

# Схема математической статистики



# Схема математической статистики

Выборка:  $x_1, \dots, x_n$  Параметр:  $\theta$

$\hat{\theta}$



$f_{\hat{\theta}}(t)$

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмешенная
- Состоятельная
- Эффективная

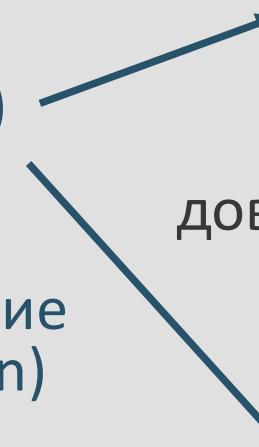
Союзники

Асимптотические  
(при большом  $n$ )

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!



Точность  
оценки,  
прогнозов

доверительные  
интервалы

Ответы на  
вопросы  
проверка  
гипотез



# Метод моментов



# Метод моментов

$X_1, \dots, X_n$  одинаково независимо распределены (*iid*)

Момент  $\mathbb{E}(X_i^k)$  зависит от неизвестного параметра  $\theta$ :

$$\mathbb{E}(X_i^k) = f(\theta)$$

**Оценкой метода моментов** называется случайная величина:

$$\hat{\theta}_{MM} = f^{-1}(\bar{X}^k)$$

То есть оценка получается решением уравнения

$$\mathbb{E}(X_i^k) \approx \frac{\sum x_i^k}{n}$$



# Метод моментов

Чаще всего хватает первого момента и берут  $k = 1$ ,  
то есть решают уравнение:

$$\mathbb{E}(X_i) \approx \frac{\sum x_i}{n}$$

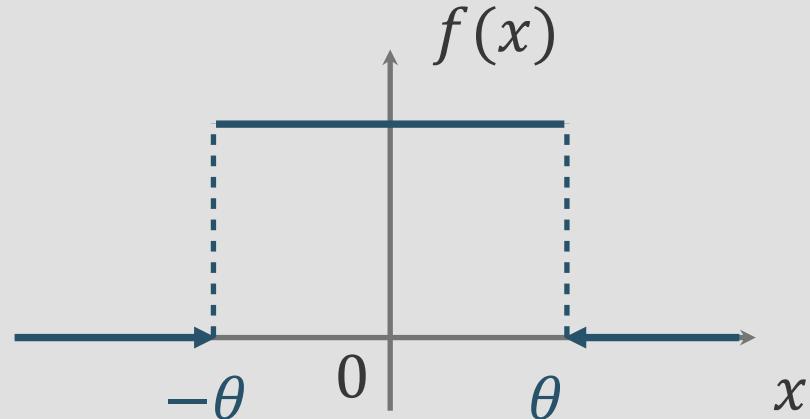


# Метод моментов

Если оказывается, что  $\mathbb{E}(X_i) = 0$ , тогда используют моменты более высоких порядков:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid U[-\theta; \theta]$$

$$\mathbb{E}(X_i) = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$



! Используя первый момент,  
нельзя получить оценку

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{\theta^2}{3} \Rightarrow \bar{x}^2 = \frac{\theta^2}{3} \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = (3\bar{x}^2)^{0.5}$$

$$\mathbb{E}(X_i) = 0$$



# Метод моментов

Если у распределения несколько параметров, используют несколько моментов:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid N(\mu, \sigma^2)$$

Нужно оценить два параметра: дисперсию и математическое ожидание, используем два момента:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_i) \approx \bar{x} \\ \mathbb{E}(X_i^2) \approx \bar{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 + \mu^2 = \bar{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2 \end{cases}$$



# Резюме

- Метод моментов позволяет оценить параметр неизвестного распределения по выборке
- Перед тем, как использовать метод моментов, мы должны предположить, из какого распределения выборка была получена
- Обычно для оценки достаточно первого момента
- Если у распределения есть несколько параметров, используют несколько моментов



# Асимптотический доверительный интервал для среднего



# Схема математической статистики

Выборка:  $x_1, \dots, x_n$  Параметр:  $\theta$

$\hat{\theta}$



$f_{\hat{\theta}}(t)$

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмешенная
- Состоятельная
- Эффективная

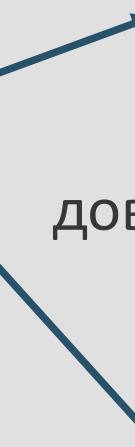
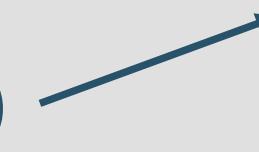
Союзники

Асимптотические  
(при большом  $n$ )

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!



Точность  
оценки,  
прогнозов

доверительные  
интервалы

Ответы на  
вопросы  
проверка  
гипотез



# Схема математической статистики

Выборка:  $x_1, \dots, x_n$  Параметр:  $\theta$

$\hat{\theta}$

$f_{\hat{\theta}}(t)$

Как оценить

- Метод моментов

- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмешенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические  
(при большом  $n$ )

- ЦПТ

- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Точность  
оценки,  
прогнозов

доверительные  
интервалы

Ответы на  
вопросы  
проверка  
гипотез



# Мощь средних

ЗБЧ даёт нам возможность с помощью метода моментов построить оценку  $\hat{\theta}_{MM}$

ЦПТ даёт нам информацию о распределении  $\hat{\theta}_{MM}$ , мы можем построить доверительный интервал:

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_R) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_R) = 0.95$$

$\alpha$  – уровень значимости

Если мы 100 раз попытаемся сесть на поезд на уровне значимости 0.05, в среднем мы будем опаздывать 5 раз



# Мощь средних

ЗБЧ даёт нам возможность с помощью метода моментов построить оценку  $\hat{\theta}_{MM}$

ЦПТ даёт нам информацию о распределении  $\hat{\theta}_{MM}$ , мы можем построить доверительный интервал:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right)$$



# Мощь средних

ЗБЧ даёт нам возможность с помощью метода моментов построить оценку  $\hat{\theta}_{MM}$

ЦПТ даёт нам информацию о распределении  $\hat{\theta}_{MM}$ , мы можем построить доверительный интервал:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \Leftrightarrow \bar{x} - \mu \stackrel{asy}{\sim} N\left(0, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \stackrel{asy}{\sim} N(0, 1)$$

центрирование

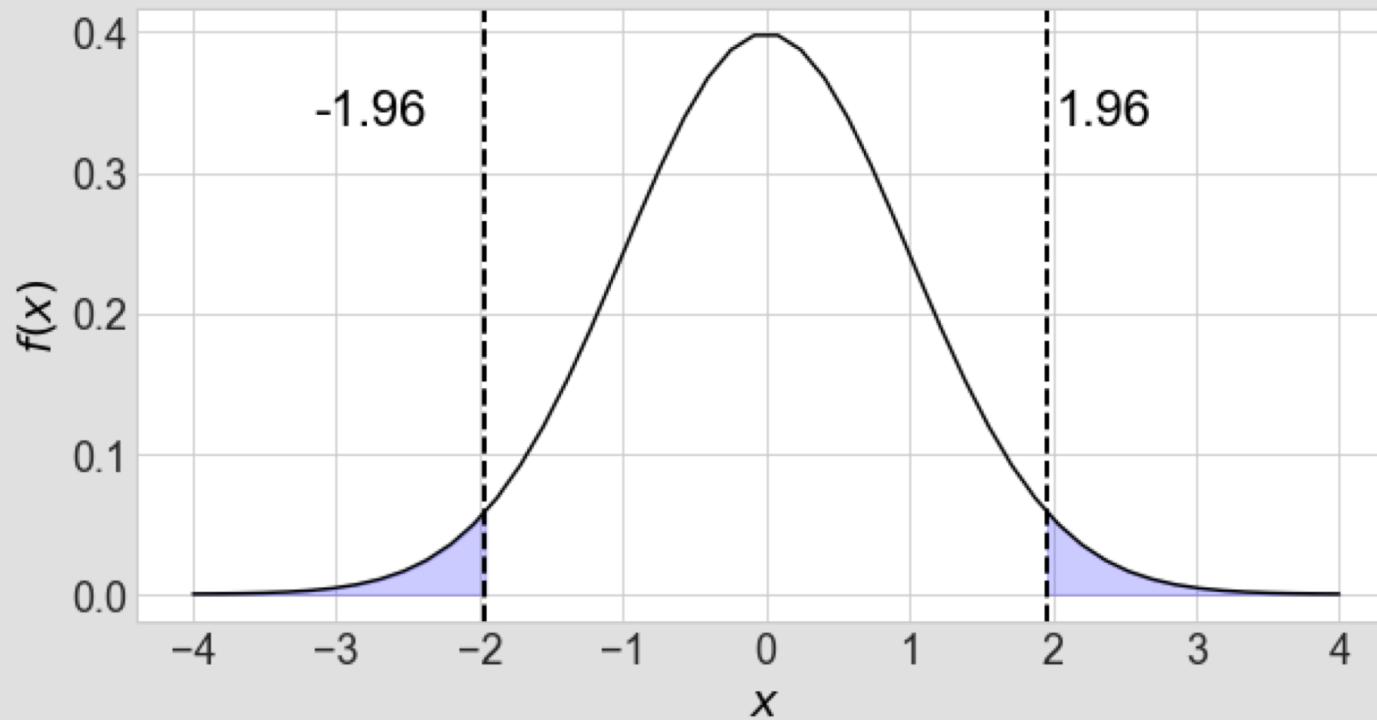
нормирование



# Мощь средних

Вероятность того, что наша случайная величина окажется между  $-1.96$  и  $1.96$  равна  $0.95$

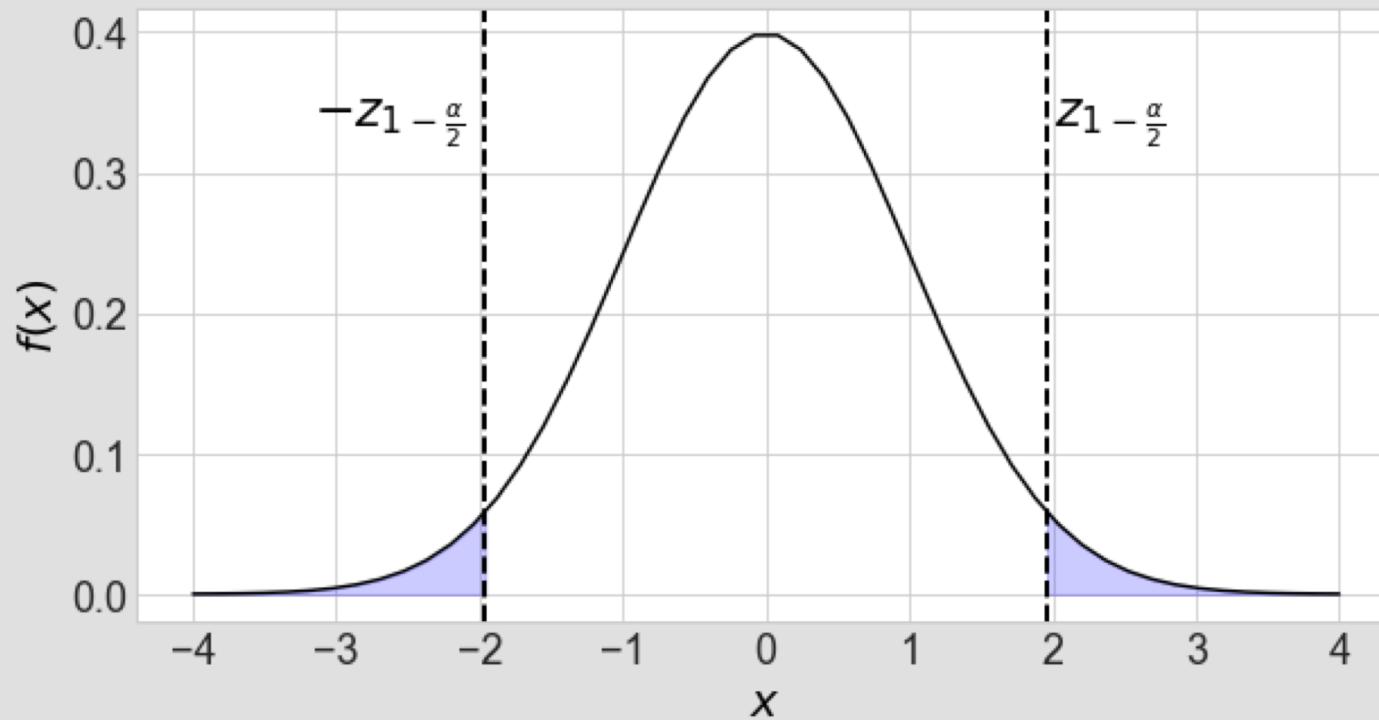
$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \stackrel{asy}{\sim} N(0, 1)$$



# Мощь средних

Можно зафиксировать любую надежность  $1 - \alpha$  и построить доверительный интервал:

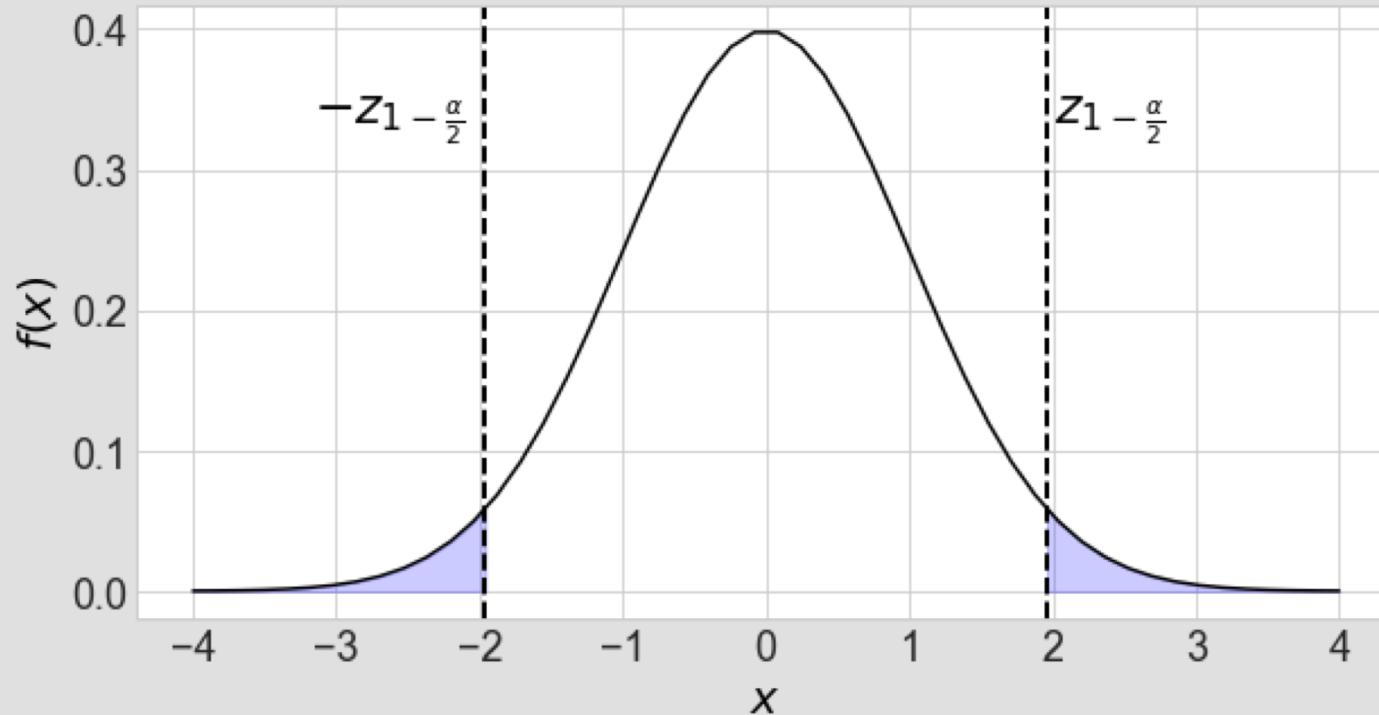
$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \stackrel{asy}{\sim} N(0, 1)$$



# Мощь средних

Можно зафиксировать любую надежность  $1 - \alpha$  и построить доверительный интервал:

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$



# Мощь средних

Можно зафиксировать любую надежность  $1 - \alpha$  и построить доверительный интервал:

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

При бесконечном повторении эксперимента  
интервал будет накрывать истинное значение параметра  
 $\mu$  в  $100 \cdot (1 - \alpha)\%$  случаев



# Мощь средних

$$\mathbb{P} \left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$



Иногда кратко пишут:

$$\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$



# Мощь средних

Длина интервала:

$$\Delta = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

При росте  $n$  длина интервала падает

При росте дисперсии длина интервала увеличивается

При росте надёжности  $1 - \alpha$  длина увеличивается



# Резюме

- Центральная предельная теорема позволяет построить для среднего асимптотический доверительный интервал
- Доверительный интервал позволяет описать степень неуверенности в полученной оценке
- Такой доверительный интервал верен при большом количестве наблюдений, если в выборке нет аномалий



# Асимптотический доверительный интервал для разницы средних



# Разность средних

Цены на недвижимость в двух районах города:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid$$

$$Y_1, \dots, Y_m \sim iid$$

$$\bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right)$$

$$\bar{y} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

Разность нормальных случайных величин – нормальная  
случайная величина:

$$\mathbb{E}(\bar{x} - \bar{y}) = \mathbb{E}(\bar{x}) - \mathbb{E}(\bar{y}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$Var(\bar{x} - \bar{y}) = Var(\bar{x}) + Var(\bar{y}) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$$

$$\bar{x} - \bar{y} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}\right)$$



# Разность средних

Цены на недвижимость в двух районах города:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid$$

$$Y_1, \dots, Y_m \sim iid$$

$$\bar{x} - \bar{y} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}\right)$$

Асимптотический доверительный интервал для  $\mu_1 - \mu_2$ :

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}$$



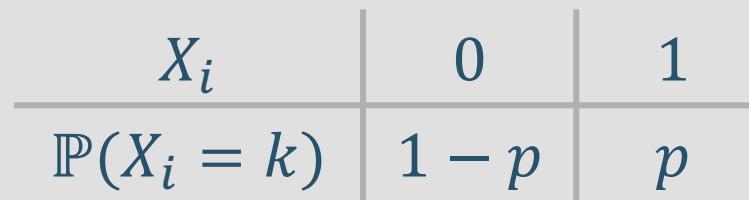
# Асимптотические доверительные интервалы для долей



# Мощь долей

По аналогии можно построить асимптотические доверительные интервалы для долей:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{если любит кофе} \\ 0, & \text{если не любит кофе} \end{cases}$$



$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x}$$

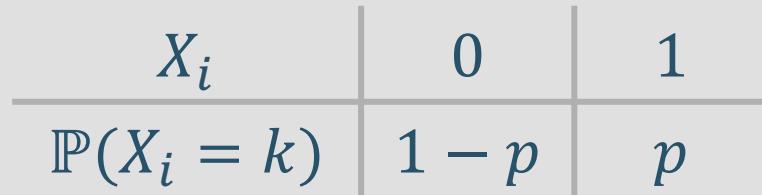
Из-за того, что  $X_i$  принимают значение либо 0, либо 1, для оценки доли можно посчитать среднее



# Мощь долей

По аналогии можно построить асимптотические доверительные интервалы для долей:

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x}$$



Найдём математическое ожидание и дисперсию оценки, а потом воспользуемся ЦПТ



# Мощь долей

По аналогии можно построить асимптотические доверительные интервалы для долей:

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x}$$


$$\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}(X_1) = p$$

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_1) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \hat{p} = \bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$



# Мощь долей

Получаем доверительный интервал для доли:

$$\bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \quad \hat{p} = \bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(p, \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}\right)$$

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Получаем доверительный интервал для разности долей:

$$\bar{x} - \bar{y} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}\right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \stackrel{asy}{\sim} N\left(p_1 - p_2, \frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{m}\right)$$



# Мощь долей

Получаем доверительный интервал для доли:

$$\bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(\mu, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \quad \hat{p} = \bar{x} \stackrel{asy}{\sim} N\left(p, \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}\right)$$

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Получаем доверительный интервал для разности долей:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \stackrel{asy}{\sim} N\left(p_1 - p_2, \frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{m}\right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{m}}$$



# Число наблюдений

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Можно определить число наблюдений, чтобы длина доверительного интервала не превышала заранее выбранный диапазон

$$\Delta = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$n = \frac{4 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}{\Delta^2}$$



# Число наблюдений

$$n = \frac{4 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \hat{p}(1 - \hat{p})}{\Delta^2}$$

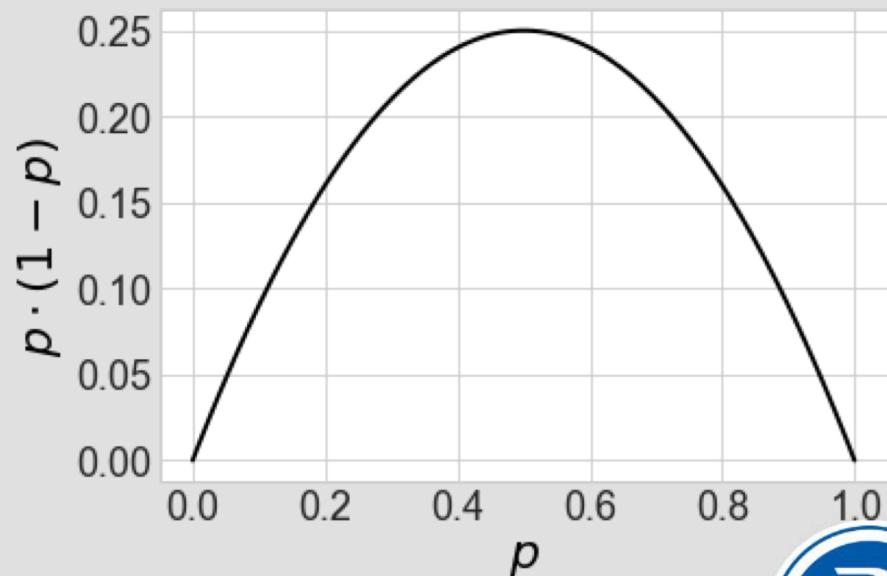
До начала испытаний мы не знаем  $\hat{p}$ , но мы знаем, что величина  $\hat{p}(1 - \hat{p})$  никогда не будет превышать 0.25

$$f(p) = p \cdot (1 - p) = p - p^2$$

$$f'(p) = 1 - 2p = 0$$

$$\Rightarrow p = 0.5$$

$$f(p) = 0.25$$



# Число наблюдений

$$n = \frac{4 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \hat{p}(1 - \hat{p})}{\Delta^2}$$

До начала испытаний мы не знаем  $\hat{p}$ , но мы знаем, что величина  $\hat{p}(1 - \hat{p})$  никогда не будет превышать 0.25

Эту оценку сверху мы можем использовать для поиска необходимого значения  $n$ :

$$n = \frac{4 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \hat{p}(1 - \hat{p})}{\Delta^2} \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2}$$



# Резюме

- Доля – это среднее, посчитанное по выборке из нулей и единиц
- С помощью ЦПТ можно построить доверительные интервалы для долей
- Из-за того, что вероятность принимает значения на отрезке от нуля до единицы, мы можем оценить, сколько наблюдений нам нужно собрать для определённой ширины интервала

