Непараметрические тесты, критерии согласия, бутстрап

План

- Критерий знаков, ранговые критерии
- Бутстрап
- Эмпирическая функция распределения
- Критерии согласия

Непараметрические критерии

Непараметрические критерии

- Проверка гипотезы – способ посчитать расстояние
- На прошлой неделе мы обсудили параметрические критерии
- Мы предполагали вид распределения и получали критерий
- Можно считать расстояния без предположений о виде распределения → **непараметрические критерии**
- Помогают тестировать гипотезы в ситуациях, когда распределение нестандартное

Непараметрические критерии

Параметрические критерии:

- Нулевая гипотеза формулируется о конкретных параметрах распределения
- Перед проведением теста на выборку накладываем предположения о распределении

Непараметрические критерии:

- Свойства распределения неизвестны
- Используют только информацию из выборки

Критерии знаков

Идея критерия

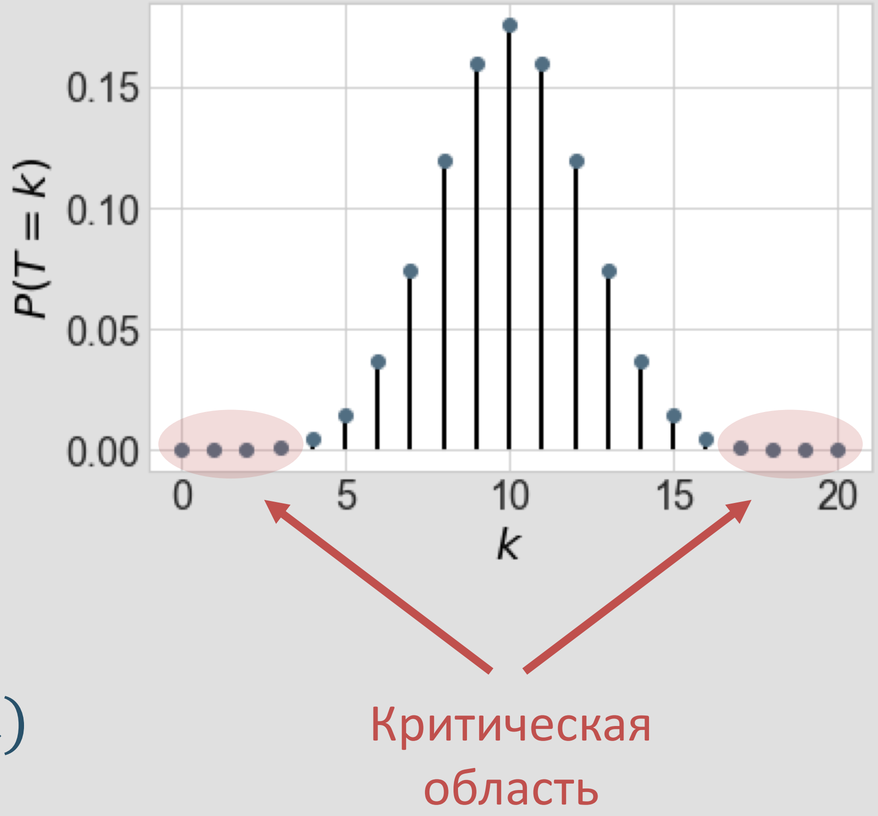
- Превратим выборку в нули и единицы
- Часть информации о выборке мы теряем
- Но зато всегда можем воспользоваться биномиальным распределением

Критерии знаков (одновыборочный)

$X_1, \dots, X_n \sim iid$

$\mathrm{H}_0\colon\ Med(X) = m_0$

$\mathrm{H}_a\colon\ Med(X) \neq m_0$



Критерий для проверки:

$$T = \sum_{i=1}^{n} [X_i > m_0] \sim Bin(0.5, n)$$

Задача о попугаях

Пример: есть данные о говорливости попугаев (слов в день), правда ли, что в среднем попугаи говорят больше 5 слов?

$$6, 4, 4, 7, 8$$

$$1, 0, 0, 1, 1$$

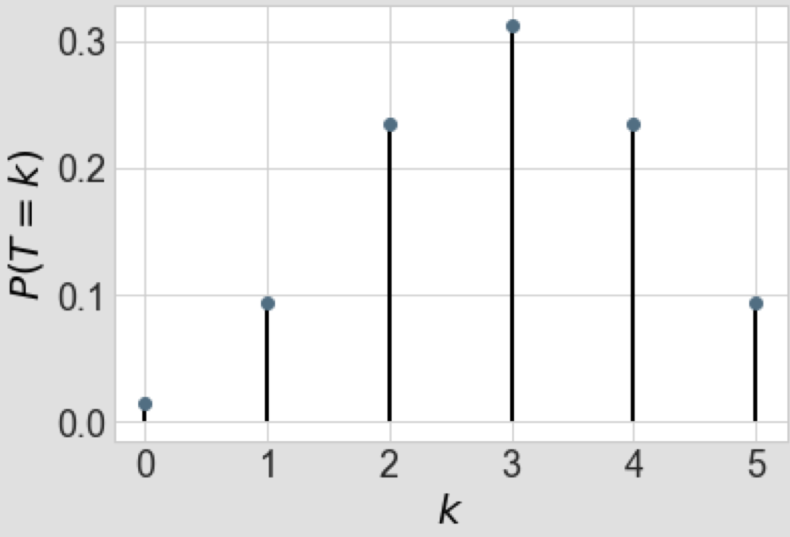
$$T_{\text{набл.}} = 3 \qquad < \qquad T_{\text{кр.}} = T_{1-\alpha} = 5$$

H_0: $Med(X) = 5$

H_a: $Med(X) > 5$

$\alpha = 0.05$

Гипотеза **не отвергается**



Критерии знаков (двухвыборочный)

$X_1, \dots, X_n \sim iid$

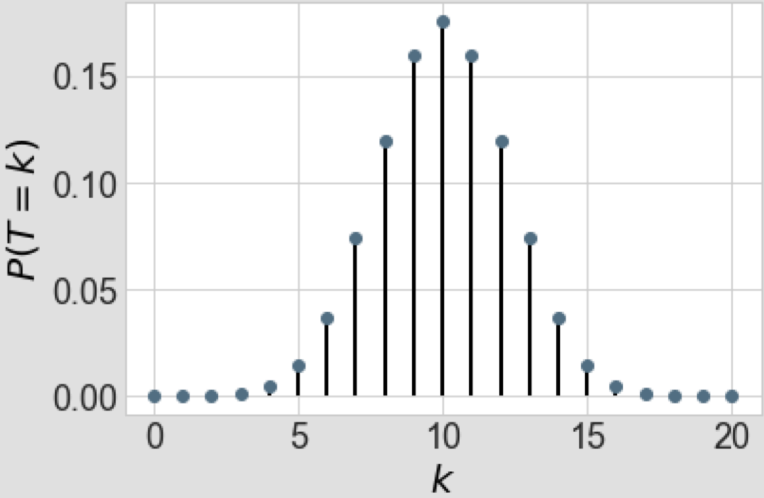
$Y_1, \dots, Y_n \sim iid$

Выборки связанные

Снова превращаем выборки в нули и единицы, но немного другим способом

$$H_0 \colon \mathbb{P}(X > Y) = 0.5$$

$$H_a \colon \mathbb{P}(X > Y) \neq 0.5$$



Критерий для проверки:

$$T = \sum_{i=1}^{n} [X_i > Y_i] \sim Bin(0.5, n)$$

Задача про апелляцию

Пример: даны баллы студентов до и после апелляции. Правда ли, что в среднем апелляция не повышает балл за контрольную?

До: $48, 54, 67, 56, 55, 55, 90, 71, 72, 69$

После: $47, 52, 60, 60\ 58, 60, 70, 81, 87, 60$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$

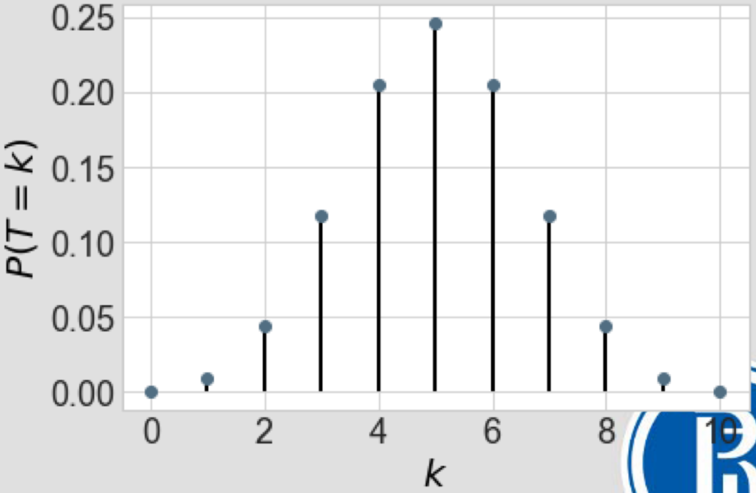
$T_{\text{набл.}} = 5 \qquad T_{\text{кр.}} = 8$

$\mathrm{H}_0: \mathbb{P}(X > Y) = 0.5$

$\mathrm{H}_a: \mathbb{P}(X > Y) > 0.5$

$\alpha = 0.05$

Гипотеза **не отвергается**



Резюме

- Критерий знаков позволяет проверять гипотезу о равенстве медианы и отсутствии сдвига в связных выборках
- Критерий знаков игнорирует величину изменений и обращает внимание только на её направление
- Из-за этого происходит потеря части информации о выборке

Ранговые критерии

Идея критерия

- Критерии знаков превращают выборку в нули и единицы, из-за этого теряется информация
- Чтобы сохранить больше информации о выборке, можно превращать наблюдения в ранги

Ранг наблюдения

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – выборка

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ Упорядочим по возрастанию

Правила выставления ранга:

1. Порядковый номер наблюдения – ранг
2. Если встречаются несколько одинаковых значений, им присваивается одинаковое значение ранга, равное среднему арифметическому их порядковых номеров

Критерии Уилкоксона (одновыборочный)

$X_1, \dots, X_n \sim iid$

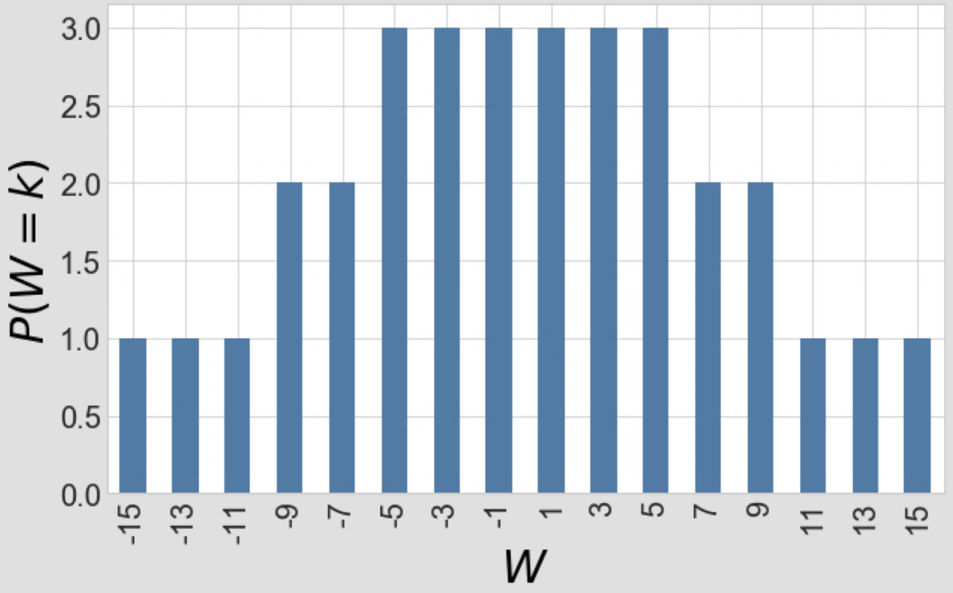
$F_X(x)$ симметрична относительно медианы

$\mathrm{H}_0\colon\ Med(X) = m_0$

$\mathrm{H}_a\colon Med(X) \neq m_0$

У статистики табличное распределение

Распределение для $n = 5$



Критерий для проверки:

$$W = \sum_{i=1}^{n} rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$

Распределение статистики

$$W = \sum_{i=1}^{n} rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$

Ранги

Знаки

Пусть в выборке пять наблюдений:

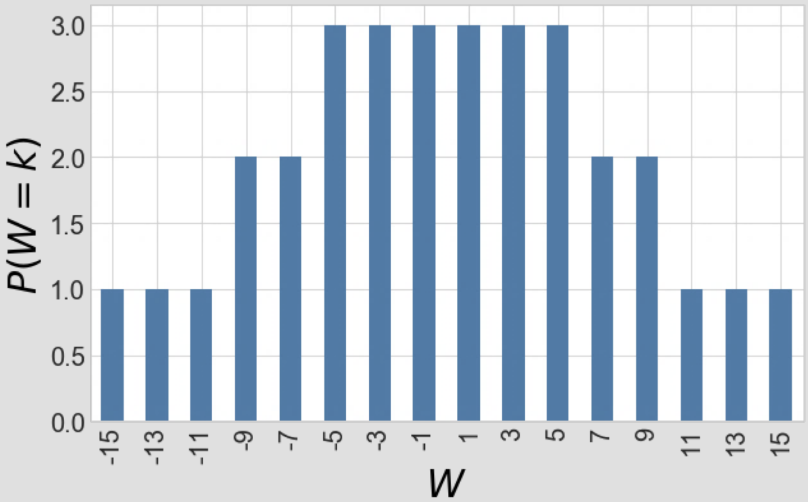
1	2	3	4	5
−	−	−	−	−
+	−	−	−	−
−	+	−	−	−
…	…	…	…	…
−	+	+	+	+
+	+	+	+	+

Распределение статистики

$$W = \sum_{i=1}^{n} rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$

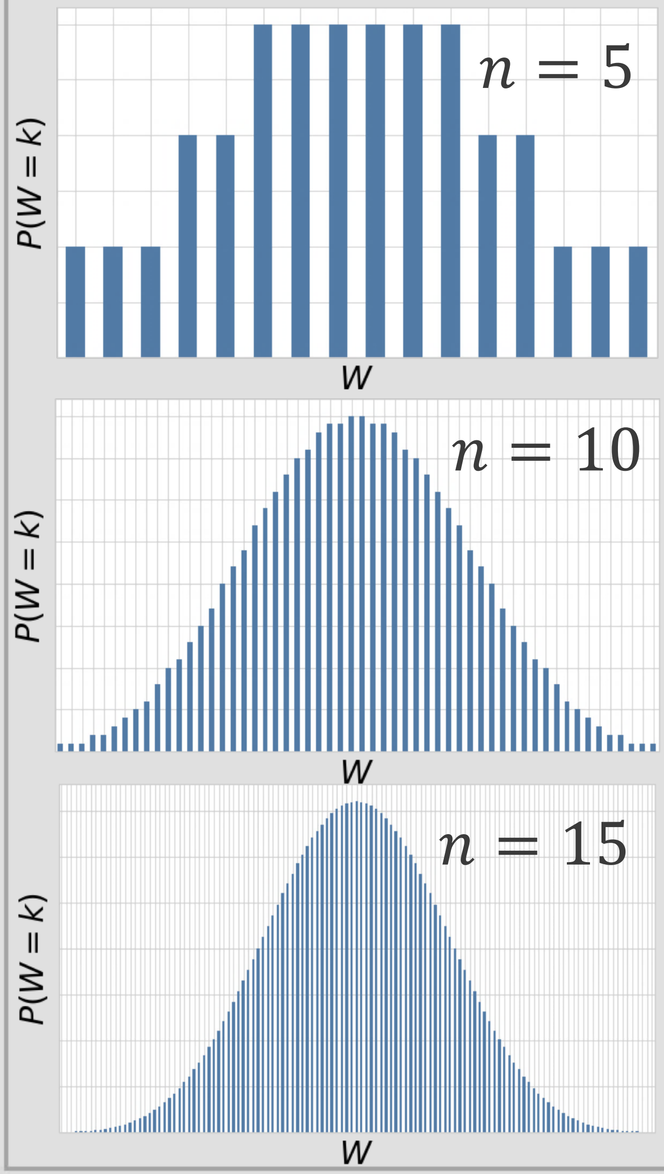
Пусть в выборке пять наблюдений:

1	2	3	4	5	
−	−	−	−	−	−15
+	−	−	−	−	−13
−	+	−	−	−	−11
…	…	…	…	…	…
−	+	+	+	+	13
+	+	+	+	+	15



Всего вариантов: 2^n

Апроксимация



При больших n пользуются нормальным приближением:

$$W \overset{asy}{\sim} N\left(0, \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}\right)$$

Задача о попугаях

Пример: есть данные о говорливости попугаев (слов в день), правда ли, что в среднем попугаи говорят больше 5 слов?

X_i	6	4	4	7	8	$m_0 = 5$
$\lvert X_i - m_0 \rvert$	1	1	1	2	3	
$rank(\lvert X_i - m_0 \rvert)$	2	2	2	4	5	
$sign(X_i - m_0)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	

$\Rightarrow \quad W_{\text{набл.}} = 7 \qquad W_{\text{кр.}} = W_{1-\alpha} = 12$

$$W = \sum_{i=1}^{n} rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$

$\alpha = 0.05$

Гипотеза **не отвергается**

Критерии Уилкоксона (двухвыборочный)

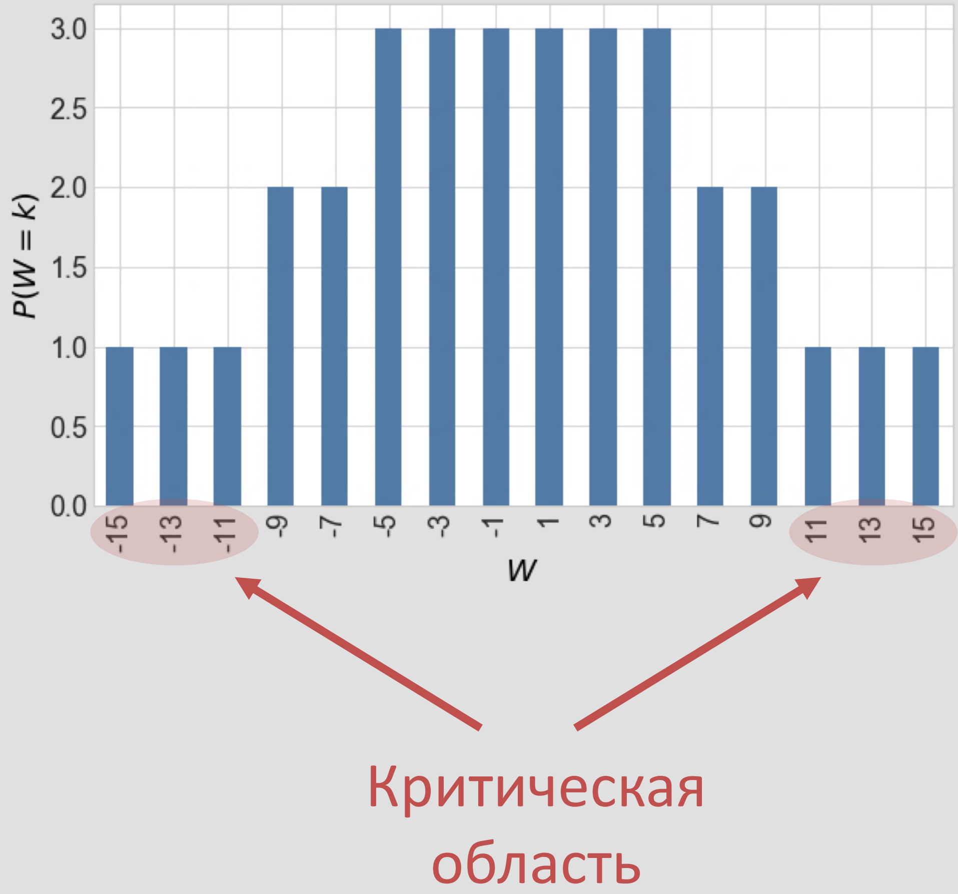
$X_1, \dots, X_n \sim iid$

$Y_1, \dots, Y_n \sim iid$

Выборки связанные

H_0: $Med(X - Y) = 0$

H_a: $Med(X - Y) \neq 0$



Критерий для проверки:

$$W = \sum_{i=1}^{n} rank(|X_i - Y_i|) \cdot sign(X_i - Y_i)$$

Задача про апелляцию

Пример: даны баллы студентов до и после апелляции. Правда ли, что в среднем апелляция не повышает балл за контрольную?

До: $48, 54, 67, 56, 55, 55, 90, 71, 72, 69$

После: $47, 52, 60, 60\ 58, 60, 70, 81, 87, 60$

$\lvert X_i - Y_i \rvert$	1	2	7	4	3	5	20	10	15	9
$rank(\lvert X_i - Y_i \rvert)$	1	2	6	4	3	5	10	8	9	7
$sign(X_i - Y_i)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

$\Rightarrow \quad W_{\text{набл.}} = -3 \qquad W_{\text{кр.}} = W_{1-\alpha} = 33$

$$W = \sum_{i=1}^{n} rank(|X_i - Y_i|) \cdot sign(X_i - Y_i)$$

Гипотеза
не отвергается

Критерии Манна-Уитни (двухвыборочный)

$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid$

$Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid$

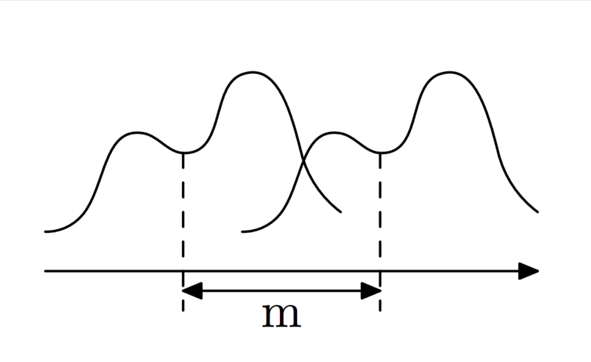
Распределения одинаковые по форме, различаются сдвигом

Выборки независимые

$\mathrm{n_x} \leq \mathrm{n_y}$

$\mathrm{H_0}\colon\ f_X(x) = f_Y(y)$

$\mathrm{H}_a\colon\ f_X(x) = f_Y(y + \mathrm{m}), \mathrm{m} \neq 0$



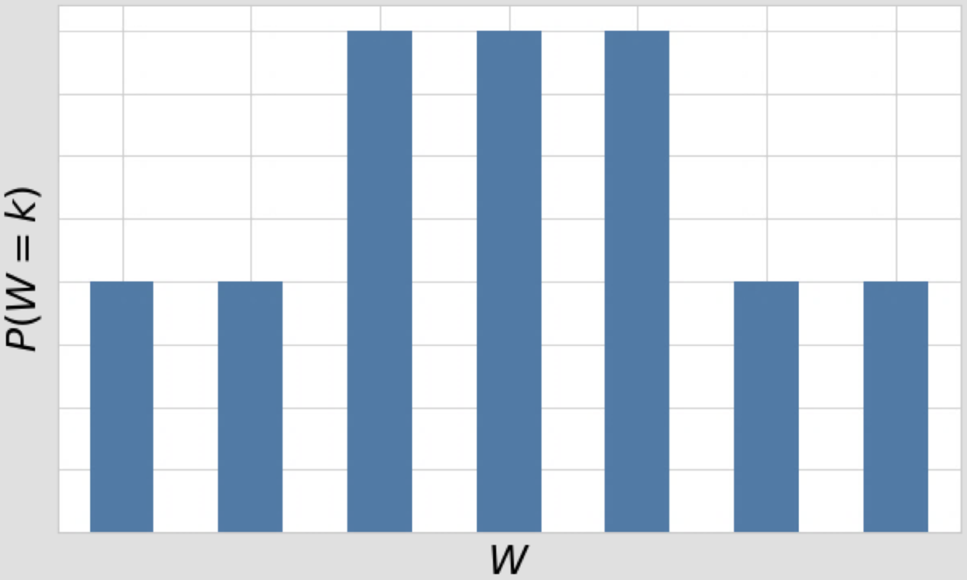
Объединим обе выборки в одну общую и посчитаем для всех чисел ранги

Критерий для проверки:

$$W = \sum_{i=1}^{n_x} rank(X_i)$$

Критерии Манна-Уитни (двухвыборочный)

$rank(X)$	$rank(Y)$
$\{1, 2\}$	$\{3, 4, 5\}$
$\{1, 3\}$	$\{2, 4, 5\}$
$\{1, 4\}$	$\{2, 3, 5\}$
$\{1, 5\}$	$\{2, 3, 4\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 4, 5\}$
…	…



Всего $C_{n_x+n_y}^{n_x}$ вариантов

- Распределение статистики снова оказывается табличным
- Для больших объёмов выборки можно использовать нормальное приближение

Задача про кофе

Пример: две группы людей принимают препарат перед забегом на сто метров

Кофеин: $12, 10$ **Плацебо:** $13, 11, 14$

$$12, 10, 13, 11, 14$$

$$5 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4$$

$$W_{\text{набл.}} = 5 + 1 = 6 \qquad W_{\text{кр.}} = W_{1-\alpha} = 8$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$

Задача про кофе

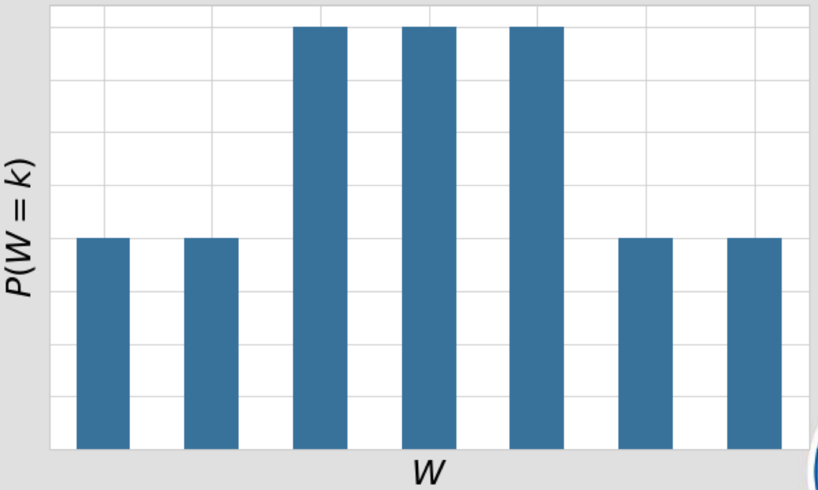
Пример: две группы людей принимают препарат перед забегом на сто метров

Кофеин: $12, 10$ **Плацебо:** $13, 11, 14$

$$12, 10, 13, 11, 14$$

$$5 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4$$

$$W_{\text{набл.}} = 5 + 1 = 6 \qquad W_{\text{кр.}} = W_{1-\alpha} = 8$$



Гипотеза,
что влияния
нет **не отвергается**

Резюме

- Ранговые критерии превращают выборку в ранги наблюдений и позволяют сохранить больше информации
- Чтобы сохранить информацию, приходится делать дополнительные предположения
- Предположений о законе распределения, по-прежнему, не требуется

Бутстрап

Бутстрап

- Не для всех описательных статистик можно найти распределение в аналитическом виде (медиана, эксцесс, куртосис)
- Бутстрап помогает решить эту проблему

Бутстрап

- **“bootstrap”** – кожаные петельки на задниках Ботинок

- **“lift himself by his bootstraps”** - “вытащить себя из болота за задники ботинок”, “выбиться в люди благодаря собственным усилиям”

- Предложен в 1977 году ~~бароном Мюнхгаузеном~~ Б. Эфроном из Стенфорда

Бутстрап

- **Идея метода:** имеющаяся выборка – это единственная информация об истинном распределении данных
- Давайте приблизим истинное распределение эмпирическим, то есть “сами себя вытащим”
- Предполагается, что бутстрап-распределение окажется похожим на реальное распределение

Пример

- У Саши есть выборка из двух наблюдений: 1 и 4
- Нужно построить по этой выборке бутстрап-распределение для статистики $\bar{x}$

Выборки с повторениями:

$1,4 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 2.5$

$4,1 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 2.5$

$1,1 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 1$

$4,4 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 4$

Всего вариантов выборок:

$$n^n = 2^2 = 4$$

$\bar{x}$	1	2.5	4
$\mathbb{P}(\bar{x} = k)$	0.25	0.5	0.25

Пример

- У Саши есть выборка из двух наблюдений: 1 и 4
- Нужно построить по этой выборке бутстрап-распределение для статистики $\bar{x}$

Всего вариантов выборок:

$$n^n = 2^2 = 4$$

- Строить такие распределения для больших выборок дорого
- Задача слишком сложная, а точность излишняя
- **Выход:** симуляции

Схема бутстрапа

- Извлечение выборок из генеральной совокупности – сэмплирование из неизвестного распределения $F(x)$
- У нас есть оценка для $F(x)\ -\hat{F}_n(x)$
- Сэмплировать из такого распределения – то же самое, что брать выборки с повторениями объёма n

Схема бутстрапа

$F(x)$

неизвестное распределение

выборка

X

$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$

статистика

$\hat{F}_n(x)$

эмпирическое распределение

бутстрап-выборка

X^*

$\hat{\theta}^*(X_1^*, \dots, X_n^*)$

бутстрап-статистика

Схема бутстрапа

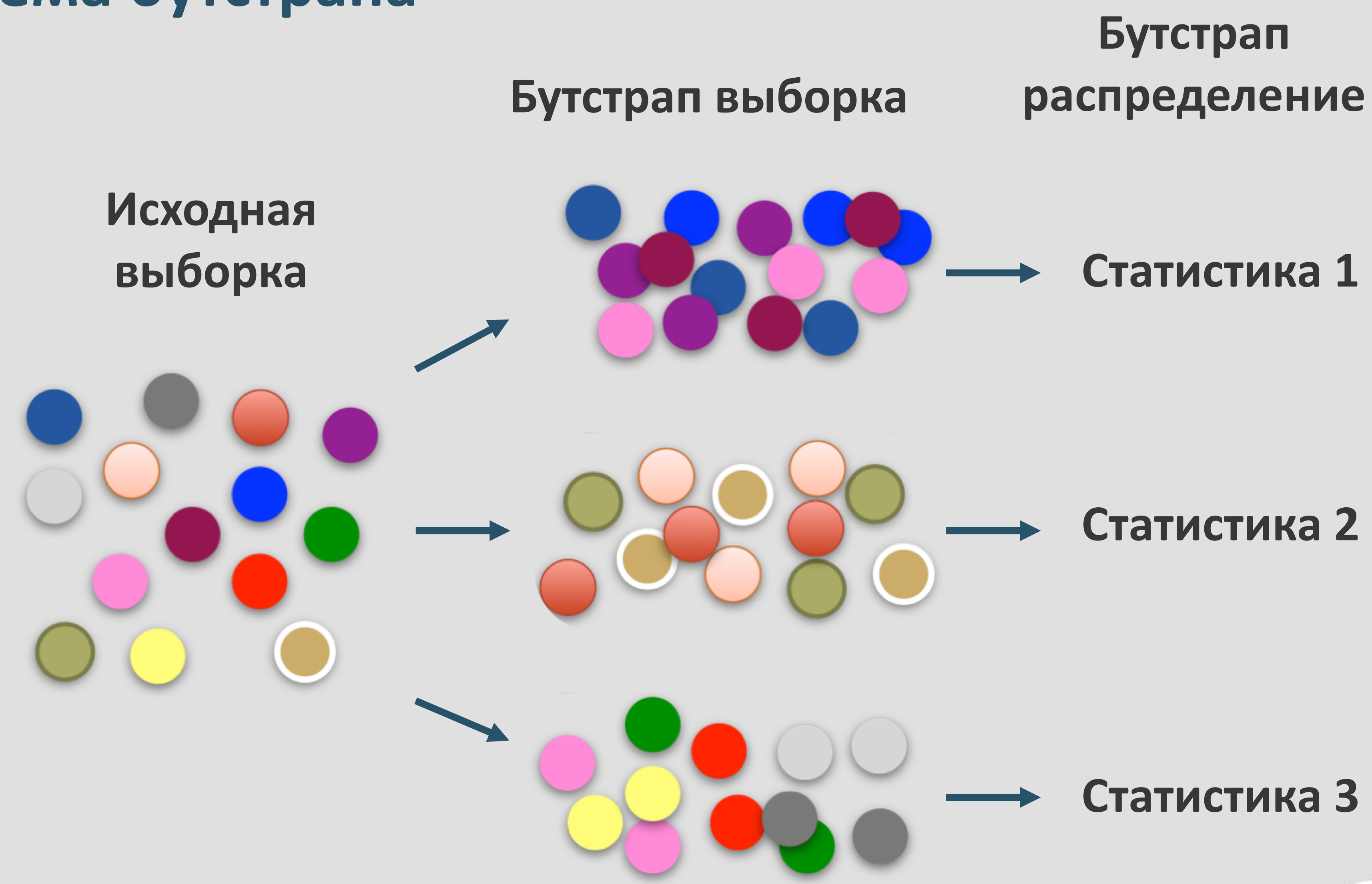


Схема бутстрапа

- Генерируем B “псевдовыборок” с повторениями объёма n и оцениваем настоящее распределение “псевдоэмпирическим”
- По каждой выборке вычисляем интересующую нас статистику, получаем для неё бутстрап-распределение
- **Эфронов доверительный интервал:** находим выборочные квантили бутстрап-распределения
- В таком доверительном интервале возникает смещение $\Rightarrow$ более сложные техники бутстрапа

Доверительный интервал Эфрона

Бутстрапируем:	оценку неизвестного параметра
Сэмплируем:	$x_1^*, \ldots, x_n^*$
Считаем:	$\hat{\theta}^*$
Повторяем:	B раз
Строим распределение:	$\hat{\theta}_1^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$
Интервал:	$\left[\, \hat{\theta}^*_{\frac{\alpha}{2}};\ \ \hat{\theta}^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \,\right]$

Если распределение выборки несимметрично, такой доверительный интервал усиливает смещение, присущее изначальной выборке

Бутстрап

Центрирование

- Чтобы не создавать искусственное смещение между $\hat{\theta}$ и θ, нужно бутстрапировать центрированную статистику
- Хотим бутстрапировать разность $\hat{\theta} - \theta$
- Бутстрапируя $\hat{\theta}$, мы подсчитываем её каждый раз заново, но на бутстраповских выборках, $\hat{\theta}^*$
- Бутстраповским аналогом для θ будет $\hat{\theta}$, так как мы сэмплируем данные их эмпирического распределения
- Бутстраповский аналог для $\hat{\theta} - \theta$ – это $\hat{\theta}^* - \hat{\theta}$

Доверительный интервал Холла

Бутстрапируем: Отклонение оценки от истинного значения

Сэмплируем: $x_1^*, \ldots, x_n^*$

Считаем: $\hat{q}_i^* = \hat{\theta}^* - \hat{\theta}$

Повторяем: B раз

Строим распределение: $\hat{q}_1^*, \ldots, \hat{q}_B^*$

Интервал: $[\hat{\theta} - \hat{q}^*_{1-\frac{\alpha}{2}}; \ \hat{\theta} - \hat{q}^*_{\frac{\alpha}{2}}]$

t-процентильный доверительный интервал

Бутстрапируем: t - статистику

Сэмплируем: $x_1^*, \dots, x_n^*$

Считаем: $t_i^* = \dfrac{\left(\hat{\theta}^* - \hat{\theta}\right)}{se\left(\hat{\theta}^*\right)}$

Повторяем: B раз

Строим распределение: $t_1^*, \dots, t_B^*$

Интервал: $\left[\, \hat{\theta} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se(\hat{\theta});\ \ \hat{\theta} - t^*_{\frac{\alpha}{2}} \cdot se(\hat{\theta})\right]$

❗ Если бутстрапировать $|\ \hat{\theta}^* - \hat{\theta}\ |$, можно получить симметричный интервал

Проверка гипотез при помощи бутстрапа

$H_0\colon\ \theta = \theta_0$

$H_a\colon\ \theta > \theta_0$

t-статистика:

$$t = \frac{\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)}{se\left(\hat{\theta}\right)}$$

Бутстрап-аналог:

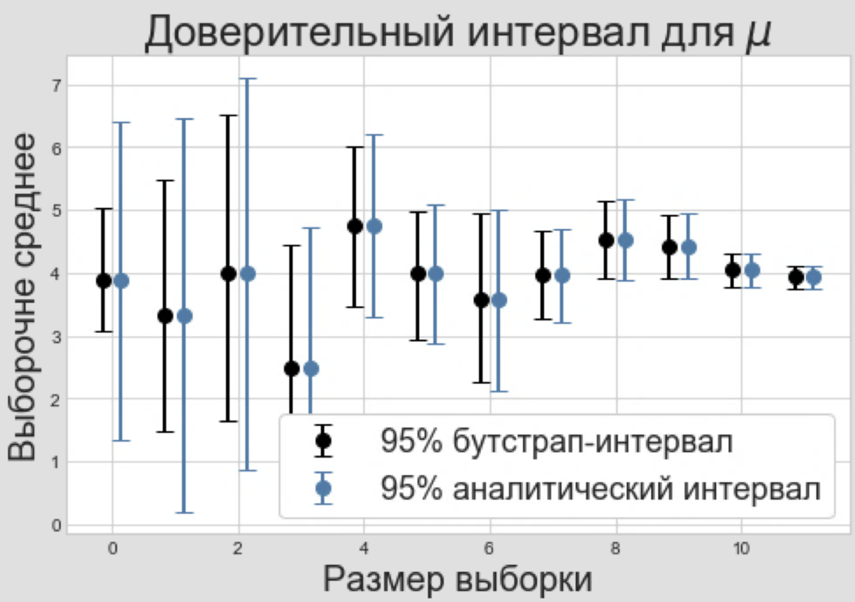
$$t^* = \frac{\left(\hat{\theta}^* - \hat{\theta}\right)}{se\left(\hat{\theta}^*\right)}$$

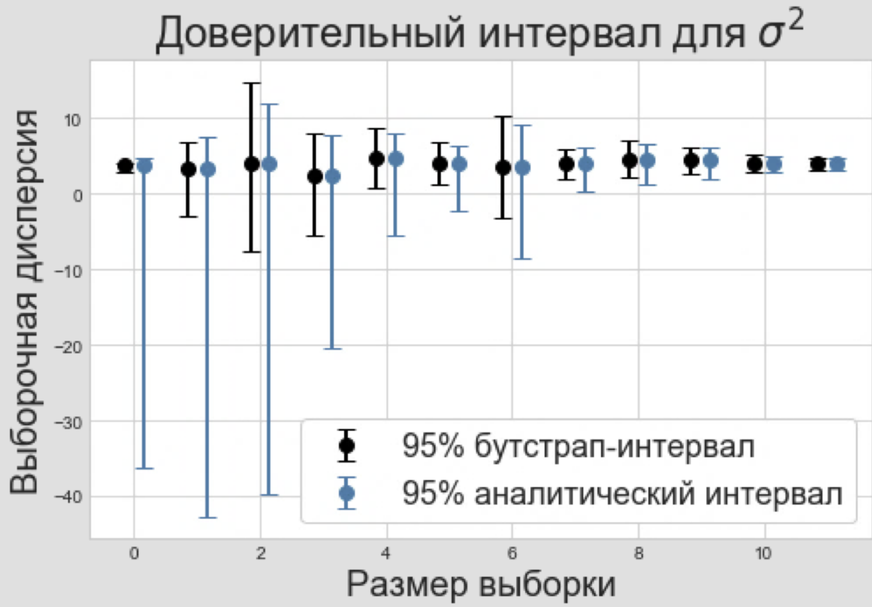
- Гипотеза отвергается, если $t_{obs} > t^*_{1-\alpha}$
- По аналогии можно проверять гипотезы против других альтернатив
- Для более сложных гипотез есть специальные бутстраповские алгоритмы проверки

➤ *http://quantile.ru/03/03-SA.pdf*

Проблемы бутстрапа

- Чтобы бутстрап сработал, выборка должна быть репрезентативной





- Если исходная выборка маленькая, бутстраповский доверительный интервал будет уже аналитического, так как в выборке недостаточно “неопределенности”

Проблемы бутстрапа

- Если в данных есть структура (регрессия, временные ряды), бутстрап нужно устроить так, чтобы учитывать её $\Rightarrow$ разные виды бутстрапа
- Бутстрап ненадёжно работает в хвостах распределения из-за маленького числа наблюдений: мы можем хорошо оценить медиану, но не 99% квантиль
- Если у распределения тяжёлые хвосты, бутстрап может работать некорректно и в средиземье

Сколько процентов выборки берем

У Винни-Пуха есть 100 песенок (кричалок, вопелок, пыхтелок и сопелок). Каждый день он поёт одну равновероятно наугад. Одну и ту же песенку он может петь несколько раз. Сколько в среднем песенок не будут спеты ни разу за 100 дней?

- Вероятность конкретной песенки $\frac{1}{n}$
- В конкретный день не споёт эту песенку с вероятностью $1 - \frac{1}{n}$
- Не споёт песенку ни разу с вероятностью

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37 \text{ при } n \to \infty$$

Пример

- Случайная величина $X_i = 1$, если песенка не была ни разу спета за n дней

X_i	0	1
$\mathbb{P}(\bar{x} = k)$	0.63	0.37

- Случайная величина $Y = X_1 + \cdots + X_n$ – число песенок, которое Винни-Пух ни разу не споёт за n дней

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = n \cdot \mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = 0.37 \cdot n$$

В одной бутстраповской выборке будет в среднем оказываться 63% наблюдений

Резюме

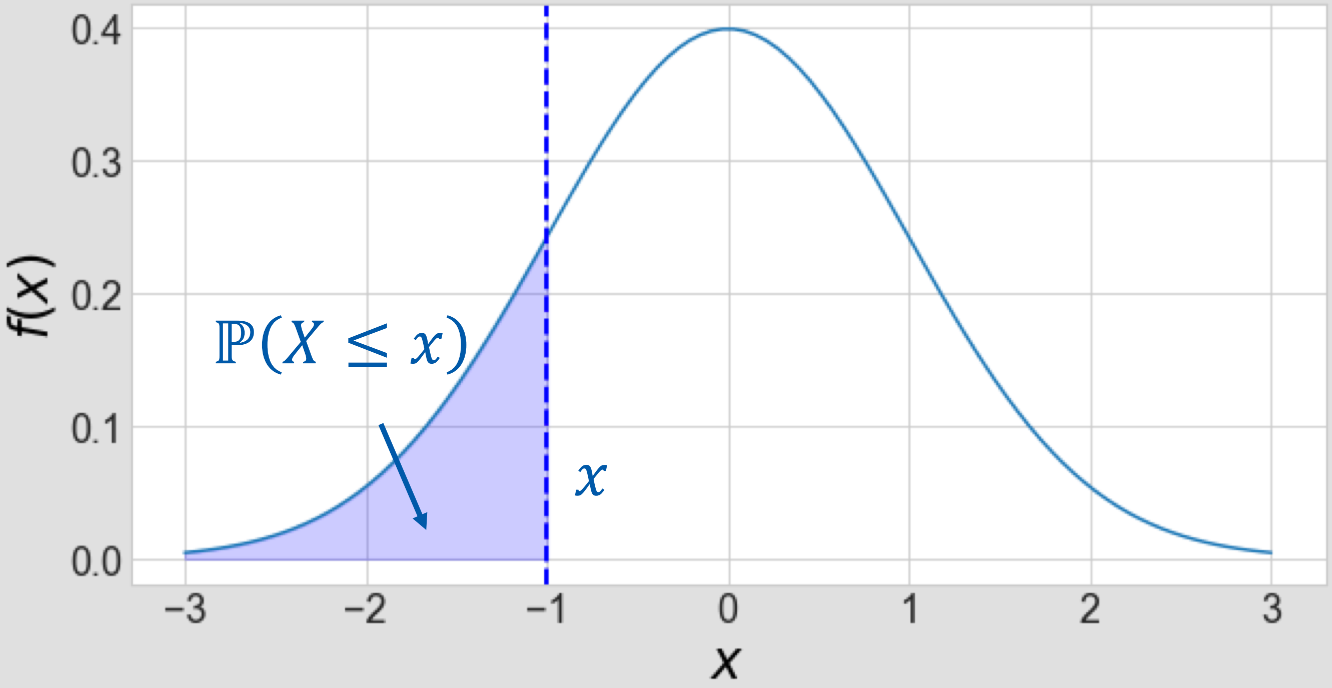
- Бутстрап – это метод получения критических значений статистики
- Процедура может требовать много времени для оценки
- При некоторых ограничениях бутстрап даёт состоятельные оценки, но не в общем случае
- Плохо работает для статистик, значение которых зависит от небольшого числа элементов выборки

Эмпирическая функция распределения

Функция распределения

Функция распределения – функция, которая определяет вероятность события $X \le x$, то есть

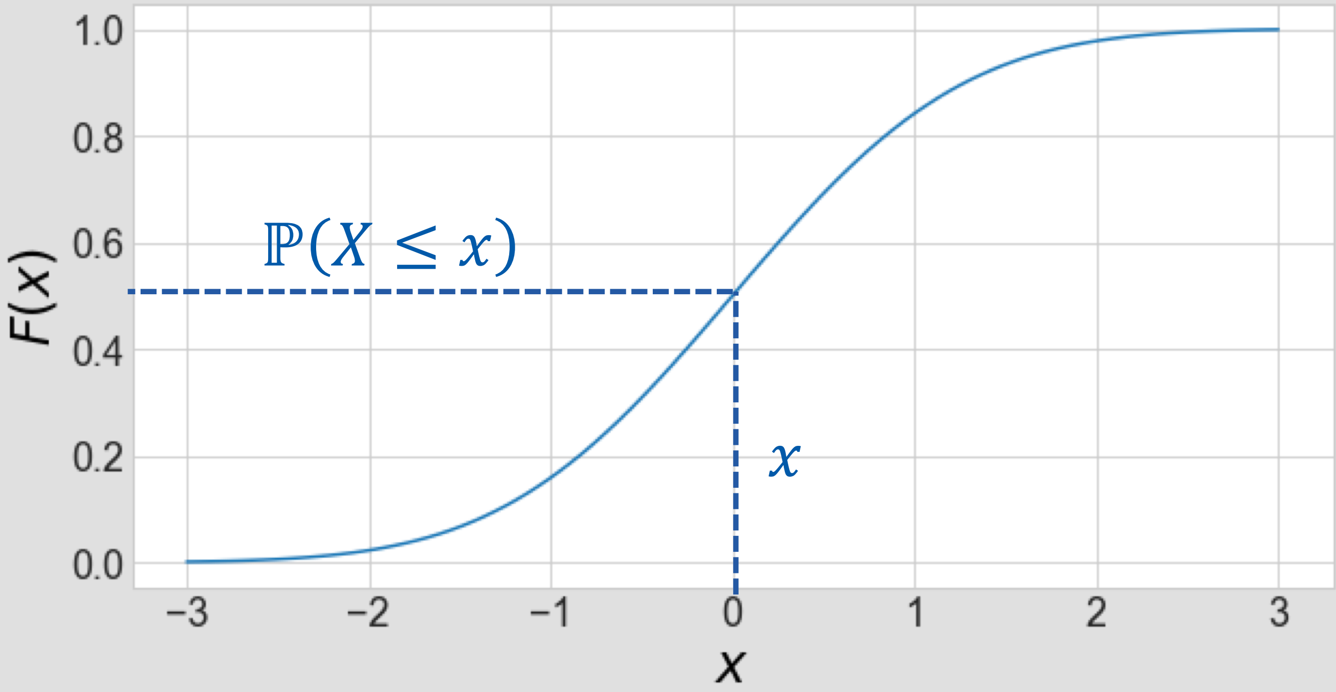
$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt\,, f(t) - \text{плотность}$$



Функция распределения

Функция распределения – функция, которая определяет вероятность события $X \leq x$, то есть

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt\,, f(t) - \text{плотность}$$



Эмпирическая функция распределения

Функция распределения – функция, которая определяет вероятность события $X \leq x$, то есть

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Эмпирическая функция распределения – функция, которая определяет для каждого x частоту события $X \leq x$, то есть

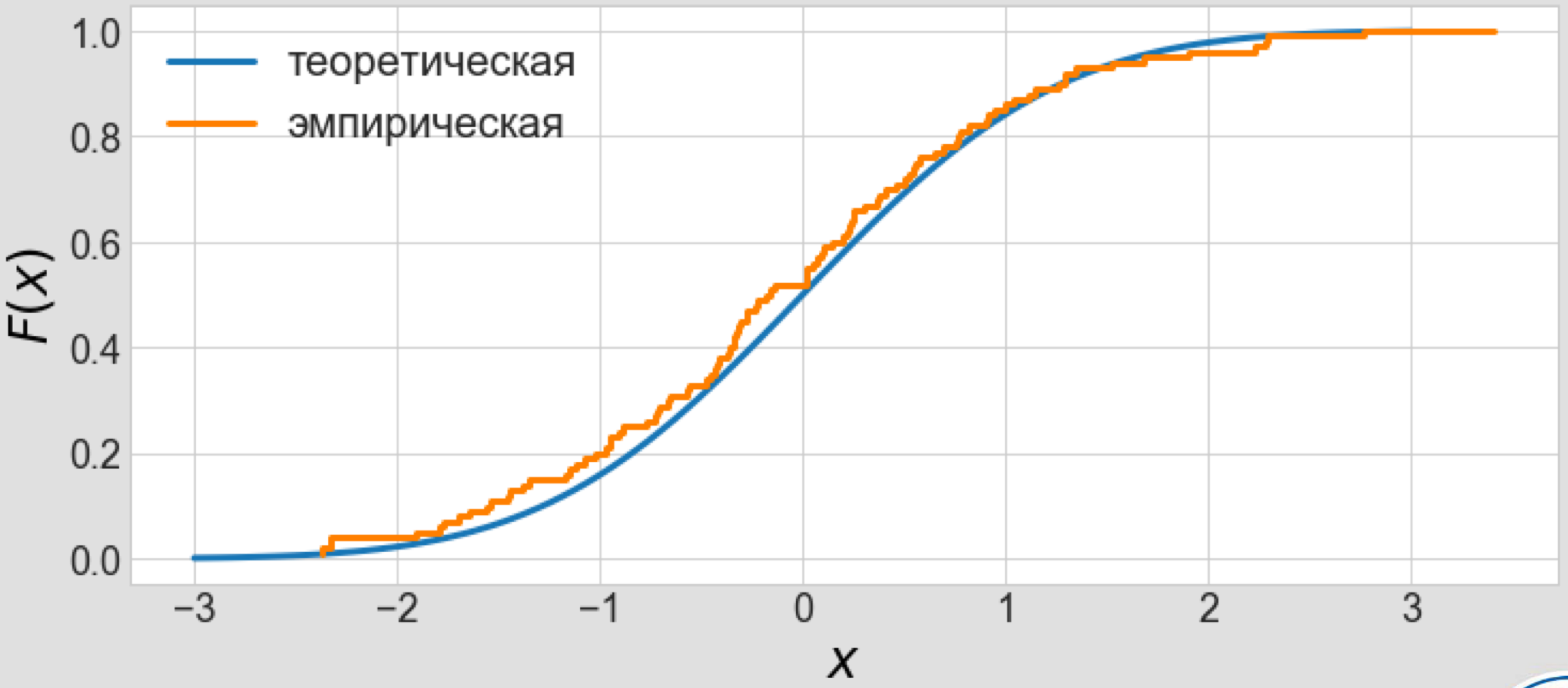
$$\hat{F}_n(x) = \widehat{\mathbb{P}}(X \leq x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i \leq x],$$

где $[\ \ ]$ – индикаторная функция, то есть:

$$[X_i \leq x] = \begin{cases} 1, X_i \leq x \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Эмпирическая функция распределения

Чем больше выборка, тем чаще ступеньки
и тем больше эмпирическая функция распределения
похожа на теоретическую.



Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения – статистика, оцениваемая по данным

Какими свойствами
она обладает?

vk.com

Свойства эмпирической функции распределения

1. Несмещённость: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F_X(x)$

Эмпирическая функция распределения

$$\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i \leq x]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\,[X_i \leq x]\,) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 \cdot \mathbb{P}(X_i \leq x) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_i > x)\,) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \leq x) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_X(x) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot F_X(x) = F_X(x)$$

Свойства эмпирической функции распределения

1. Несмещённость: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F_X(x)$

2. Состоятельность: $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x)$

Эмпирическая функция распределения

$$\hat{F}_n(x) = \hat{\mathbb{P}}(X \le x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i \le x] =$$

$$= \frac{[X_1 \le x] + \cdots + [X_n \le x]}{n} \quad \xrightarrow{p} F_X(x) \text{при } n \to \infty$$

По ЗБЧ наша оценка состоятельна

Свойства эмпирической функции распределения

1. Несмещённость: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F_X(x)$

2. Состоятельность: $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x)$

3. Асимптотическая нормальность:

$$\hat{F}_n(x) \overset{asy}{\sim} N\left(F_X(x), \frac{F_X(x)\cdot\left(1 - F_X(x)\right)}{n}\right)$$

Свойства эмпирической функции распределения

1. Несмещённость: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F_X(x)$

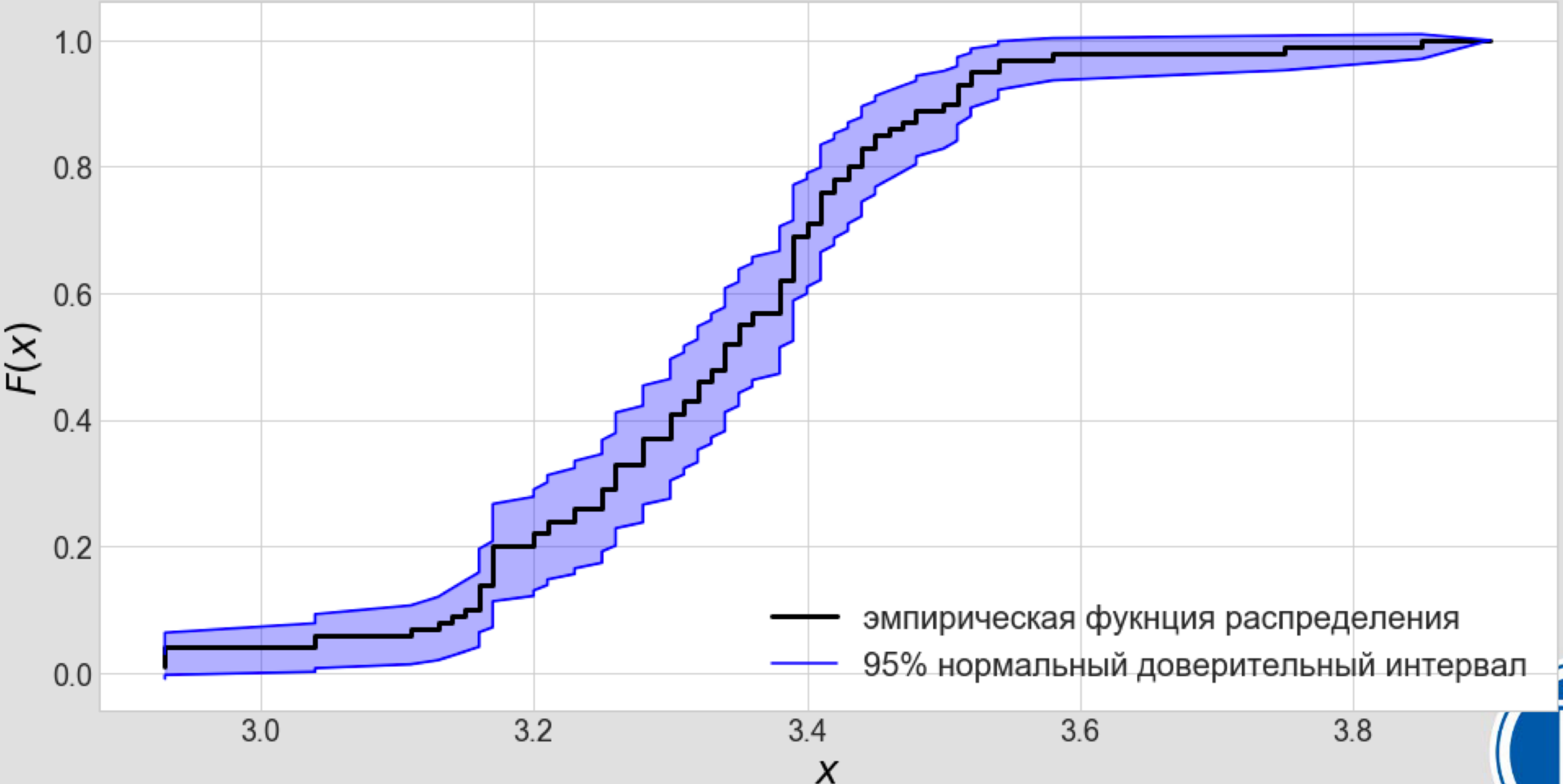
2. Состоятельность: $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x)$

3. Асимптотическая нормальность:

$$\hat{F}_n(x) \overset{asy}{\sim} N\left(F_X(x), \frac{\hat{F}_n(x)\cdot\left(1-\hat{F}_n(x)\right)}{n}\right)$$

Нормальный доверительный интервал

ЦПТ помогает построить доверительный интервал для эмпирической функции распределения в каждой точке



Критерий Колмогорова

Критерии согласия

- **Критерии согласия –** критерий о виде неизвестного закона распределения

$$\mathrm{H}_0\colon\ X \sim F_X(x)$$
$$\mathrm{H}_a\colon\ \text{гипотеза } H_0 \text{ неверна}$$

- Распределение случайной величины описывается её функцией распределения

$$\mathrm{H}_0\colon F_X(x) = F_0(x)$$

$$\mathrm{H}_a\colon\ F_X(x) \neq F_0(x)$$

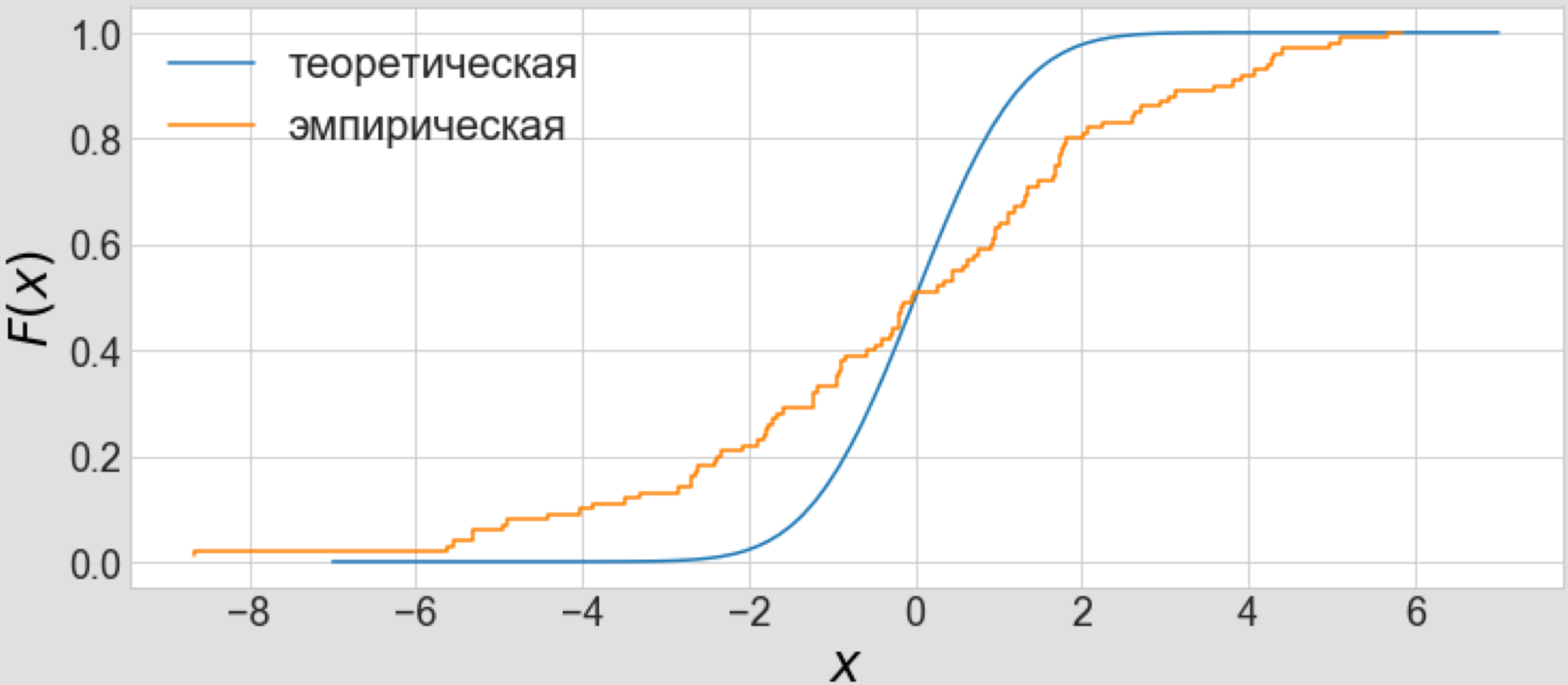
- Параметры неизвестного закона распределения мы фиксируем как нулевую гипотезу

Критерии согласия

- Критерии о неизвестных законах распределения строятся по аналогии с параметрическими
- У нас в распоряжении есть выборка, по ней мы оценили эмпирическую функцию распределения $\hat{F}_n(x)$
- Надо понять насколько она отличается от $F_0(x)$, то есть надо посчитать расстояние между функциями и узнать его распределение

Расстояние между функциями

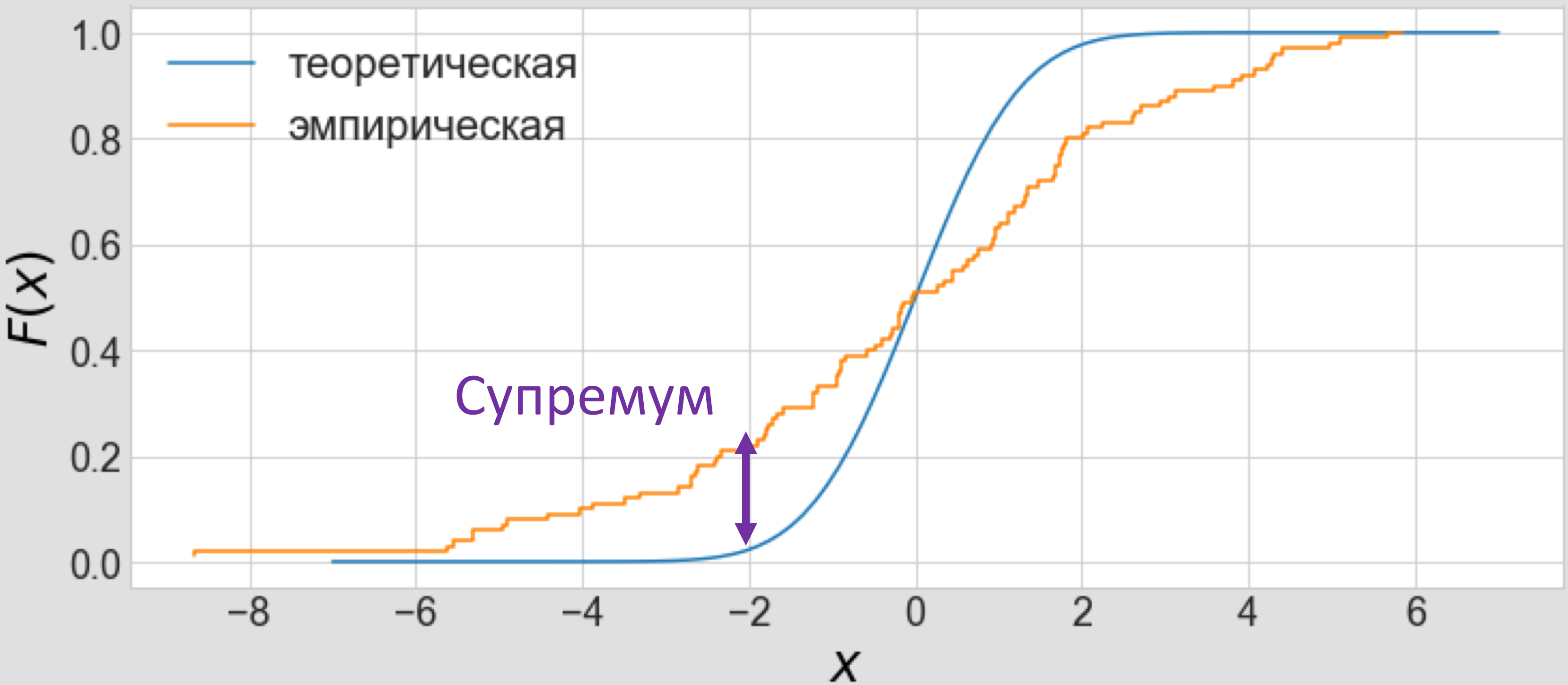
- Как измерить расстояние между двумя функциями?
- Разные способы сделать это ⇒ разные критерии



Критерий Колмогорова

- Можно найти между ними самое большое расстояние:

$$D_n(X_1, \dots, X_n) = \sup_x \mid F_0(x) - \hat{F}_n(x) \mid$$



Теорема Колмогорова

Статистика Колмогорова:

$$D_n(X_1, \dots, X_n) = \sup_x | F_0(x) - \hat{F}_n(x) |$$

При справедливости нулевой гипотезы, распределение статистики D_n одинаково для любых **непрерывных** распределений, при этом его функция распределения:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n} \cdot D_n \leq z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2}$$

Распределение Колмогорова – наш новый союзник, на её основе мы можем построить критерий

Критерий Колмогорова

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ F_X(x)$

$\mathrm{H}_0: F_X(x) = F_0(x)$

$\mathrm{H}_a: F_X(x) \neq F_0(x)$

Критерий для проверки:

$$K_n = \sqrt{n} \cdot \sup_x |\, F_0(x) - \hat{F}_n(x) \,|$$

$$K_n \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} \text{распределение Колмогорова}$$

❌ $K_{\text{набл.}} > K_{1-\alpha}$

✅ $K_{\text{набл.}} \leq K_{1-\alpha}$

! Критерий применяется только для непрерывных распределений

- Критические значения рассчитываются по таблицам, составленным для распределения Колмогорова

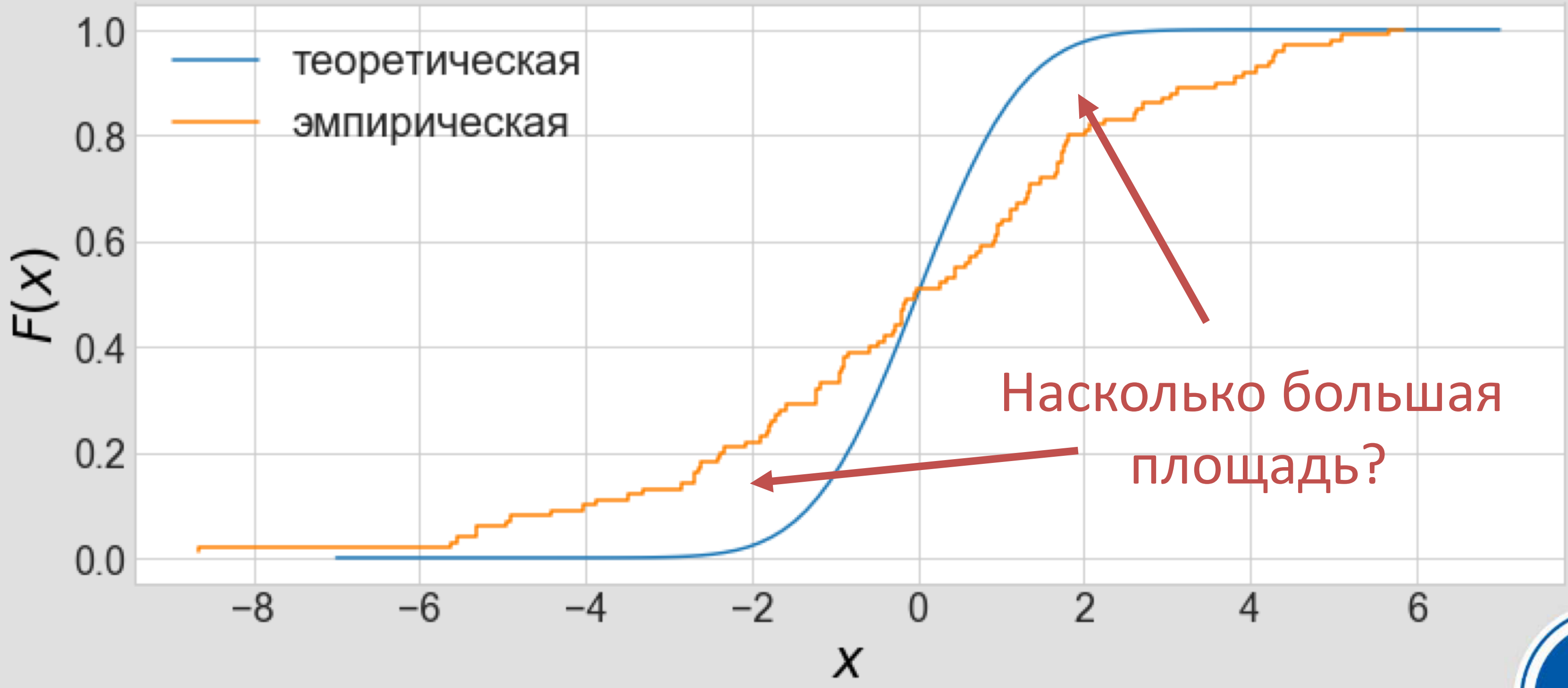
Другие способы искать расстояние

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(F_0(x)) \cdot \left[\, F_0(x) - \hat{F}_n(x) \,\right]^2 \cdot f_0(x)\, dx$$

усредняем по распределению

функция - вес

чем больше разница, тем выше штраф



Критерий Крамера-Мизеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \left[\, F_0(x) - \widehat{F}_n(x) \,\right]^2 \cdot f_0(x)\, dx$$

- Чем больше разница между функциями, тем выше штраф
- Разница усредняется по всем возможным значениям случайной величины
- Хорошо улавливает разницу в области “типичных значений” случайной величины

Критерий Андерсона-Дарлинга

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{F_0(x)(1 - F_0(x))} \cdot \left[F_0(x) - \hat{F}_n(x) \right]^2 \cdot f_0(x)\, dx$$

- При $F_0(x) \to 1$ или $F_0(x) \to 0$ дополнительный множитель оказывается очень большим
- Получается, что основное внимание уделяется разнице “на хвостах” распределения
- Для подобных критериев также известны предельные распределения, которыми можно пользоваться для проверки гипотез

Гипотезы об однородности выборок

$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ F_X(x)$ $\qquad$ $Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ F_Y(x)$

- Гипотезы о том, что выборки сделаны из одного и того же распределения

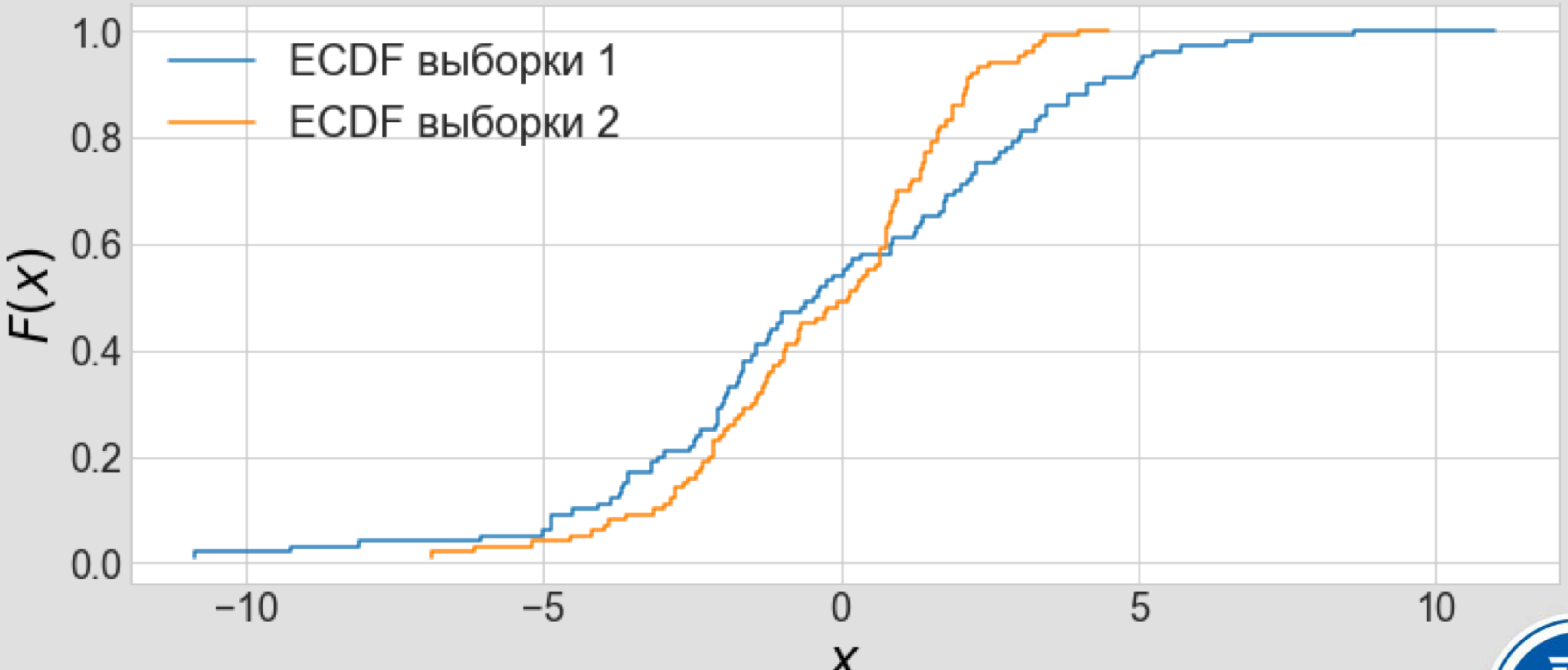
$$\mathrm{H}_0\colon F_X(x) = F_Y(x)$$
$$\mathrm{H}_a\colon F_X(x) \neq F_Y(x)$$

- Для проверки этой гипотезы можно использовать ту же самую идею, но расстояние надо будет считать между эмпирическими функциями распределения

Критерий Колмогорова-Смирнова

Снова будем искать супремум, но уже между эмпирическими функциями

$$D_n = \sup_x | \hat{F}_X(x) - \hat{F}_Y(x) |$$



Критерий Колмогорова-Смирнова

Снова будем искать супремум, но уже между эмпирическими функциями

$$D_n = \sup_x |\ \hat{F}_X(x) - \hat{F}_Y(x)\ |$$

- Статистика

$$\sqrt{\frac{n_x \cdot n_y}{n_x + n_y}} \cdot D_n$$

при $n_x, n_y \to \infty$ имеет распределение Колмогорова

- Она используется для проверки гипотезы об однородности выборок

Резюме

- Чтобы проверять гипотезы о распределениях, нужно научиться считать между ними расстояния
- Критерий Колмогорова ищет расстояние как супремум и позволяет проверять гипотезы о распределении и однородности выборок
- Критерии Крамера-Мизеса и Андерсона-Дарлинга помогают специфицировать критерий либо для ”средиземья” либо для ”крайнеземья” (хвостов)

Резюме

- Эти критерии работают только для непрерывных распределений
- Неизвестные параметры распределения фиксируются в нулевой гипотезе
- Если мы оцениваем параметры по выборке, распределения Колмогорова не будет одинаковым для всех распределений
- Для различных распределений можно строить уточнения теста Колмогорова

Критерий Пирсона

Критерий Пирсона

- Критерий Колмогорова работает только для непрерывных распределений

- Для проверки гипотез о дискретных распределениях используется критерий Пирсона

$$\mathrm{H}_0: F_X(x) = F_0(x)$$

$$\mathrm{H}_a: F_X(x) \neq F_0(x)$$

- Критерий Пирсона считает расстояние между распределениями с помощью сверки теоретических и эмпирических частот между собой

Критерий Пирсона

- Выборка $X_1, \ldots, X_n$ из дискретного распределения
- Предполагаем, что случайная величина принимает s значений с какими-то вероятностями

X	z_1	z_2	…	z_s	- возможные значения
$\mathbb{P}(X = z)$	$p_1(\theta)$	$p_2(\theta)$	…	$p_s(\theta)$	- теоретические вероятности
$\#(X_i = z)$	ν_1	ν_2	…	ν_s	- эмпирические частоты

- Нужно сравнить все эмпирические частоты с теоретическими

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\nu_j - n \cdot p_j(\hat{\theta})\right)^2}{n \cdot p_j(\hat{\theta})} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} \chi^2_{s-k-1}$$

$\hat{\theta}$ – состоятельная оценка параметров распределения

k – их количество

Критерий Пирсона

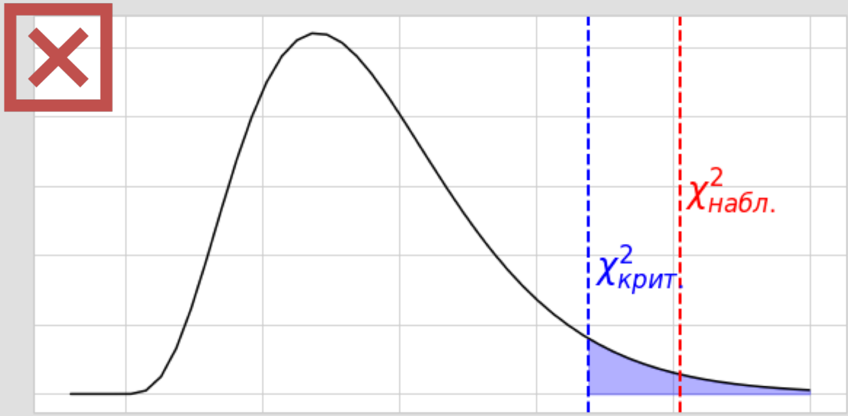
$X_1, \dots, X_n \sim iid\ F_X(x)$

$H_0: F_X(x) = F_0(x)$

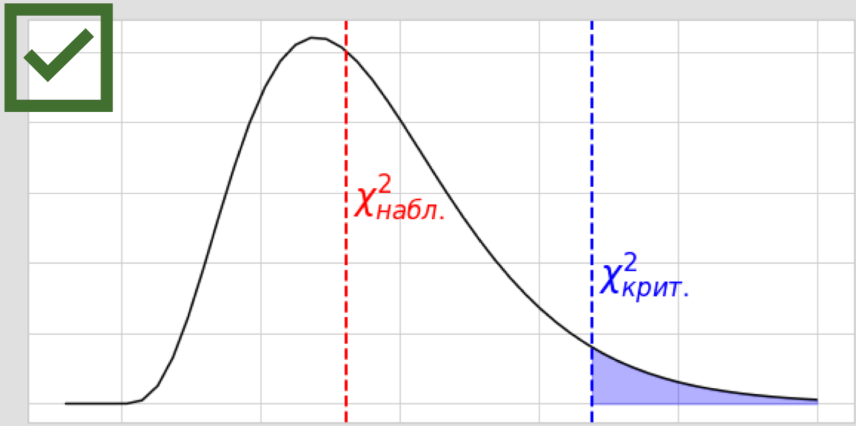
$H_a: F_X(x) \neq F_0(x)$

Критерий для проверки:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(v_j - n \cdot p_j(\hat{\theta})\right)^2}{n \cdot p_j(\hat{\theta})} \underset{H_0}{\overset{asy}{\sim}} \chi^2_{s-k-1}$$



$\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{s-k-1}(1-\alpha)$



$\chi^2_{\text{набл.}} \leq \chi^2_{s-k-1}(1-\alpha)$

Критерий обычно применяют для дискретных распределений

Пример:

- X– Количество сделок на фондовой бирже за квартал для пятисот инвесторов

вместе, т.к. их мало

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X=z)$	0.37	0.37	0.18	0.06	0.02			
$\#(x_i=z)$	199	170	87	31	9	2	1	1

$\mathrm{H}_0: X \sim Poiss(\lambda)$

$\hat{\lambda} = \bar{x} \approx 1$ – состоятельная оценка

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = 0.37$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0.37$$

...

Пример:

- X– Количество сделок на фондовой бирже за квартал для пятисот инвесторов

вместе, т.к. их мало

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X=z)$	0.37	0.37	0.18	0.06	0.02			
$\#(x_i=z)$	199	170	87	31	9	2	1	1

$\mathrm{H}_0: X \sim Poiss(\lambda)$ $\hat{\lambda} = \bar{x} \approx 1$ – состоятельная оценка

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(v_j - n \cdot p_j(\hat{\theta})\right)^2}{n \cdot p_j(\hat{\theta})} = \frac{(199 - 500 \cdot 0.37)^2}{500 \cdot 0.37} + \cdots = 3.85$$

$$\chi^2_{s-k-1}(1-\alpha) = \chi^2_{5-1-1}(1-0.05) = \chi^2_3(0.95) = 7.8$$

☑ Гипотеза о распределении Пуассона **не отвергается**

Критерий Пирсона

- Критерий Пирсона не состоятелен против всех альтернатив, т.е. бывают распределения, которые он не может отличить друг от друга
- Можно попробовать использовать критерий Пирсона для непрерывных распределений
- Для этого нужно будет разбить все возможные значения непрерывной случайной величины на бины (как на гистограмме)
- Результат работы теста будет зависеть от числа выбранных бинов $\Rightarrow$ лучше пользоваться для непрерывных распределений другими критериями

Гипотезы об однородности выборок

- Критерий Пирсона по аналогии с критерием Колмогорова можно использовать для проверки гипотез об однородности выборок

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ F_X(X) \qquad Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ F_Y(x)$$

Выборки независимые

$$\mathrm{H}_0\colon F_X(x) = F_Y(x)$$

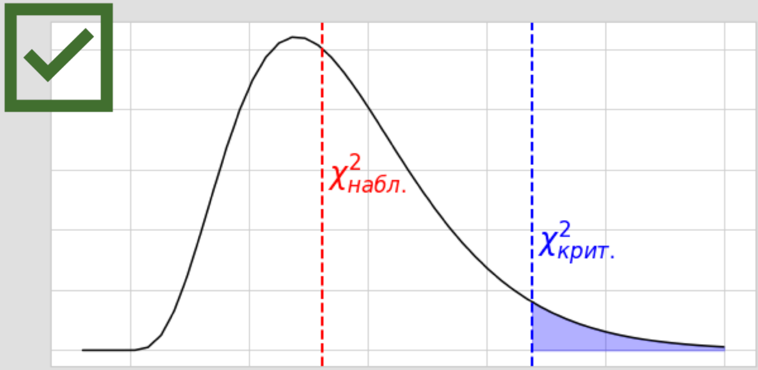
$$\mathrm{H}_a\colon F_X(x) \neq F_Y(x)$$

Критерий Пирсона

- Нужно сравнивать эмпирические частоты между собой

X, Y	z_1	z_2	…	z_s
$\#(y_i = z)$	w_1	w_2	…	w_s
$\#(x_i = z)$	v_1	v_2	…	v_s

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\frac{v_j}{n_x} - \frac{w_j}{n_y}\right)^2}{n_x + n_y} \overset{asy}{\underset{H_0}{\sim}} \chi^2_{s-1}$$



- Можно использовать критерий для непрерывных распределений, но тогда придется дробить данные на бины

Резюме

- Критерий Пирсона позволяет проверять гипотезы о виде распределения для дискретных случайных величин
- Его можно использовать и для непрерывных величин, но результат будет зависеть от числа выбранных групп