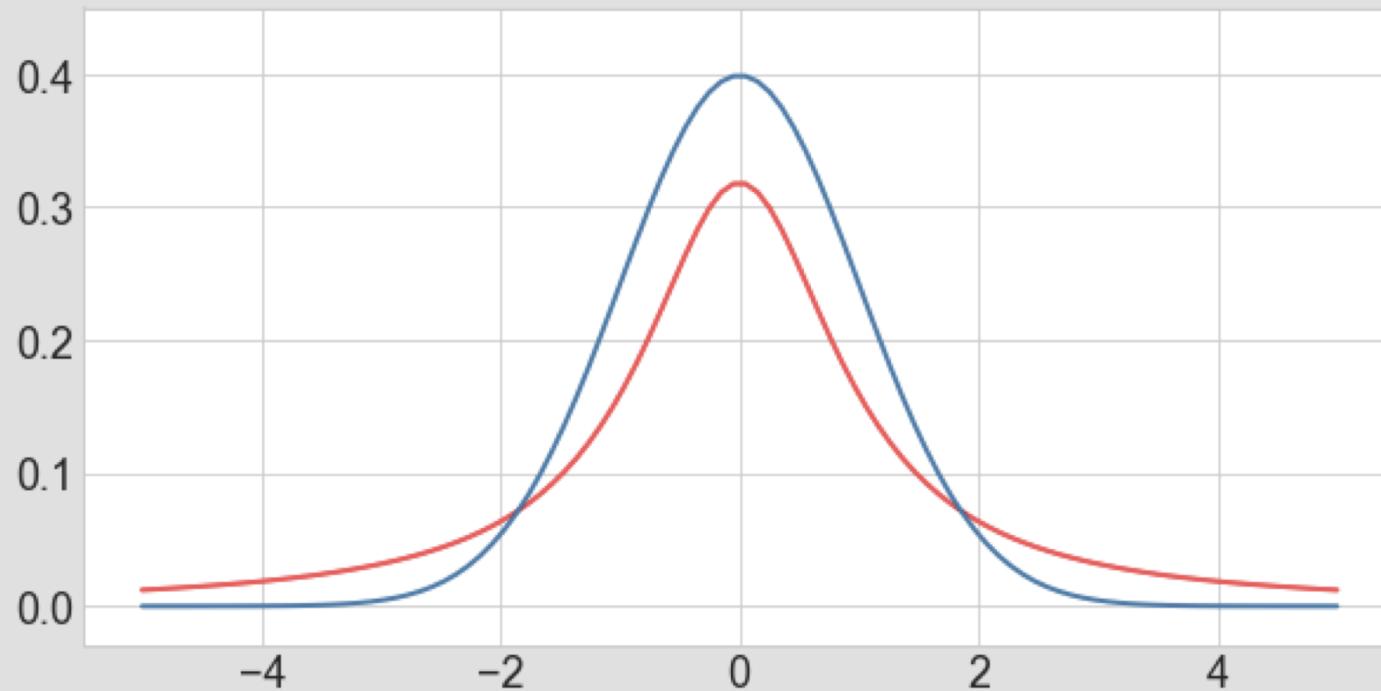
Тяжёлые хвосты



- Хвосты красного распределения тяжёлые
- Под ними сосредоточена большая вероятностная масса



Тяжёлые хвосты



- Хвосты красного распределения тяжёлые
- Под ними сосредоточена большая вероятностная масса
- События из-под них (выбросы) более вероятны



Эксцесс и куртосис

Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$



Эксцесс и куртосис

Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис



Эксцесс и куртосис

Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис

- Число 3 вычитается из куртосиса, чтобы эксцесс нормального распределения был равен нулю



Эксцесс и куртосис

Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис

- Число 3 вычитается из куртосиса, чтобы эксцесс нормального распределения был равен нулю
- Если хвосты распределения легче, а пик острее, чем у нормального распределения, тогда $\beta_X > 0$



Эксцесс и куртосис

Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис

- Число 3 вычитается из куртосиса, чтобы эксцесс нормального распределения был равен нулю
- Если хвосты распределения легче, а пик острее, чем у нормального распределения, тогда $\beta_X > 0$
- Если хвосты распределения тяжелее, а пик более приплюснутый, тогда $\beta_X < 0$

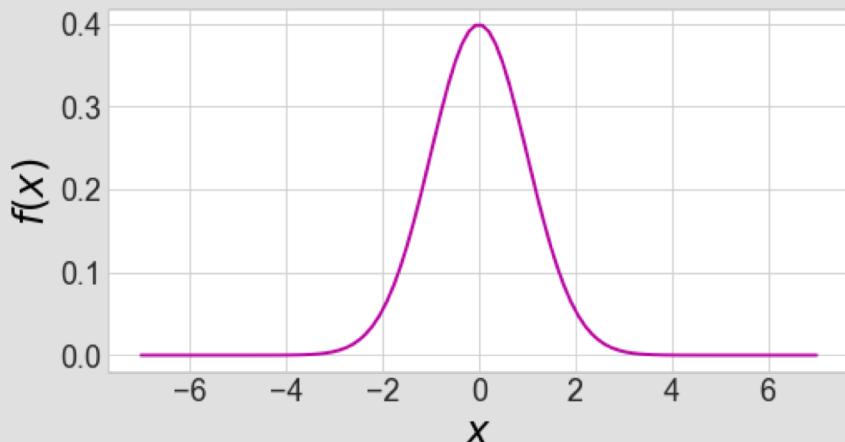


Эксцесс и куртосис

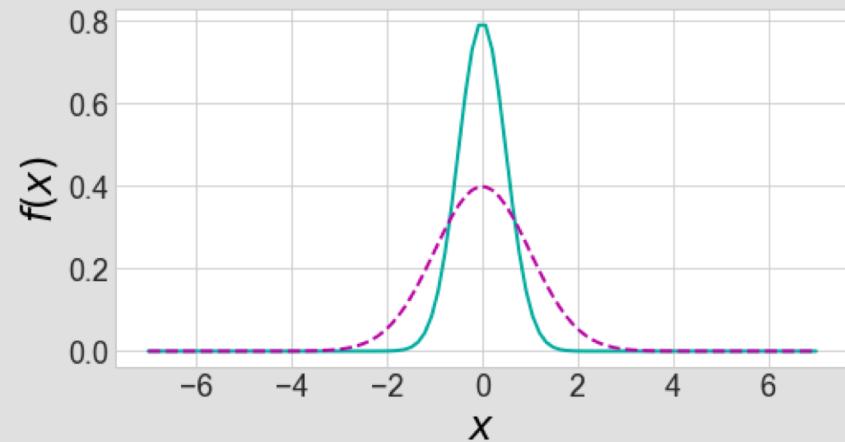
Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис



Нормальное распределение
с нулевым эксцессом



Положительный эксцесс

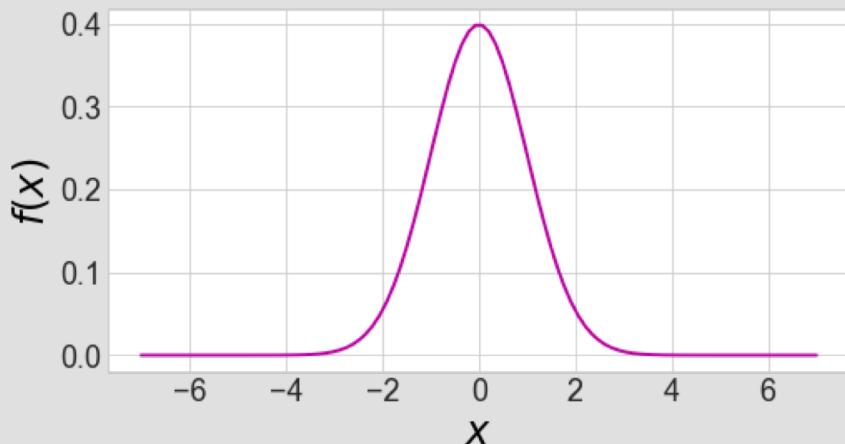


Эксцесс и куртосис

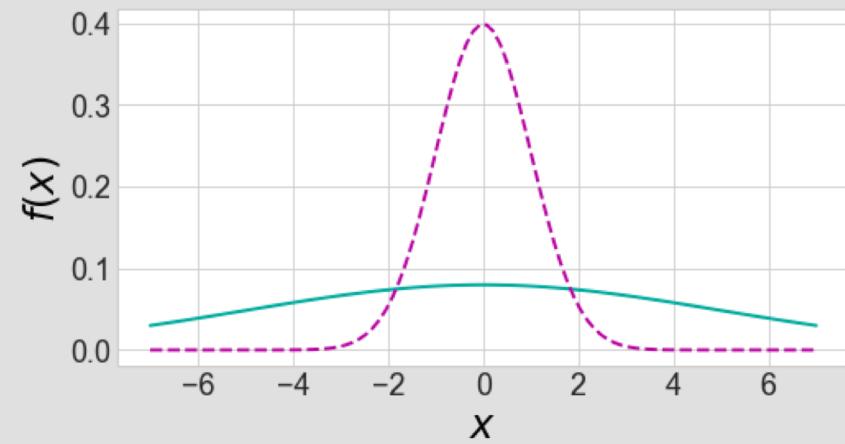
Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис



Нормальное распределение
с нулевым эксцессом



Отрицательный эксцесс



Коэффициент асимметрии (skewness)

Коэффициентом асимметрии случайной величины X называют величину

$$A_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3]}{\sigma^3}$$



Коэффициент асимметрии (skewness)

Коэффициентом асимметрии случайной величины X называют величину

$$A_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3]}{\sigma^3}$$

- Если плотность распределения симметрична, то $A_X = 0$



Коэффициент асимметрии (skewness)

Коэффициентом асимметрии случайной величины X называют величину

$$A_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3]}{\sigma^3}$$

- Если плотность распределения симметрична, то $A_X = 0$
- Если левый хвост тяжелее, то $A_X > 0$



Коэффициент асимметрии (skewness)

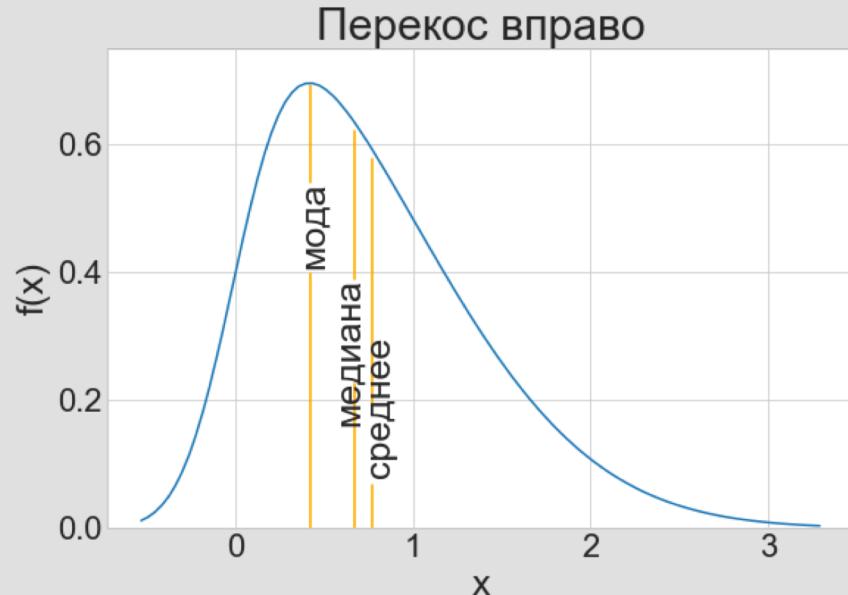
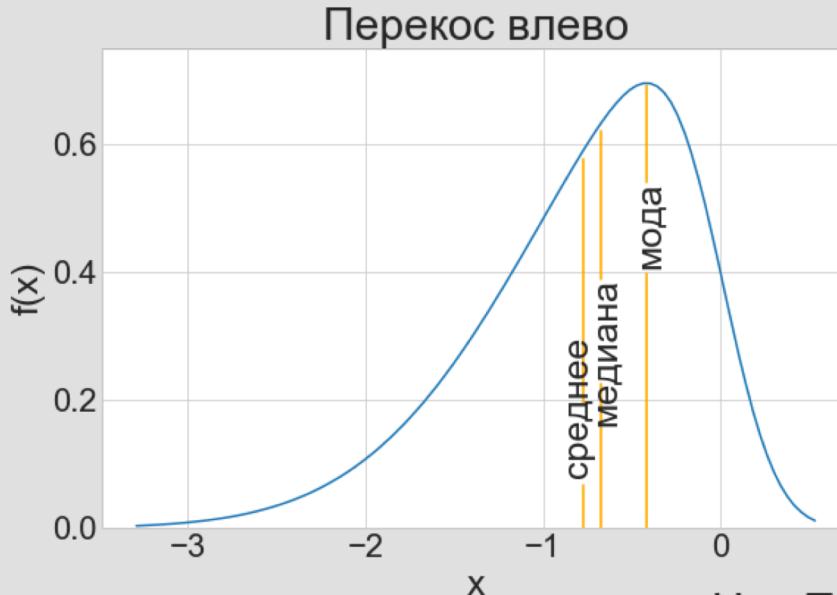
Коэффициентом асимметрии случайной величины X называют величину

$$A_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3]}{\sigma^3}$$

- Если плотность распределения симметрична, то $A_X = 0$
- Если левый хвост тяжелее, то $A_X > 0$
- Если правый хвост тяжелее, то $A_X < 0$



Коэффициент асимметрии (skewness)



Эксцесс и асимметрия

- Эксцесс оказывается полезным при поиске тяжёлых хвостов



Эксцесс и асимметрия

- Эксцесс оказывается полезным при поиске тяжёлых хвостов
- Большое значение эксцесса сигнализирует о наличии тяжёлых хвостов и выбросов в данных



Эксцесс и асимметрия

- Эксцесс оказывается полезным при поиске тяжёлых хвостов
- Большое значение эксцесса сигнализирует о наличии тяжёлых хвостов и выбросов в данных
- Коэффициент асимметрии характеризует перекос в распределении



Эксцесс и асимметрия

- Эксцесс оказывается полезным при поиске тяжёлых хвостов
- Большое значение эксцесса сигнализирует о наличии тяжёлых хвостов и выбросов в данных
- Коэффициент асимметрии характеризует перекос в распределении
- Если у распределения сильный перекос, с применением стандартных статистических методов возникают сложности



Многомерное нормальное



Многомерное нормальное

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right]$$



Многомерное нормальное

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$



Многомерное нормальное

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$



Математическое
ожидание

$$\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$$

$$\mathbb{E}(X_2) = \mu_1$$



Многомерное нормальное

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$



Ковариационная
матрица

$$Var(X_1) = \sigma_1^2$$

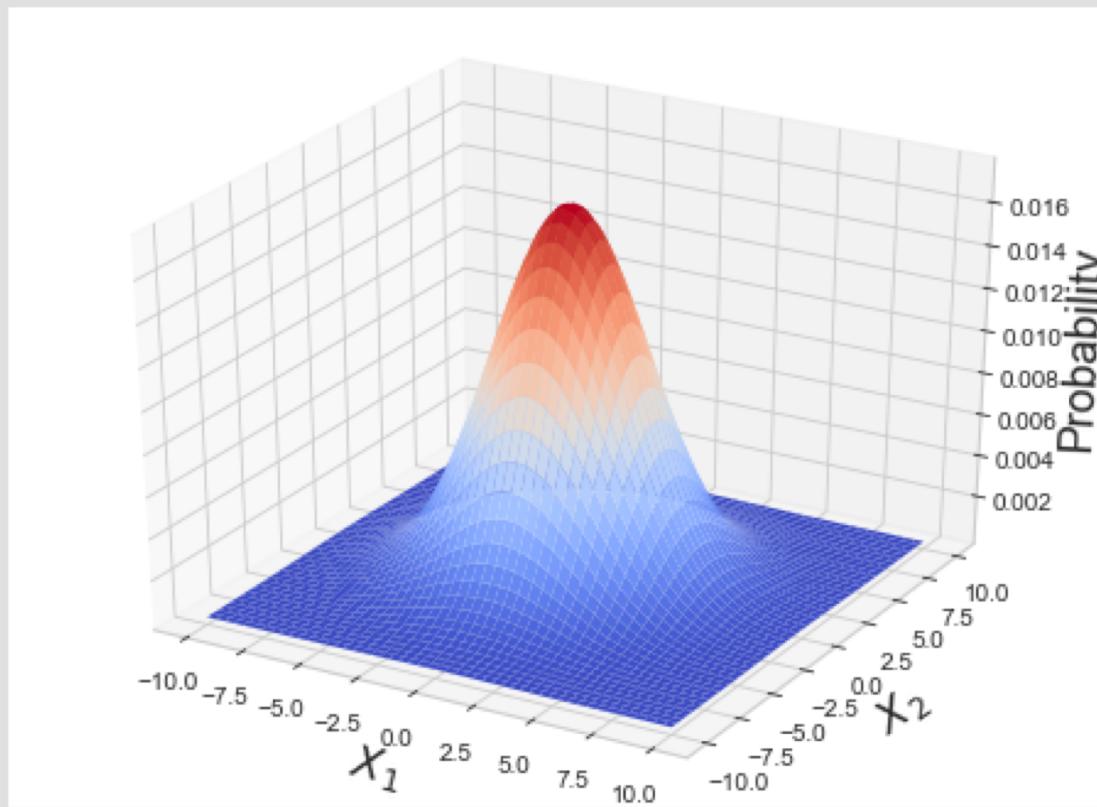
$$Var(X_2) = \sigma_2^2$$

$$Cov(X_1, X_2) = \rho$$



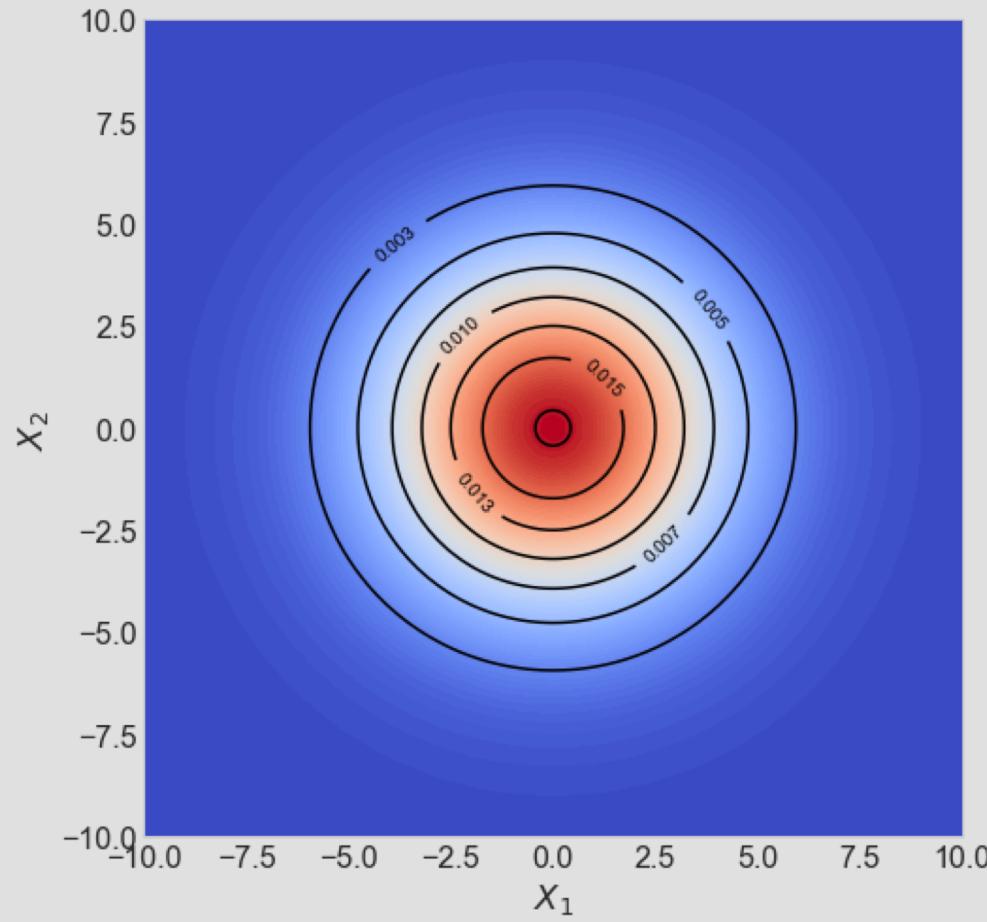
Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



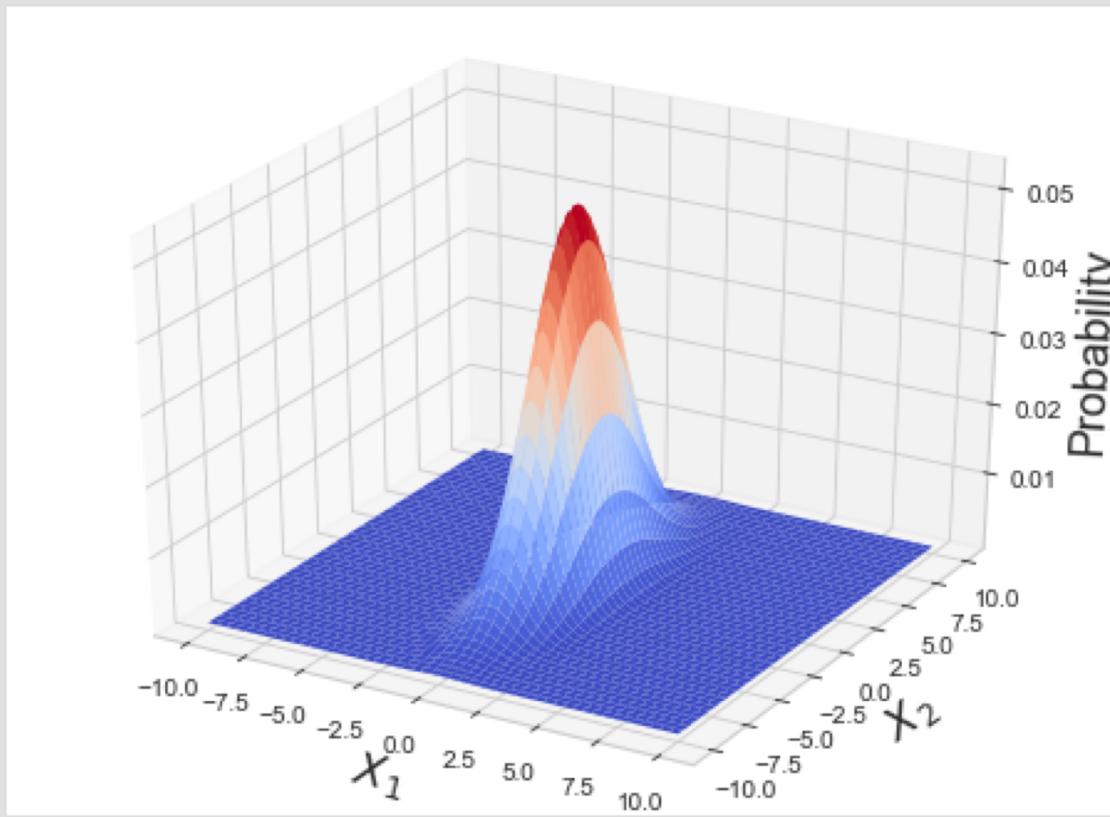
Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



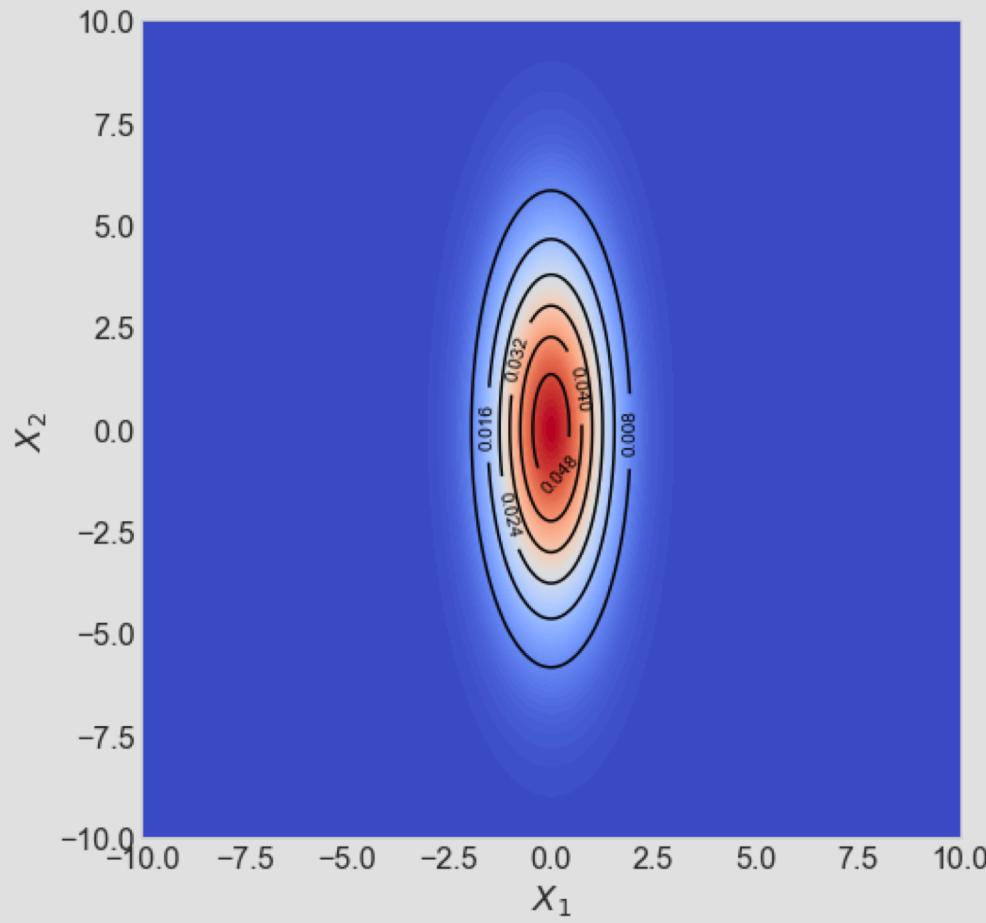
Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



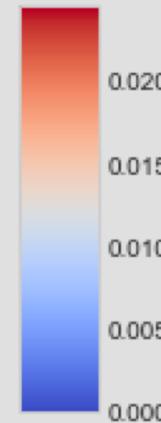
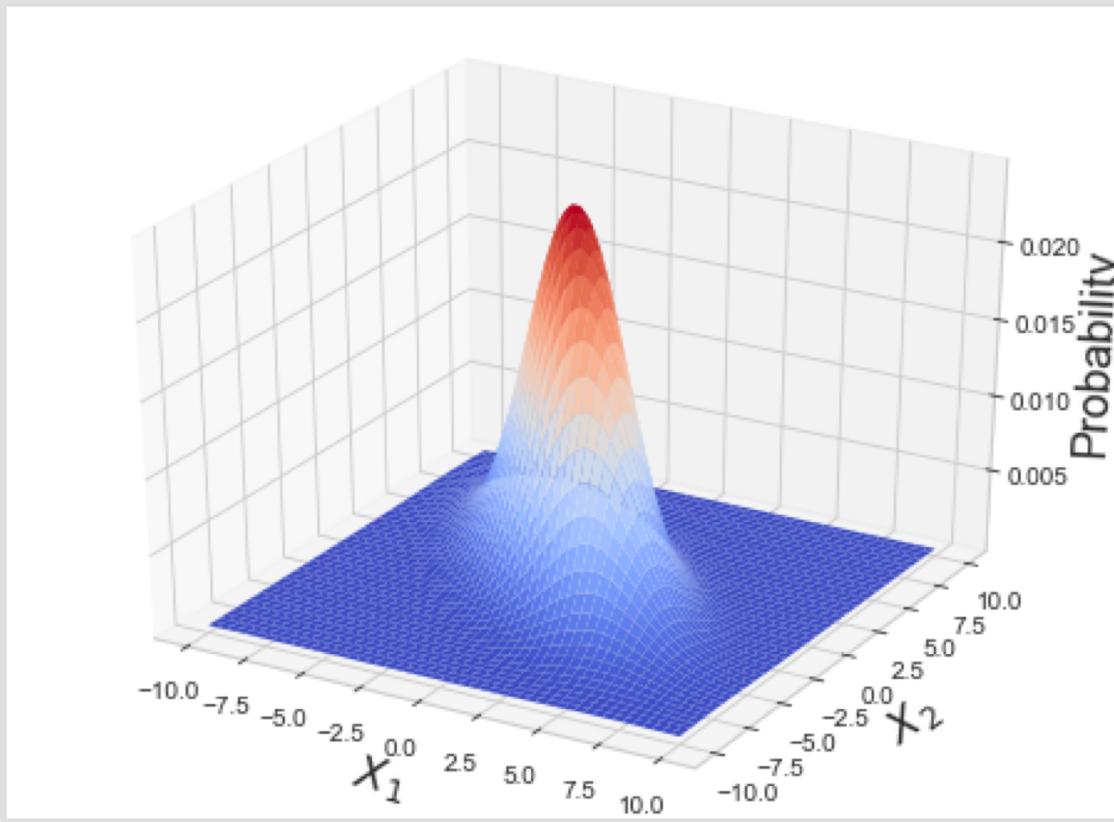
Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



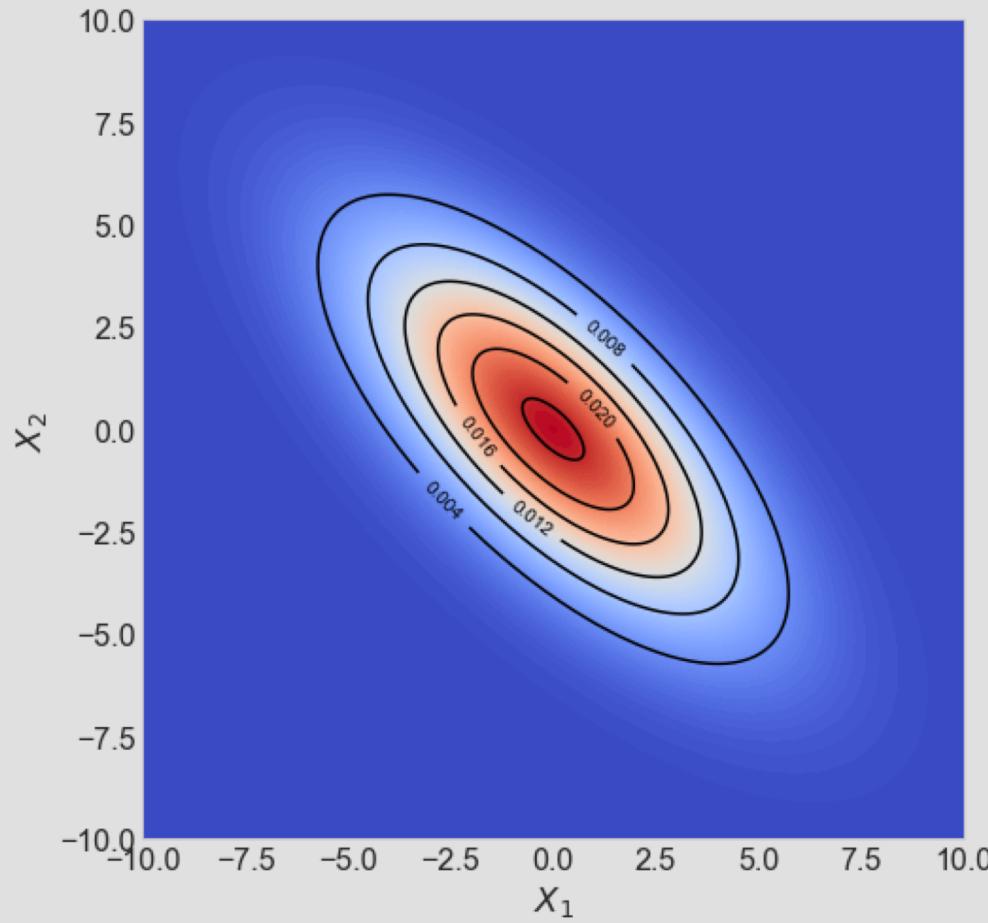
Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6.3 \\ -6.3 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6.3 \\ -6.3 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



Многомерное нормальное

- По аналогии можно определить нормальное распределение для любой размерности

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim N(\mu, \Sigma)$$



Многомерное нормальное

- По аналогии можно определить нормальное распределение для любой размерности

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \mathbb{E}(X_3) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & Cov(X_2, X_3) \\ Cov(X_3, X_1) & Cov(X_3, X_2) & Var(X_3) \end{pmatrix}$$



Резюме

- Нормальное распределение довольно часто встречается на практике



Резюме

- Нормальное распределение довольно часто встречается на практике
- Важно научится хорошо с ним уметь работать



Ядерные оценки плотности



Гистограмма

Гистограмма – простейший непараметрический способ получить оценку плотности распределения

Непараметрический, так как не выдвигается никаких предположений о виде распределения



Гистограмма

Гистограмма – простейший непараметрический способ получить оценку плотности распределения

Непараметрический, так как не выдвигается никаких предположений о виде распределения

Сколько значений попали в текущий отрезок (бин)



Гистограмма

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}],$$



Гистограмма

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}],$$

Скобки – индикаторная
функция:

[правда] = 1

[ложь] = 0

Размер бина (длина отрезка):

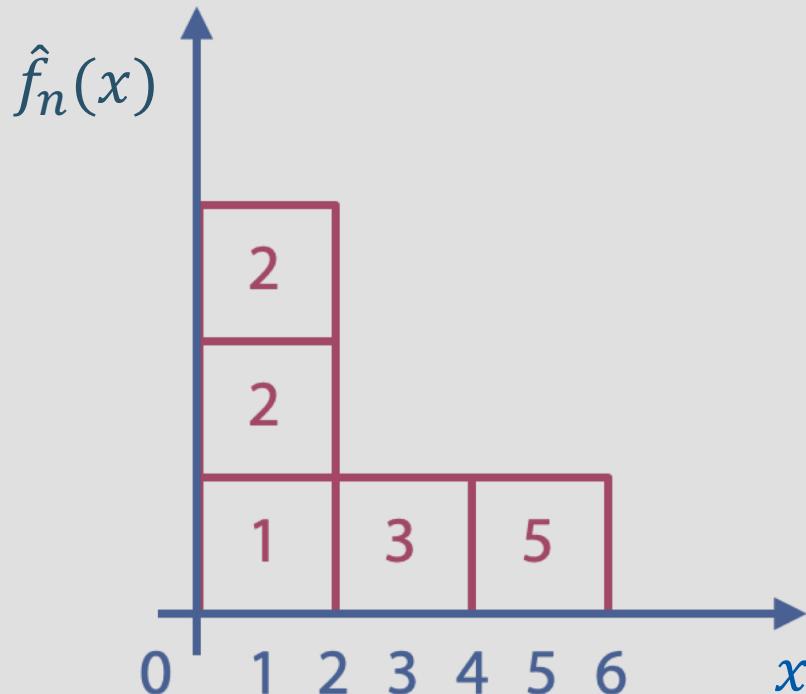
$$h = z_{k+1} - z_k$$



Гистограмма

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}],$$



Скобки – индикаторная функция:

$$[\text{правда}] = 1$$

$$[\text{ложь}] = 0$$

Размер бина (длина отрезка):

$$h = z_{k+1} - z_k$$



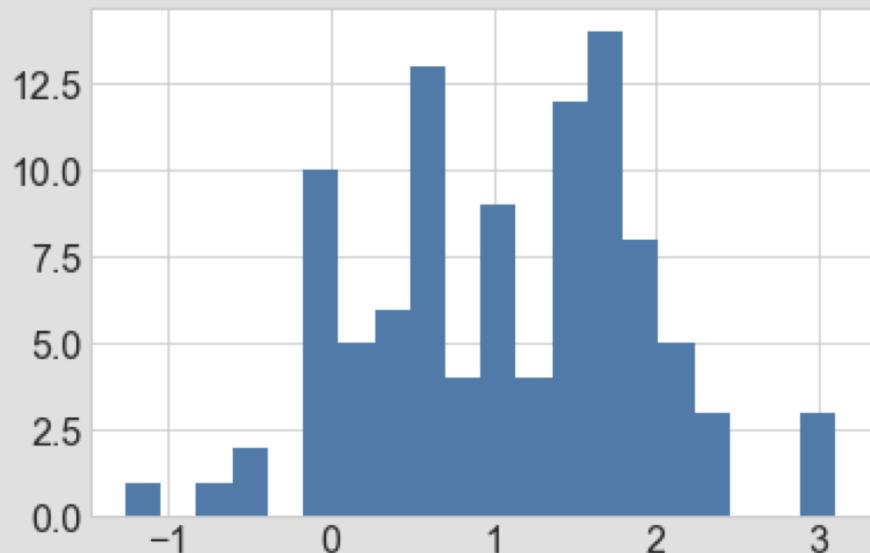
Гистограмма

- Длина интервала h (бина) должна быть достаточно большой, чтобы в него попало существенное число наблюдений

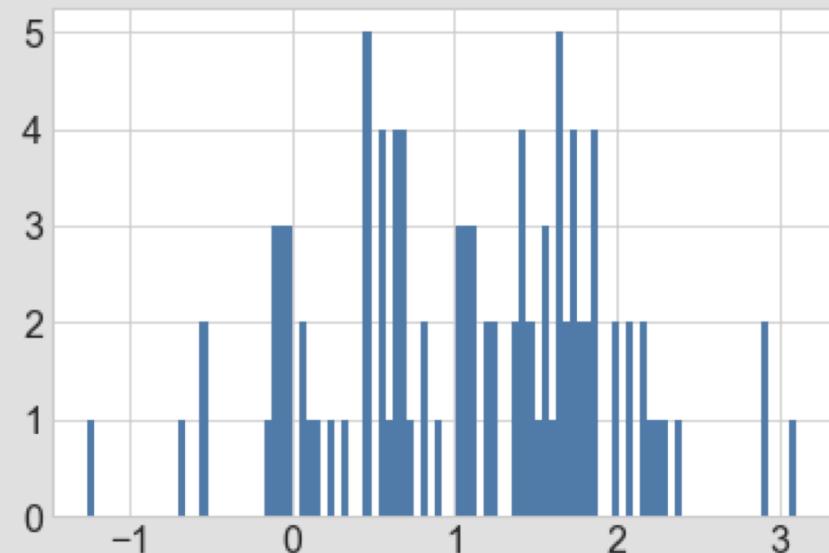


Гистограмма

- Длина интервала h (бина) должна быть достаточно большой, чтобы в него попало существенное число наблюдений
- И при этом достаточно малой, чтобы не потерять важные детали распределения



20 бинов

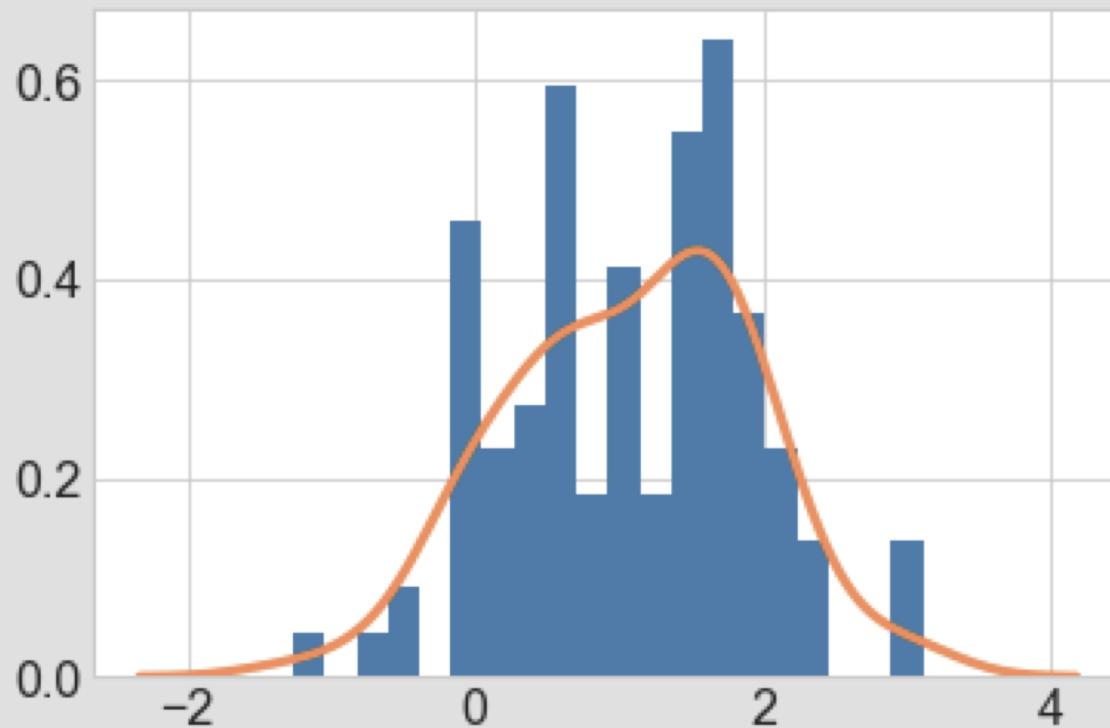


100 бинов



Ядерные оценки плотности

- Ядерные оценки плотности позволяют получить график плотности в виде непрерывной кривой



Ядерные оценки плотности

Гистограмма:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}]$$



Ядерные оценки плотности

Гистограмма:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}]$$

↑ ↑
границы
фиксированы



Ядерные оценки плотности

Гистограмма:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}]$$

↑ ↑
границы
фиксированы

Улучшение:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$

h – ширина окна



Ядерные оценки плотности

Гистограмма:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}]$$

↑
↑
границы
фиксированы

Улучшение:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$

↑
↑
скользящие
границы

h – ширина окна



Ядерные оценки плотности

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$



Ядерные оценки плотности

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$

- Перепишем оценку в более удобном виде:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad K(z) = \left[-\frac{1}{2} < z \leq \frac{1}{2}\right]$$



Ядерные оценки плотности

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$

- Перепишем оценку в более удобном виде:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad K(z) = \left[-\frac{1}{2} < z \leq \frac{1}{2}\right]$$

- Такая функция придаёт каждому наблюдению вес либо 0 либо 1



Ядерные оценки плотности

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$

- Перепишем оценку в более удобном виде:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad K(z) = \left[-\frac{1}{2} < z \leq \frac{1}{2}\right]$$

- Такая функция придаёт каждому наблюдению вес либо 0 либо 1
- Чем дальше наблюдение от центра, тем меньше должен быть его вес, нужна другая функция



Ядерные оценки плотности

Чтобы взвесить наблюдения, функцию $K(z)$ (ядерную функцию) выбирают так, чтобы:

- Она была неотрицательной



Ядерные оценки плотности

Чтобы взвесить наблюдения, функцию $K(z)$ (ядерную функцию) выбирают так, чтобы:

- Она была неотрицательной
- $\int K(z) dz = 1$ (сумма всех весов равна 1)



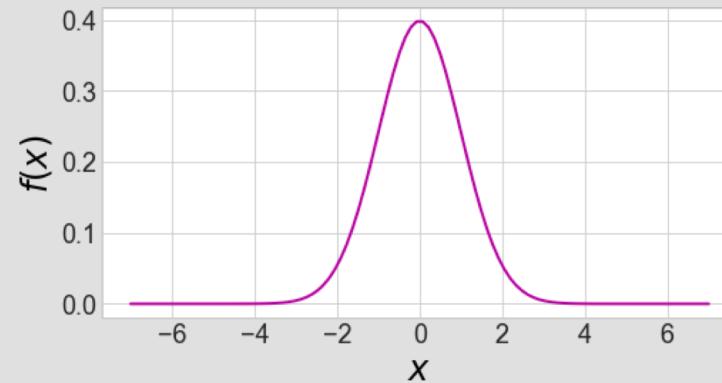
Ядерные оценки плотности

Чтобы взвесить наблюдения, функцию $K(z)$ (ядерную функцию) выбирают так, чтобы:

- Она была неотрицательной
- $\int K(z) dz = 1$ (сумма всех весов равна 1)

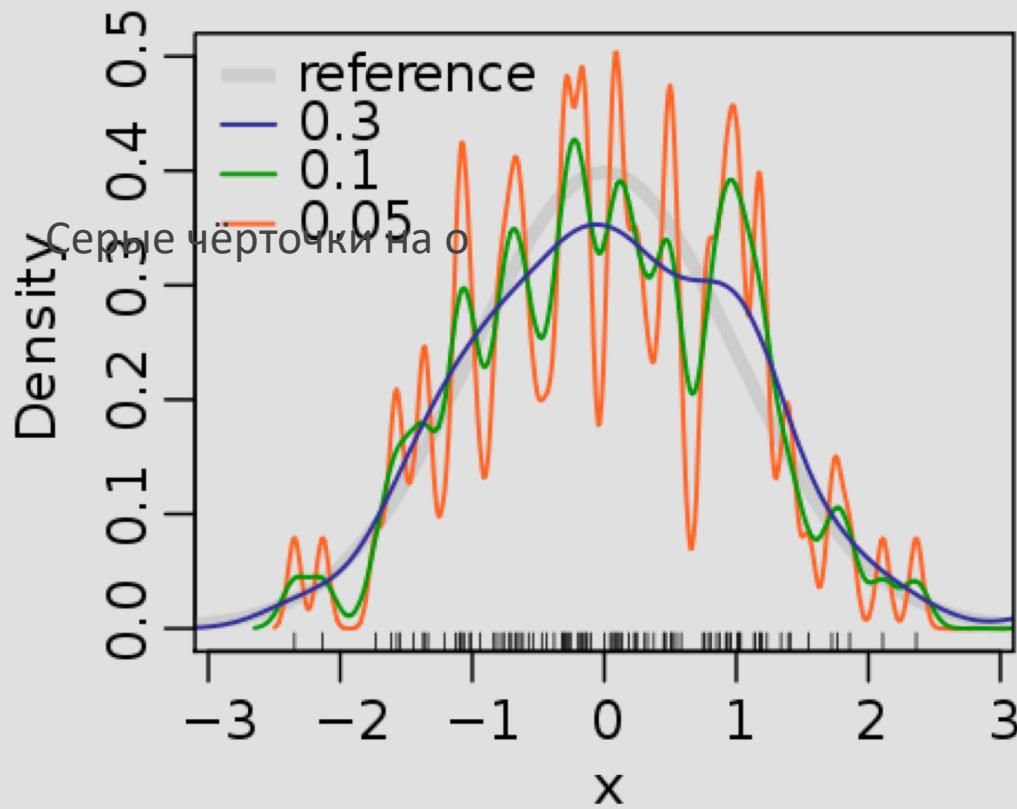
Ядерные функции бывают разными, чаще всего используют Гауссовское ядро:

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



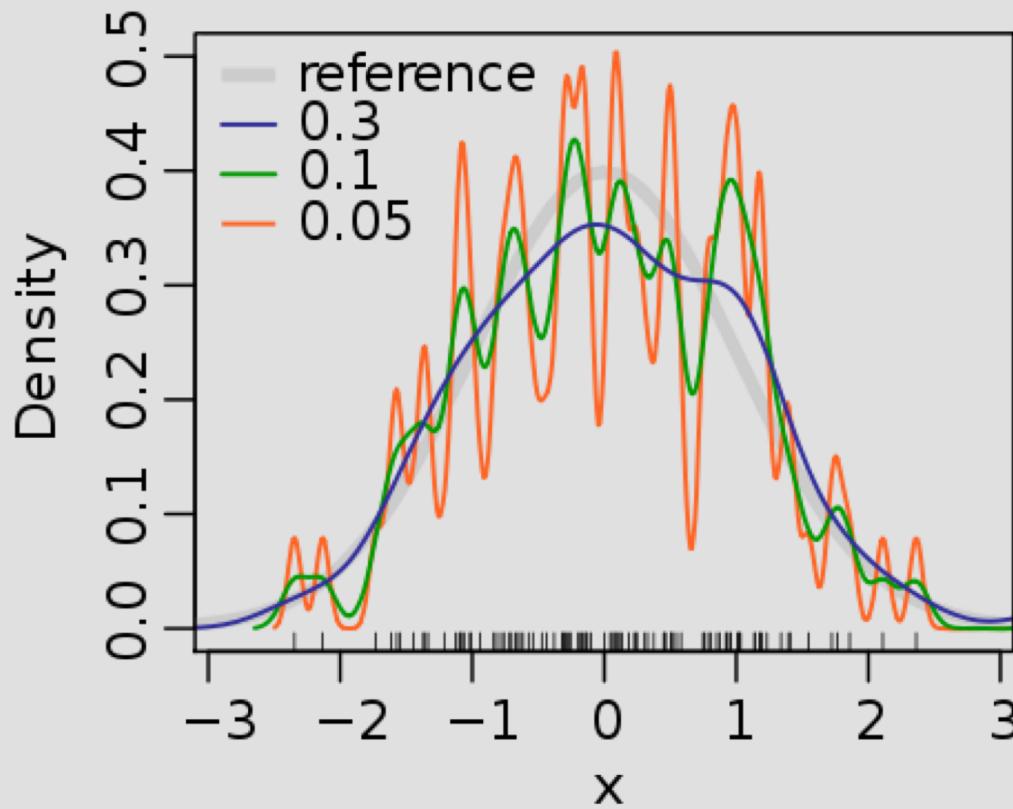
Пример

- Серые чёрточки на оси x – наблюдения



Пример

- Серые чёрточки на оси x – наблюдения
- Величина параметра h (ширина окна) влияет на то, насколько гладкой получается итоговая кривая



wikipedia.org



Резюме

- Простейший способ построить непараметрическую оценку плотности распределения – гистограмма



Резюме

- Простейший способ построить непараметрическую оценку плотности распределения – гистограмма
- Для того, что получить непрерывную оценку плотности распределения используют ядерное сглаживание



Проблемы с данными: пропуски и выбросы

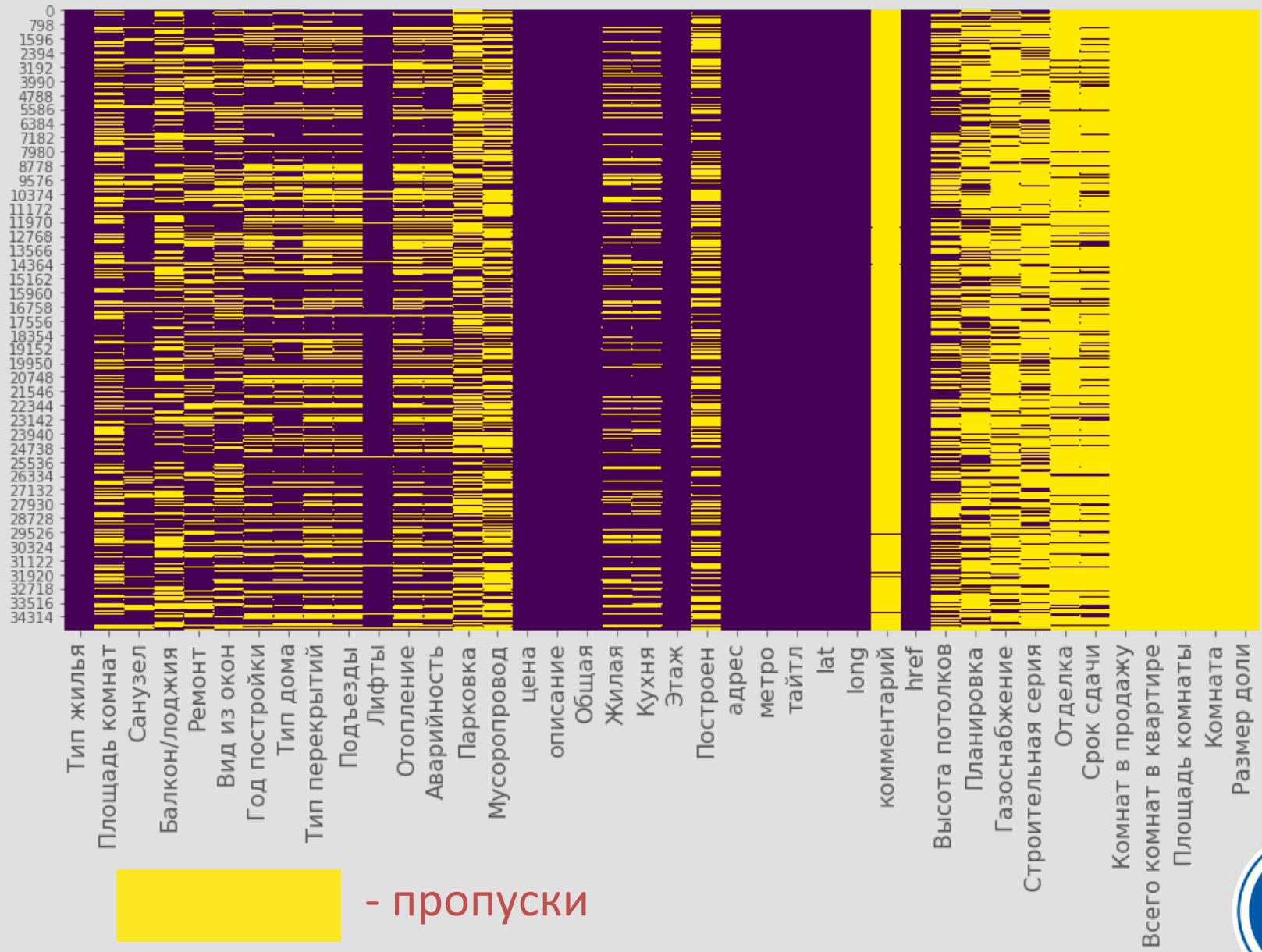


Пропуски в данных

- Большинство реальных данных имеют пропущенные значения
 - Ошибки при записи или измерении
 - Невозможность сбора данных



Пропуски в данных



Борьба с пропусками

- Удаление объектов с пропущенными значениями (строки)



Борьба с пропусками

- Удаление объектов с пропущенными значениями (строки)
- Удаление признаков с большим числом пропусков (столбцы)



Борьба с пропусками

- Удаление объектов с пропущенными значениями (строки)
- Удаление признаков с большим числом пропусков (столбцы)
- Такая стратегия может привести к проблемам:
 - У нас останется очень мало данных
 - В данных может возникнуть искажение (смещение)



Борьба с пропусками

- Удаление объектов с пропущенными значениями (строки)
- Удаление признаков с большим числом пропусков (столбцы)
- Такая стратегия может привести к проблемам:
 - У нас останется очень мало данных
 - В данных может возникнуть искажение (смещение)

Пример: среди пациентов масса измеряется только у тех, у кого высокое давление



Борьба с пропусками

- Чтобы не возникало искажений, нужно понимать откуда, скорее всего, возникли пропуски



Борьба с пропусками

- Чтобы не возникало искажений, нужно понимать откуда, скорее всего, возникли пропуски
- Пропуски нужно как-то заполнить



Борьба с пропусками

Простые методы:

Замена средним значением / медианой / модой



Борьба с пропусками

Простые методы:

Замена средним значением / медианой / модой

Сложные методы:

Основаны на машинном обучении, смотрят на другие примеры и пытаются предсказать что было пропущено



Борьба с пропусками

Простые методы:

Замена средним значением / медианой / модой

Сложные методы:

Основаны на машинном обучении, смотрят на другие примеры и пытаются предсказать что было пропущено

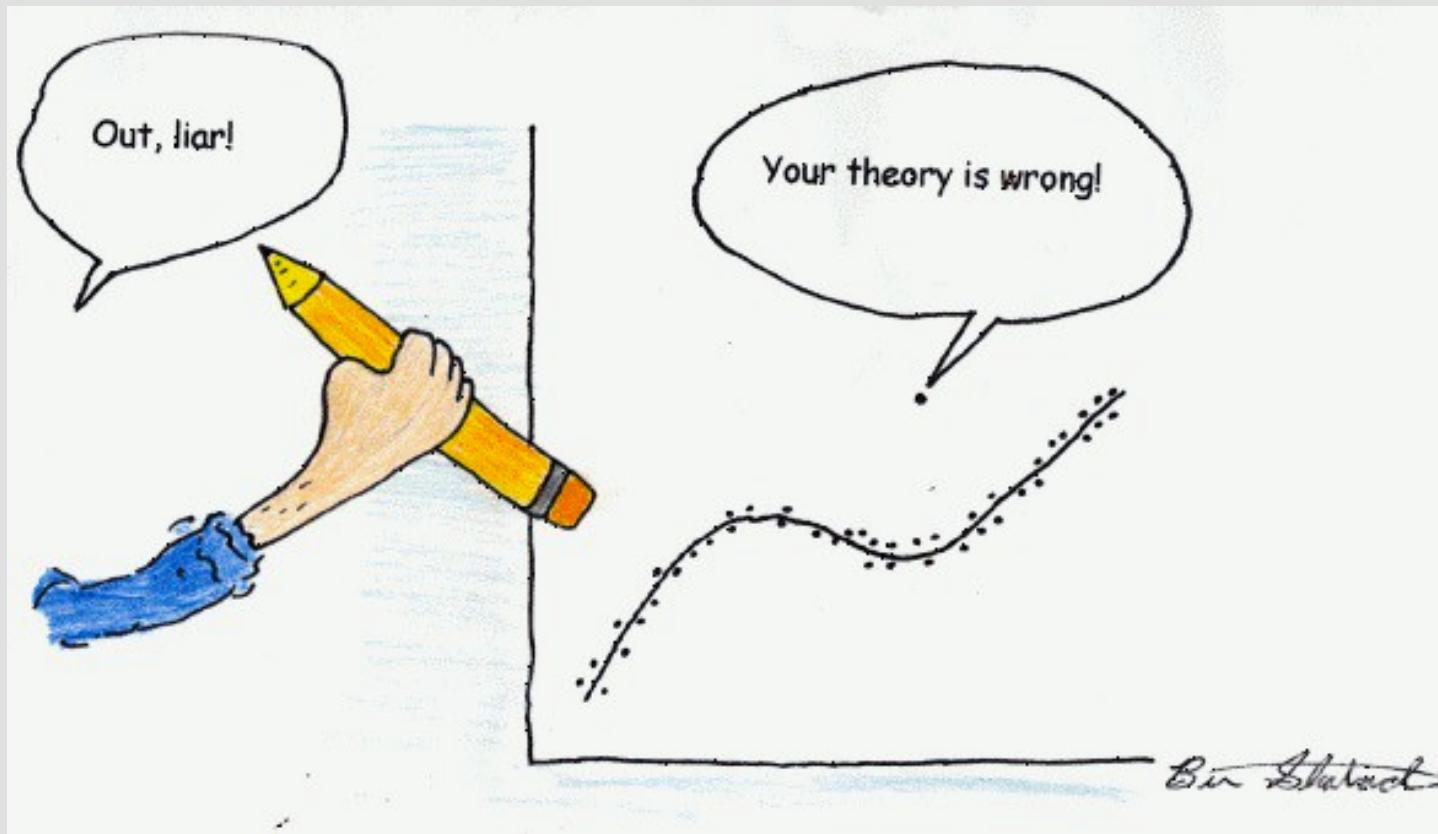


Мы чаще всего будем пользоваться простыми способами заполнения пропусков



Выбросы (outliers)

Выброс – результат измерений, который сильно выделяется на общем фоне



twitter.com/BirStatist



Проблемы из-за выбросов

Многие алгоритмы
чувствительны к выбросам
и переобучаются под них



Проблемы из-за выбросов

Многие алгоритмы
чувствительны к выбросам
и переобучаются под них

- **Пример:** среднее часто используют в качестве наивного прогноза



Среднее: \$ 80000

Медиана: \$ 30000

Высокая зарплата сильно исказит
среднее, но не медиану



Проблемы из-за выбросов

Многие алгоритмы
чувствительны к выбросам
и переобучаются под них

- **Пример:** среднее часто используют в качестве наивного прогноза
- С ним сравнивают насколько хорошо модель прогнозирует данные



Высокая зарплата сильно исказит среднее, но не медиану



Проблемы из-за выбросов

Многие алгоритмы
чувствительны к выбросам
и переобучаются под них

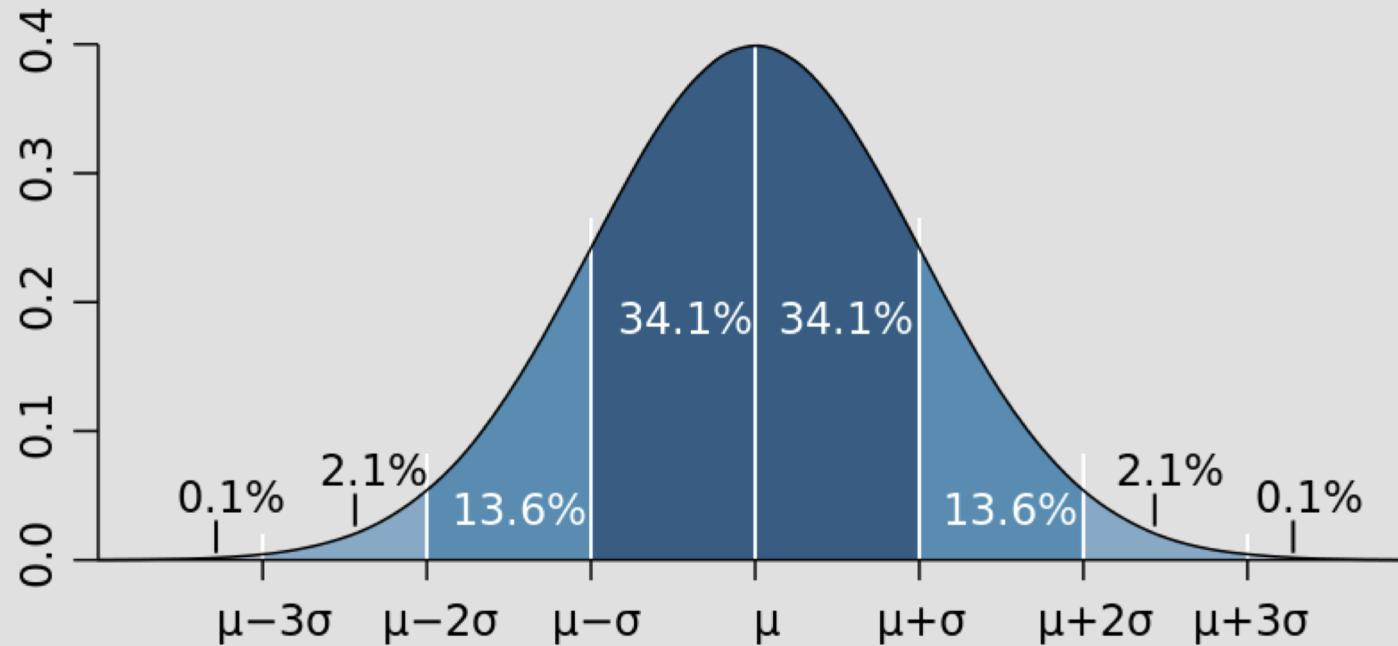
- **Пример:** среднее часто используют в качестве наивного прогноза
- С ним сравнивают насколько хорошо модель прогнозирует данные
- При наличии выброса итоговая статистика будет искажена



Поиск выбросов

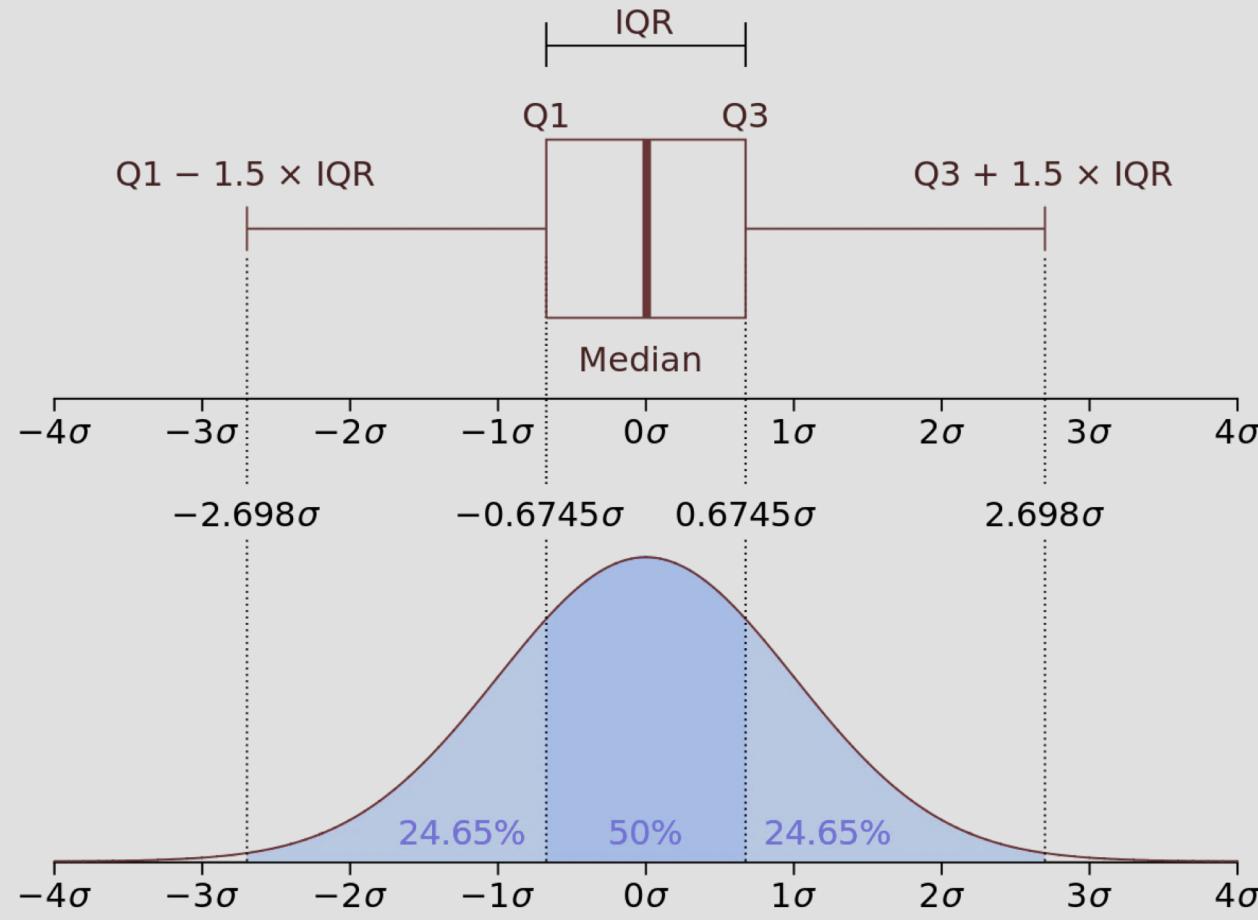
Правило трёх сигм: если данные распределены нормально и наблюдение оказалось за пределами интервала в три сигмы, это выброс

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$$



Поиск выбросов

Правило 1.5 интерквантильных размахов (IQR): если наблюдение оказалось за пределами выделенного интервала, оно выброс. Иногда используют 3 IQR



Поиск выбросов

- Также выбросы можно искать с помощью различных более сложных алгоритмов машинного обучения

► <https://dyakonov.org/2017/04/19/поиск-аномалий-anomaly-detection/>



Поиск выбросов

- Также выбросы можно искать с помощью различных более сложных алгоритмов машинного обучения
- Многие алгоритмы устойчивы к выбросам

► <https://dyakonov.org/2017/04/19/поиск-аномалий-anomaly-detection/>



Поиск выбросов

- Также выбросы можно искать с помощью различных более сложных алгоритмов машинного обучения
- Многие алгоритмы устойчивы к выбросам
- **Пример:** если бы мы строили наивный прогноз на основе медианы, он был бы устойчивым к выбросам и неискажился бы, как среднее

► <https://dyakonov.org/2017/04/19/поиск-аномалий-anomaly-detection/>



Поиск выбросов

- Также выбросы можно искать с помощью различных более сложных алгоритмов машинного обучения
- Многие алгоритмы устойчивы к выбросам
- **Пример:** если бы мы строили наивный прогноз на основе медианы, он был бы устойчивым к выбросам и неискажился бы, как среднее
- Можно придумывать статистики, основанные на медиане, которые будут нечувствительны к выбросам

► <https://dyakonov.org/2017/04/19/поиск-аномалий-anomaly-detection/>



Резюме

- Пропуски и выбросы – проблемы в данных, с которыми надо бороться



Резюме

- Пропуски и выбросы – проблемы в данных, с которыми надо бороться
- Пропуски, если их мало, пытаются заполнять с помощью разных алгоритмов



Резюме

- Пропуски и выбросы – проблемы в данных, с которыми надо бороться
- Пропуски, если их мало, пытаются заполнять с помощью разных алгоритмов
- Выбросы либо сглаживают, либо выбрасывают из рассмотрения



Преобразование Бокса-Кокса



Длинные хвосты

- Выбросы связаны с шумом в данных



Длинные хвосты

- Выбросы связаны с шумом в данных
- Иногда данные имеют не очень удобное распределение (длинные хвосты)



Длинные хвосты

- Выбросы связаны с шумом в данных
- Иногда данные имеют не очень удобное распределение (длинные хвосты)
- Из-за этого с ними сложно работать стандартными методами

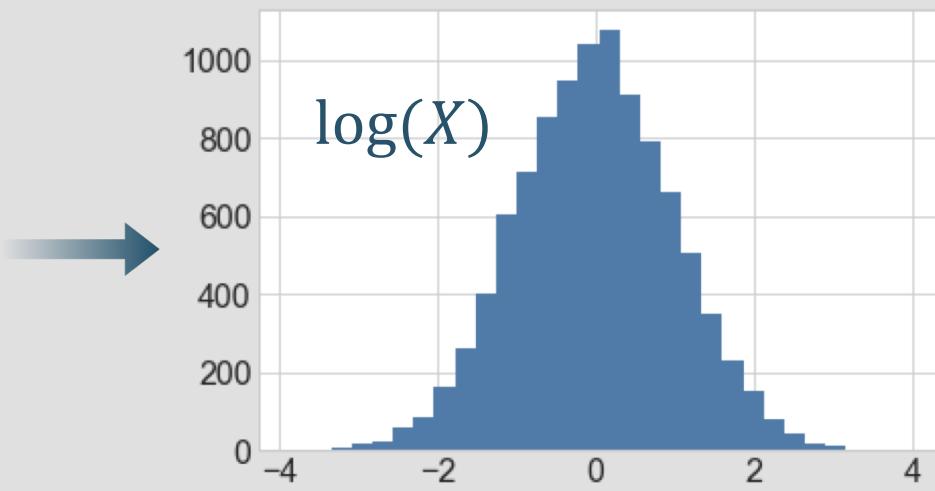
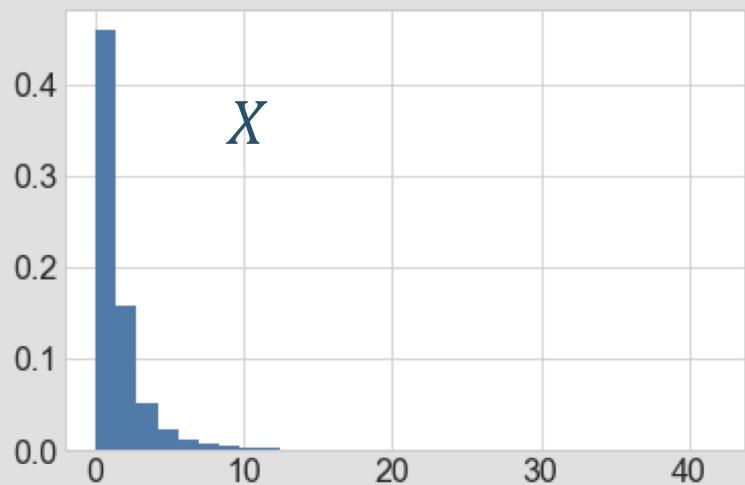


Длинные хвосты

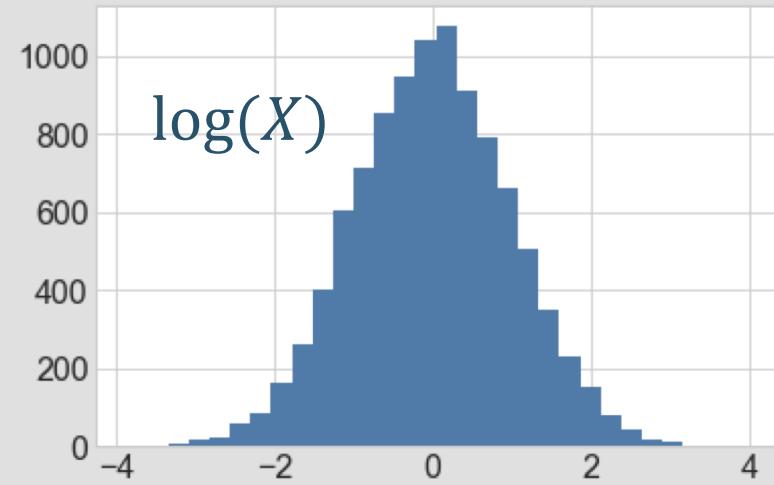
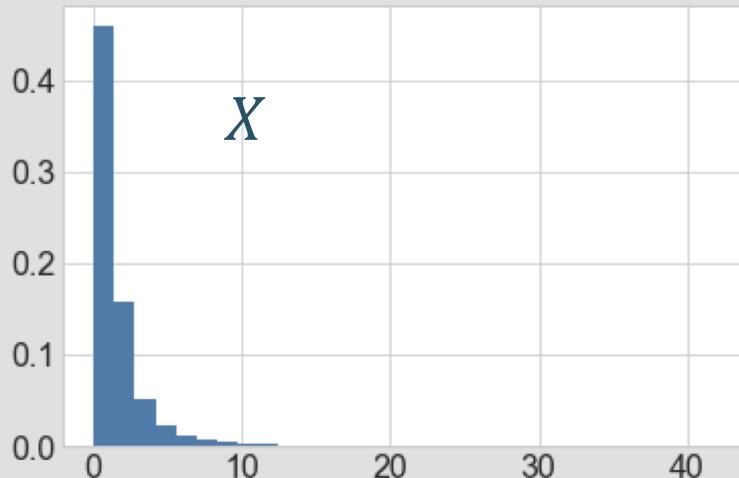
- Выбросы связаны с шумом в данных
- Иногда данные имеют не очень удобное распределение (длинные хвосты)
- Из-за этого с ними сложно работать стандартными методами
- Чтобы с ними было удобнее работать, данные можно сгладить



Логарифмирование



Логарифмирование



Логарифмирование значений позволяет
сгладить хвосты



Логарифмирование и нормальность

- Логарифмирование помогает сгладить длинные хвосты
- и получить куполообразное распределение



Логарифмирование и нормальность

- Логарифмирование помогает сгладить длинные хвосты и получить куполообразное распределение
- Если в результате логарифмирования случайной величины получается нормальное распределение, такая случайная величина называется логнормальной

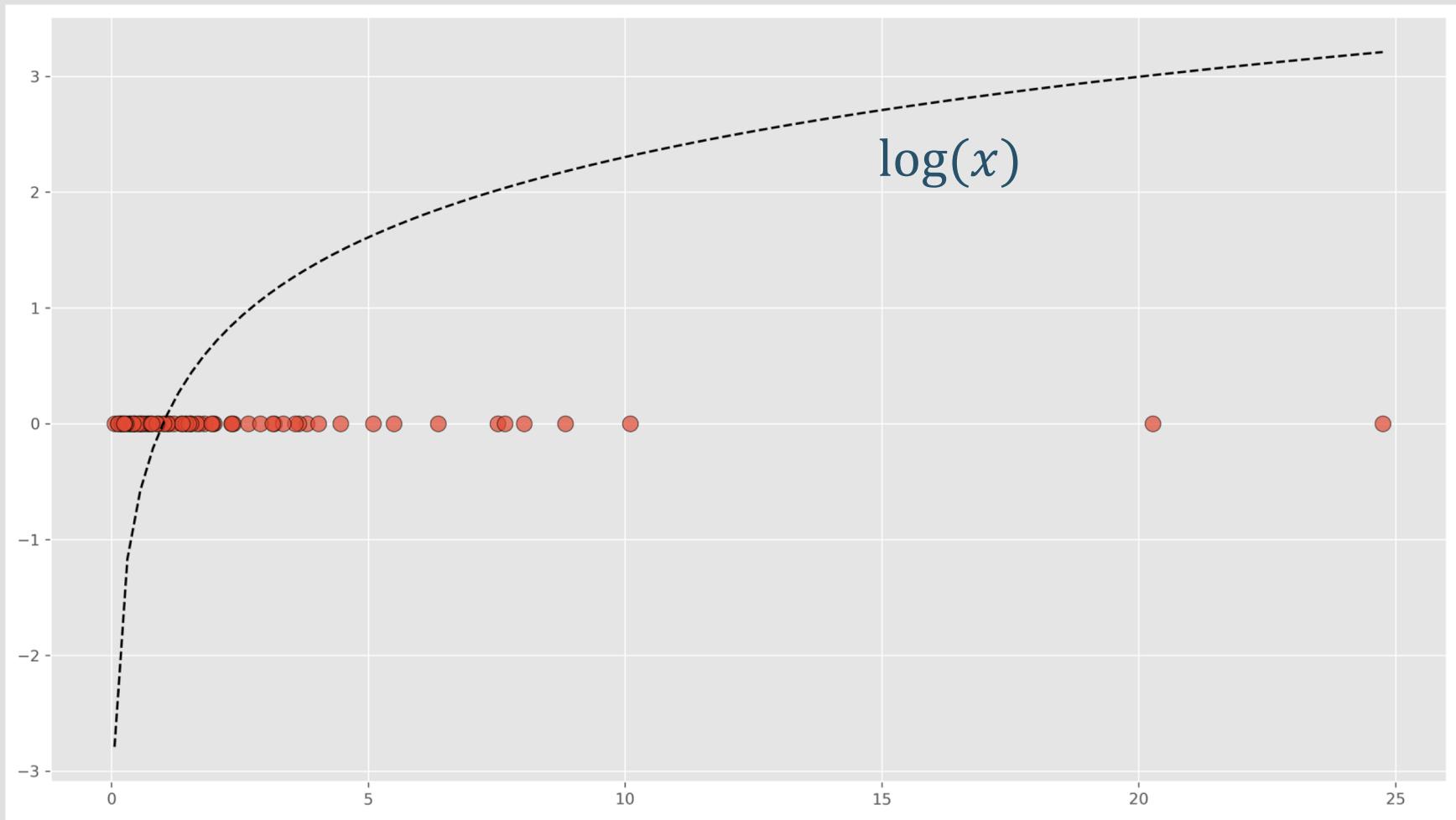


Логарифмирование и нормальность

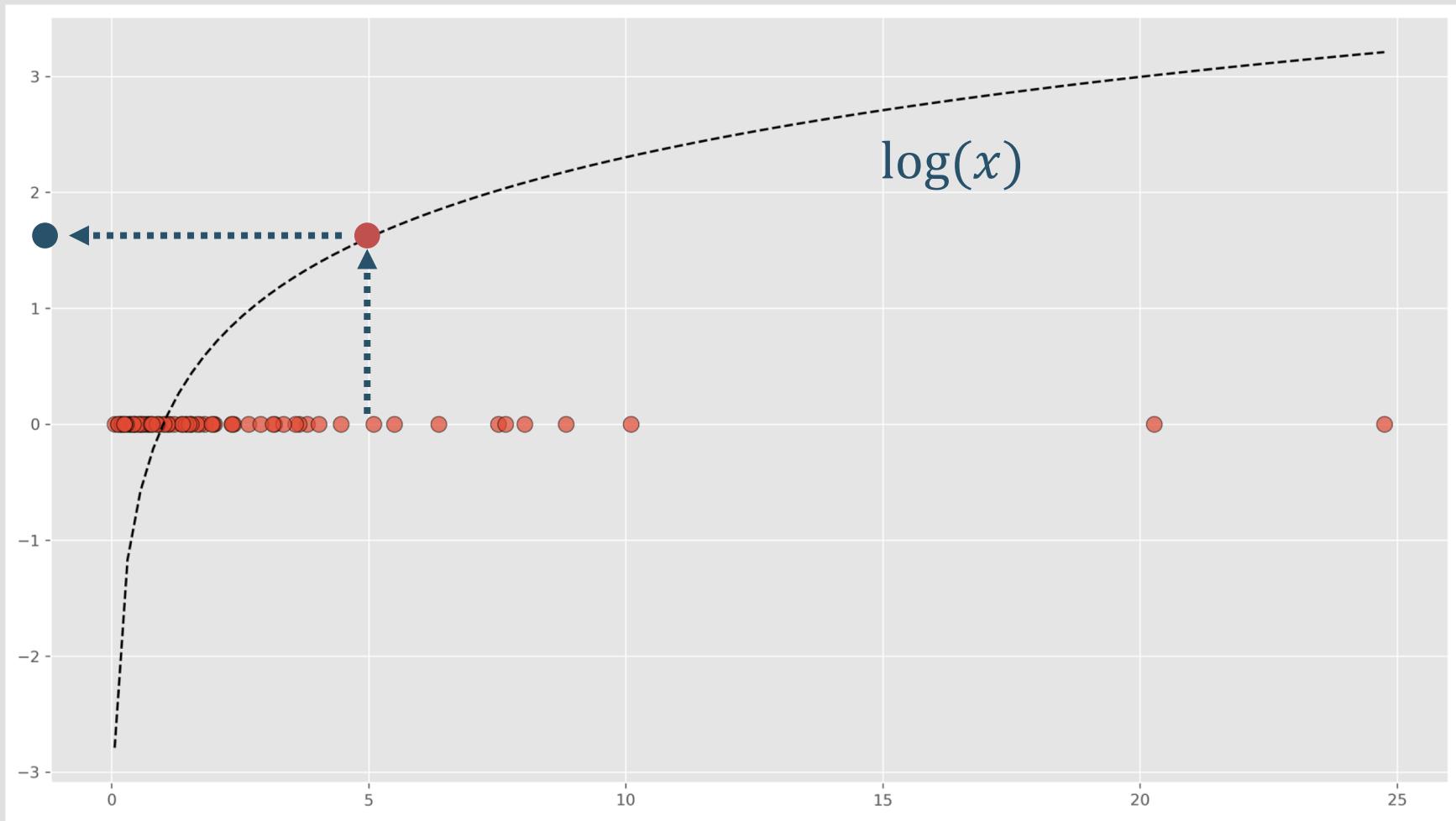
- Логарифмирование помогает сгладить длинные хвосты и получить куполообразное распределение
- Если в результате логарифмирования случайной величины получается нормальное распределение, такая случайная величина называется логнормальной
- Часто такой особенностью обладают цены



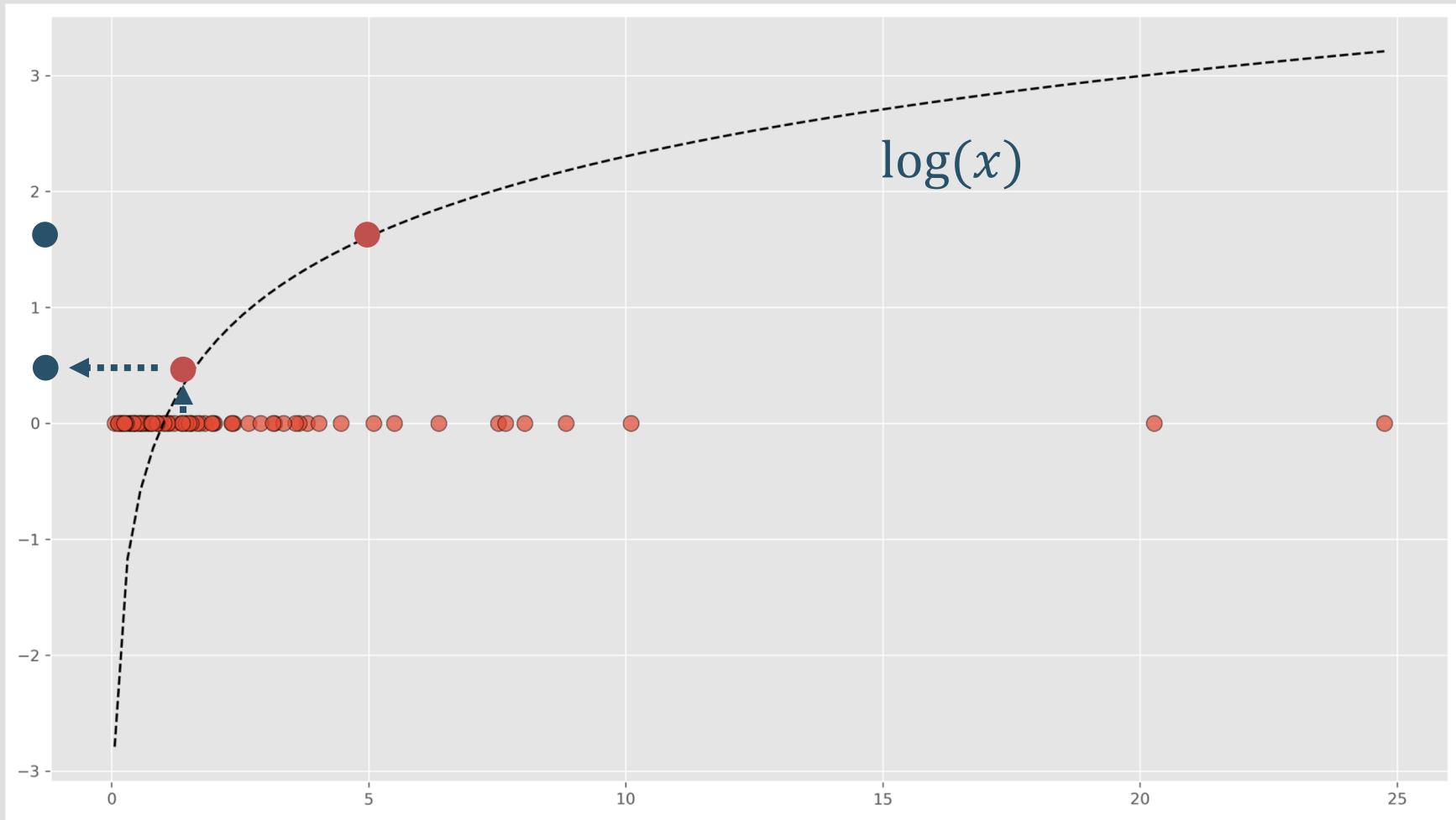
Логарифмирование



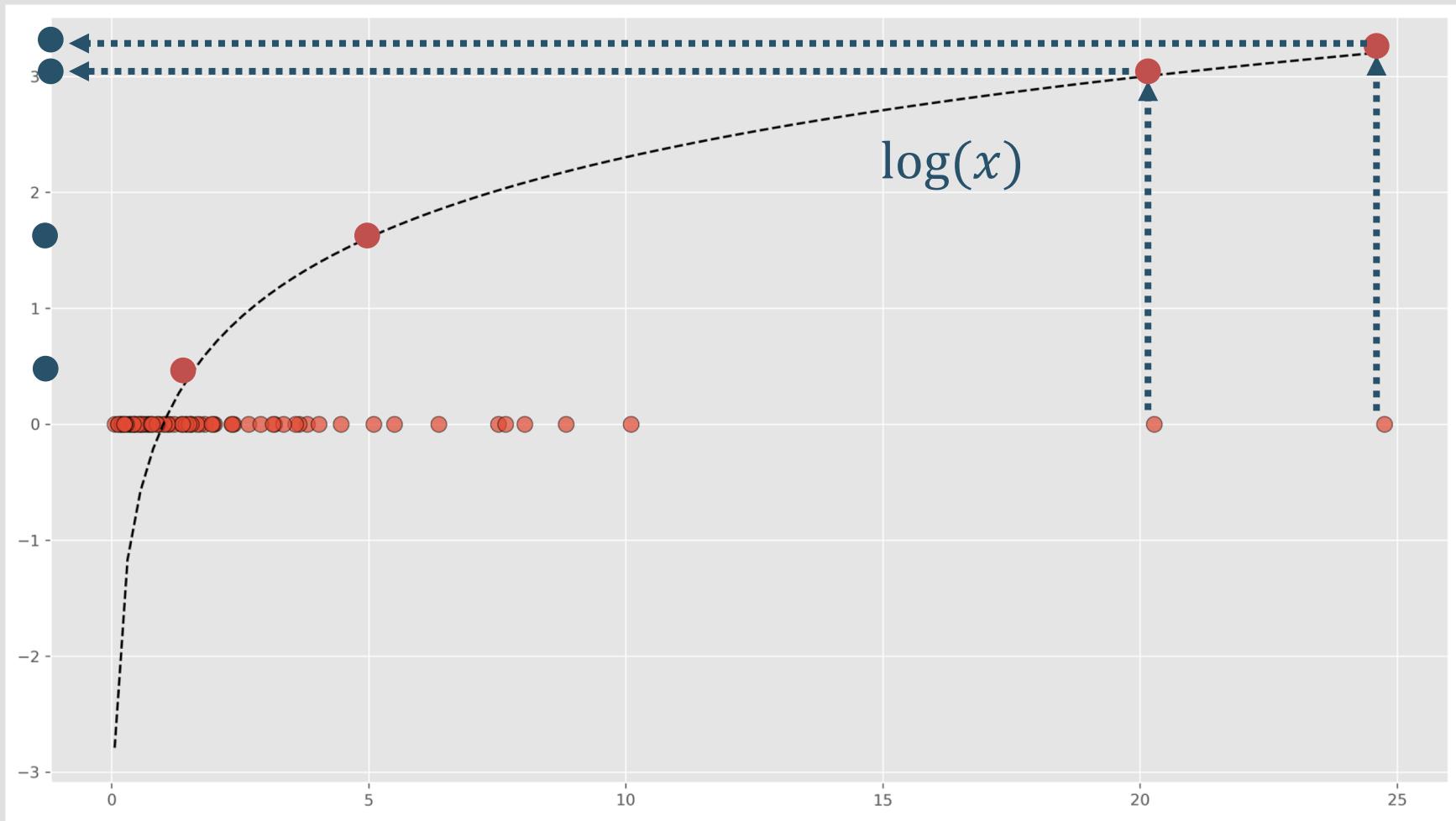
Логарифмирование



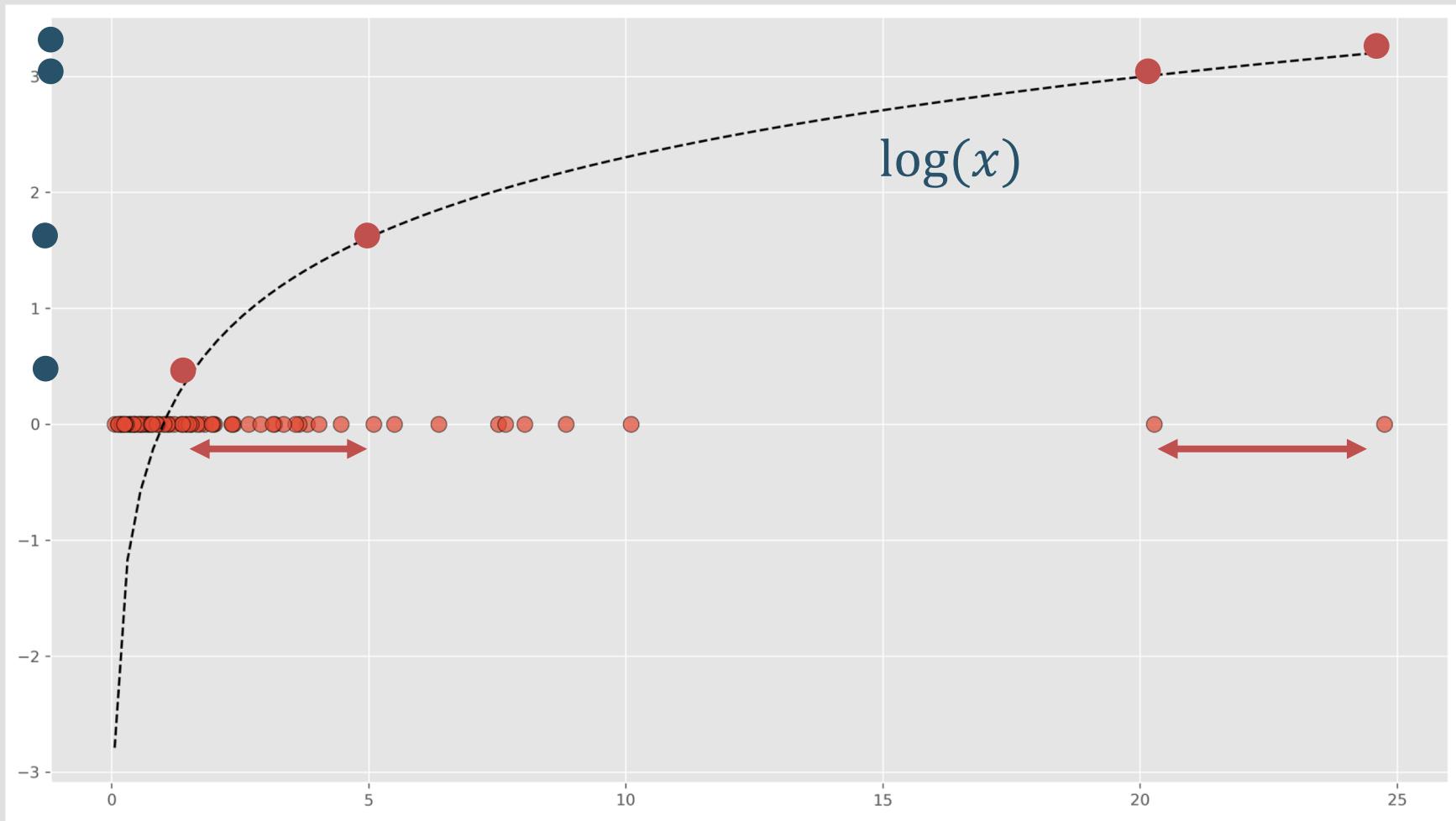
Логарифмирование



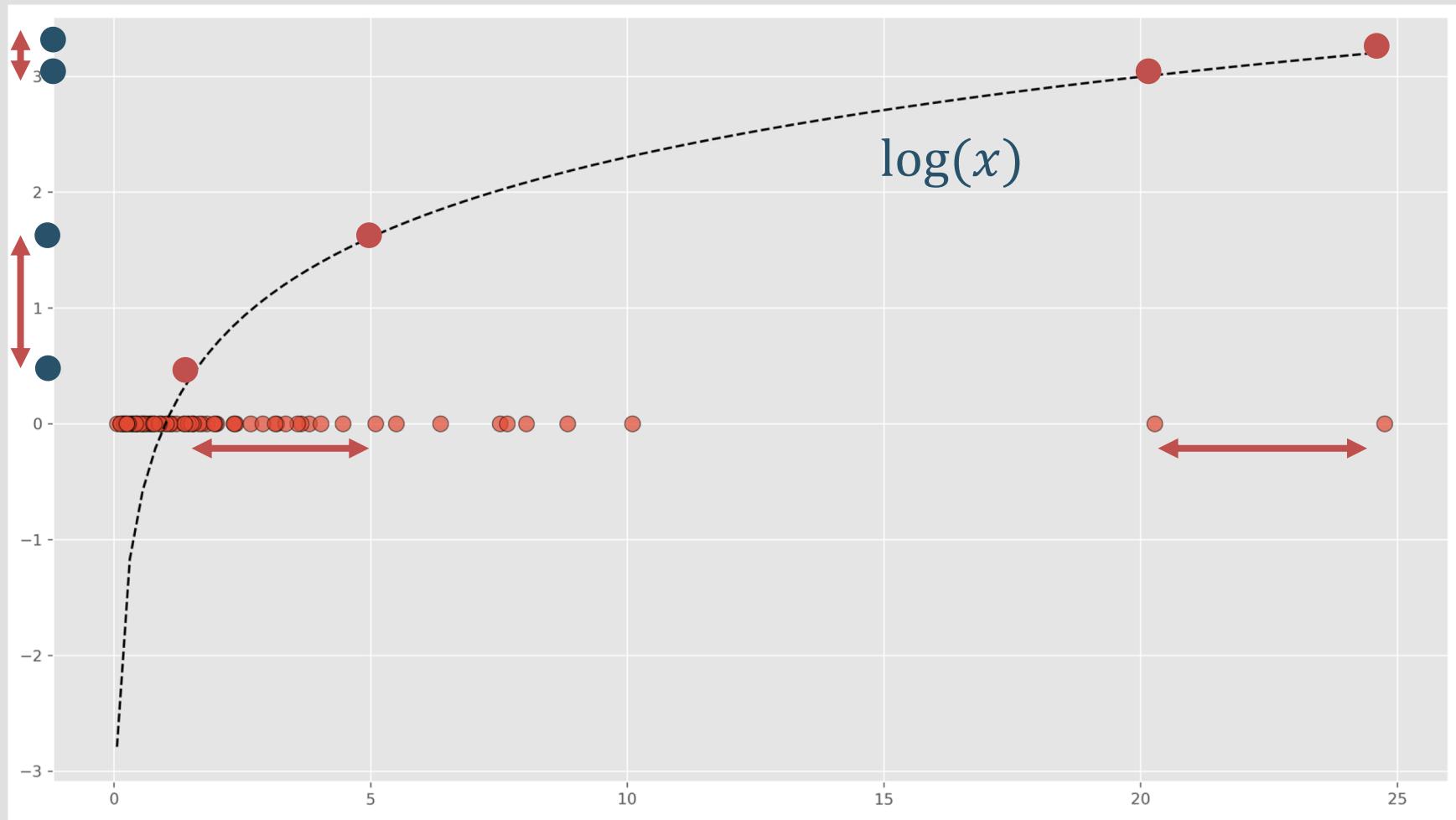
Логарифмирование



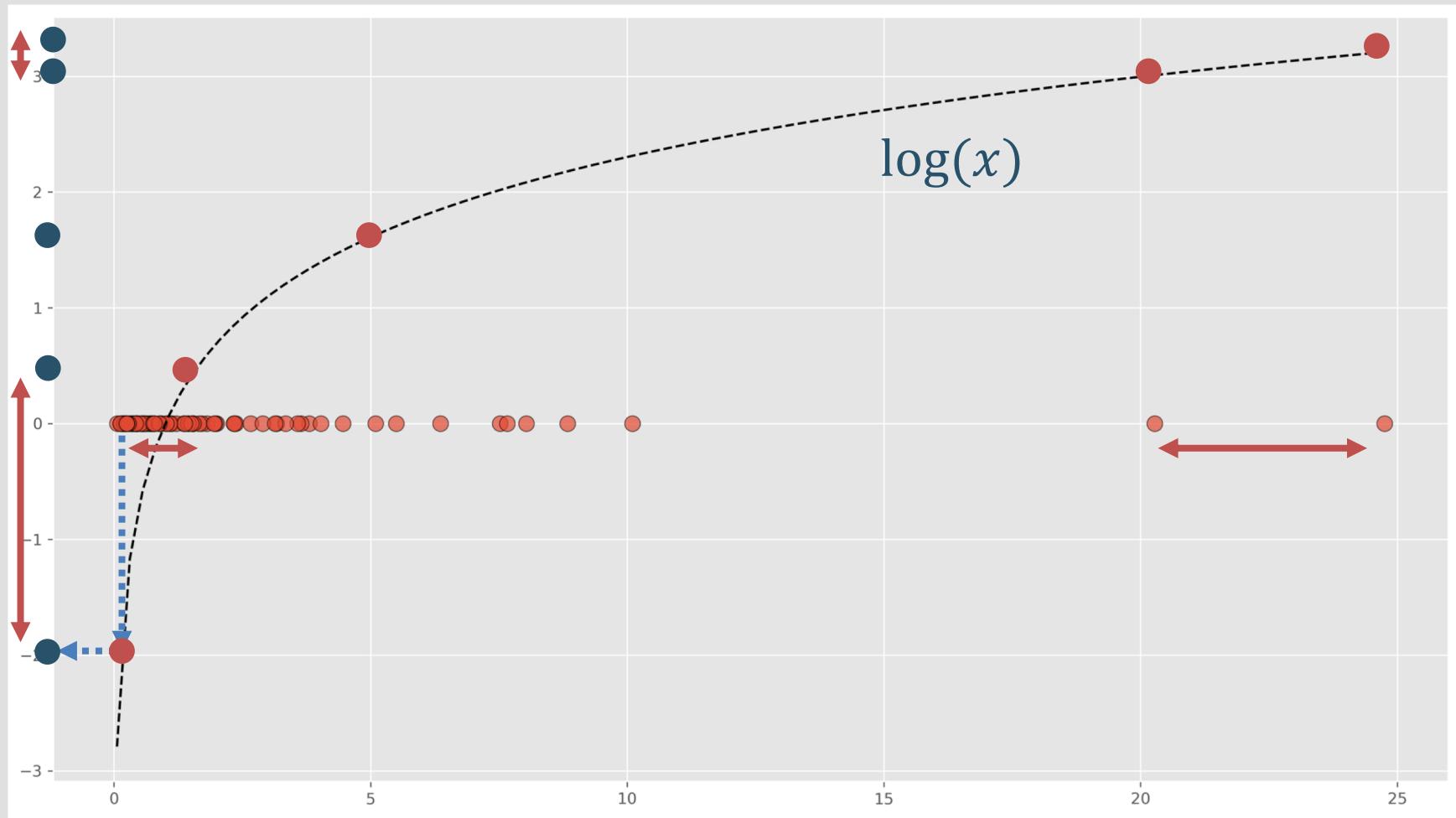
Логарифмирование



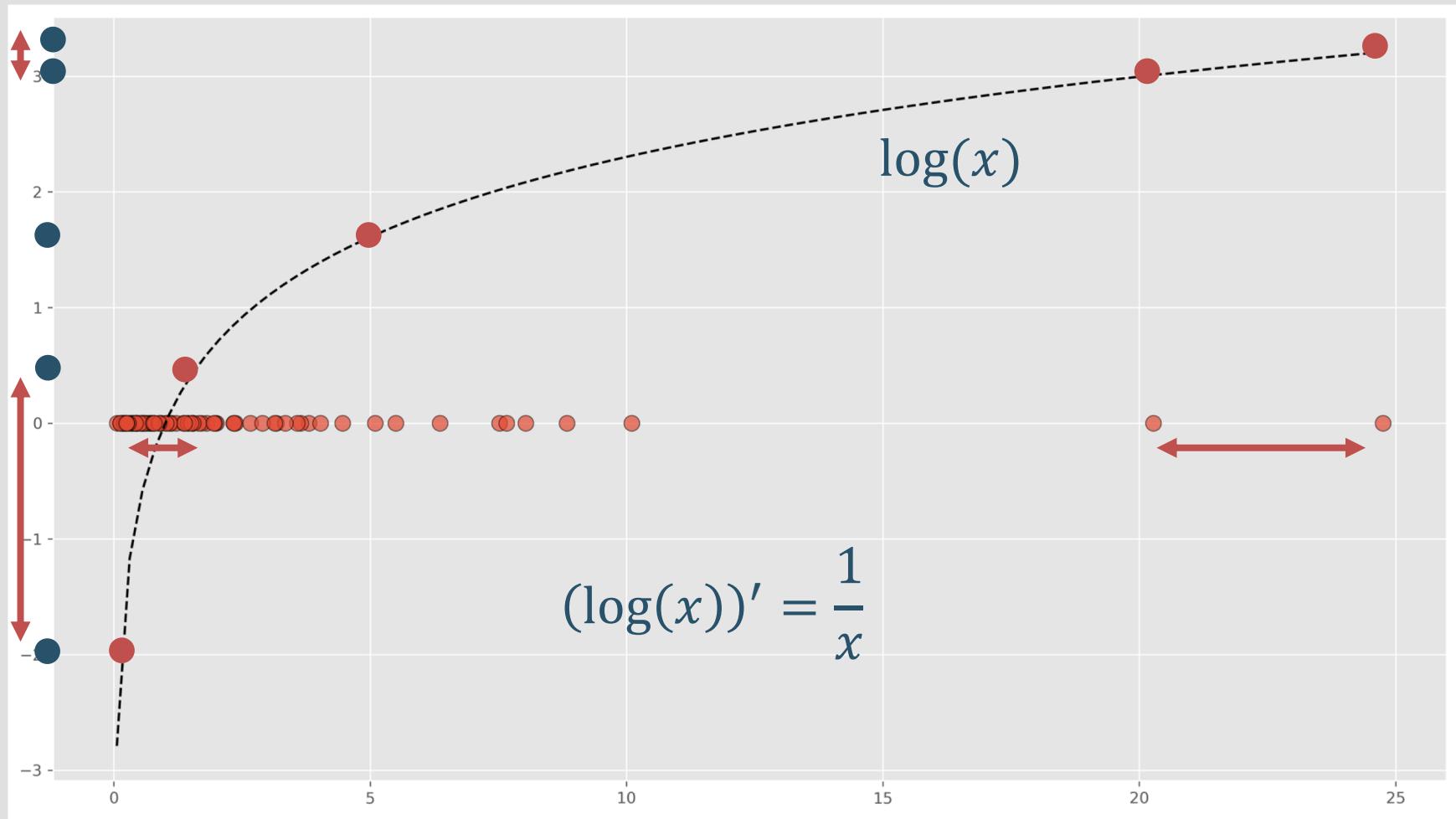
Логарифмирование



Логарифмирование



Логарифмирование



Логарифмирование

- Сгустки в начале оси абсцисс стали распределены более равномерно из-за того, что там логарифм растёт быстрее



Логарифмирование

- Сгустки в начале оси абсцисс стали распределены более равномерно из-за того, что там логарифм растёт быстрее
- Расстояние между точками с большими значениями стало меньше, так как там логарифм растёт медленнее



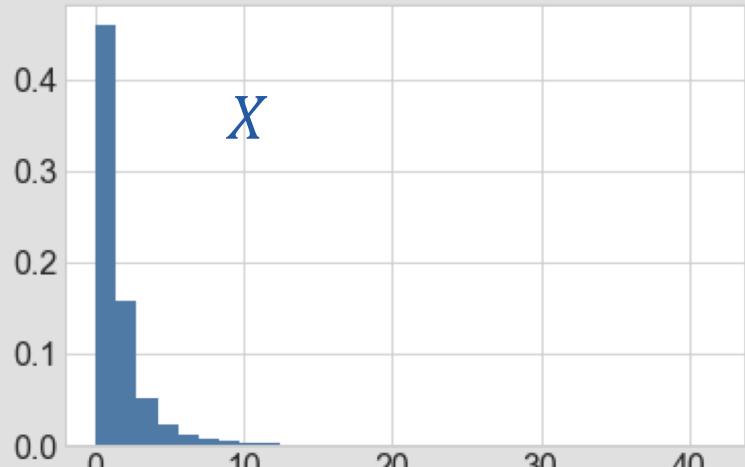
Логарифмирование

- Сгустки в начале оси абсцисс стали распределены более равномерно из-за того, что там логарифм растёт быстрее
- Расстояние между точками с большими значениями стало меньше, так как там логарифм растёт медленнее
- Чем правее мы движемся, тем медленнее растёт логарифм, скорость его роста это:

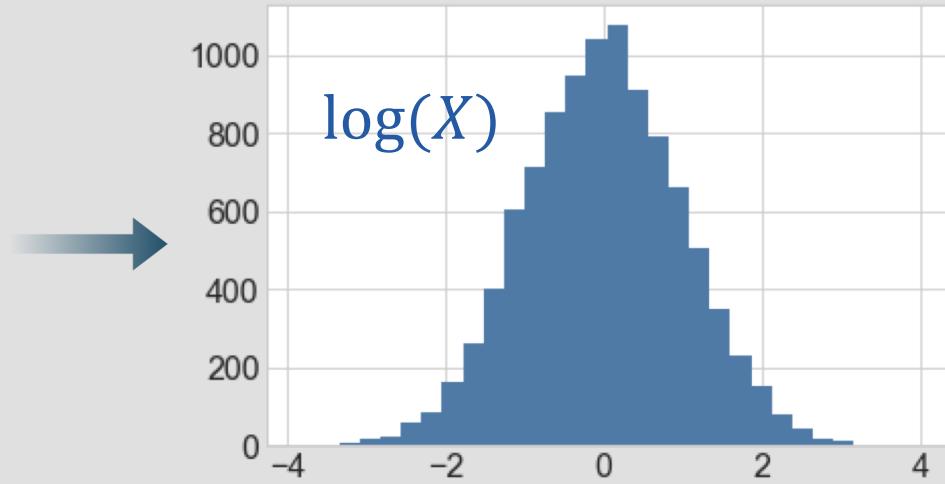
$$(\log(x))' = \frac{1}{x}$$



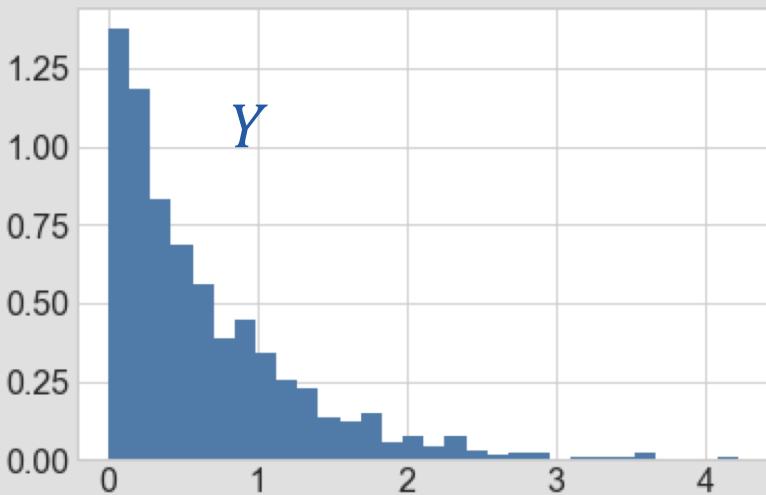
Повторим успех?



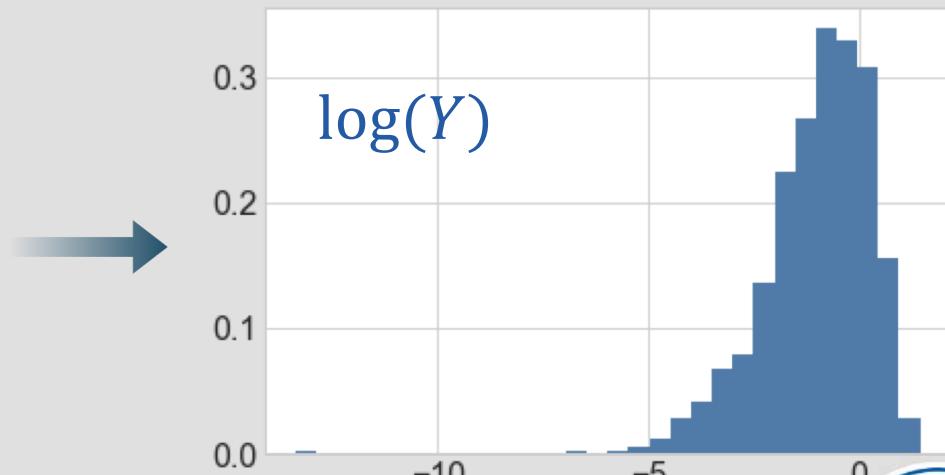
Логнормальное



$\log(X)$



Экспоненциальное

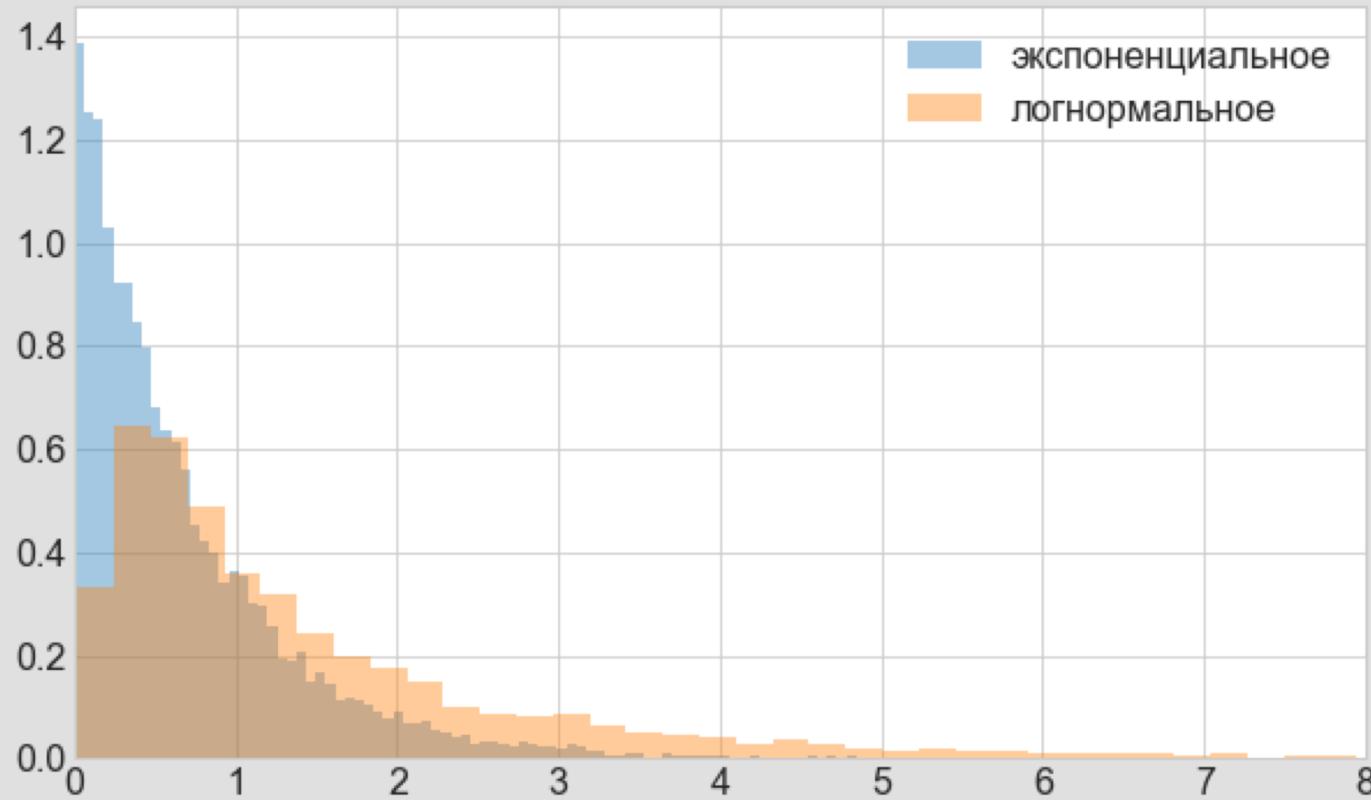


$\log(Y)$



Как повторить успех?

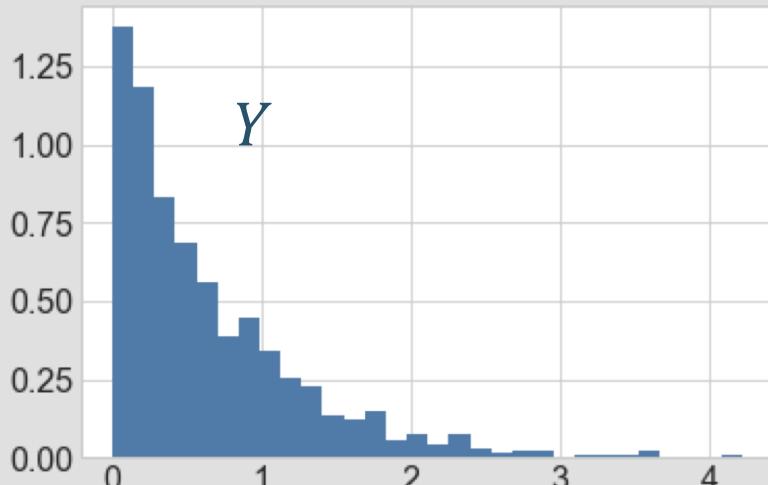
- Для экспоненциального распределения хвост легче, он не так резко убывает
- При его логарифмировании хвост появляется слева



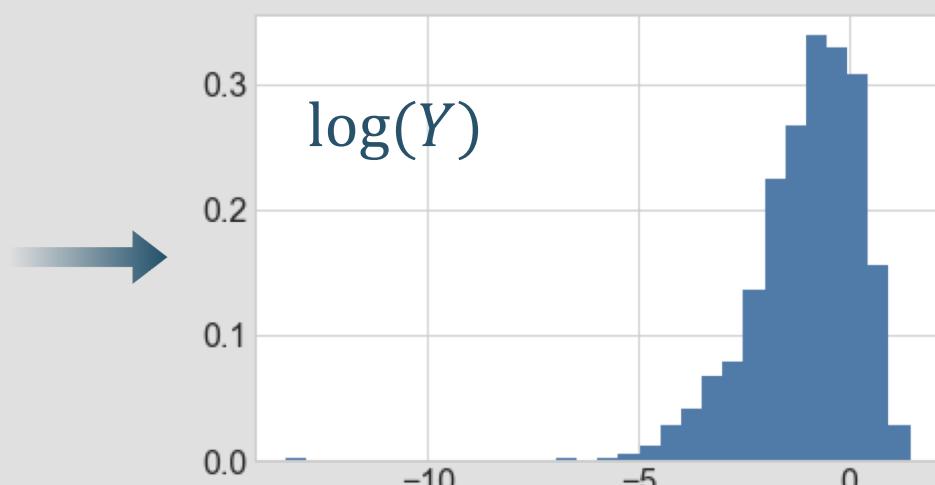
Как повторить успех?

- Нужно выбрать преобразование с другой скоростью роста, точки слева разнеслись слишком далеко

$$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{?}$$



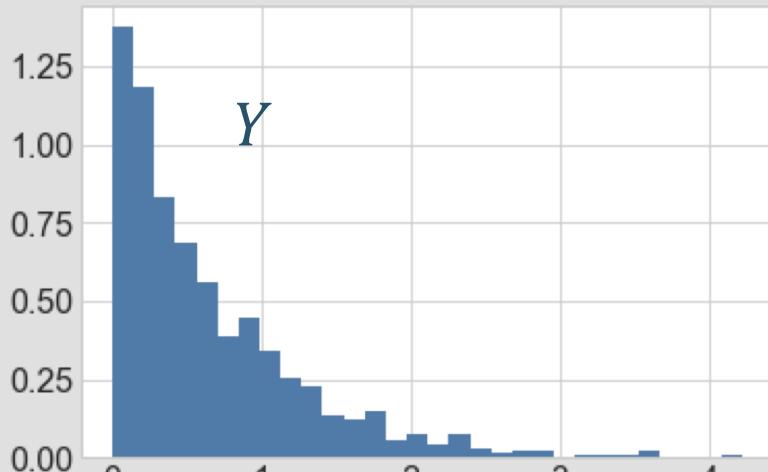
Экспоненциальное



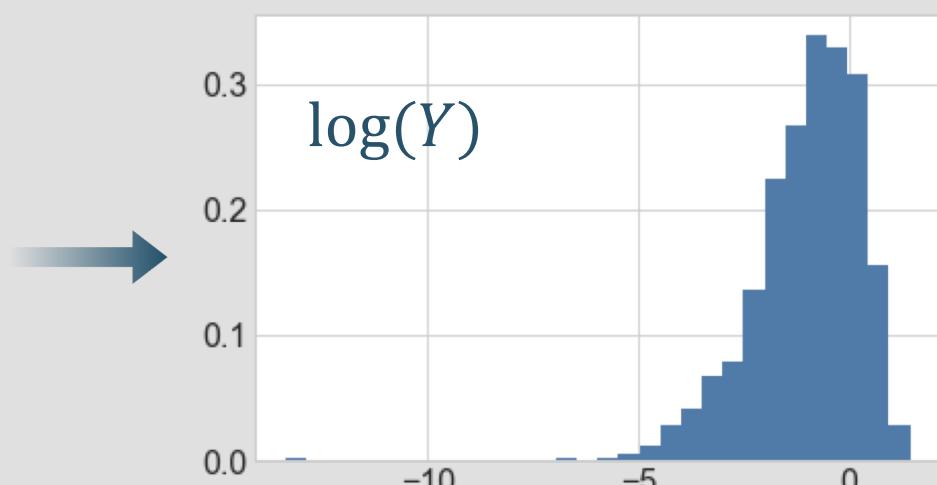
Как повторить успех?

- Нужно выбрать преобразование с другой скоростью роста, точки слева разнеслись слишком далеко

$$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x^p} \quad 0 \leq p \leq 1$$



Экспоненциальное



Как повторить успех?

- Найдём такое преобразование:

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} + const$$



Как повторить успех?

- Найдём такое преобразование:

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} + const$$

- Для удобства выберем конкретную константу и немножко перепишем формулу:

$$\int \frac{1}{x^{1-p}} dx = \frac{x^p}{p} - \frac{1}{p} = \frac{x^p - 1}{p}$$



Преобразование Бокса-Кокса

$$x_i^* = \begin{cases} \log(x), & p = 0 \\ \frac{x^p - 1}{p}, & 0 \leq p \leq 1 \end{cases}$$



Преобразование Бокса-Кокса

$$x_i^* = \begin{cases} \log(x), & p = 0 \\ \frac{x^p - 1}{p}, & 0 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

- Параметр p можно выбрать, максимизируя корреляцию между квантилями нормального распределения и x^*



Преобразование Бокса-Кокса

$$x_i^* = \begin{cases} \log(x), & p = 0 \\ \frac{x^p - 1}{p}, & 0 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

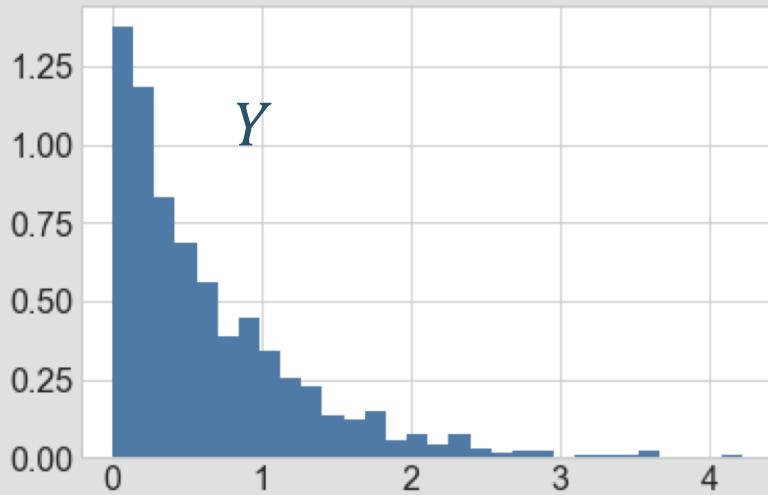
- Параметр p можно выбрать, максимизируя корреляцию между квантилями нормального распределения и x^*
- Если в выборке есть отрицательные значения, можно сдвинуть её в положительную область

$$x_i^* = \begin{cases} \log(x + \alpha), & p = 0 \\ \frac{(x + \alpha)^p - 1}{p}, & 0 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

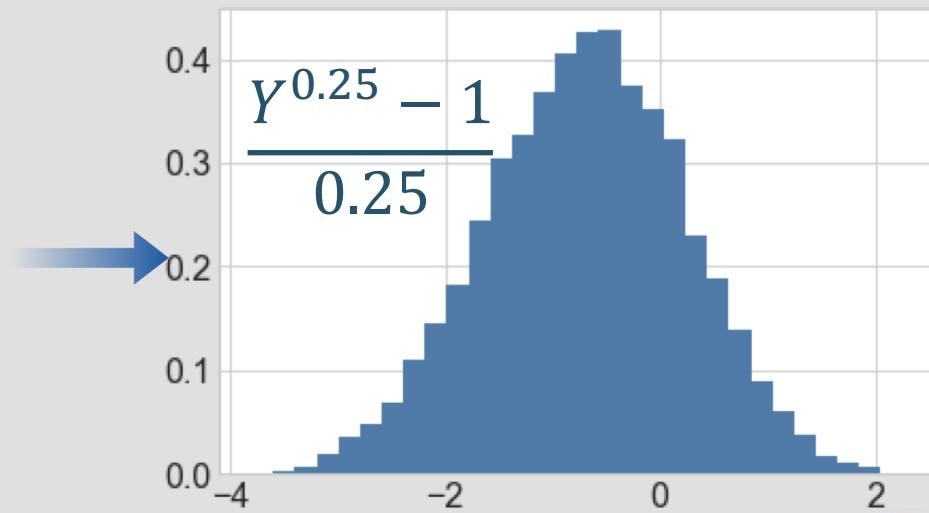


Как повторить успех?

- Если взять $p = 0.25$, получим трансформацию для экспоненциального распределения



Экспоненциальное



Нормальность не панацея

- Если мы встретили на практике распределение, которое отличается от нормального, но в предпосылках того метода, который мы используем, есть нормальность, можно воспользоваться преобразованием Бокса-Кокса



Нормальность не панацея

- Если мы встретили на практике распределение, которое отличается от нормального, но в предпосылках того метода, который мы используем, есть нормальность, можно воспользоваться преобразованием Бокса-Кокса
- Нормальность не является необходимым свойством выборки, существует огромное количество методов, которые обходятся без неё



Нормальность не панацея

- Проблема преобразования Бокса-Кокса в том, что чаще всего мы строим не интерпретируемую переменную



Нормальность не панацея

- Проблема преобразования Бокса-Кокса в том, что чаще всего мы строим не интерпретируемую переменную

Пример: Время между поломками распределено экспоненциально, применив к нему преобразование Бокса-Кокса, мы получим не интерпретируемую переменную



Проблемы с данными: масштабирование и категориальные переменные



Похожесть

Добрыня:

90 кг

1.9 м

Ярополк:

60 кг

1.7 м



Похожесть

Добрыня: Ярополк:

90 кг

60 кг

1.9 м

1.7 м

- В Анализе данных часто ищут похожие объекты на основе расстояния между ними



Похожесть

Добрыня: Ярополк:

90 кг

60 кг

1.9 м

1.7 м

- В Анализе данных часто ищут похожие объекты на основе расстояния между ними
- Какое расстояние между Добрыней и Ярополком?



Похожесть

Добрыня: Ярополк:

90 кг

60 кг

1.9 м

1.7 м

- В Анализе данных часто ищут похожие объекты на основе расстояния между ними
- Какое расстояние между Добрыней и Ярополком?

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\sqrt{(1.9 - 1.7)^2 + (90 - 60)^2} = \sqrt{0.04 + 900}$$



Похожесть

Добрыня: Ярополк:

90 кг

60 кг

1.9 м

1.7 м

- В Анализе данных часто ищут похожие объекты на основе расстояния между ними
- Какое расстояние между Добрыней и Ярополком?

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\sqrt{(1.9 - 1.7)^2 + (90 - 60)^2} = \sqrt{0.04 + 900}$$

Вес вносит в расстояние более весомый вклад из-за того, что он измерен в кг



Похожесть

- Разный масштаб искажает подсчёт расстояний между объектами



Похожесть

- Разный масштаб искажает подсчёт расстояний между объектами
- Позже мы узнаем, что разный масштаб портит сходимость многих алгоритмов машинного обучения



Похожесть

- Разный масштаб искажает подсчёт расстояний между объектами
- Позже мы узнаем, что разный масштаб портит сходимость многих алгоритмов машинного обучения
- **Решение:** отмасштабировать измеренные величины к одному диапазону, чтобы ни одно из измерений не выделялось



Похожесть

- Разный масштаб искажает подсчёт расстояний между объектами
- Позже мы узнаем, что разный масштаб портит сходимость многих алгоритмов машинного обучения
- **Решение:** отмасштабировать измеренные величины к одному диапазону, чтобы ни одно из измерений не выделялось
- Есть несколько способов масштабирования:
 - Нормализация
 - Масштабирование на отрезок [0; 1]
 - Робастная нормализация (устойчивая к выбросам)



Способы масштабирования

i - номер наблюдения

Нормализация (Standard Scaler):

$$x_i^* = \frac{x_i - \bar{x}}{\hat{\sigma}}$$



Способы масштабирования

i - номер наблюдения

Нормализация (Standard Scaler):

$$x_i^* = \frac{x_i - \bar{x}}{\hat{\sigma}}$$

Масштабирование на отрезок [0; 1] (Minmax Scaler):

$$x_i^* = \frac{x_i - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$$



Способы масштабирования

i - номер наблюдения

Нормализация (Standard Scaler):

$$x_i^* = \frac{x_i - \bar{x}}{\hat{\sigma}}$$

Масштабирование на отрезок [0; 1] (Minmax Scaler):

$$x_i^* = \frac{x_i - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$$

Устойчивая к выбросам нормализация (Robust Scaler):

$$x_i^* = \frac{x_i - med(X)}{Q_3 - Q_1}$$



Категориальные переменные

- Элементы неупорядоченного множества



Категориальные переменные

- Элементы неупорядоченного множества
- Город, цвет, марка машины, пол, тариф, ...



Категориальные переменные

- Место, где провели отпуск: Крым, Дача, Испания



Категориальные переменные

- Место, где провели отпуск: Крым, Дача, Испания
- Можно заменить Крым на 1, Дачу на 2, Испанию на 3



Категориальные переменные

- Место, где провели отпуск: Крым, Дача, Испания
- Можно заменить Крым на 1, Дачу на 2, Испанию на 3

Проблема 1:

- Мы ввели на объектах искусственный порядок, другой исследователь может ввести другой порядок и мы получим разные результаты



Категориальные переменные

- Место, где провели отпуск: Крым, Дача, Испания
- Можно заменить Крым на 1, Дачу на 2, Испанию на 3

Проблема 1:

- Мы ввели на объектах искусственный порядок, другой исследователь может ввести другой порядок и мы получим разные результаты

Проблема 2:

- Разница между Крымом и Дачей равна 1, разница между Дачей и Испанией тоже равна 1, но эти переходы могут быть разными, непонятно как их оценить



Бинарное кодирование (One Hot Encoding)

- Выход: закодировать каждое возможное значение как столбец из нулей и единиц (dummy-переменная)

	x
0	Испания
1	Дача
2	Крым
3	NaN
4	Дача



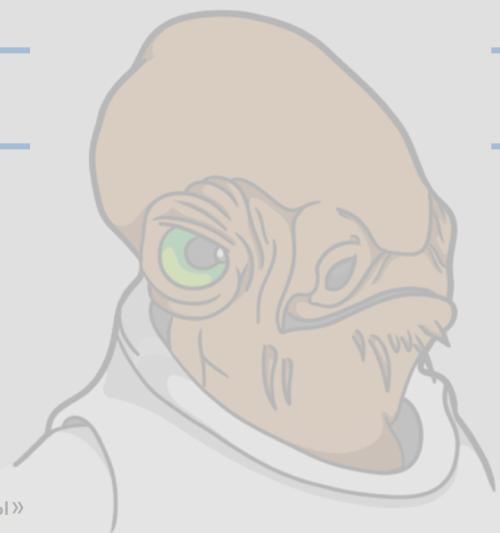
	x_isp	x_da	x_kr
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1
3	0	0	0
4	0	1	0



Бинарное кодирование (One Hot Encoding)

- **Dummy-ловушка** – ситуация, когда мы закодировали категориальную переменную набором столбцов, которые в сумме дают колонку из единиц

x
0 Испания
1 Дача
2 Крым
3 Крым
4 Дача



	x_isp	x_da	x_kr
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	1	0

Персонаж фильма «Звездные войны»
Автор Джордж Лукас



Бинарное кодирование (One Hot Encoding)

- **Dummy-ловушка** – ситуация, когда мы закодировали категориальную переменную набором столбцов, которые в сумме дают колонку из единиц



Бинарное кодирование (One Hot Encoding)

- **Dummy-ловушка** – ситуация, когда мы закодировали категориальную переменную набором столбцов, которые в сумме дают колонку из единиц
- Ловушка состоит в том, что из-за нашей обработки в данных между столбцами возникает линейная зависимость, некоторые методы из-за этого некорректно работают



Особенности бинарного кодирования

- Создаём много дополнительных колонок, с этим связано проклятье размерности (далее будем о нём говорить)



Особенности бинарного кодирования

- Создаём много дополнительных колонок, с этим связано проклятье размерности (далее будем о нём говорить)
- Редкие категории нужно объединять в категорию “другое”



Особенности бинарного кодирования

- Создаём много дополнительных колонок, с этим связано проклятье размерности (далее будем о нём говорить)
- Редкие категории нужно объединять в категорию “другое”
- Если признак начал принимать новое значение, мы его будем игнорировать



Особенности бинарного кодирования

- Создаём много дополнительных колонок, с этим связано проклятье размерности (далее будем о нём говорить)
- Редкие категории нужно объединять в категорию “другое”
- Если признак начал принимать новое значение, мы его будем игнорировать
- Пропуски можно рассматривать как отдельную категорию, их можно не заполнять



Особенности бинарного кодирования

- Создаём много дополнительных колонок, с этим связано проклятье размерности (далее будем о нём говорить)
- Редкие категории нужно объединять в категорию “другое”
- Если признак начал принимать новое значение, мы его будем игнорировать
- Пропуски можно рассматривать как отдельную категорию, их можно не заполнять
- Можно попасть в dummy-ловушку



Резюме

- Разный масштаб измерений может приводить к проблемам



Резюме

- Разный масштаб измерений может приводить к проблемам
- Категориальные признаки чаще всего нельзя использовать напрямую, один из способов работы с ними – бинарное кодирование (ОНЕ)

