Чего хочет статистик?

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \dots, x_n$ Параметр: θ

$$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Несмещённость

Оценка называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру:

$$\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

Несмещённость

Оценка называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

Смещение оценки это разница между её математическим ожиданием и её реальным значением:

$$bias(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$$

Несмещённость

Оценка называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру:

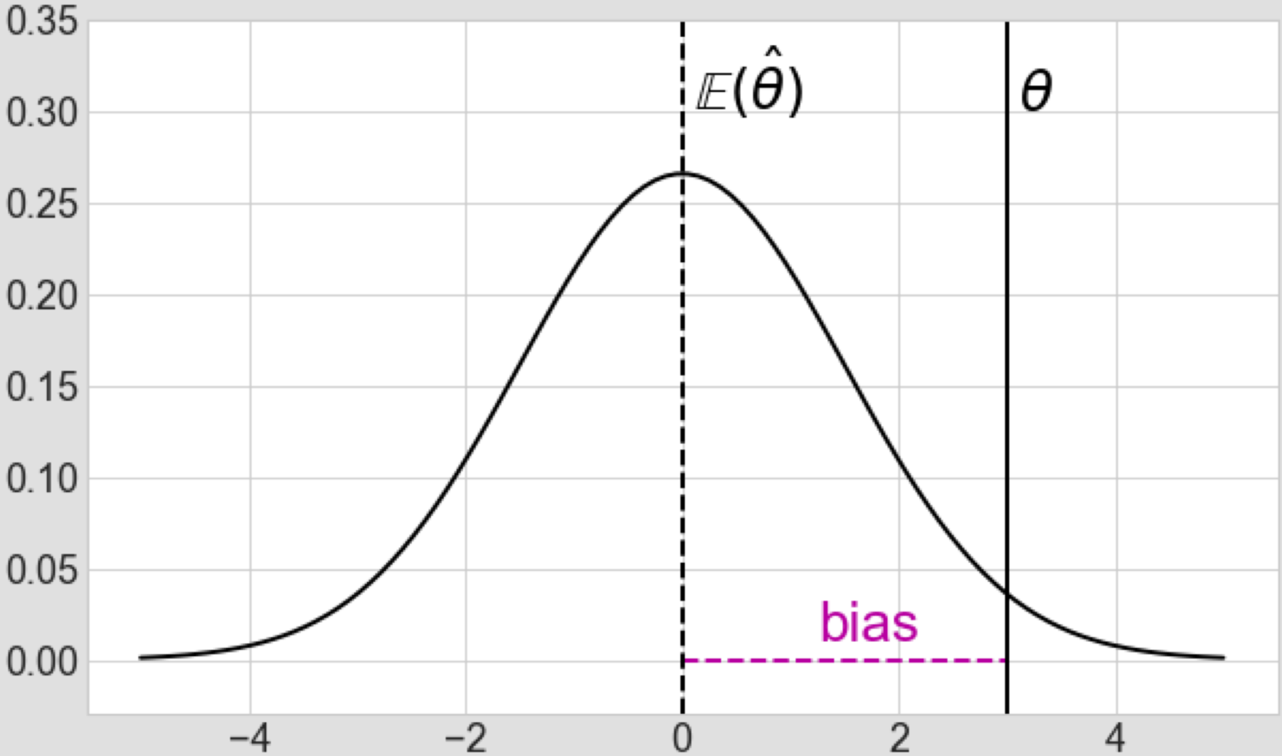
$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

Смещение оценки это разница между её математическим ожиданием и её реальным значением:

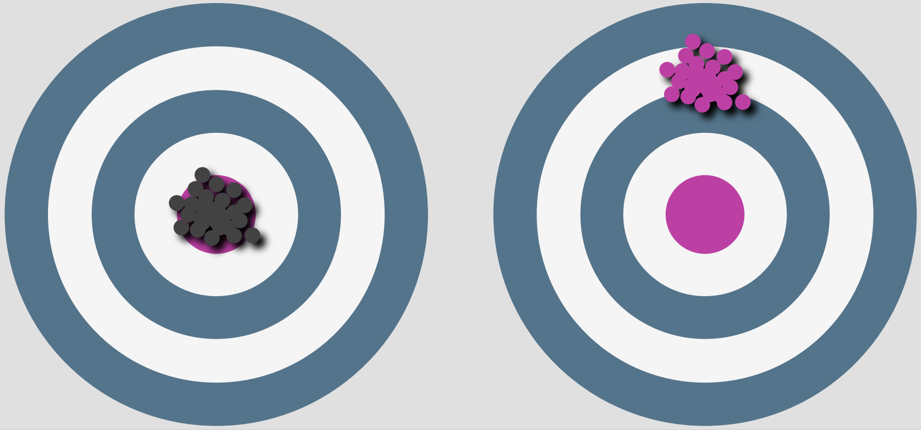
$$bias(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$$

Простым языком: если при фиксированном n мы постоянно используем нашу оценку, в среднем мы не ошибаемся

Несмещённость



Оценка 1



Оценка 2

Состоятельность

Оценка называется состоятельной, если она сходится по вероятности к истинному значению параметра при $n \to \infty$

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

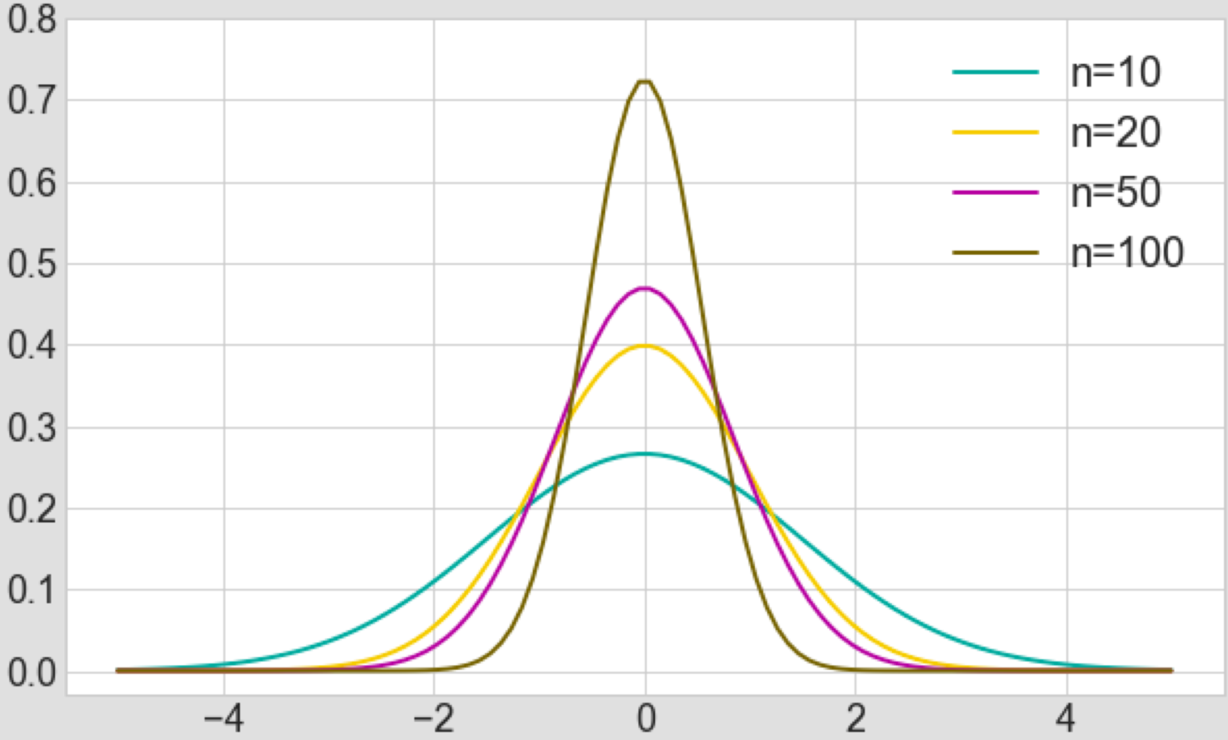
Состоятельность

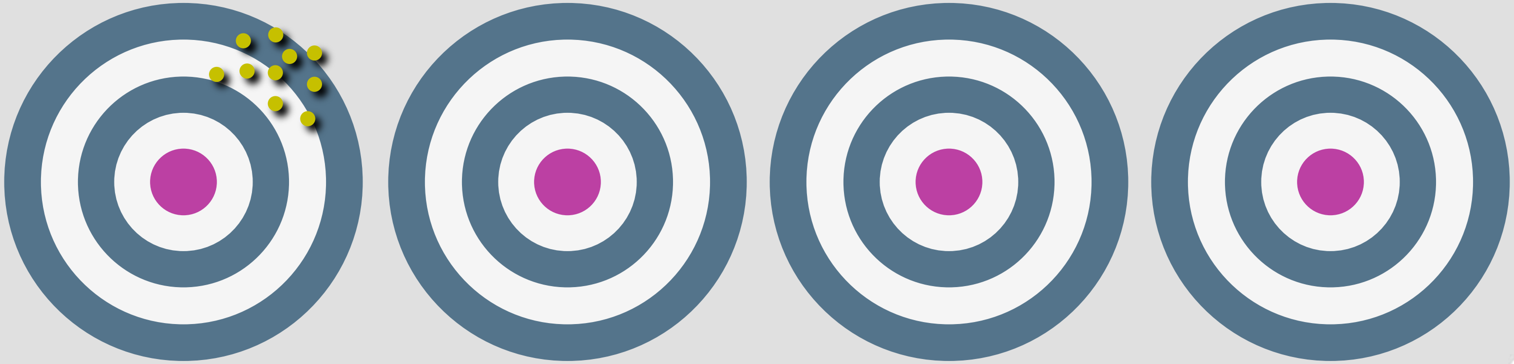
Оценка называется состоятельной, если она сходится по вероятности к истинному значению параметра при $n \to \infty$

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

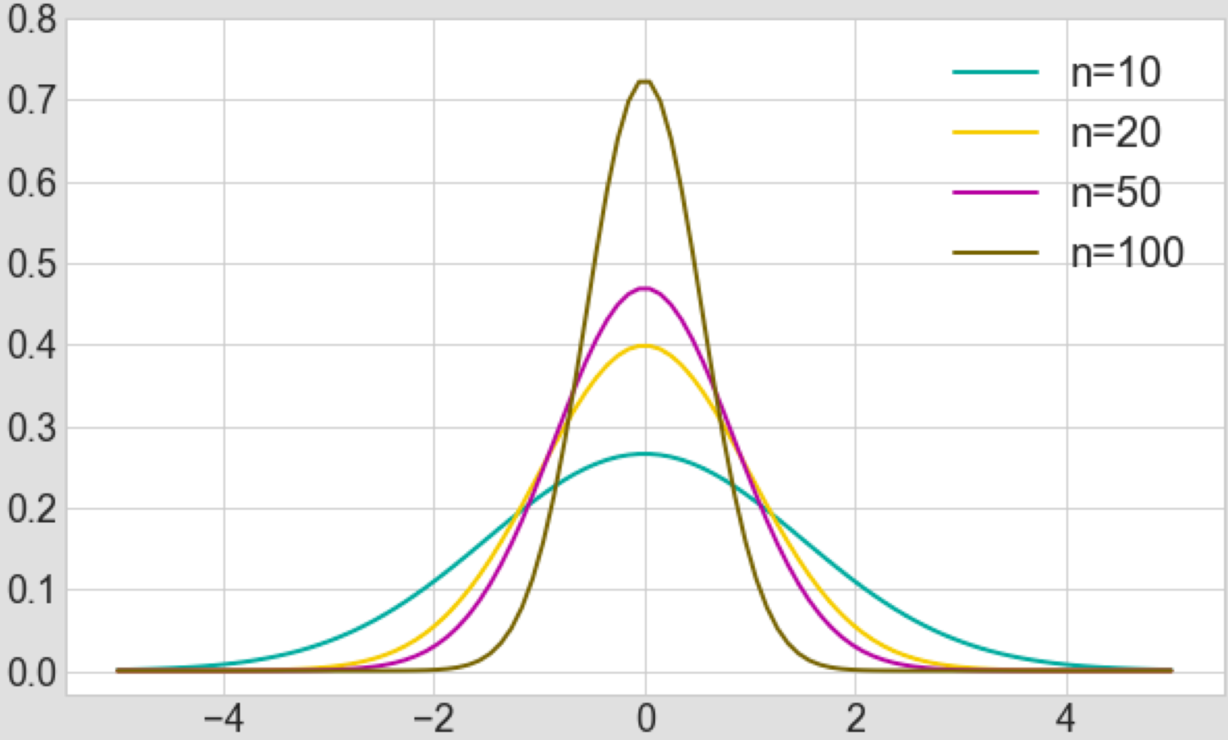
Простым языком: чем больше наблюдений, тем мы ближе к истине

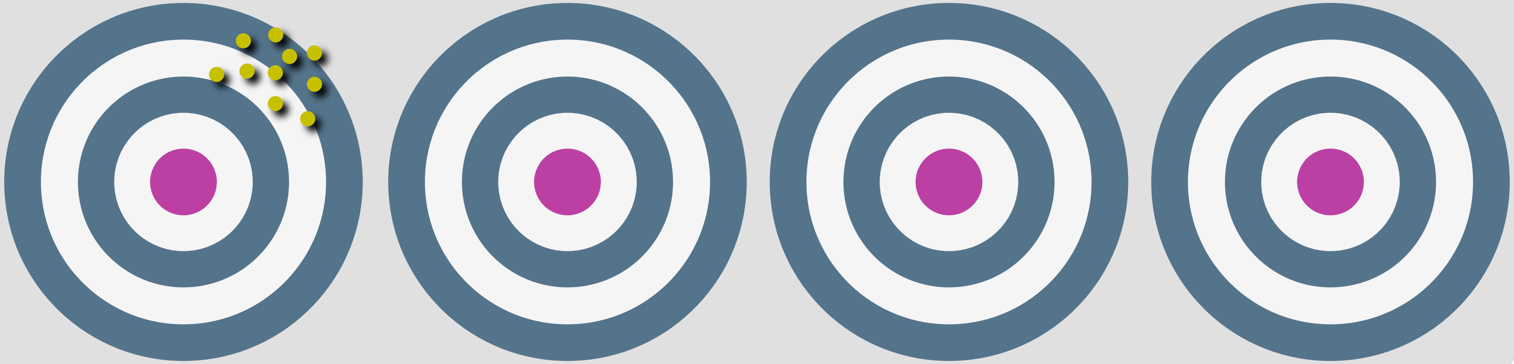
Состоятельность





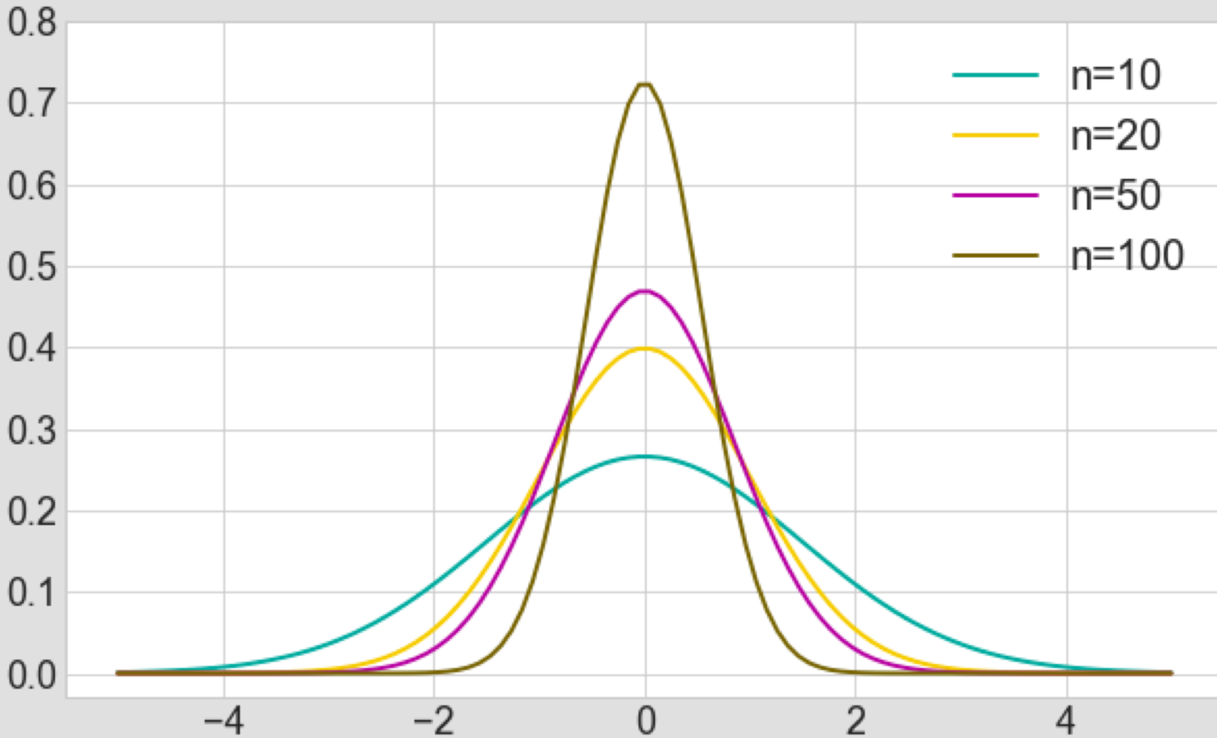
Состоятельность

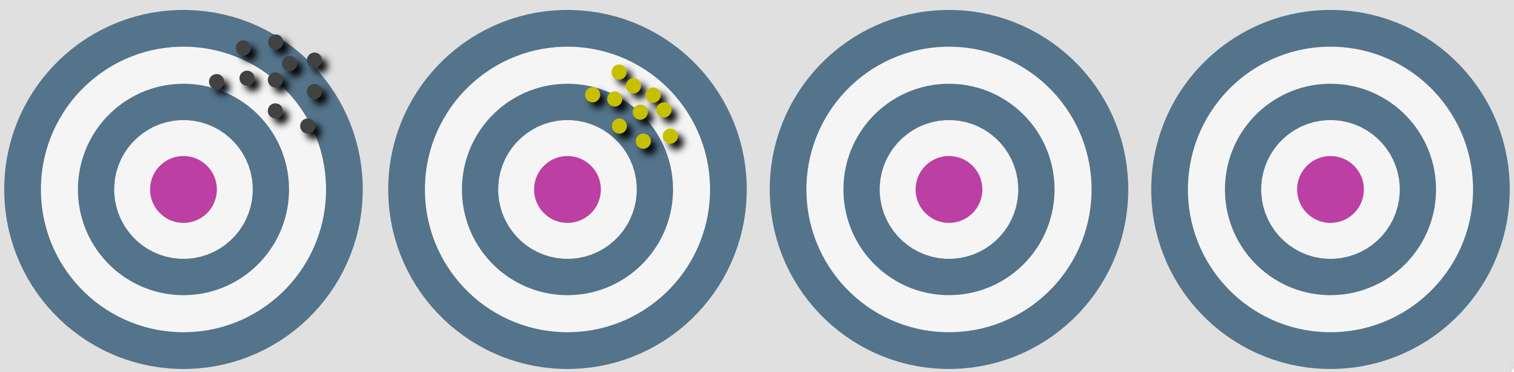




n = 10

Состоятельность

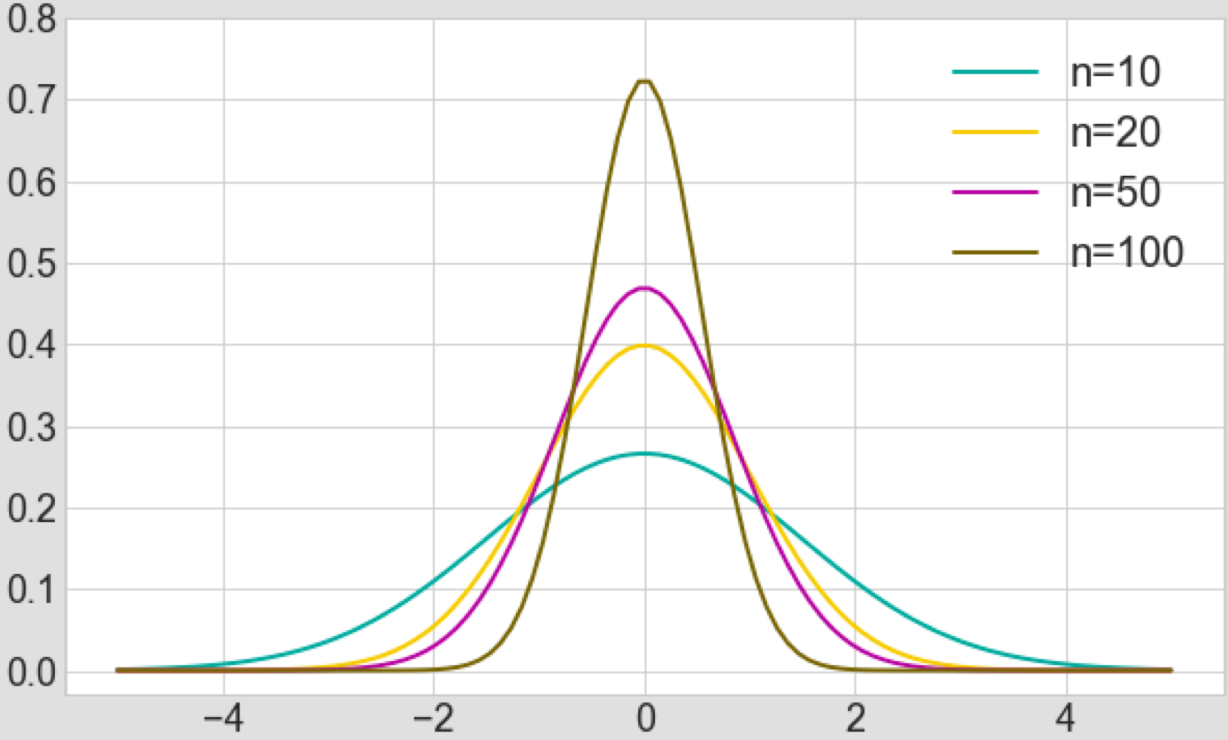


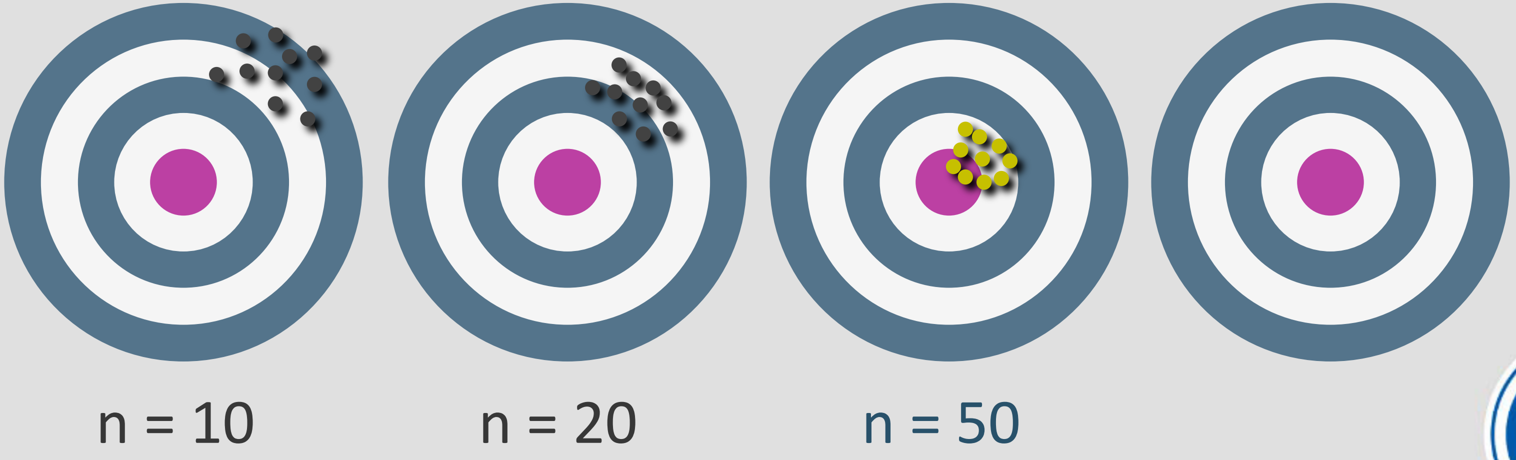


n = 10

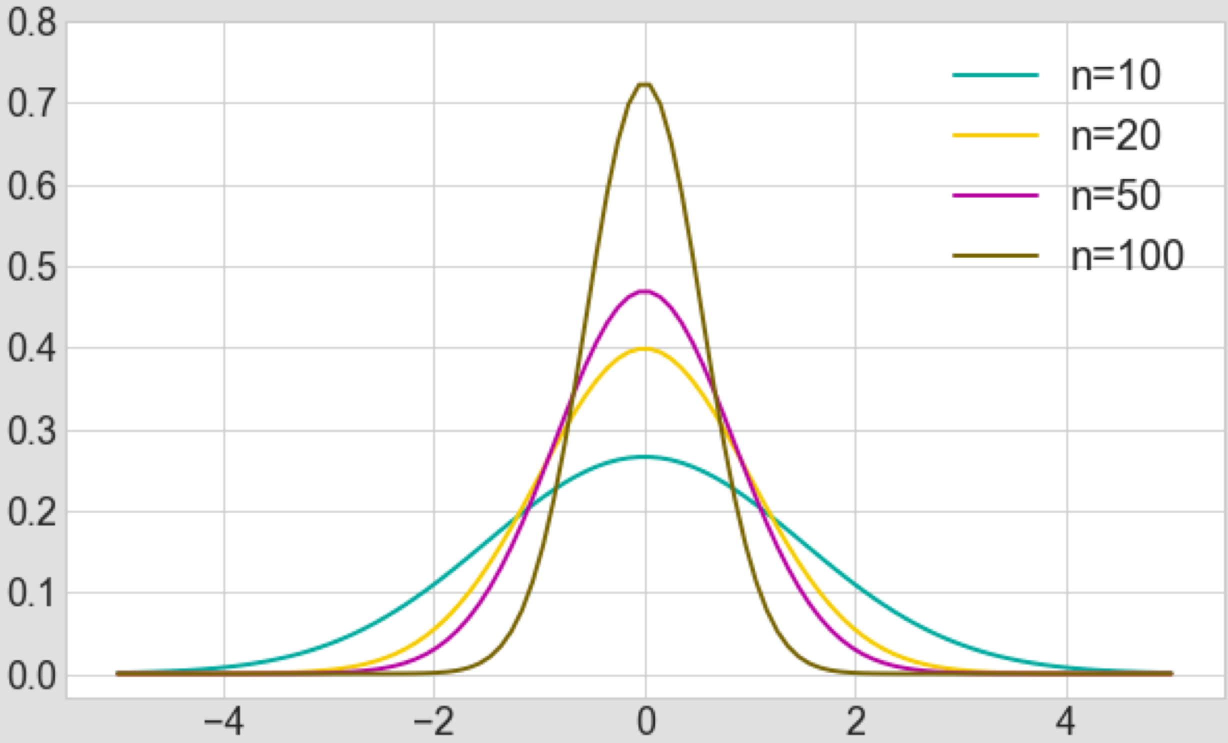
n = 20

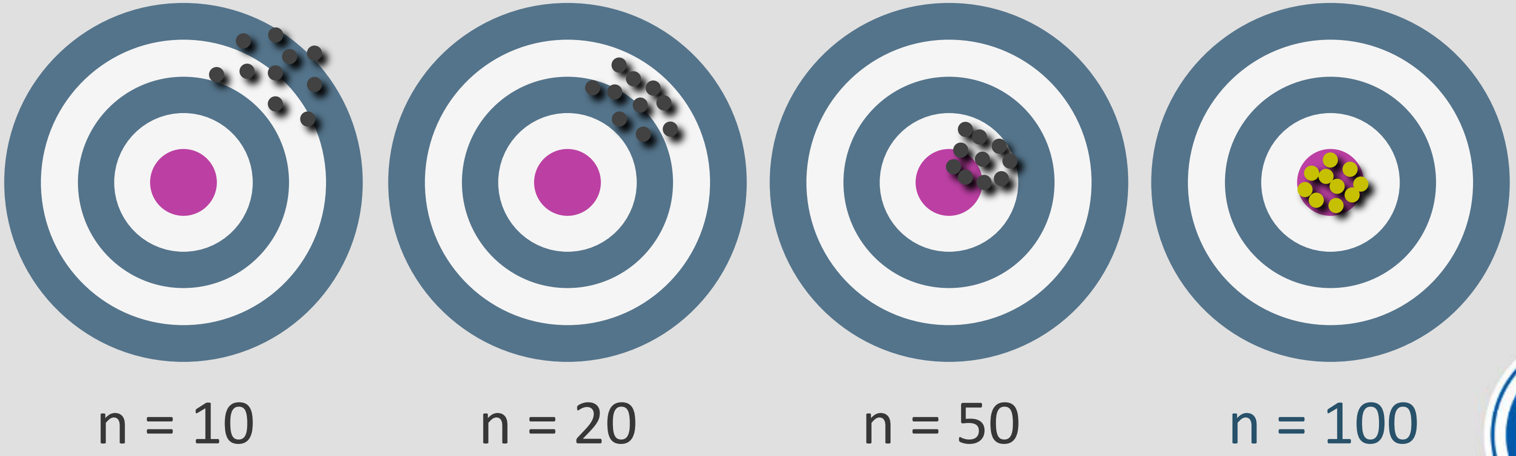
Состоятельность



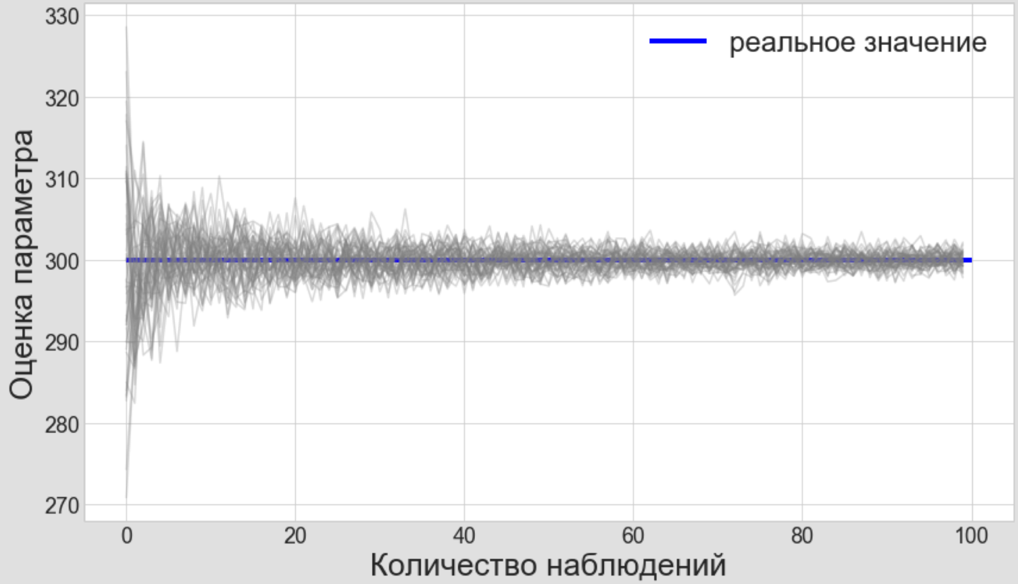


Состоятельность



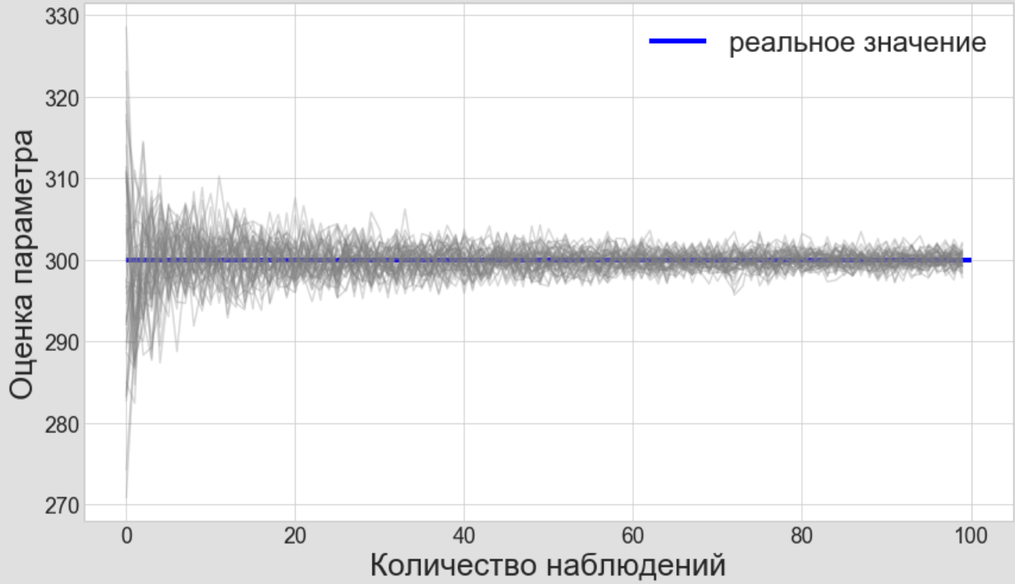


Состоятельность

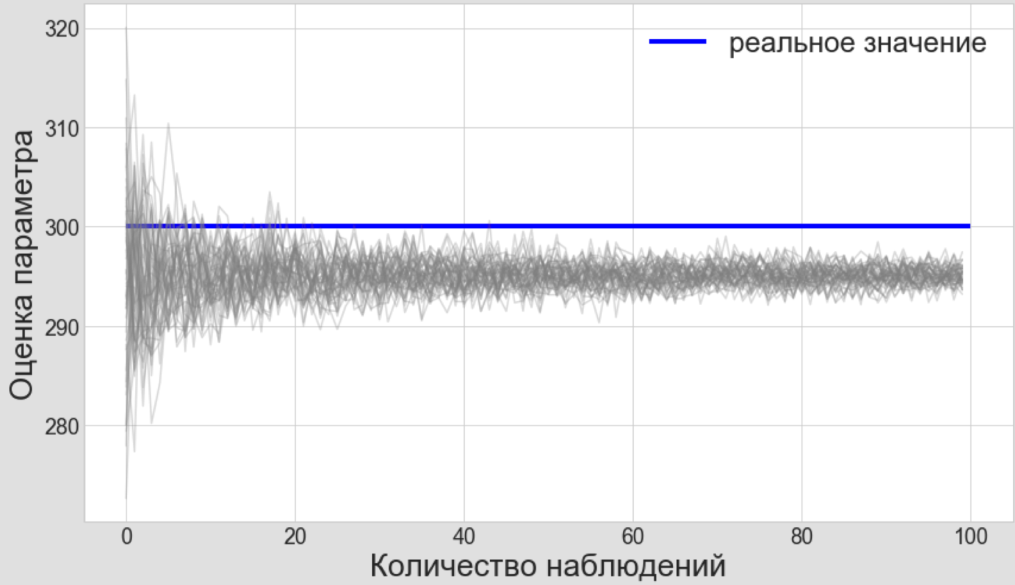


Состоятельная оценка

Состоятельность



Состоятельная оценка



Несостоятельная оценка

Асимптотическая несмещённость

Оценка называется асимптотически несмещённой, если её математическое ожидание сходится к оцениваемому параметру при $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) \to \theta$$

Асимптотическая несмещённость

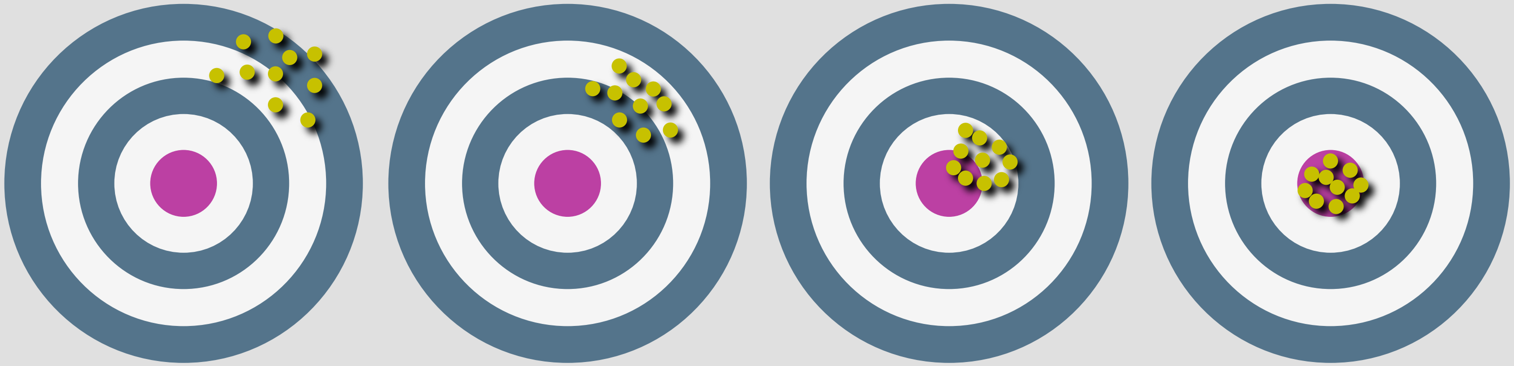
Оценка называется асимптотически несмещённой, если её математическое ожидание сходится к оцениваемому параметру при $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) \to \theta$$

Простым языком: если мы постоянно используем нашу оценку, в среднем, при очень больших n, мы не ошибаемся

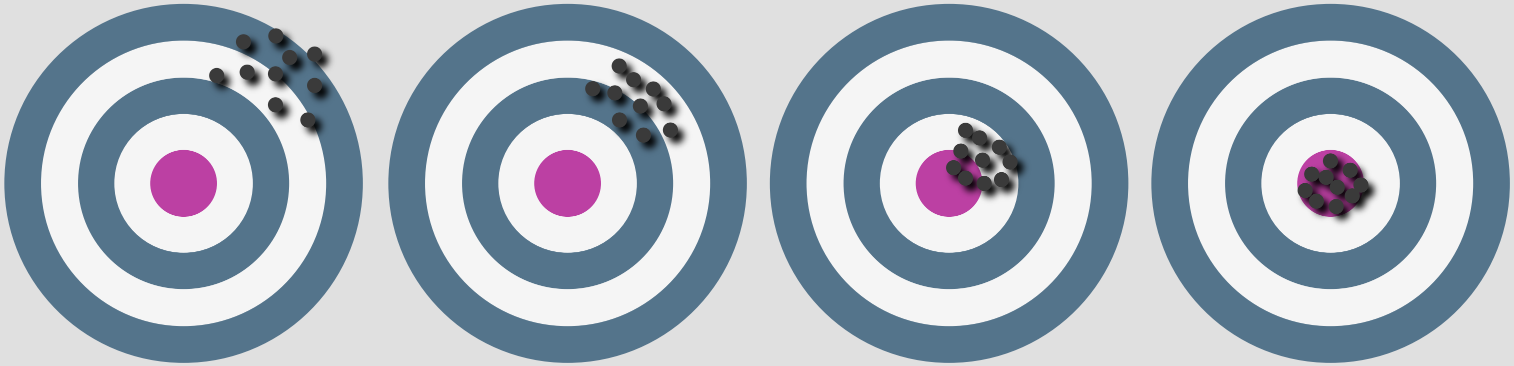
Состоятельность VS асимптотическая несмёщенность

Асимптотически несмещённая и состоятельная оценка

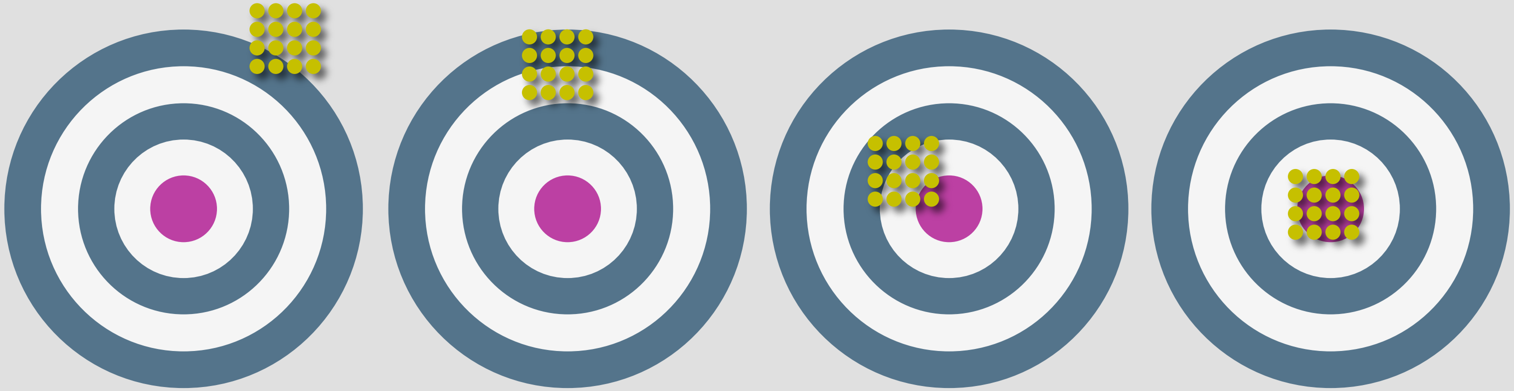


Состоятельность VS асимптотическая несмёщенность

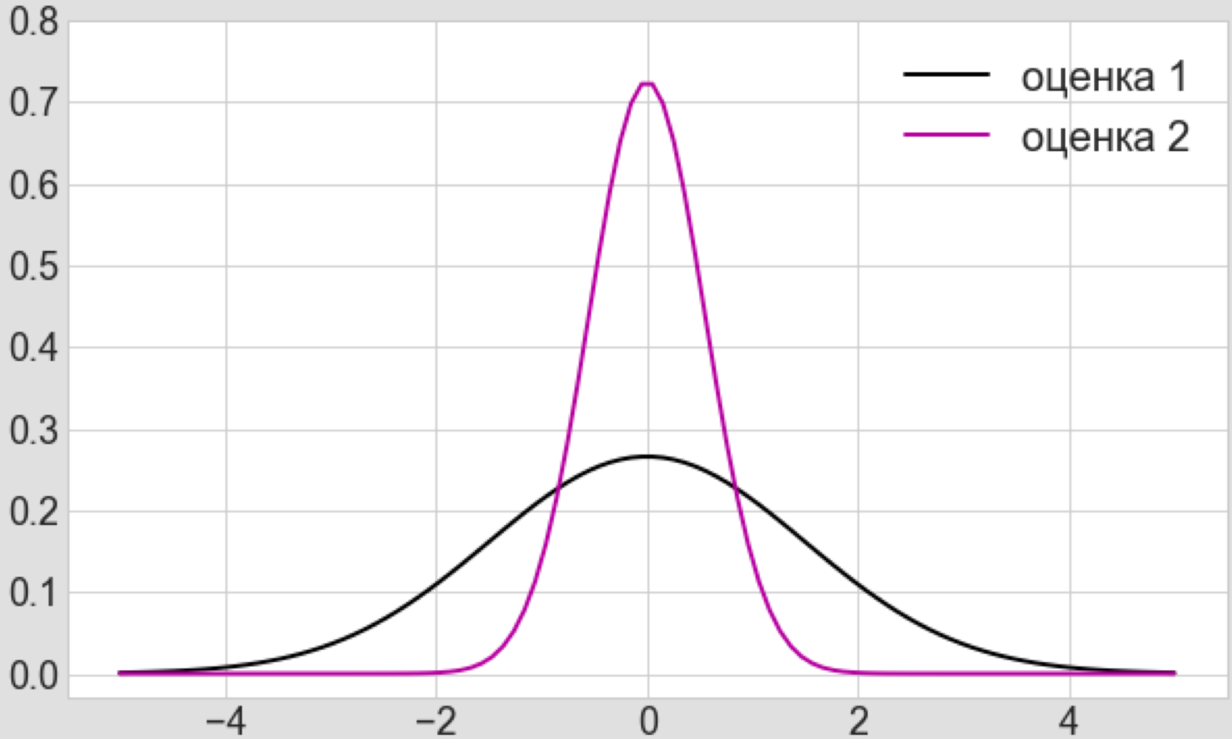
Асимптотически несмещённая и состоятельная оценка



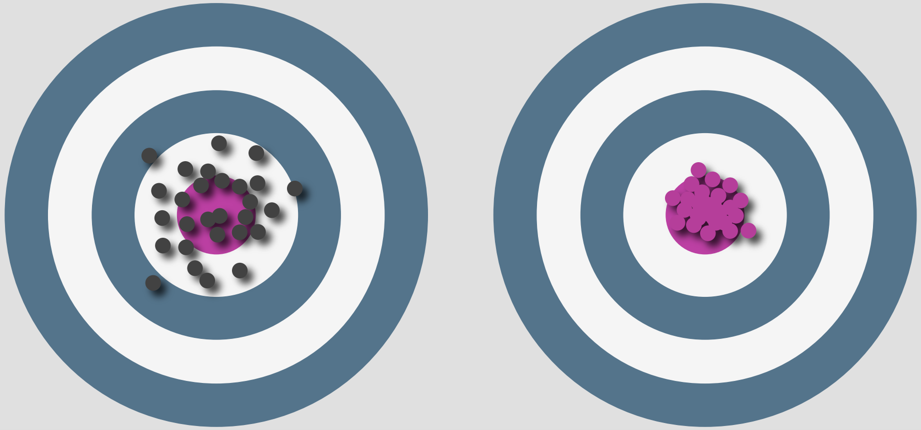
Асимптотически несмещённая, но несостоятельная оценка



Сравнение оценок



Оценка 1



Оценка 2

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько ⇒ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Для несмещённых оценок MSE совпадает с дисперсией оценки

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Для несмещённых оценок MSE совпадает с дисперсией оценки

Простым языком: чем более предсказуема оценка, тем точнее прогноз (уже доверительный интервал)

Резюме

Статистик хочет получить:

- несмещённую оценку – хочет в среднем не ошибаться при фиксированном размере выборки

Резюме

Статистик хочет получить:

- несмещённую оценку – хочет в среднем не ошибаться при фиксированном размере выборки
- состоятельную оценку – хочет при большом числе наблюдений быть близко к реальности

Резюме

Статистик хочет получить:

- несмещённую оценку – хочет в среднем не ошибаться при фиксированном размере выборки
- состоятельную оценку – хочет при большом числе наблюдений быть близко к реальности
- оценку с маленькой средней квадратичной ошибкой

Великая дилемма:
смещение против разброса

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько ⇒ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Для несмещённых оценок MSE совпадает с дисперсией оценки

Сравнение оценок

Несмещённых и состоятельных оценок может оказаться несколько $\Rightarrow$ нужно научиться их сравнивать

Обычно оценки между собой сравнивают с помощью квадратичной ошибки:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$$

Для несмещённых оценок MSE совпадает с дисперсией оценки

Простым языком: чем более предсказуема оценка, тем точнее прогноз (уже доверительный интервал)

Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у MSE есть несколько хороших свойств

Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у MSE есть несколько хороших свойств

MSE можно представить в виде суммы смещения и разброса:

Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у MSE есть несколько хороших свойств

MSE можно представить в виде суммы смещения и разброса:

$$MSE = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у MSE есть несколько хороших свойств

MSE можно представить в виде суммы смещения и разброса:

$$MSE = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2 + 2 \cdot \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у MSE есть несколько хороших свойств

MSE можно представить в виде суммы смещения и разброса:

$$MSE = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2 + 2 \cdot \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

$$= Var(\hat{\theta}) + 2 \cdot \left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 =$$

Разложение на смещение и разброс

Для того, чтобы сравнить оценки можно выбрать любую другую функцию потерь, но у MSE есть несколько хороших свойств

MSE можно представить в виде суммы смещения и разброса:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2 + 2 \cdot \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 =$$

$$= Var(\hat{\theta}) + 2 \cdot \left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \mathbb{E}(\hat{\theta})\right) \cdot \left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta\right) + \left(\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 =$$

$$= Var(\hat{\theta}) + \text{bias}^2(\hat{\theta})$$

Bias-variance decomposition

Между смещением и разбросом можно искать компромисс, это позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку

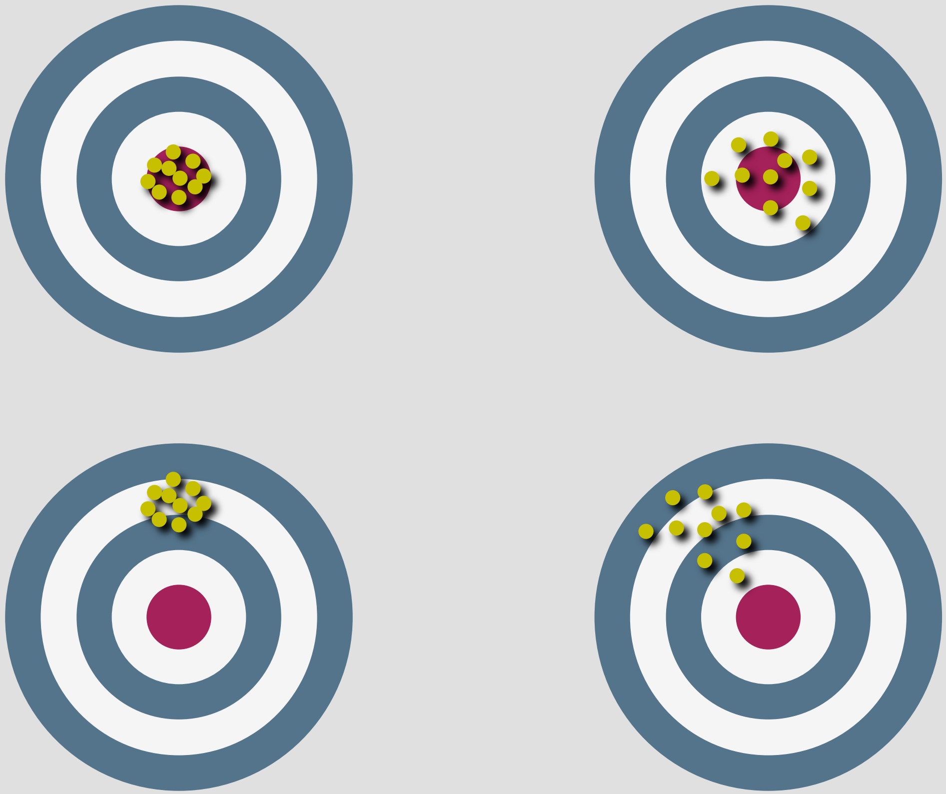
$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Bias-variance decomposition

Низкий разброс **Высокий разброс**

Низкое смещение

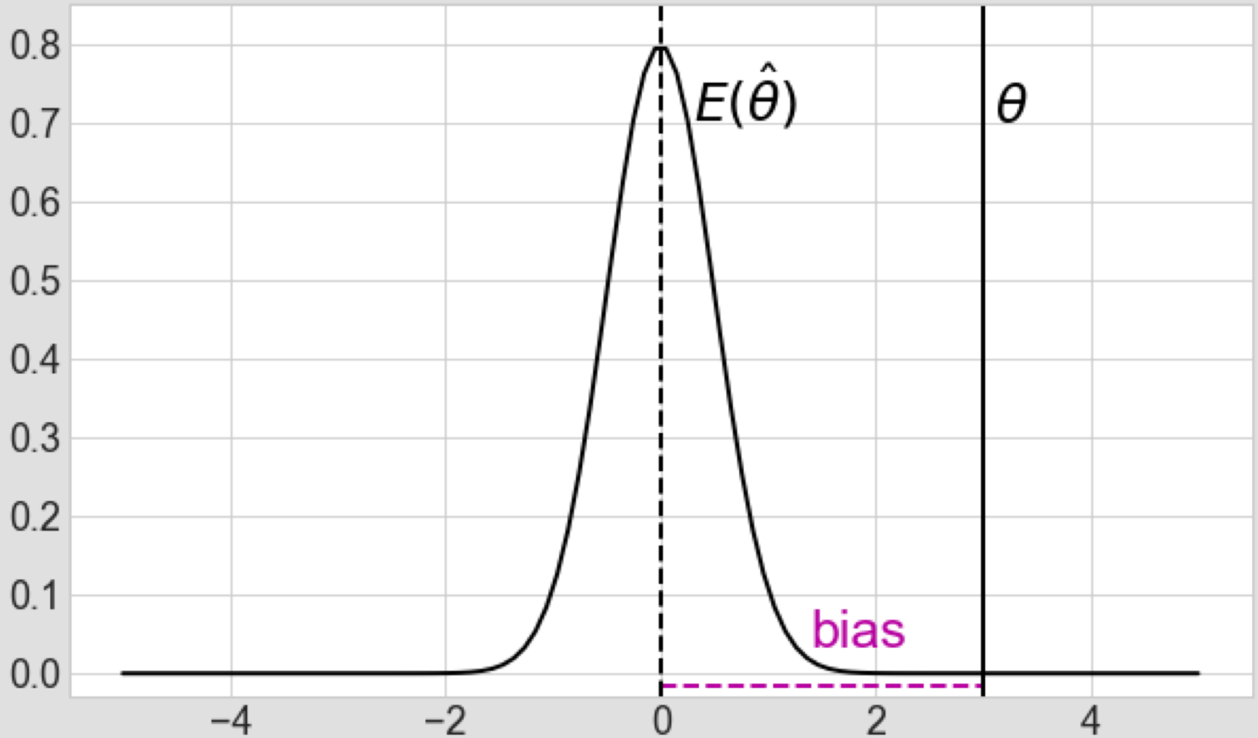
Высокое смещение



$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Bias-variance decomposition

Высокое смещение сильно снизило разброс → Низкое MSE

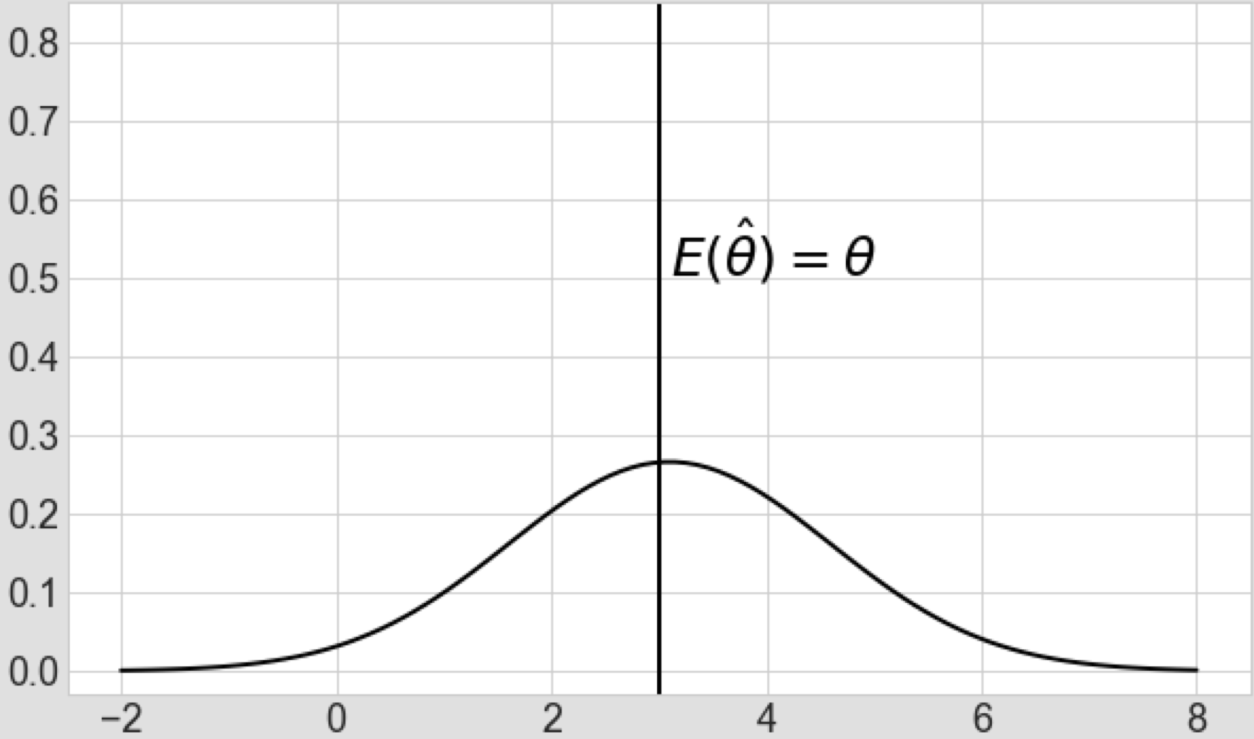


$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \text{bias}^2(\hat{\theta})$$

Bias-variance decomposition

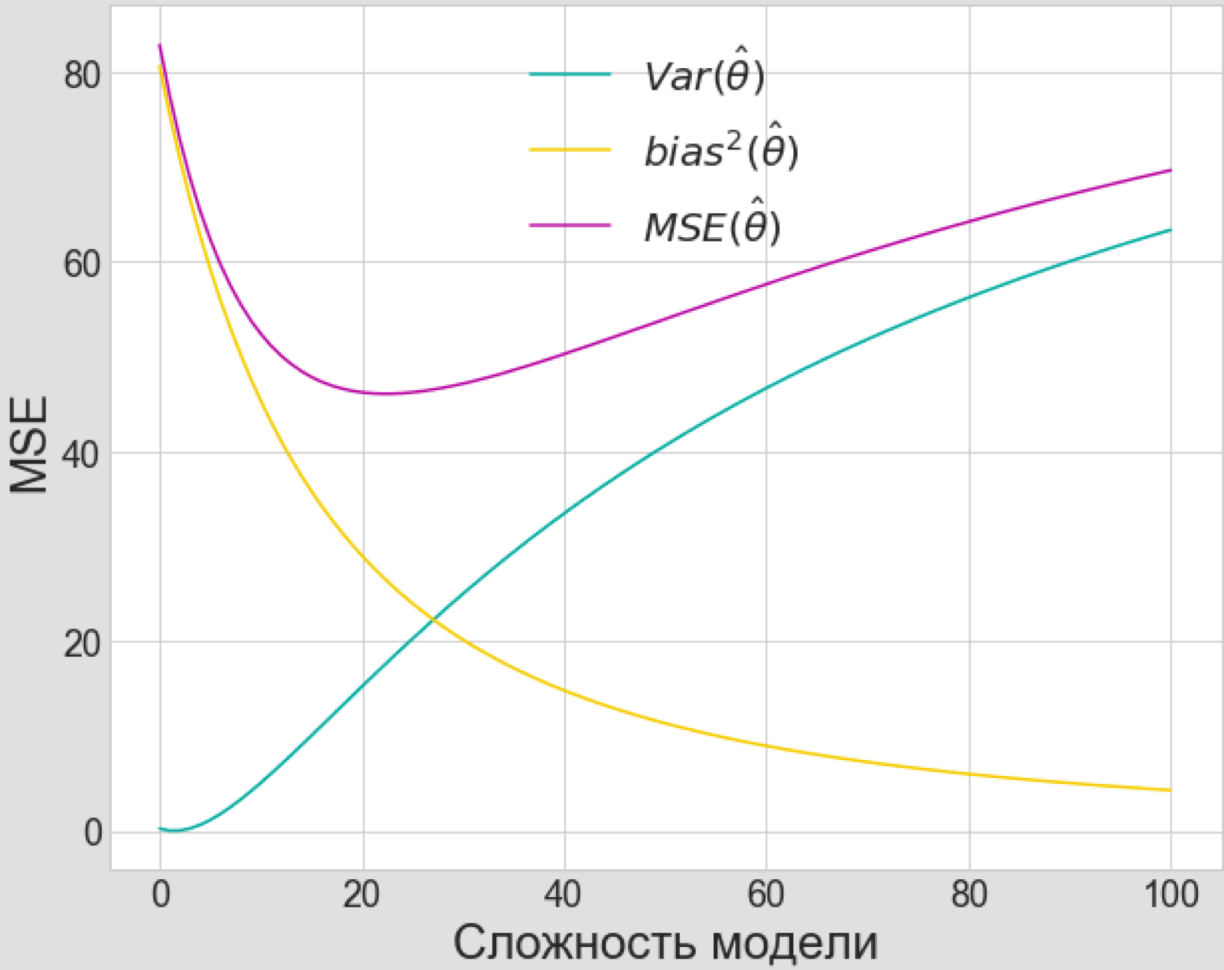
Несмещённная оценка
с высокой дисперсией

Высокое MSE



$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Bias-variance decomposition



$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Эффективность оценок

Эффективность

Между смещением и разбросом можно искать компромисс, это позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Эффективность

Между смещением и разбросом можно искать компромисс, это позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

В классе всех возможных оценок наилучшей в смысле среднеквадратического подхода не существует

Эффективность

Между смещением и разбросом можно искать компромисс, это позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

В классе всех возможных оценок наилучшей в смысле среднеквадратического подхода не существует

Можно попробовать зафиксировать смещение и найти оценку с наименьшей дисперсией

Эффективность

Можно попробовать зафиксировать смещение и найти оценку с наименьшей дисперсией

Эффективность

Можно попробовать зафиксировать смещение и найти оценку с наименьшей дисперсией

Такая оценка называется эффективной в классе со смещением $\mathrm{bias}(\hat{\theta})$

Эффективность

Можно попробовать зафиксировать смещение и найти оценку с наименьшей дисперсией

Такая оценка называется эффективной в классе со смещением $\mathrm{bias}(\hat{\theta})$

Нас будут интересовать несмещённые эффективные оценки

Эффективность

Можно попробовать зафиксировать смещение и найти оценку с наименьшей дисперсией

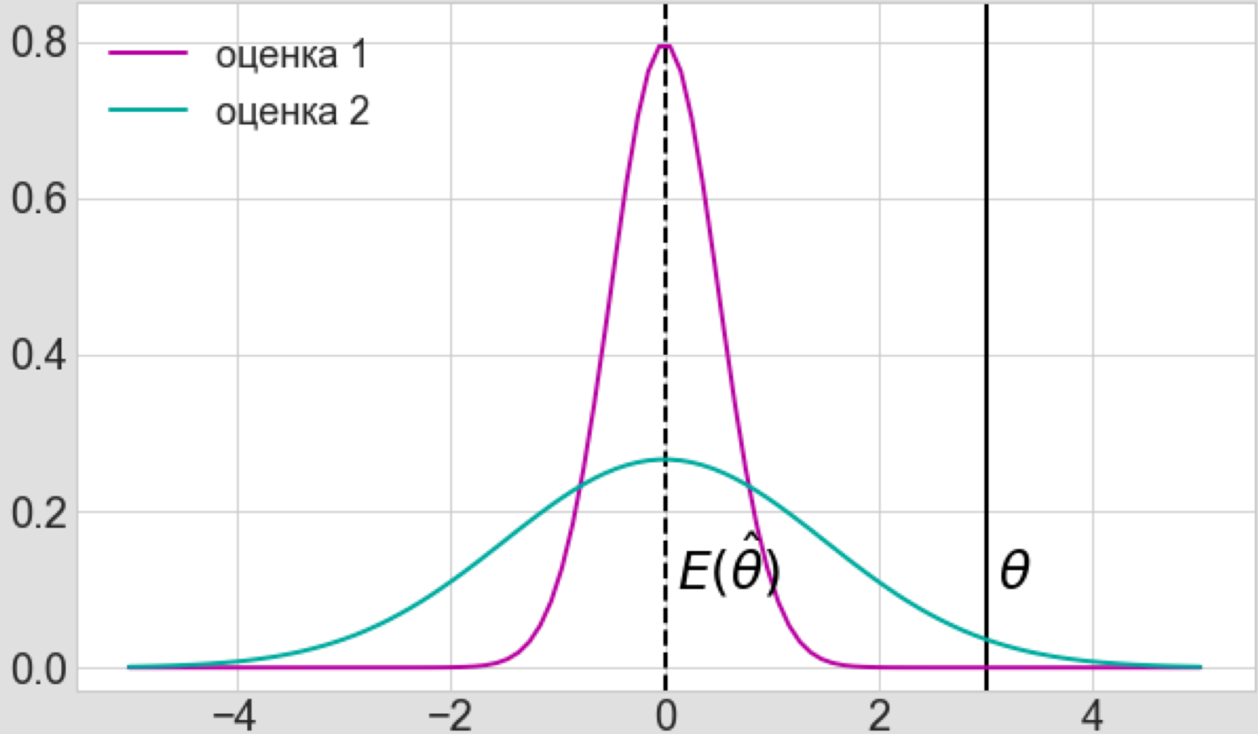
Такая оценка называется эффективной в классе со смещением $\text{bias}(\hat{\theta})$

Нас будут интересовать несмещённые эффективные оценки

Простым языком: эффективная оценка обладает самым узким доверительным интервалов в своём классе

Эффективность

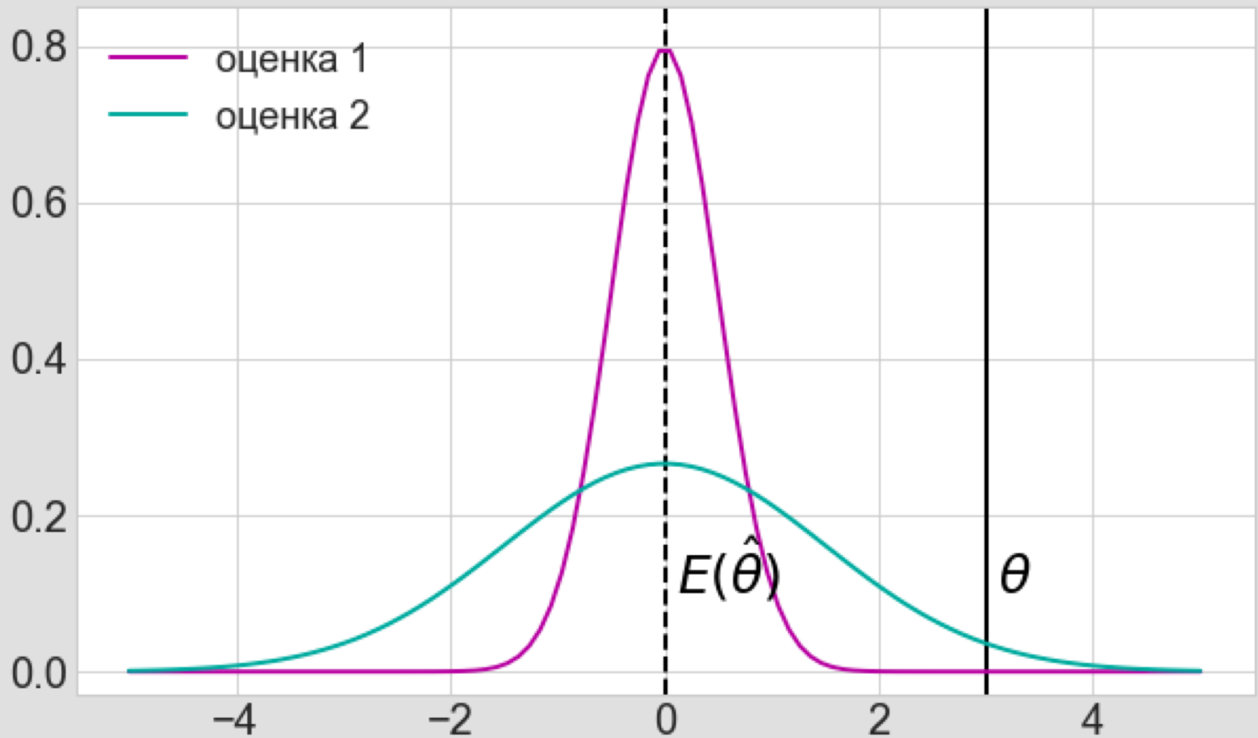
У оценок одинаковое смещение (класс), но при этом у оценки 1 дисперсия меньше



Эффективность

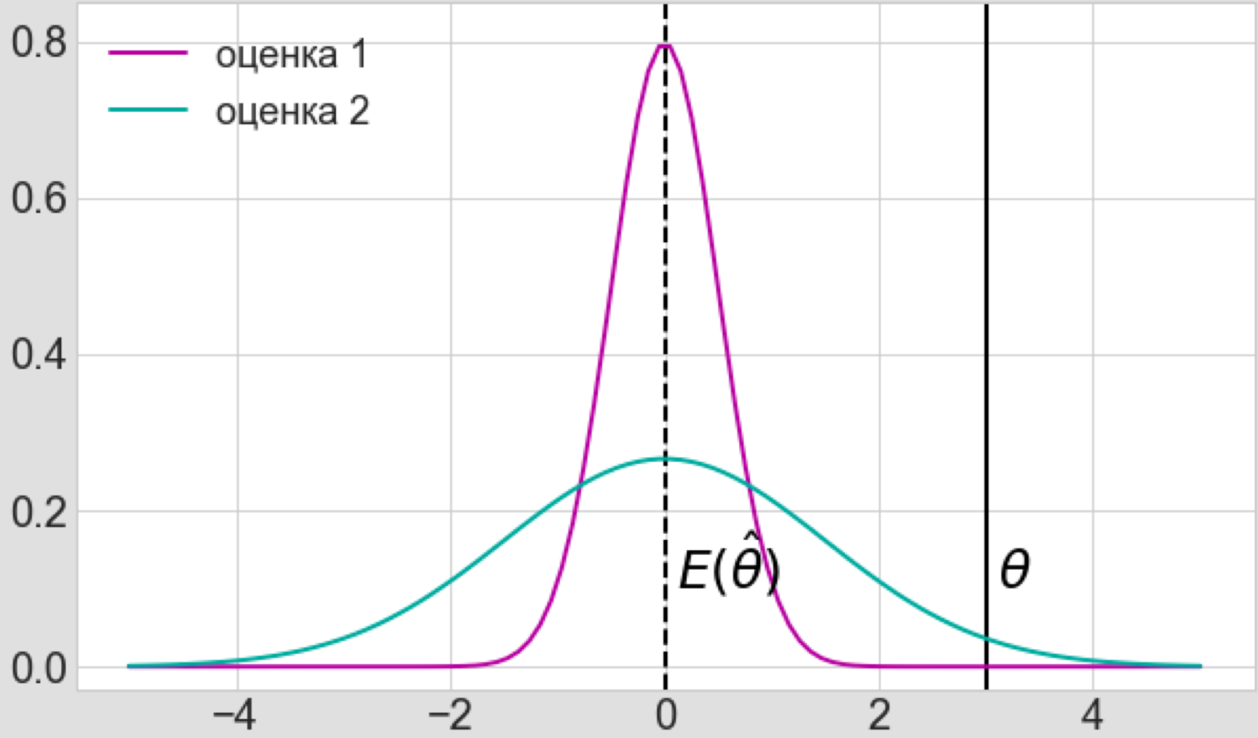
У оценок одинаковое смещение (класс), но при этом у оценки 1 дисперсия меньше

Если у оценки 1 самая маленькая дисперсия из всех существующих ⇒ она для нас самая предпочтительная



Эффективность

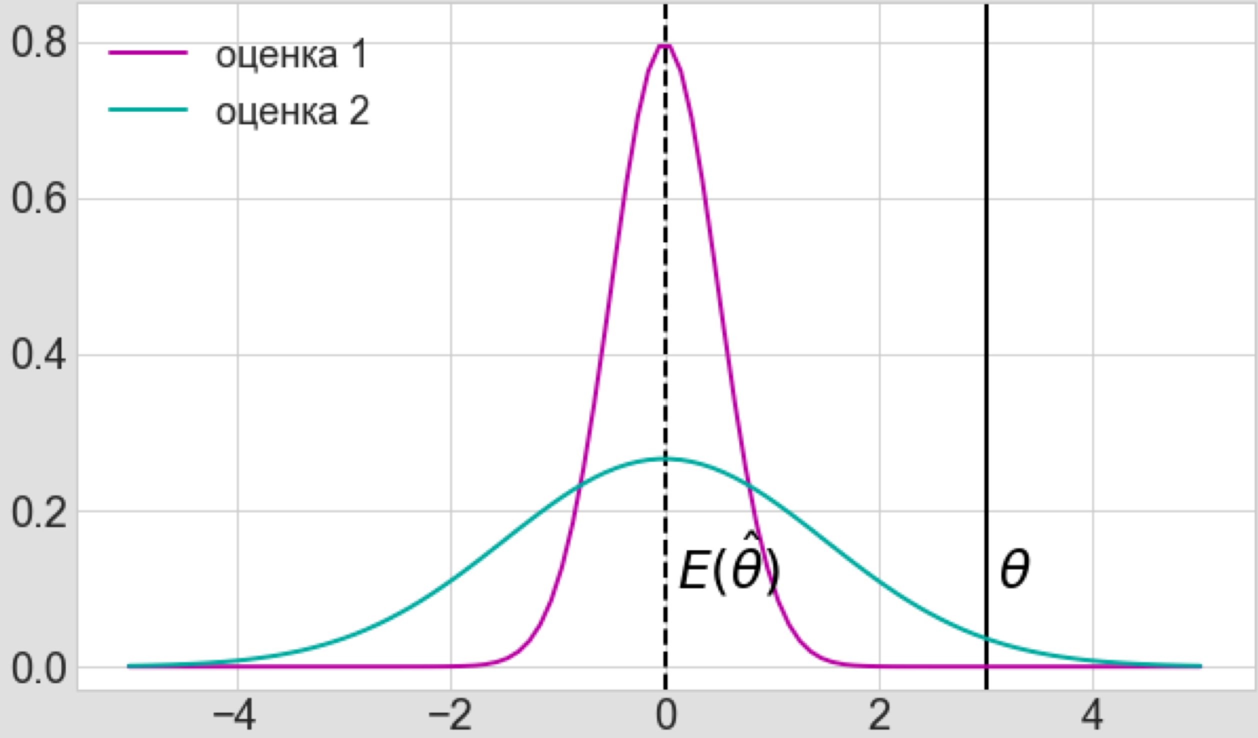
То есть оценка 1 эффективная в классе с таким смещением



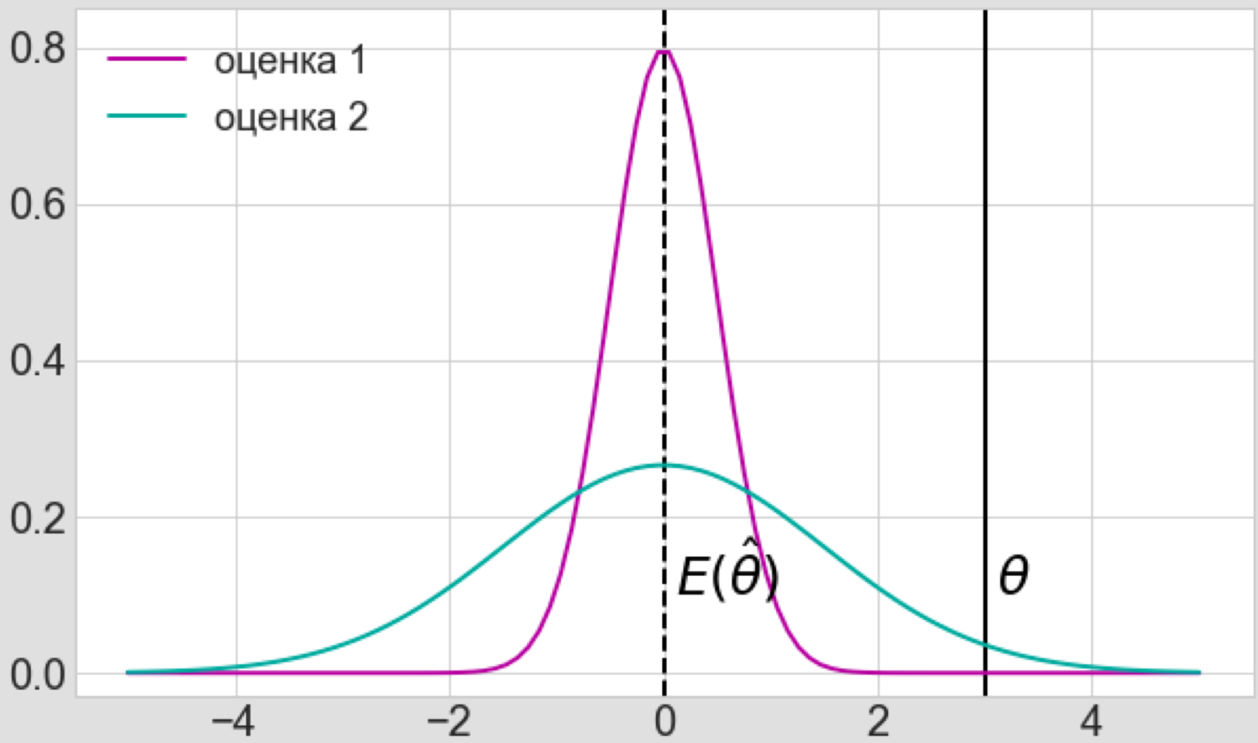
Эффективность

То есть оценка 1 эффективная в классе с таким смещением

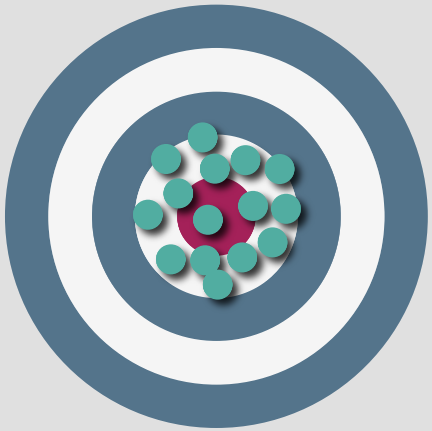
Нас будут интересовать несмещённые эффективные оценки



Эффективность



Оценка 1



Оценка 2

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Для функции потерь MSE существует теоретическая нижняя граница, её называют неравенством Рао Фреше Крамера

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Если оценка параметра несмещена и выполнены условия регулярности:

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Если оценка параметра несмещена и выполнены условия регулярности:

1. Область определения случайной величины не зависит от параметра θ

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Если оценка параметра несмещена и выполнены условия регулярности:

1. Область определения случайной величины не зависит от параметра θ
2. Сложное техническое условие, разрешающее брать производные (обычно формулируется по-разному)

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Если оценка параметра несмещена и выполнены условия регулярности:

1. Область определения случайной величины не зависит от параметра θ
2. Сложное техническое условие, разрешающее брать производные (обычно формулируется по-разному)
3. Существует конечная положительная информация Фишера

$$J(\theta) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Если оценка параметра несмещена и выполнены условия регулярности:

1. Область определения случайной величины не зависит от параметра θ
2. Сложное техническое условие, разрешающее брать производные (обычно формулируется по-разному)
3. Существует конечная положительная информация Фишера

$$J(\theta) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

$f(x,\theta)$ – плотность распределения для непрерывных случайных величин и вероятность для дискретных

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Тогда для дисперсии оценки выполняется неравенство Рао Фреше Крамера:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$$

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Тогда для дисперсии оценки выполняется неравенство Рао Фреше Крамера:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$$

Если оказалось, что $Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$, тогда оценка эффективна

Неравенство Рао-Фреше-Крамера

Тогда для дисперсии оценки выполняется неравенство Рао Фреше Крамера:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$$

Если оказалось, что $Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$, тогда оценка эффективна

Точно такое же неравенство можно выписать для смещённых оценок:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{(1 + bias'_{\theta})^2}{n \cdot J(\theta)}$$

Резюме

Резюме

Несмещённость – много раз используя оценку,
при фиксированном размере выборки, в среднем,
мы не ошибаемся

Резюме

Несмещённость – много раз используя оценку, при фиксированном размере выборки, в среднем, мы не ошибаемся

Как проверить:

По-честному найти $\mathbb{E}(\hat{\theta})$ и сравнить его с θ

Резюме

Состоятельность – последовательность оценок при увеличении числа наблюдений сходится к истинному значению параметра

Резюме

Состоятельность – последовательность оценок при увеличении числа наблюдений сходится к истинному значению параметра

Как проверить:

- используя ЗБЧ найти к чему сходится оценка
- использовать условие Чебышёва:

Резюме

Состоятельность – последовательность оценок при увеличении числа наблюдений сходится к истинному значению параметра

Как проверить:

- используя ЗБЧ найти к чему сходится оценка
- использовать условие Чебышёва:

Если оценка несмещённая и её дисперсия при росте n стремится к нулю ⇒ она состоятельная:

$$\mathbb{E}(\bar{x}) = \mu$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Резюме

Оценки можно сравнивать между собой с помощью различных функций потерь, обычно используют MSE:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Резюме

Оценки можно сравнивать между собой с помощью различных функций потерь, обычно используют MSE:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Поиск компромисса между смещением и разбросом позволяет уменьшить MSE, этим часто пользуются в машинном обучении **(регуляризация)**

Резюме

Оценки можно сравнивать между собой с помощью различных функций потерь, обычно используют MSE:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{\theta})$$

Поиск компромисса между смещением и разбросом позволяет уменьшить MSE, этим часто пользуются в машинном обучении **(регуляризация)**

В классе всех возможных оценок наилучшей в смысле MSE оценки не существует

Резюме

Оценки можно сравнивать между собой с помощью различных функций потерь, обычно используют MSE:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = Var\left(\hat{\theta}\right) + \text{bias}^2(\hat{\theta})$$

Поиск компромисса между смещением и разбросом позволяет уменьшить MSE, этим часто пользуются в машинном обучении **(регуляризация)**

В классе всех возможных оценок наилучшей в смысле MSE оценки не существует

Обычно нас интересуют несмещённые оценки

Резюме

Эффективность – хотим самый узкий доверительный интервал ⇒ ищем оценку с самой маленькой дисперсией в каком-то классе

Резюме

Эффективность – хотим самый узкий доверительный интервал ⇒ ищем оценку с самой маленькой дисперсией в каком-то классе

Как проверить:

- иногда помогает неравенство Рао-Фреше-Крамера

Резюме

Эффективность – хотим самый узкий доверительный интервал ⇒ ищем оценку с самой маленькой дисперсией в каком-то классе

Как проверить:

- иногда помогает неравенство Рао-Фреше-Крамера

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n \cdot J(\theta)}$$

Если мы получили равенство, оценка эффективна.
Если нет, мы не можем сказать про неё ничего конкретного, и нужна более мощная процедура для проверки