خورشید نوری

۱)

الف)

$x_1(t+T)=x_1(t)$

$\to \sin^4\left(-\frac{t+T+\pi}{6}\right)+\cos^4\left(\frac{2t+2T+5\pi}{3}\right)$

برای تناوبی ←

$\frac{T}{6}=K\pi \to T=6K\pi$

$\frac{2T}{3}=K'\pi \Rightarrow T=\frac{3}{2}K'\pi$ $\Bigg\}$ $6K\pi=\frac{3}{2}K'\pi \to 4K=K' \to \begin{cases} K=1 \\ K'=4 \end{cases}$

← دوره‌ی تناوب T برابر 6π می‌باشد.

ب)

$x_2[n+N]=(-1)^{n+N}\cos\left[\frac{\pi}{8}n+\frac{\pi}{8}N\right]$

$N=2K \longrightarrow \frac{\pi N}{8}=2\pi m \to N=16m$

$\longrightarrow K=8m \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ K=8 \end{cases} \longrightarrow N=16$

پس دوره‌ی تناوب برابر با $N=16$ می‌شود

ج)

$x_3[n+N]=e^{j\left(\frac{6\pi}{\sqrt5}(n+N)\right)}$

$\longrightarrow \frac{6\pi}{\sqrt5}N=2m\pi \to N=\frac{\sqrt5}{3}m$

چون m و n هر دو عضو $\mathbb{Z}$ هستند رابطه جواب ندارد و تابع متناوب نیست

د)

$x_4[n+N]=\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+N)^2\right)$

$\longrightarrow \frac{\pi}{4}n^2+\frac{\pi}{2}nN+\frac{\pi}{4}N^2=\frac{\pi}{4}n^2+2m\pi$

$\longrightarrow \frac{\pi}{2}nN+\frac{\pi}{4}N^2=2m\pi \longrightarrow 2nN+N^2=8m$ (I)

در این رابطه (I) چون N به n وابسته است تابع نمی‌تواند متناوب باشد با توجه به مثال زیر داریم:

$n=1 \to \begin{cases} N=2 \\ m=+1 \end{cases}$ (II) / $n=-1 \to \begin{cases} N=4 \\ m=1 \end{cases}$ (III)

(II) و (III) نیز نشان می‌دهد N به n وابسته است.

Scanned with CamScanner

۹۸۰۱۰۴۸ فرشید نوشی

ه)

$$x_5(t+T) = \sum_{K=-\infty} e^{(2t+K)} e^{2T} \underbrace{U(2t+2T+K)}$$

$$= U(2t-K) + U(2(t+T)-K) - U(2t-K)$$

$$\rightarrow x_5(t+T) = e^{2T} x_5(t) + \underbrace{e^{2T}}_{\text{یک مقدار ثابت می باشد}} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{(2t+K)}}_{\text{یک مقدار ثابت است}} \underbrace{\left(U(2(t+T)-K) - U(2t-K)\right)}_{\text{به ازای صفرات یک}}$$

جمله‌ی بالا همه‌ی مقدار مثبت دارد اما برای متناوب بودن نیاز داریم که برابر صفر شود که تناقض تولید می‌شود چون از صفر بزرگتر باشد هم جملق را طبق بالا $e^{2T}=1$ پس $T=0$ که در نتیجه x_5 متناوب نیست.

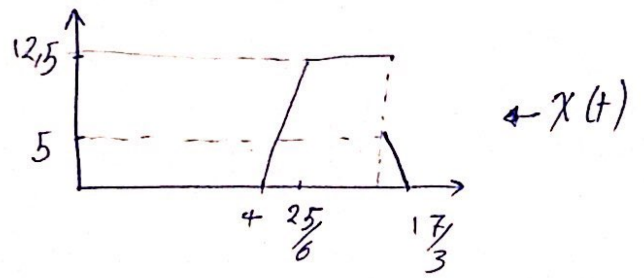
.2

$$t' = -\frac{t}{3}+5 \rightarrow t = (t'-5)\times(-3) \rightarrow t = 15-3t'$$

$$-2 \leq t \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 15-3t' \leq 3 \rightarrow 4 \leq t' \leq \frac{17}{3}$$

$$0 \leq x(t') \leq 12{,}5$$

الف)



ابتدا نسبت به محور y قرینه می‌کنیم $\xleftarrow{t=-t}$ سپس $t\to 3t$ می‌رود پس 5 واحد به راست می‌بریم

x محور نقاط بر 3 تقسیم می‌شود

$t\to t-5$ در ادامه همه‌ی نقاط در راستای محور y 5 برابر می‌شوند ($t\to 5t$).

ب) طبق نمودار حاصل برابر صفر می‌شود

$$t = 5-\frac{x}{3} \rightarrow dt = \frac{-dx}{3} \longrightarrow \int_{+\infty}^{2} -x\left(5-\frac{x}{3}\right) d\frac{x}{3}$$

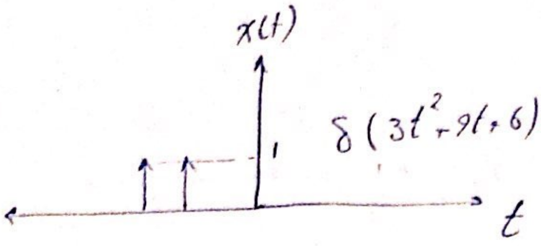
$$\xrightarrow{\times\frac{5}{5}} \frac{5}{3}\underbrace{\int_{0}^{\infty} 0{,}2x\left(5-\frac{x}{3}\right) dx}_{\text{تابع در نمودار اصلی سؤال}} = \frac{5}{3}\times 0 = 0$$

فرشید یوسفی ۹۸۰۱۰۶۸

۳.

الف)

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\delta(3t^2-9t+6)\right|dt=2$$

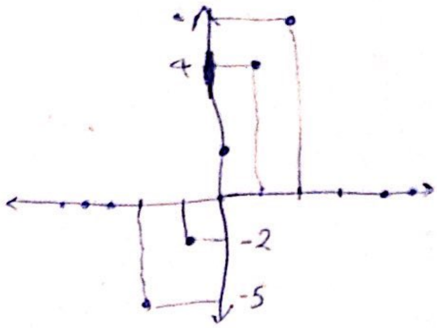


$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{E}{2T}=0$$

ب)

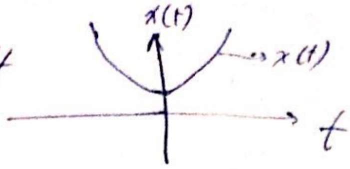
$$E=\sum_{N=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2\longrightarrow E=25+4+1+16+49+100+0=195$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{E}{2N+1}=0$$



ج)

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-6|t|}dt$$



$$=2\times\frac{3^{6t}}{6\ln 3}\Big|_{0}^{\infty}=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{E}{2T}=\frac{3^{6T}-1}{2\cdot 6T\ln 3}=\lim_{T\to\infty}\frac{6\ln 3\cdot 3^{6T}}{6\ln 3}=\infty$$

د)

$$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|x[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\tfrac{1}{12}\right)^n=\lim_{N\to\infty}\frac{2^{(1-\frac{1}{16}^{N})}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16}{15}$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{E}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{16}{15}}{2N+1}=0$$

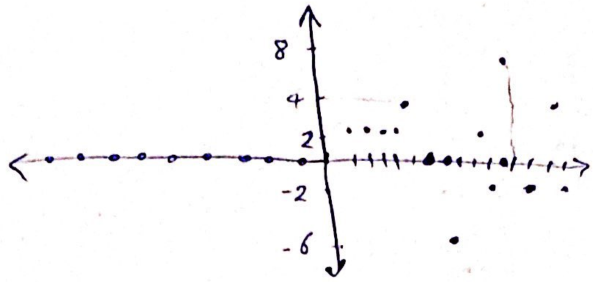
خورشید نوش ۹۸۲۱۰۹۸

۴ـ

$$E_v\{x[n]\} = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\} \longrightarrow x[n] = E_v + O_d$$

$$O_d\{x[n]\} = \frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\}$$

$$O_d = \begin{cases} E_v & n>0 \\ 0 & n=0 \\ -E_v & n<0 \end{cases}$$



$$E = \lim_{N\to\infty} \sum_{N=K}^{N} |x[K]|^2 = 4+4+4+4+16+0+0+36+4+4+0+64+4+16+4 = \boxed{164}$$

۵ـ الف) معکوس ناپذیر است.

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h_1[n] = 0$$

$$w[n] = h_2[n] * y[n] \Longrightarrow$$

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$$

$$h_1[n] * h_2[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} h_1[n]\, h_2[n-K] = 0 \neq \delta[n]$$

ب)

$$x(\tau) = \delta(\tau) \rightarrow h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(\tau)$$

$$w(t) = h_2(t) * y(t) \longrightarrow h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} h_2(t-\tau)\, d\tau = \delta(t) = \int_{0}^{\infty} \dot{\delta}(t-\tau)\, d\tau$$

$$h_2(t) = \dot{\delta}(t) \rightarrow w(t) = h_2(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(t)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

$$= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, y'(t-\tau)\, d\tau = y'(t) \Rightarrow w(t) = y'(t)$$

پس معکوس پذیر است.

فرشته نوش ۹۸۲۱۰۴۸

۶- ه

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \xrightarrow{x(t) = \delta(\tau)}$$

$$h(t) = \int_{t}^{t+1} \delta(\tau)\, d\tau = U(t+1) - U(t)$$

برای علی بودن باید $\underset{t<0}{h(t) = 0}$ باشد. اما چون $h(t)$ در بازه $t<0$ برابر صفر نشده سیستم علی نیست.

علی نیست، با زمان تغییر ناپذیر است، خطی است،
حافظه دار است هم چنین پایدار نیز باشد.

$$x_1(t) \to y(t) \qquad y_1(t) = \int_{t}^{t+1} x_1(\tau)\, d\tau$$

$$x_1(t - t_0) = y_1(t - t_0) \qquad y_2(t) = \int_{t}^{t+1} x_1(\tau - t_0)\, d\tau = \int_{t-t_0}^{t-t_0+1} x_1(\tau)\, d\tau = y_1(t - t_0)$$

تغییر ناپذیری با زمان

* شرط پایداری

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty \to \int_{-\infty}^{\infty} |u(t+1) - u(t)|\, dt = 1 < \infty$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &\to y_1(t) \\ x_2(t) &\to y_2(t) \end{aligned} \to x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \to y_3(t)$$

$$y_3(t) = \int_{t}^{t+1} x_3(z)\, dz = \int_{t}^{t+1} a x_1(z) + b x_2(z)\, dz$$

$$y_3(t) = a \int_{t}^{t+1} x_1(z)\, dz + b \int_{t}^{t+1} x_2(z)\, dz = a y_1(t) + b y_2(t) \leftarrow$$ خطی است

و چون به زمان های t و $t+1$ وابسته شده است پس حافظه دار است.

ب) علی است، تغییر ناپذیر با زمان و خطی و پایدار است اما حافظه دار نیست.

$$h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \dot{\delta}(t), \quad x(t) = \delta(t)$$

$$\dot{\delta}(t) < 0, \; t < 0 \qquad h(t) < 0, \; t < 0$$ سیستم علی است

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) \\ x_2(t) &= y_2(t) \end{aligned} \to \begin{aligned} y_1 &= x_1' \\ y_2 &= x_2' \end{aligned} \xrightarrow[x_2(t) = x_1(t - t_0)]{} \quad y_2(t) = x_1'(t - t_0) \to y_2 = y_1(t - t_0)$$

فرشته نوری ۹۸۱۰۱۰۹۸

سیستم فقط به t وابسته است

$$x_3 = a x_1 + b x_2 \longrightarrow y_3(t) = x_3'(t) = (a x_1(t) + b x_2(t))' = a y_1(t) + b(y_2(t))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(z)| dz < \infty \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(t) dt = \delta(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 < \infty$$

ج) علی، ~~...~~ پایدار و ~~...~~ است ولی فقط دارای تغییر ناپذیر با زمان ~~...~~ است / خطی نیست.

$$x_1[n] = \delta[n]$$

$$h[n] = \sin(\delta[n]) \qquad \sum_{K=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sin(1) < \infty \quad \text{پایدار} \checkmark$$

سیستم به n زمان حال وابسته است. حافظه ندارد.

$$h[n] = 0 \,,\, n < 0 \longrightarrow \sin(\delta[n]) = 0 \;,\; n < 0 \longrightarrow \text{علی است}$$

$$x_1 = y_1 \longrightarrow y_2[n] = \sin(x_2[n]) = \sin(x_1[n-n_0]) = y_1(n-n_0)$$
$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = a x_1 + b x_2$$

$$y_3[n] = \sin(x_3[n]) = \sin(a x_1[n] + b x_2[n]) \neq a y_1[n] + b y_2[n]$$

د)

$$h(t) = [\cos(3t)]\,\delta(t)$$

$$h(t) = 0 \,,\, t < 0 \longrightarrow [\cos(3t)]\,\delta(t) = 0 \longleftarrow \text{علی است}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|[\cos 3t]\,\delta t\big| dt = \lim_{\Delta \to 0^+} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \underbrace{[\cos 3t]}_{1}\, \delta(t)\, dt = \lim_{\Delta \to 0^+} u[\Delta] - u[-\Delta]$$
$$= 0 < \infty \quad \text{پایدار است}$$

$$x_1 = y_1 \longrightarrow y_2(t) = [\cos 3t]\, x_2(t) = [\cos 3t]\, x_1(t-t_0) \neq y_1(t-t_0)$$
$$x_2 = y_2$$

پس با زمان تغییرناپذیر نیست.

خطی است $\quad x_3(t) \to y_3(t) = [\cos 3t]\, x_3(t) = [\cos 3t](a x_1(t) + b x_2(t)) = a y_1(t) + b y_2(t)$

و چون فقط به t وابسته است حافظه ندارد.

فرشته قدیری ۹۸۲۱۰۹۸۲

$$y[n] = \frac{1}{2}\left| x[n-1] + x[-n-1] \right|$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\left| \delta[n-1] + \delta[-n-1] \right|$$

$$h[n] = 0 \ , n < 0$$

اگر $n = -1$ باشد سیستم علی نیست چون

$$\frac{1}{2} = h[n] \neq 0$$

ه)

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1$$ پایدار است

$x_1 \to y_1$

$x_2 \to y_2 \longrightarrow$ $y_2[n] = \frac{1}{2}\left| x_1[n-1-n_0] + x_1[-n-1+n_0] \right|$

$y_1[n-n_0] = y_2[n]$

تغییرپذیر با زمان است

$$x_3[n] \longrightarrow y_3[n] \longrightarrow \begin{cases} x_3 = ax_1 + bx_2 \\ y_3[n] = \frac{1}{2}\left| x_3[n-1] + x_3[-n-1] \right| = \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left| a(x_1(n-1) + x_1(-n-1)) + b(x_2(n-1) + x_2(-n-1)) \right|$$

غیرخطی است

$$y_3(n) \neq ay_1(n) + by_2(n)$$

است چون به $n-1$ و $-n-1$ وابسته است حافظه دار است.

و)

$$h(n) = \delta[n] \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k] = \delta[n]$$

$y[n] = x[n] \longrightarrow$ حافظه دار نیست

اگر $n < 0$ ← $h[n] = 0$ پس علی است

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1$$ سیستم پایدار است.

$x_1 \to y_1$

$x_2 \to y_2 \longrightarrow$ $y_2[n] = x_2[n] \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k] = x_1[n-n_0] \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$

اگر n یک عدد ~~[illegible]~~ ثابت باشد سیگما یک می‌شود

$$1 = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-2K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(n-2k-n_0)$$

$$\longrightarrow y_2 = x_1[n-n_0] \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0-2k] = y_1[n-n_0]$$ تغییرناپذیر با زمان است.

فرشید نوش ۹۸۲۱۰۴۲۸

$x_3 \rightarrow y_3$

$\longrightarrow y_3 = x_3 \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-2K] = (a x_1[n] + b x_2[n]) \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-2K]$

$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$

$\longrightarrow y_3[n] = a y_1[n] + b y_2[n] \longrightarrow$ خطی است

$$\begin{cases} x^2_{even}[n] = \frac{1}{2}\left[x^2[n] + x^2[-n]\right] \\ x^2_{odd}[n] = \frac{1}{2}\left[x^2[n] - x^2[-n]\right] \end{cases} \longrightarrow \sum_{K=-N}^{N} \frac{1}{2}\left[2x^2[n] + x^2[-n] - x^2[-n]\right]$$

الف) ✓

$$= \sum_{K=-N}^{N} x^2[n] = \sum_{K=-N} x^2_{even} + x^2_{odd}$$

$f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(t)u(t)\Big|_{-\infty}^{x} -$ ب)

برای جز به جز کردن انتگرال

$\int_{-\infty}^{x} f'(t)u(t)dt = f(x)\,u(x) - \int_{-\infty}^{x} f'(t)\,u(t)dt$

$x < 0 \longrightarrow -\int_{-\infty} f'(t)\,u(t)\,dt = 0$

$x \geq 0 \longrightarrow -\int_{-\infty}^{x} f'(t)\,u(t)dt = -\int_{0}^{x} f'(t)dt = -f(x) + f(0)$

$\longrightarrow (f(0) - f(x))\,u(x) = -\int_{-\infty}^{x} f'(t)\,u(t)dt$

$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\delta(t)\,dt = \cancel{f(x)u(x)} + f(0)\,u(x) - \cancel{f(x)u(x)} = f(0)\,u(x)$

از طرفی این تساوی مشتق بگیریم

$f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)$

$$\begin{cases} (f(x)\,\delta(x))' = f'(x)\,\delta(x) + f(x)\,\dot\delta(x) \\ ,\ f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x) \longrightarrow \\ ,\ f'(0)\,\delta(x) = f'(x)\,\delta(x),\ (f(0)\,\delta(x))' = f(0)\,\dot\delta(x) \end{cases}$$

$\boxed{f(x)\,\dot\delta(x) = f(0)\,\dot\delta(x) - f'(0)\,\delta(x)}$

خرشیدنوش ۹۸۳۱۰۹۸

-۲

ب) $x(2t)+1,5$