۹۸۳۱۰۶۸ خورشید نوش

۱-

a) convolution :=
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$h(t-\tau) = e^{2t-2\tau}\,u(1+\tau-t)$$

$\longrightarrow$ convolution =
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}e^{-2\tau}u(1-t+\tau)\,\big(u(\tau)-2u(\tau-2)+u(\tau-5)\big)\,d\tau$$

$$x(\tau)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 2\\ -1 & 2<x<5\\ 0 & \end{cases},\quad u(1-t+\tau)=\begin{cases}1 & \tau\ge t-1\\ 0 & \tau<t-1\end{cases}$$

$$\longrightarrow \text{convolution} = e^{2t}\left(\int_0^2 e^{-2\tau}u(1+\tau-t)\,d\tau-\int_2^5 e^{-2\tau}u(1+\tau-t)\,d\tau\right)$$

$$\longrightarrow \text{convolution} = e^{2t}\left(\int_0^2 e^{-2\tau}\,d\tau-\int_2^5 e^{-2\tau}\,d\tau\right)=$$

$$e^{2t}\left(\tfrac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_0^2-\tfrac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_2^5\right)=$$

$$\frac{e^{2t}}{2}\left(1-2e^{-4}+e^{-10}\right)$$

$$\tau\in[0,5]\longrightarrow \text{convolution}=\begin{cases}\frac{e^{2t}}{2}\left(1-2e^{-4}+e^{-10}\right) & t\in[1,6]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

فرزیندوش ۹۸۲۱۰۹۸

$b \to \quad y(n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[K]h[n-K] \quad , \quad h[n-K] = 4^{n-K} u[2-n+k]$

$\to y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left( (-\frac{1}{2})^{K} u[K-4] \right) \left( 4^{n-K} u[2-n+K] \right) =$

$\to y[n] = 4^{n} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \underbrace{2^{-K} \cdot 4^{-2K}}_{2^{-3K}} u[K-4]u[2-n+K]$

$\longrightarrow \quad u[K-4]u[2-n+K] = \begin{cases} 1 & o.w \\ 0 & K < \max(4, n-2) \end{cases}$

$4 \leq n < 6 \to 4^{n} \underbrace{\sum_{K=4}^{\infty} 2^{-3K}}_{\text{دنباله هندسی}} = 4^{n} \left( \frac{1}{1-2^{-3}} \right) = \frac{8}{7} 4^{n} \quad n \geq 4$

$n \geq 6 \to 4^{n} \sum_{K=n-2}^{\infty} 2^{-3K} = 8/7 \, 4^{n}$

$\to y[n] = \begin{cases} 8/7 \, 4^{n} & n \geq 4 \\ 0 & n < 4 \end{cases}$

$c \to \quad h(t-\tau) \longrightarrow$ convolution $= \int_{t}^{t+\tau} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$h(\tau) = 1 - \tau \to h(-\tau) = 1 + \tau \to h(t-\tau) = 1 - t + \tau$

$\to \int_{T}^{T+1} x(\tau) \left( h(t-\tau) \right) d\tau = \int_{T}^{T+1/4} (\tau + 1 - t) d\tau + \int_{T+1/4}^{T+3/4} (t - \tau - 1) d\tau + \int_{T+3/4}^{T+1} (\tau + 1 - t) d\tau$

فرشید نوشی ۹۸۳۱۰۴۸

$$= S = (1-t)\tau + \tau^2/2 \Big|_{T}^{T+1/4} + (1-t)\tau + \tau^2/2 \Big|_{T+3/4}^{T+1} + (t+1)\tau - \tau^2/2 \Big|_{T+1/4}^{T+3/4}$$

در هر دو روش جواب به این صورت است (طول هر ناحیه ۲ واحد نشان می‌دهد)

$$S = \frac{1}{2}T^2 + 2(1-t)\underset{(2T+1)}{\cancel{T}} + \frac{1}{2}(T+1)^2$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t - t^2 + \frac{1}{2}(t^2+2t+4) + t - t^2 - 2t + 2 \longleftarrow \text{داریم}$$

$$\longrightarrow \boxed{y(t) = t + 4 - t^2}$$

$$d \longrightarrow x[n] = 4^{-n+k},\ h[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = (-2) \text{ or } (-1) \text{ or } 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases},\ \text{convolution} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

$$\longrightarrow \text{convolution} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4^{-n+k} h[k] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$e \longrightarrow h(t-\tau) = e^{2(t-\tau)} u(\tau - t)$$

$$\longrightarrow y(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{\infty} e^{2t-3\tau} u(\tau-t)\, d\tau$$

$$y(n) = e^{-t}\int_{-1-t}^{\infty} e^{-3y} u(y)\, dy \longleftarrow \text{با تغییر متغیر } y = \tau - t \text{ خواهیم داشت}$$

$$u(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \longrightarrow \int e^{-3y} u(y)\, dy = \begin{cases} -\frac{e^{-3y}}{3} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y(n) = \begin{cases} e^{-t}\left(\frac{e^{-3y}}{3}\Big|_{-1-t}^{\infty}\right) = e^{-t}\left(\frac{e^{3t+3}}{3}\right) = \frac{e^{2t+3}}{3} & -1-t \geq 0 \rightarrow -1 \geq t \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

۹۸۲۱۰۴۸ فرشید نوش

$f \to x[n] = 3^n u[-n-1] + \frac{1}{3}^n u[n],\ h[n] = 4^{-n} u[n+3],\ y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$

$\longrightarrow y[n] = 4^{-n} \sum_{-\infty}^{\infty} (12)^k u[n+3-k]\, u[-n-1] + 4^{-n} \sum_{-\infty}^{\infty} (4/3)^k u[n+3-k]\, u[n]$

$\longrightarrow y[n] = 4^{-n} \left( \sum_{-\infty}^{1} 12^k + \sum_{3}^{\infty} (4/3)^k \right)$

$g \to x(t) = e^{-t} u(t),\ h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}(\delta(t-1)) + 0{,}3\, \delta(t-2)$

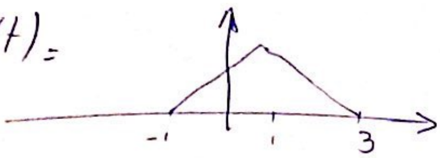
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau - t} u(t-\tau) h(\tau) d\tau$

$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t \geq \tau \\ 0 & o.w \end{cases} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau - t} h(\tau) d\tau$

$= e^{-t} \left( e^{0} + \frac{e^{-1}}{2} + 0{,}3 e^{-2} \right)$

سوال ۲

$x(t) =$



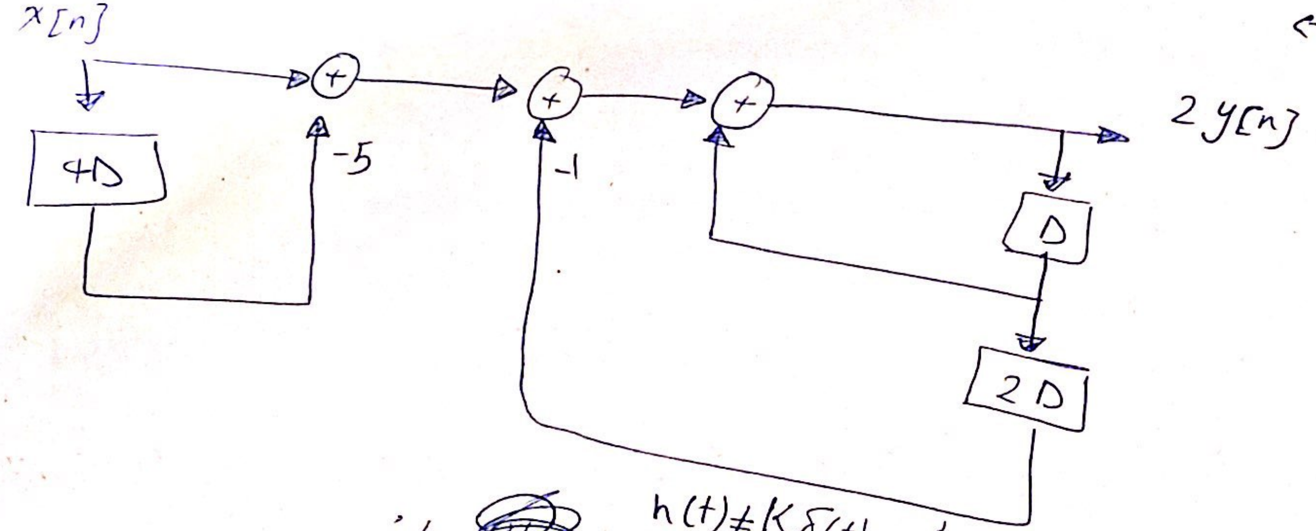

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = u(t+2) - u(t-6)$

$x_E(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \longrightarrow x_E * h = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) h(t-\tau) d\tau$

$\dots = \frac{1}{2} \left( u(t+2) - u(t-6) + u(2-t) - u(6-t) \right)$

فرشید نوش ۹۲۳۱۰۴۸

5 ←




6. یک سیستم برای اینکه حافظه دار باشد $h(t) \neq K\delta(t)$ باشد

a) $h(t) = e^{3t} u(1-t) \neq K\delta(t)$ ⟶ حافظه دار است

b) $h(t) = \sin(\omega \pi t) u(t) \neq K\delta(t)$ ⟶ حافظه دار است

c) $h(t) = \cos(n\pi) u[n+5] \neq K\delta(t)$ ⟶ حافظه دار است

فرشید نوش ۹۸۲۱۰۹۸

۷-

a) $h(t) = \delta(t-5) + \delta(t) \xrightarrow{x(t)=u(t)} s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\, \overset{h(\tau)}{\cancel{\quad}}\, d\tau$

$\xrightarrow{t \geq \tau} s(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-5) + \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 5 \\ 2 & 5 < t \end{cases}$

b) $h(t) = e^{-|t|}$, $x(t) = u(t)$, $x * h = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$

$\longrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}\, d\tau = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau}\, d\tau & t \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{t} e^{+\tau}\, d\tau & t < 0 \end{cases}$

$\longrightarrow s(t) = \begin{cases} e^{t}\Big|_{-\infty}^{0} + (-e^{-t})\Big|_{0}^{t} = 2 - e^{-t} & t \geq 0 \\ e^{t} & < 0 \end{cases}$

$y_1(t) = h_1(t)$

$y_3(t) = h_2(t) * h_3(t)$

$h_2(t) = w(t)$

$y_4(t) = h_4(t) * h_2(t)$

۸ - الف) $x(t) = \delta(t)$ ورودی را ضربه می‌دانیم

وقتی $x(t) = \delta(t)$ شود $y(t) = h_{eq}$ باید پس داریم

$h_{eq} = h_1(t) + h_2(t) * h_3(t) + h_2(t) * h_4(t) = e^{-t}u(t) + (u(t) - u(t-1)) * (u(t) - u(t-1)) + (u(t) - u(t-1)) * \delta(t-1)$

$h_{eq} = e^{-t}u(t) + t(u(t)) + (t-2)u(t-2) - 2(t-1)(u(t-1)) + u(t-1) - u(t-2)$

$\longrightarrow h_{eq} = e^{-t}u(t) + tu(t) + (t-3)u(t-2) + (2t-3)u(t-1)$

فرشید نوش ۹۸۲۵۱۰۴۸

۸- ب)

$$y_1(t) = (u(t)) * (e^{-t}u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)e^{-\tau}u(\tau)d\tau = \int_t^{\infty} e^{-\tau}d\tau = e^{-t} \quad (t \geq 0)$$

$$y_3(t) = (1-t) * (u(t) - u(t-1)) = \int_{-\infty}^{\infty} (1-t+\tau)(u(\tau) - u(\tau-1))d\tau = \int_0^1 (1-t+\tau)d\tau$$

$$= (1-t)\tau + \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^1 = 2-t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y_4(t) = h_4(t) * \omega(t) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2)$$

$$\omega(t) = u(t) * (u(t) - u(t-1)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)(u(\tau) - u(\tau-1))d\tau$$

$$= \int_0^1 u(t-\tau)d\tau = \int_t^1 d\tau = 1-t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$= t\,u(t) - (t-1)u(t-1)$$

۹۸۳۱۰۴۸ خورشیدوش

۴-

a) $h[n] = (-2)^{-n} u[n] + (1+0{,}01)^n u[1-n]$

پایداری $\longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} h[K] \longrightarrow \underbrace{\underbrace{\sum_{-\infty}^{1} (1{,}01)^K}_{\text{حد این عبارت موجود است}} + \underbrace{\sum_{0}^{\infty} (-2)^{-K}}_{\text{حد این عبارت موجود است}}} \longrightarrow$ پایدار است

علّی بودن

$\longrightarrow \underbrace{h[n] = (1{,}01)^n u[1-n] \mid n<0 = (1{,}01)^n \quad n<0} \longrightarrow$ علّی نیست

b) $h[n] = n\, 3^{-n} u[n-1]$

پایداری $\longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} h[K] = \underbrace{\sum_{1}^{\infty} K\, 3^{-K}} \longrightarrow$ پایدار است

حد این عبارت که در جمله موجود است ـــ جملات به صفر میل می‌کنند

علّی بودن

$\longrightarrow \underbrace{h[n] = 0 \mid n<0}_{u[n-1]=0} \longrightarrow$ علّی است

c) $h(t) = e^{-6|t|}$

پایداری $\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-6|t|} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{6t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-6t} dt = \underbrace{\frac{1}{6} e^{6t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-6} e^{-6t} \Big|_{0}^{\infty}}$

$e^{-\infty}$ تقریبا برابر صفر است پس سیستم پایدار است.

علّی $\longrightarrow \underbrace{h(t) = e^{6t} \quad t<0 \quad \neq 0}$ علّی نیست

d) $h(t) = t e^{-t} u(t)$

پایداری $\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t} u(t) dt = \int_{0}^{\infty} t e^{-t} dt = \underbrace{-(t+1) e^{-t} \Big|_{0}^{\infty}}$

حاصل محدود است پس سیستم پایدار است

$\underbrace{h(t) = 0 \quad t<0}_{u(t)=0}$ علّی هست

خورشید نوش ۹۲۳۱۰۹۸

e) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)d\tau \longrightarrow h(t)=tu(t)$

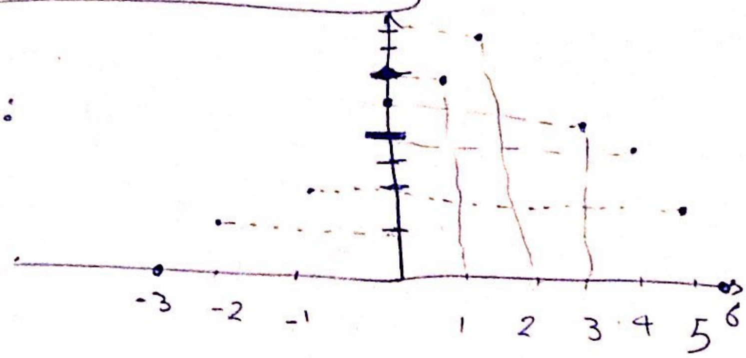
پایداری $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{\infty} = \infty \rightarrow$ سیستم ناپایدار

علی بودن $\rightarrow h(t)=0 \quad t<0$ علی است

$u(t)=0$

۴-

$z[n]=x[n]+2x[n-2]$ :




$\longrightarrow y[n]=-2y[n-1]+z[n] \quad , \quad y[n]=0 \quad (n<-2)$

$n=-2 \rightarrow y[n]=z[-2]=1$

$n=-1 \rightarrow y[n]=z[-1]+2y[-2]=0$

$n=0 \rightarrow y[n]=z[0]-2y[-1]=5$

$n=1 \rightarrow y[n]=z[1]-2y[0]=-4$

$n=2 \rightarrow y[n]=z[2]-2y[1]=16$

$n=3 \rightarrow y[n]=z[3]-2y[2]=-27$

$n=4 \rightarrow y[4]=z[4]-2y[3]=58$

$n=5 \rightarrow y[5]=z[5]-2y[4]=-114$

$n=6 \rightarrow y[6]=z[6]-2y[6]=228 \quad , \quad y[7]=-2\times 228, \ldots$

$y[n]=-2y[n-1] \quad n\geq 6 \rightarrow y[n]=2^n\times(-1)^n\times\underbrace{(-114)}_{y[5]}$