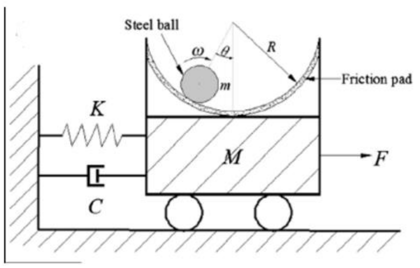
جدول 1 - فرضیات و داده های مسئله

C=1	Cr=1
m=0.3	M=3
r=1	R=6
K=1000	

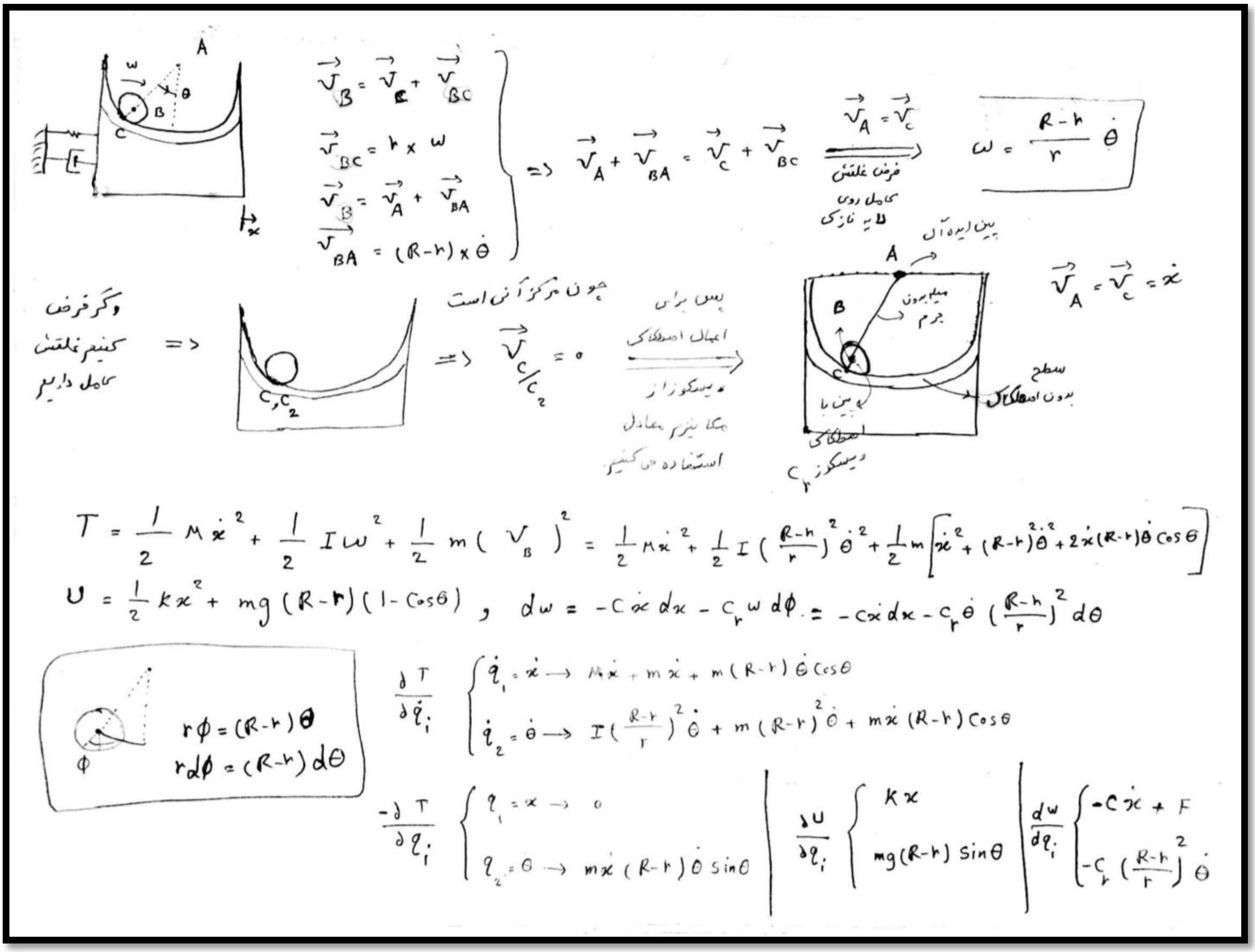


شکل 1 – شماتیک مسئله

الف) بدست آوردن تابع تبدیل به ازای ورودی F و خروجی θ

برای محاسبه تابع تبدیل سیستم برای یافتن ارتباط سینماتیکی بین اجزا از مکانیزم معادل استفاده شده است.

روند محاسبات در شکل های 2 و 3 آورده شده اند.



شکل 2 – محاسبات قسمت اول

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{dw}{dq_i}$$

$$\begin{cases} q_1 = x \rightarrow (M+m)\ddot x + \left(m(R-r)\cos\theta\right)\ddot\theta - m(R-r)\dot\theta^2\sin\theta + Kx + c\dot x = F \\ q_2 = \theta \rightarrow \left[\frac{I}{r^2}+m\right](R-r)^2\ddot\theta + \left(m(R-r)\cos\theta\right)\ddot x + \left(m(R-r)\dot x\dot\theta\right)\left(\cancel{\sin\theta - \sin\theta}\right) \\ \qquad + C_r\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot\theta = 0 \end{cases}$$

$|\theta| << 1 \Rightarrow \theta^2 \approx 0$, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, $1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$

$$\begin{cases} (M+m)\ddot x + \left[m(R-r)\right]\ddot\theta + Kx + c\dot x = F \\ \left[\frac{I}{r^2}+m\right](R-r)^2\ddot\theta + m(R-r)\ddot x + C_r\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot\theta = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Laplace}]{I = \frac{2}{5}mr^2} \begin{cases} (M+m)s^2X + m(R-r)s^2\Theta + KX + CsX = F(s) \quad (I) \\ \frac{7}{5}m(R-r)^2s^2\Theta + m(R-r)s^2X + \frac{C_r}{r^2}(R-r)^2 s\Theta = 0 \quad (II) \end{cases}$$

$$(II) \Rightarrow X = \frac{\frac{7}{5}ms + \frac{C_r}{r^2}}{\frac{ms}{r-R}}\Theta \quad \xrightarrow{(I)} \Theta(R-r)\left[ms^3 - \frac{7(M+m)}{5}s^3 - \frac{(M+m)}{mr^2}C_r s^2 - \frac{7C}{5}s^2 - \frac{7k}{5}s - \frac{cC_r}{mr^2}s - \frac{kC_r}{mr^2}\right] = sF(s)$$

شکل 3 – محاسبات قسمت دوم

پس از جایگذاری مقادیر موجود در جدول 1 در رابطه انتهای شکل 3 داریم

$$\frac{\theta}{F} = -\frac{s}{21.6\, s^3 + 62\, s^2 + 7017\, s + 1.667e04}$$

این کار را علاوه بر محاسبه دستی می توان از طریق متلب نیز انجام داد

```
clc
clear all
close all
% mp=14.8 and zita=0.5195
Cc=1;
Cr=1;
R=6;
r=1;
M=3;
m=0.3;
k=1000;
%GH
```

```
A=[1 0];
B=[1];
C=[1];
D=[1];
E=[R-r];
F=[m-(7/5)*(M+m) -(M+m)*Cr/(m*r^2)-(7*Cc/5) -(7*k/5)-
(Cc*Cr)/(m*r^2) -(k*Cr)/(m*r^2)];
G=[1];
H=[1];
f=conv(conv(conv(conv(A,B),C),D),Tface);
b=conv(conv(conv(conv(E,F),G),H),Tbottem);
GH = tf(f,b);
```

که خروجه GH می شود

GH=

–s

21.6s^3 + 62 s^2 + 7017 s + 1.667e04

Continuous-time transfer function.

در ادامه نیز می توان تابع تبدیل حلقه بسته با فیدبک واحد منفی را به کمک متلب محاسبه کرد.

```
sys=feedback(GH,1);
```

که نتیجه خروجی sys می شود

sys=

–s

21.6s^3 + 62 s^2 + 7016 s + 1.667e04

Continuous-time transfer function.

ب) محاسبه صفر ها و قطب های سیستم

```
poless=roots(b);
zeros=roots(f);
```

که نتیجه کد بالا می شود.

حلقه باز	
قطب	صفر
-0.243+18i -0.243-18i -2.38	0

ج) رفتار گذرا و ماندگار، پایداری ، مکان هندسی ریشه ها و نمودارهای بود و نمودار نایکوئیست

ابتدا بررسی به کمک کد نویسی آورده ام و سپس به کمک افزونه .Simulink .

به کمک کد زیر می توان پاسخ گذرا و ماندگار سیستم را مشاهده کرد.

```
figure
step(sys);
grid on
```

سپس به کمک دستور زیر می توان اطلاعات دقیق نمودار پاسخ پله واحد (سیستم مرتبه صفر است) را مشاهده کرد.

```
info=stepinfo(sys);
```

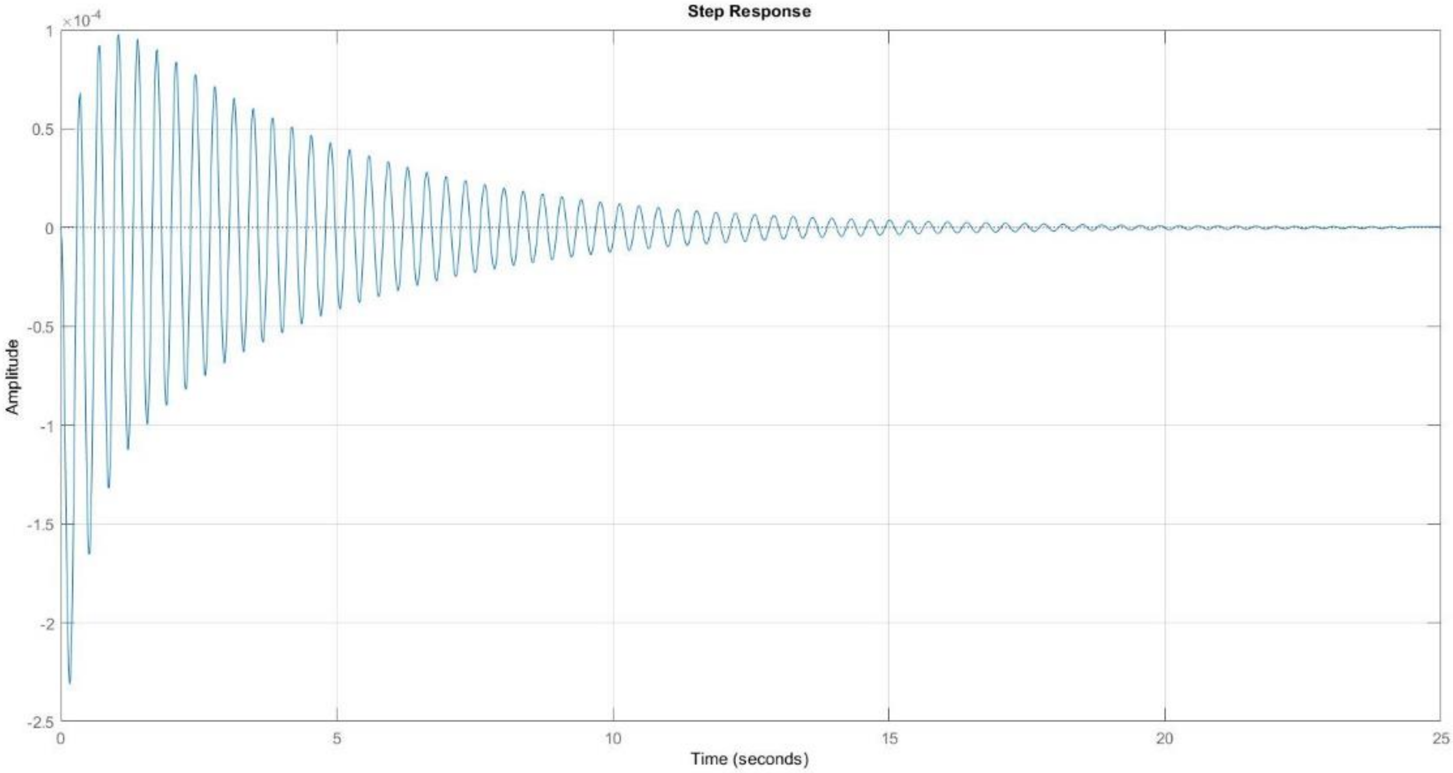
نتایج در شکل 4 و جدول 2 و 3 آمده است.

جدول 2 - مشخصات پاسخ گذرا

RiseTime	0
SettlingTime	13.9755
Overshoot	Inf
Peak	2.3112e-04
PeakTime	0.1572

جدول 3 - مشخصات پاسخ ماندگار

Type	0
Error Steady State	100%
Final Amplitude	0

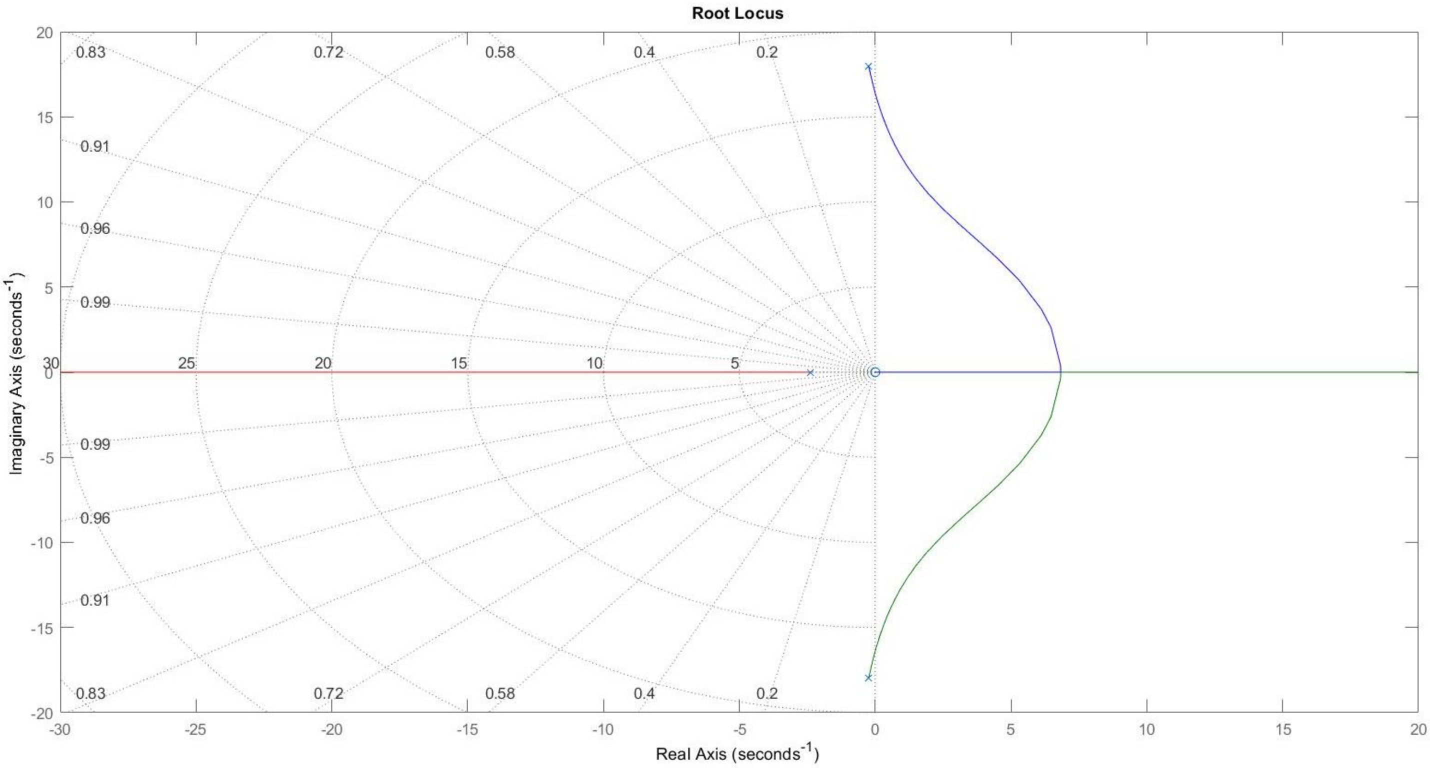


شکل 4 – پاسخ سیستم حلقه بسته فیدبک واحد منفی بدون کنترلر به ورودی پله واحد.

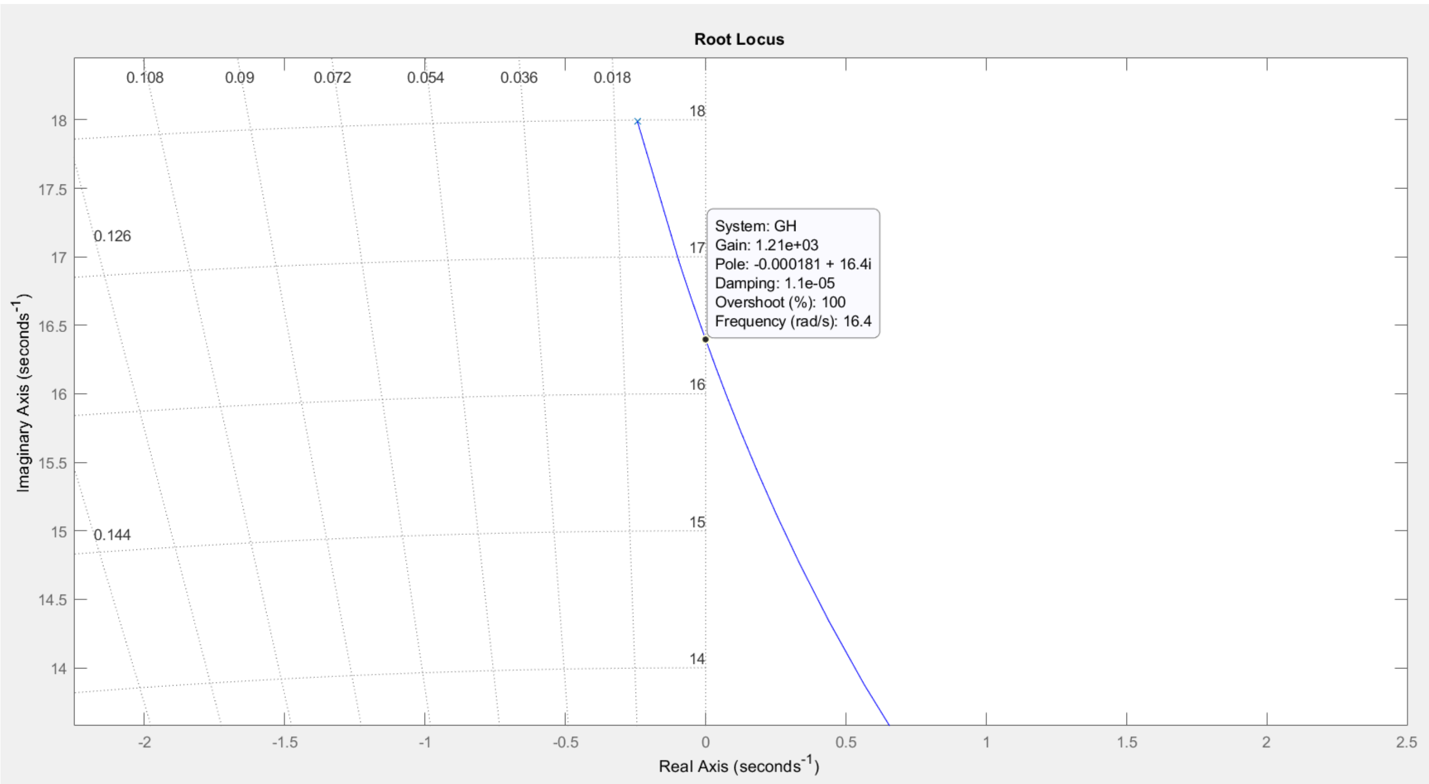
بررسی پایداری به راحتی از روی مکان هندسی ریشه ها امکان پذیر است پس ابتدا به کمک دستورهای زیر مکان هندسی را رسم کرده و سپس با کلیک بر روی محل برخورد مکان با محور موهومی میتوان بهره بحرانی سیستم را مشاهده کرد. مطابق شکل 5 و 6.

```
rlocus(GH)
grid on
```

که حاصل می شود شکل 5 .



شکل 5 - مکان هندسی ریشه ها مشخص است که به ازای بهره های کوچک میتواند پایدار باشد



شکل 6 - خواندن بهره بحرانی از روی نمودار

نتیجه:

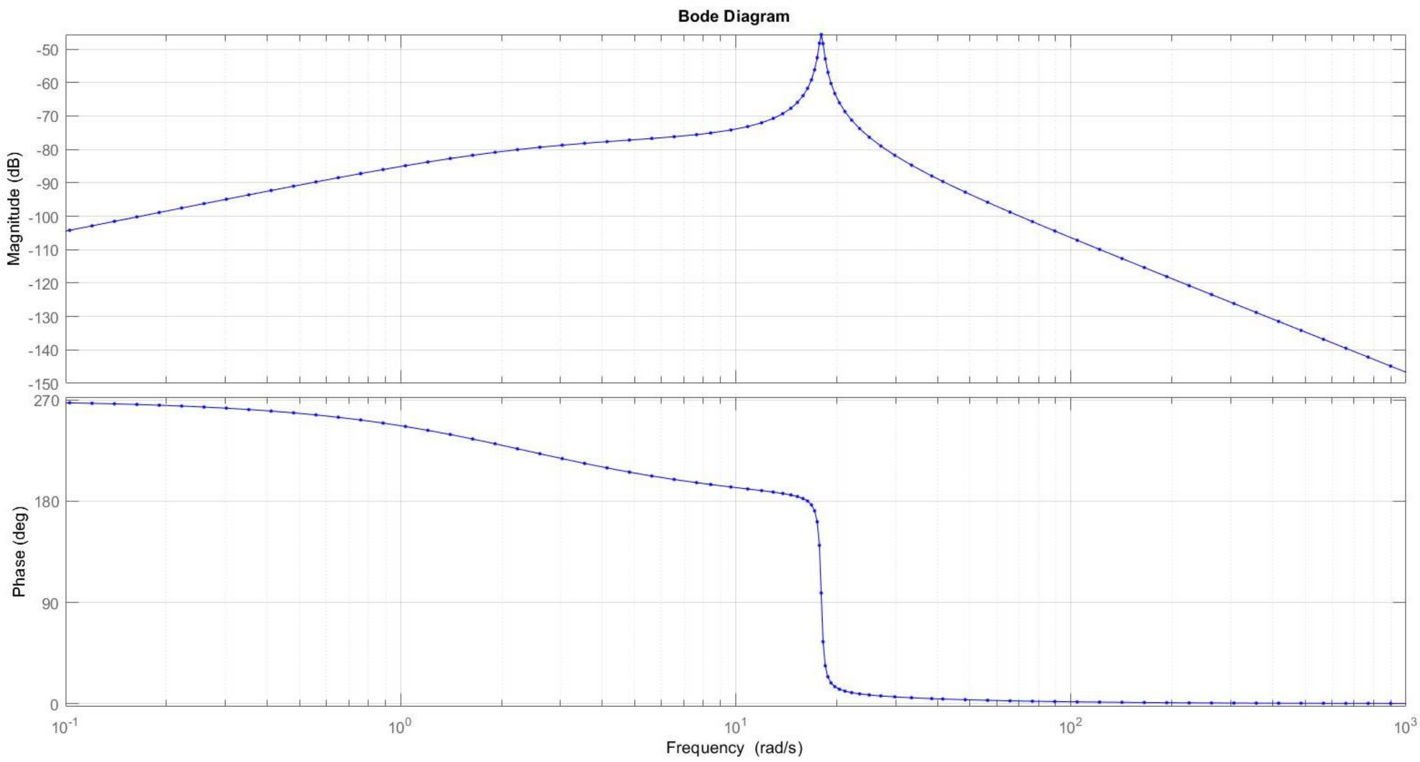
چون به ازای بهره های کوچک سیستم می تواند پایدار باشد پس محل برخورد با محور موهوی کران بالای بهره برای پایداری را نشان می دهد:

$$K \leq 1.21e+03 \quad \rightarrow \quad Stable$$

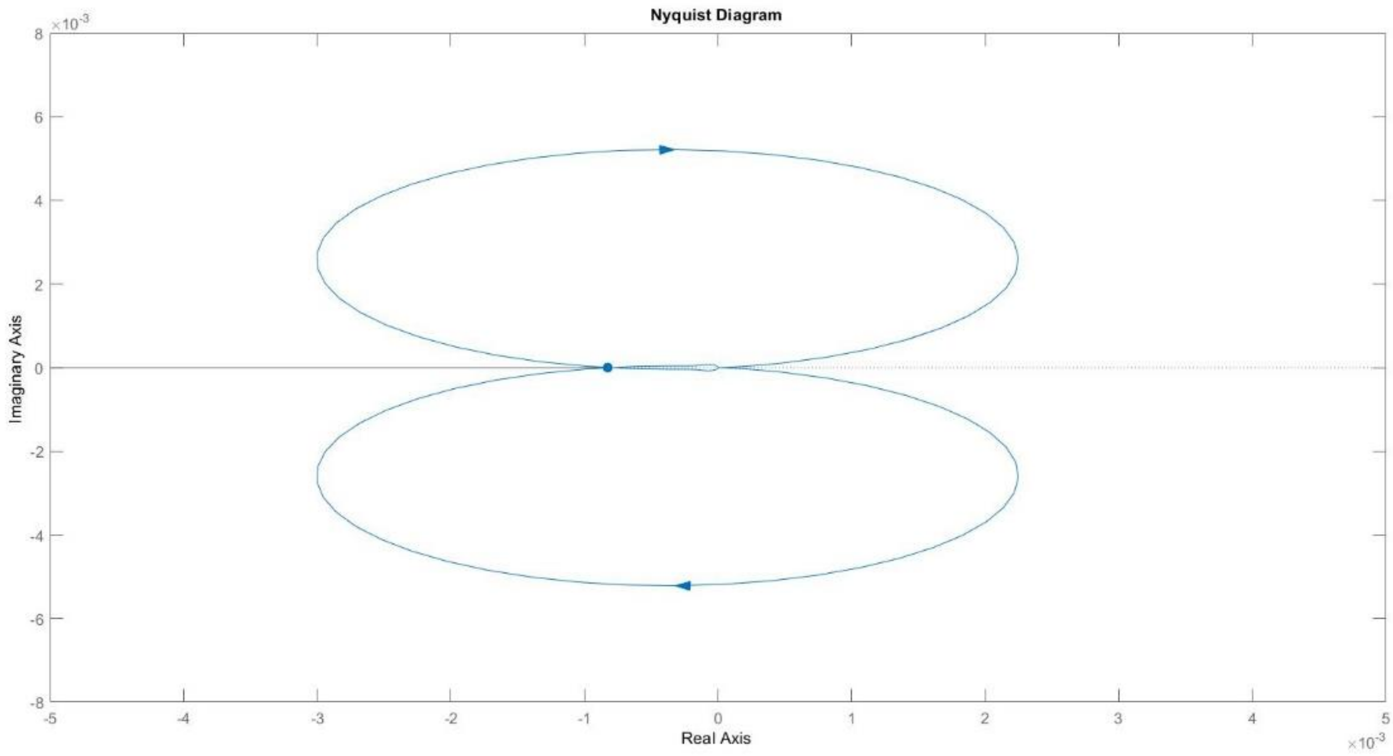
و در نهایت به کمک دستور های زیر میتوان نمودارهای بود و نایکوئیست را رسم کرد.

```
figure
bode(GH,'.-')
grid on
figure
nyquist(GH)
grid on
v=[-0.005 0.005 -0.008 0.008];axis(v)
```

که نتیجه می شود شکل های 7 و8 .



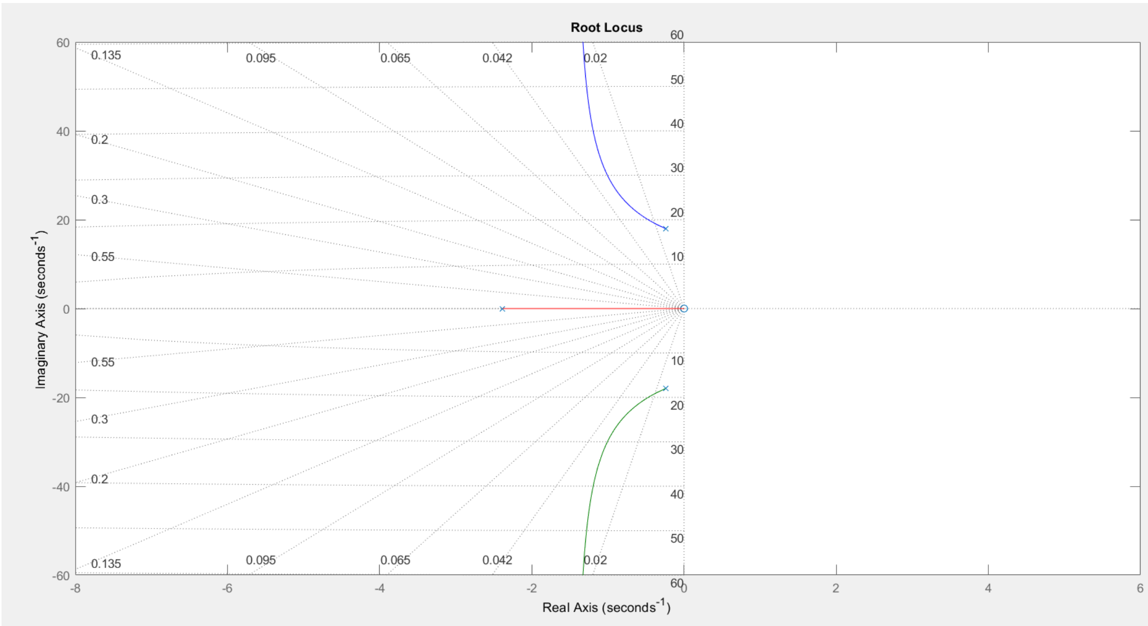
شکل 7 - نمودارهای بود سیستم کنترل نشده



شکل 8 – نمودار نایکوئیست سیستم کنترل نشده

د) طراحی کنترلر برای رسیدن به موقعیت 5 درجه

با توجه به جداول 2 و3 هم پاسخ گذرا و هم پاسخ ماندگار خوب نیستند. پس کنترلر PID لازم است. اما قبل از شروع طراحی تابع تبدیل مسیر پیشرو را در یک بهره منفی 1 ضرب می کنیم تا مکان به سمت چپ محور موهومی متمایل شود. مطابق شکل 9 پس از ضرب بهره منفی داریم:

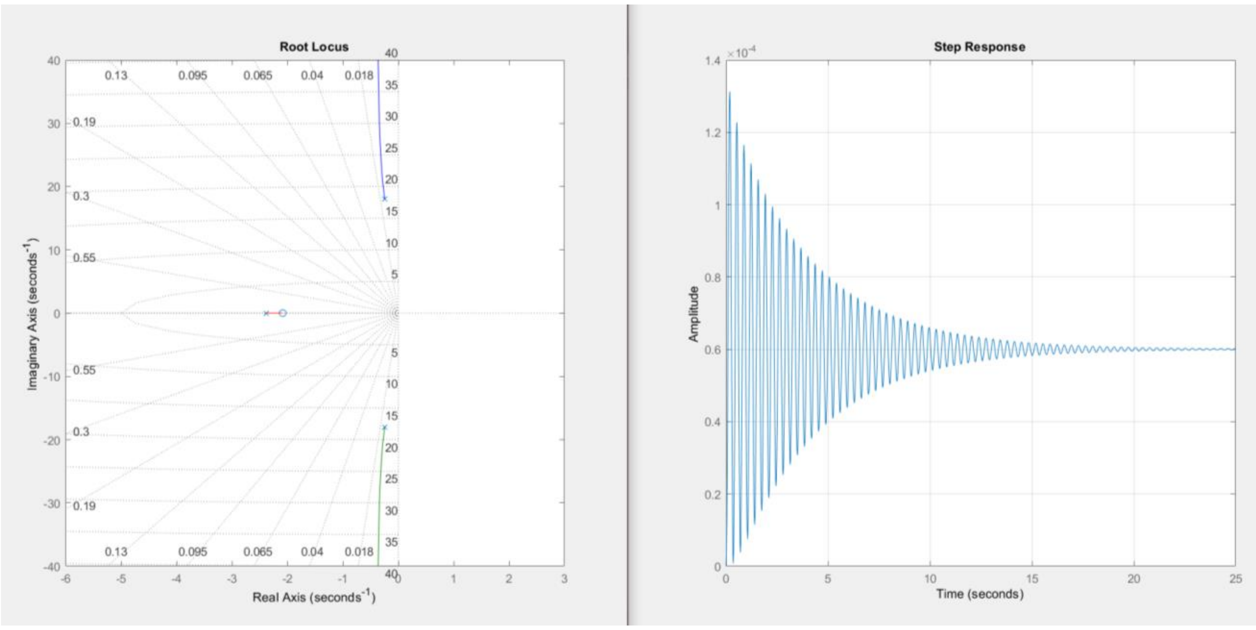


شکل 9 - مکان هندسی پس از ضرب یک بهره منفی یک (**1-**)

ابتدا قسمت انتگرالی را طراحی می کنید. برای حذف s در صورت محل قطب انتگرال گیر در 0 در نظر می گیریم و محل صفر انتگرال گیر را به کمک دستور زیر و افزونه طراحی کنترلر **انتخاب** می کنیم.

```
controlSystemDesigner('rlocus',GH)
```

اگر محل صفر انتگرال گیر را در منفی 2.08 بگیریم مطابق شکل 11 خواهیم داشت:



شکل 11 – مکان هندسی و پاسخ پله واحد پس از جبران سازی به وسیله جبران ساز پس فاز

در شکل 11 واضح است که همچنان پاسخ گذرا و ماندگار مطلوب نیستند پس باید چاره ای اندیشید.

ابتدا با حفظ همان جبران ساز پس فاز قبلی سعی می کنیم پاسخ گذرا را اصلاح کنیم، بدین منظور از جبرانساز پیش فاز استفاده می کنیم تا مثلا به Overshoot=14% و زمان نشست 0.5 ثانیه برسیم. ابتدا قطب مطلوب حلقه بسته را مشخص می کنیم.

$$Settling\ Time = 0.5 \ \rightarrow \ \sigma = 2$$

$$\text{Overshoot} = 14\% \ \rightarrow \ \omega_d = 3.46\ rad/s$$

حال باید کمبود زاویه را محاسبه کنیم برای این کار از تمام قطب ها و صفر های دیگر به قطب مطلوب وصل کنیم و از رابطه فیثاغورس برای محاسبه تک تک زاویه ها استفاده کنیم، سپس اختلاف مقدار حاصل با 180 درجه کمبود زاویه ماست. یا از دستور زیر استفاده می کنیم.

```
ss=-2+3.46i;
ag=(180/pi)*angle(polyval(f,ss)/polyval(b,ss));
```

در نتیجه داریم:

$$\emptyset = 7.1526$$

اگر تمام کمبود زاویه را فقط با یک صفر جبران کنیم (جبرانساز ایده آل) خواهیم داشت:

$$\tan(7.1526) = \frac{3.46}{\sigma - 2} \rightarrow \sigma = 29.57$$

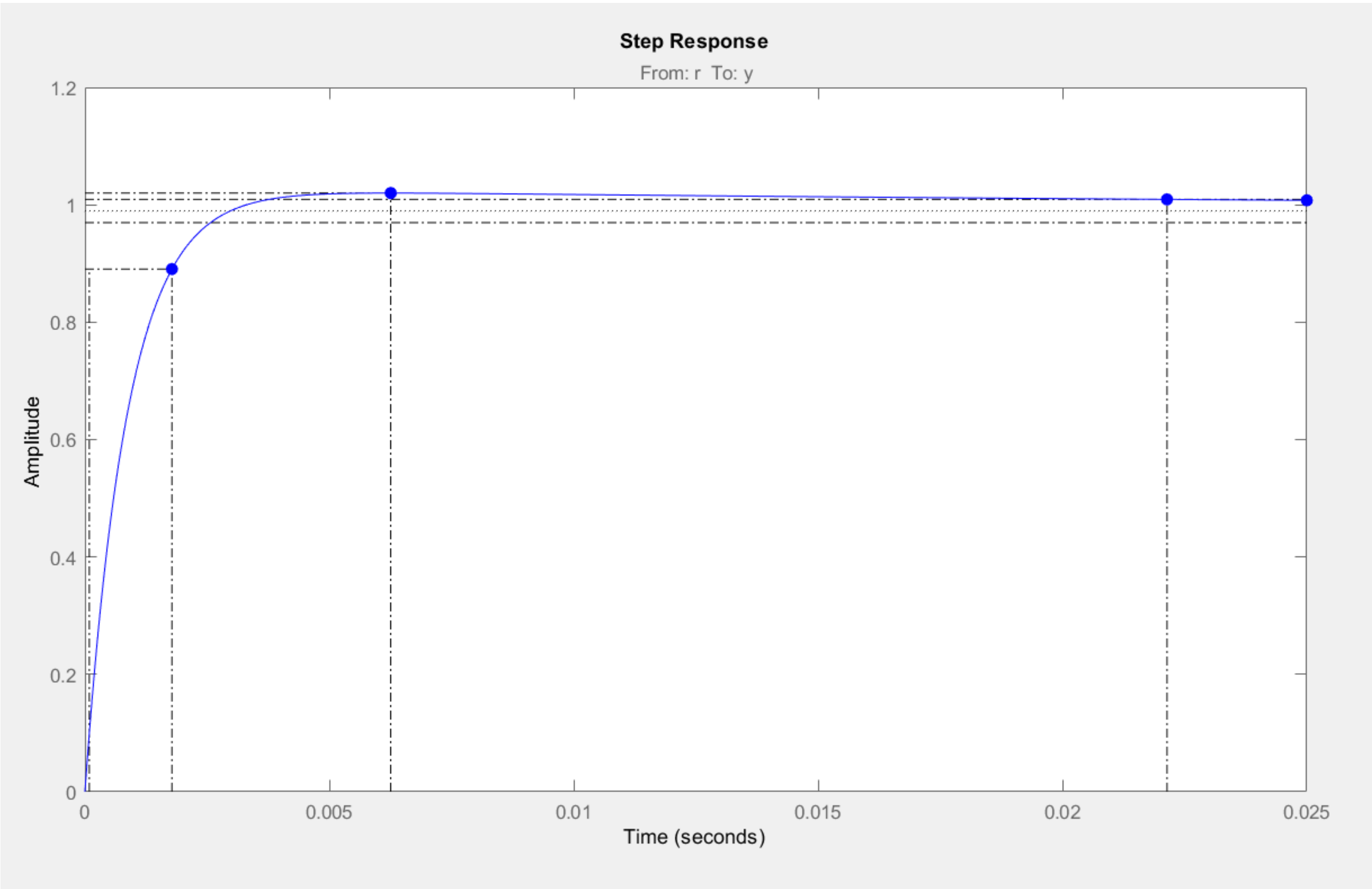
حال با دستور زیر مقدار k را محاسبه می کنیم.

```
ss=-29.57;
k=-polyval(b,ss)/polyval(f,ss);
```

نتیجه می شود:

$$k = -5.2683e + 04$$

حال به بررسی پاسخ گذرا و ماندگار می پردازیم مطابق شکل 12 و جدول 4.



شکل 12 – پاسخ سیستم حلقه بسته به پله واحد بعد از جبران سازی ها و تنظیم بهره

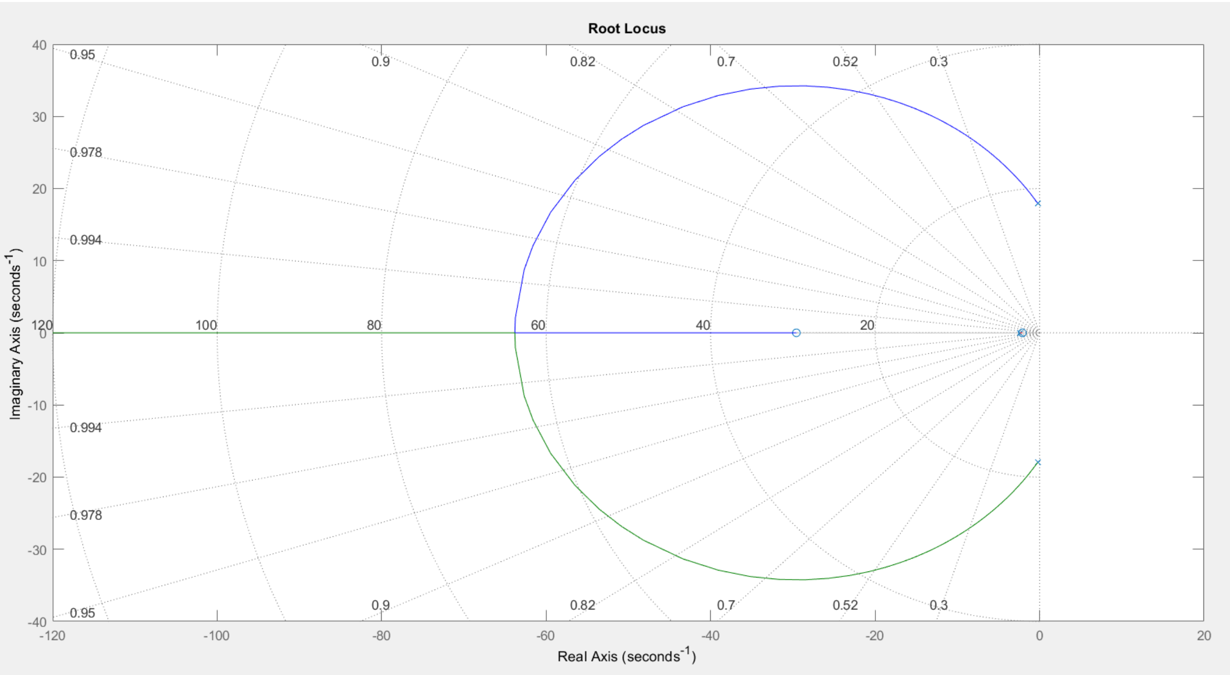
جدول 4 – مشخصات پاسخ گذرا و ماندگار پس از جبران سازی

RiseTime	0.0017
SettlingTime	0.0221
Overshoot	3.0883%
Peak	1.0200
PeakTime	0.0063
Type	0
Error Steady State	1.1%
Final Amplitude	0.989

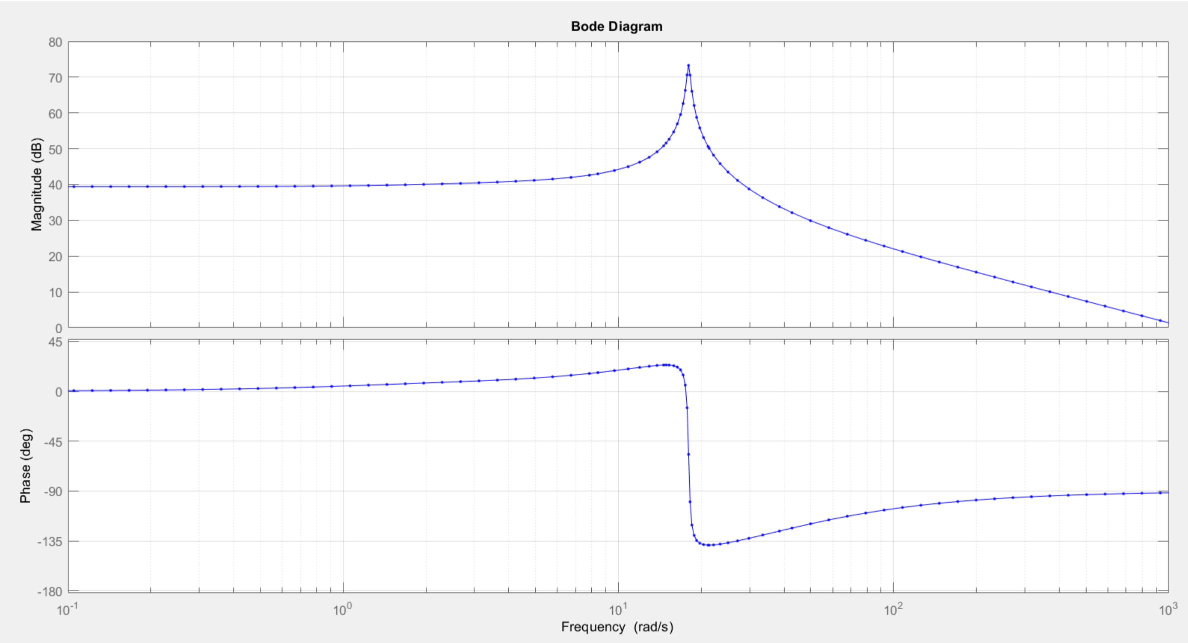
طبق جدول 4 و شکل 12 مشاهده می شود که مقادیر بدست آمده حتی بهتر از حد انتظار شده است. به عنوان مثال مقدار فراجهش 3 درصد شده که بسیار بهت از 14 درصد است و همچنین زمان نشست 0.02 ثانیه شده که فوق العاده خوب است.

خطای ماندگار نیز حدود 1 درصد است و کاملا قابلا قبول است.

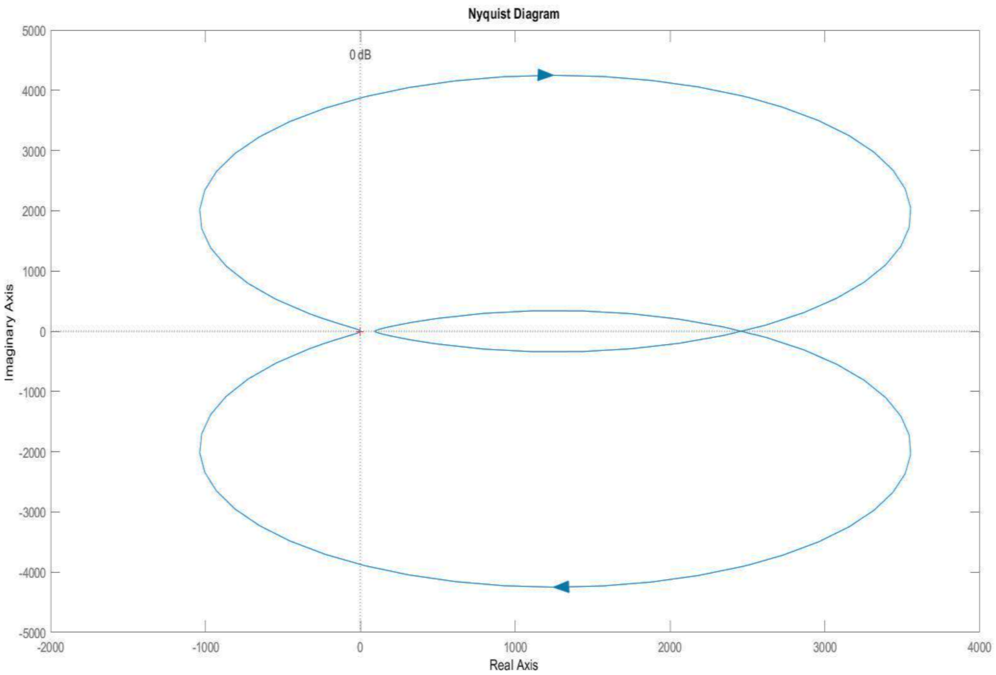
در ادامه مکان هندسی و نمودارهای بود و نایکوئیست سیستم جبران شده را آورده ام. مطابق شکل 13 تا 15.



شکل 13- مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده



شکل 14- نمودار های بود سیستم جبران شده

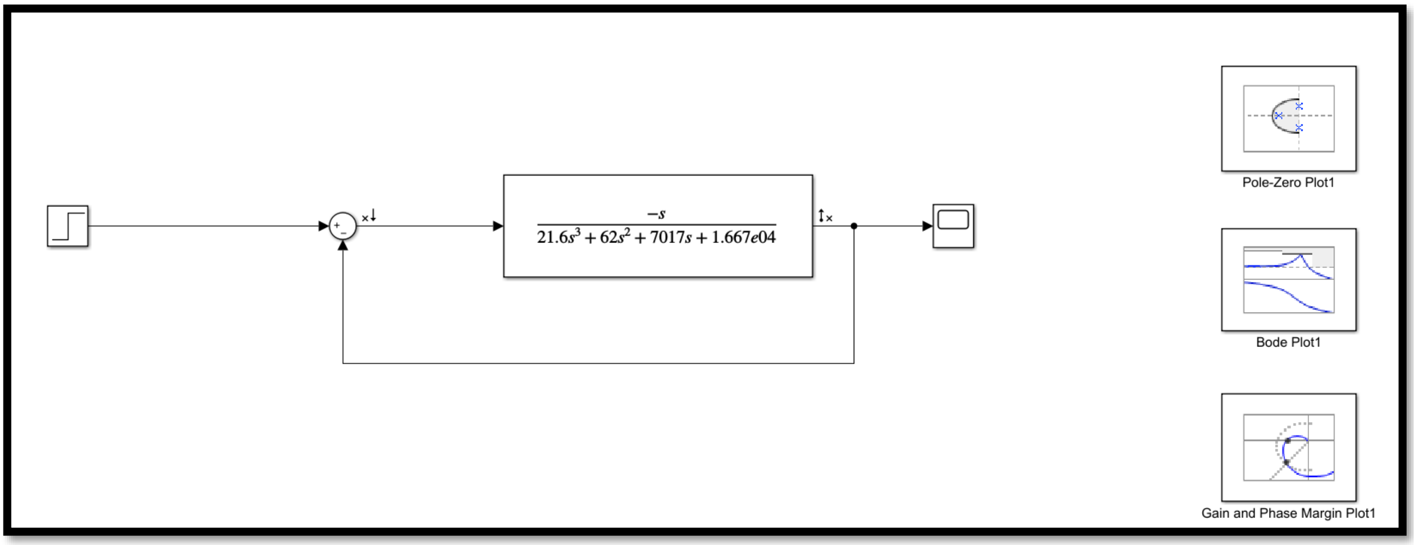


شکل 15- نمودارنایکوئیست برای سیستم جبران شده

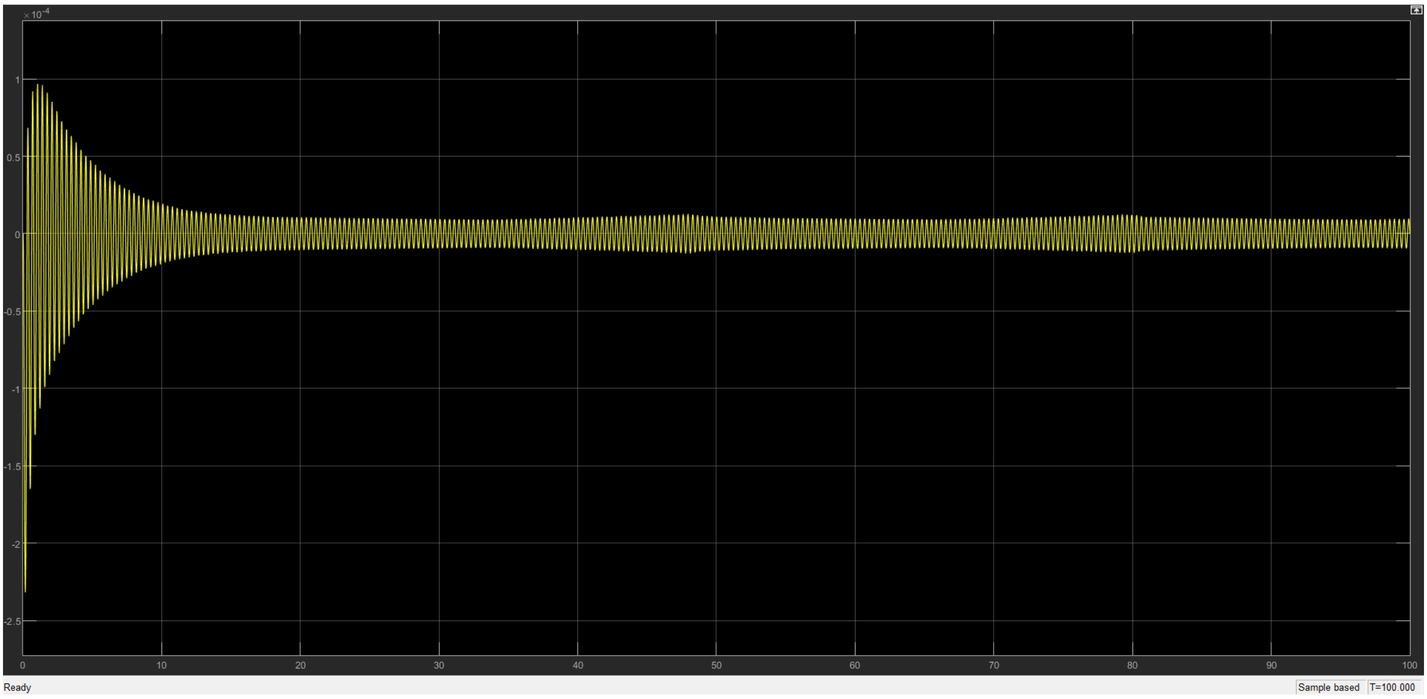
سیمولینک

همین نتایج را می توان به کمک سیمولینک نیز بدست آورد.

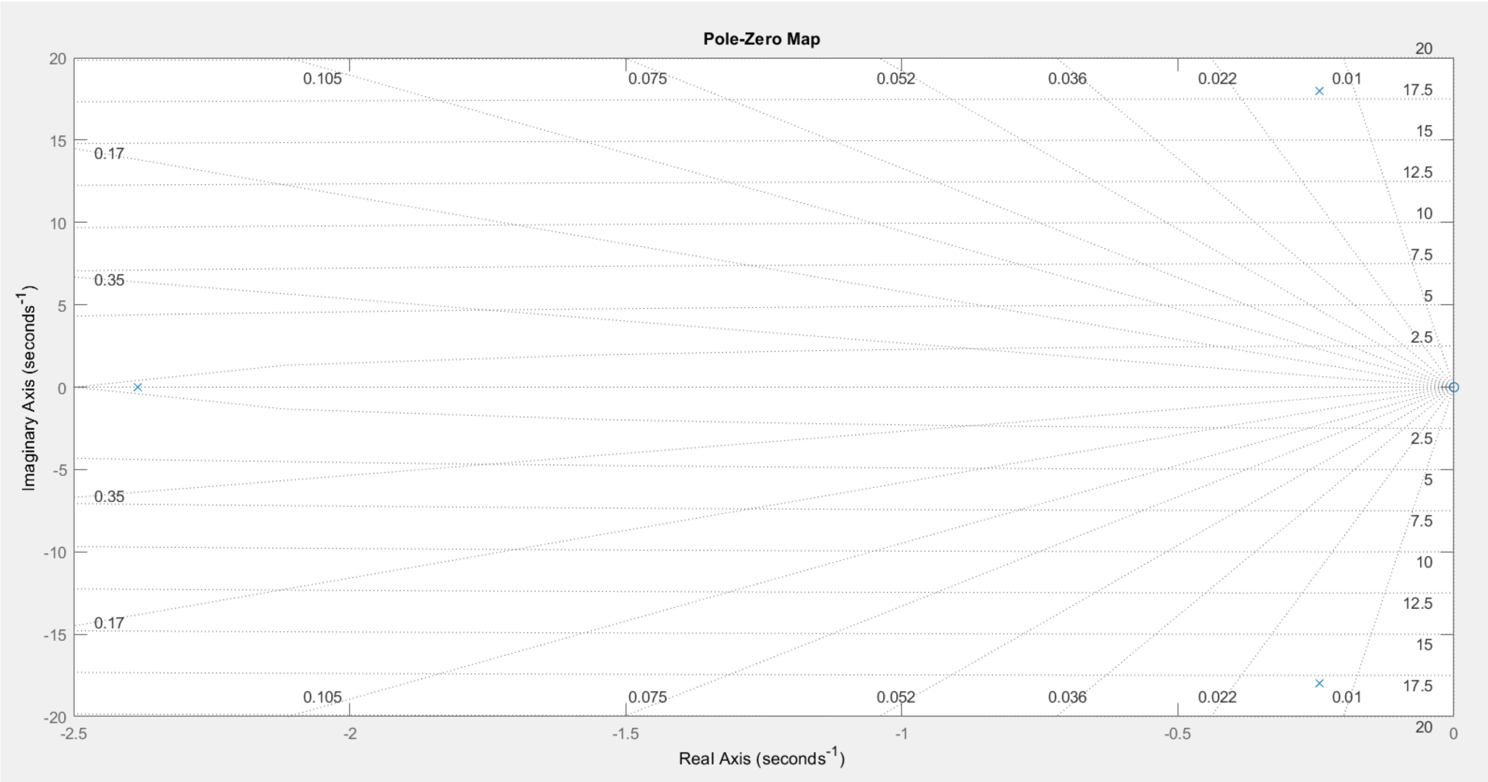
1- نتایج سیستم کنترل نشده به کمک سیمولینک



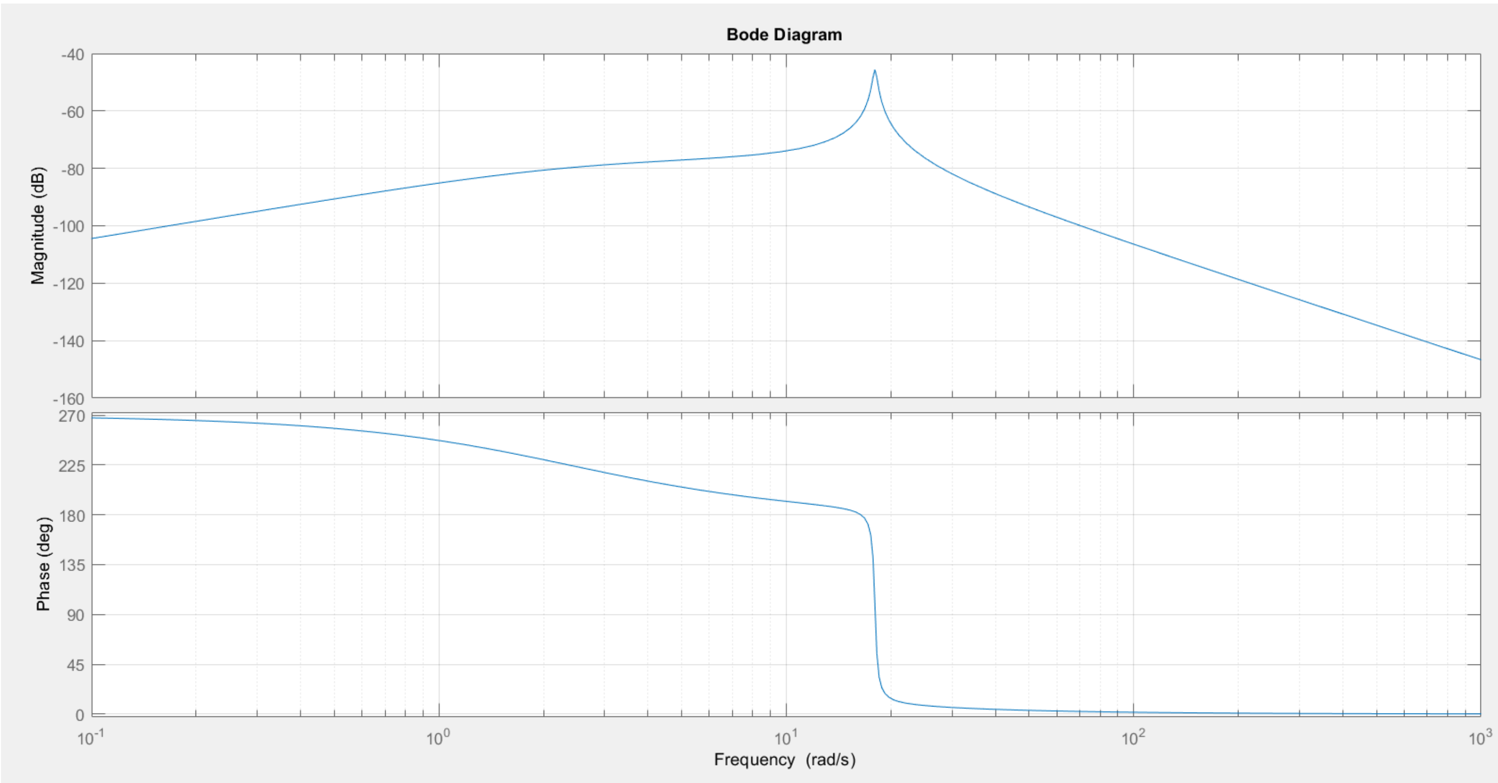
شکل 16 – بلوک دیاگرام سیمولینک برای سیستم کنترل نشده



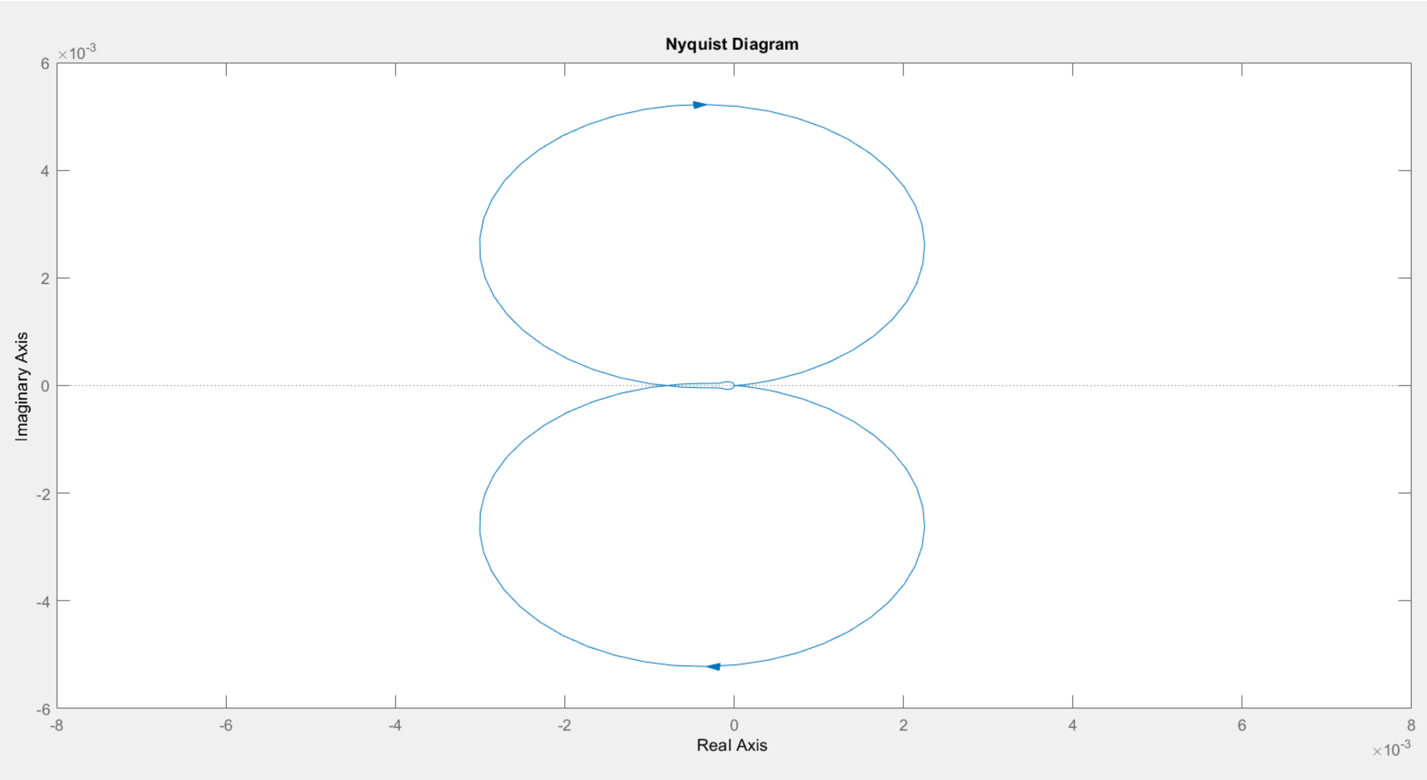
شکل 17 – پاسخ سیستم کنترل نشده به ورودی پله واحد حاصل از سیمولینک تا زمان 100 ثانیه (پله واحد از زمان 0.01 به بعد اعمال شده است)



شکل 18 – محل صفرها و قطب های سیستم کنترل نشده



شکل 19 – نمودار های بود سیستم کنترل نشده



شکل 20 – نمودار نایکوئیست برای سیستم کنترل نشده

همانطور که مشاهده می شود نتایج شکل های 16 تا 20 با آنچه که از کد نویسی حاصل شده است یکسان هستند.

2- نتایج سیستم کنترل جبران شده به کمک سیمولینک

ابتدا به کمک دستور زیر تابع تبدیل جبران ساز پس فاز – پیش فاز را تجزیه می کنیم.

```
syms s
a=partfrac(((1+0.48*s)*(29.57+s)*5.2683e+04)/(s));
pretty(a)
```

نتیجه می شود

$$\frac{632196\ s}{25} + \frac{155783631}{100\ s} + \frac{500277768}{625}$$

تعریف کنترلر در سیمولینک به صورت زیر است.

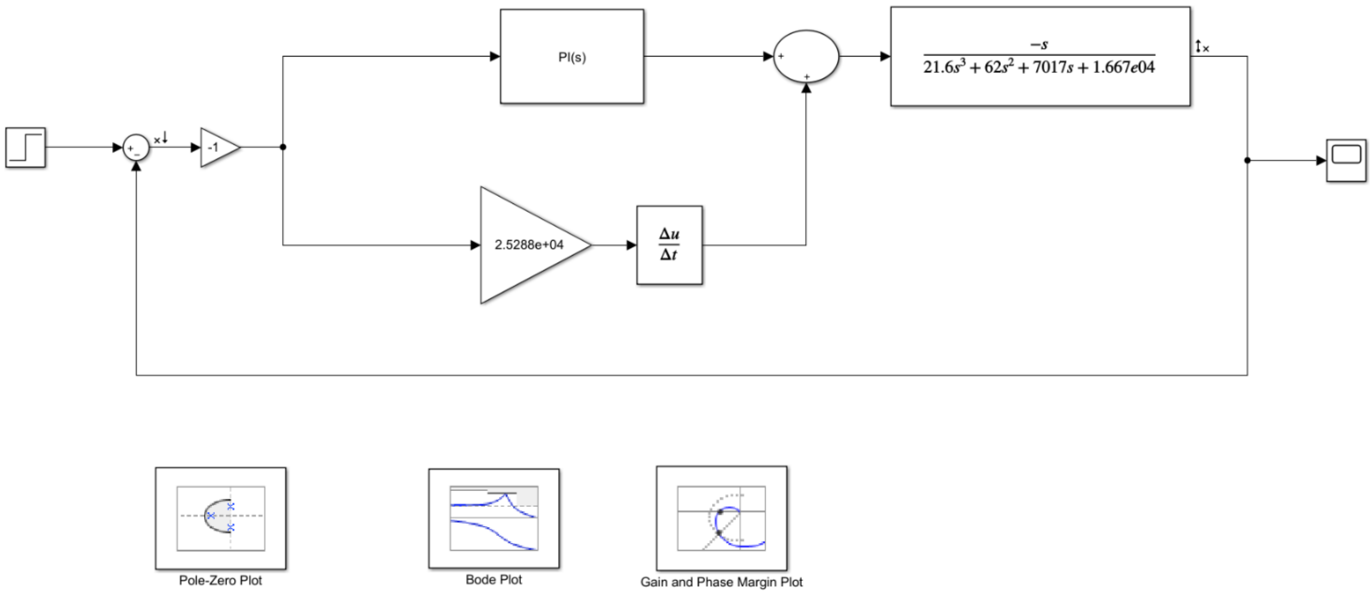
$$P + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1+N\frac{1}{s}}$$

پس ضرایب کنترلر به شرح جدول 5 خواهند بود.

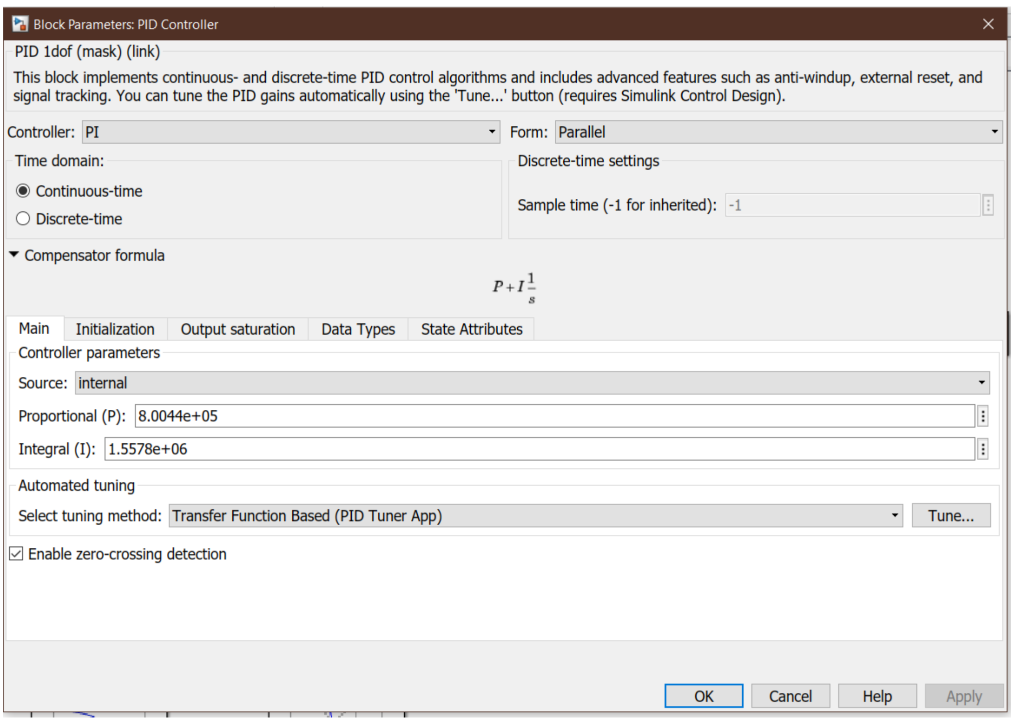
جدول 5 – ضرایب PID

P	8.0044e+05
I	1.5578e+06
D	توسط مشتق گیر موازی جایگزین شد
N	توسط مشتق گیر موازی جایگزین شد

چون ما نمیخواهیم از ضریب فیلتر PID (یعنی N) استفاده کنیم پس مجبوریم یک کنترلر PI را با یک مشتق گیر موازی کنیم. پس مطابق شکل 21 و 22 داریم:

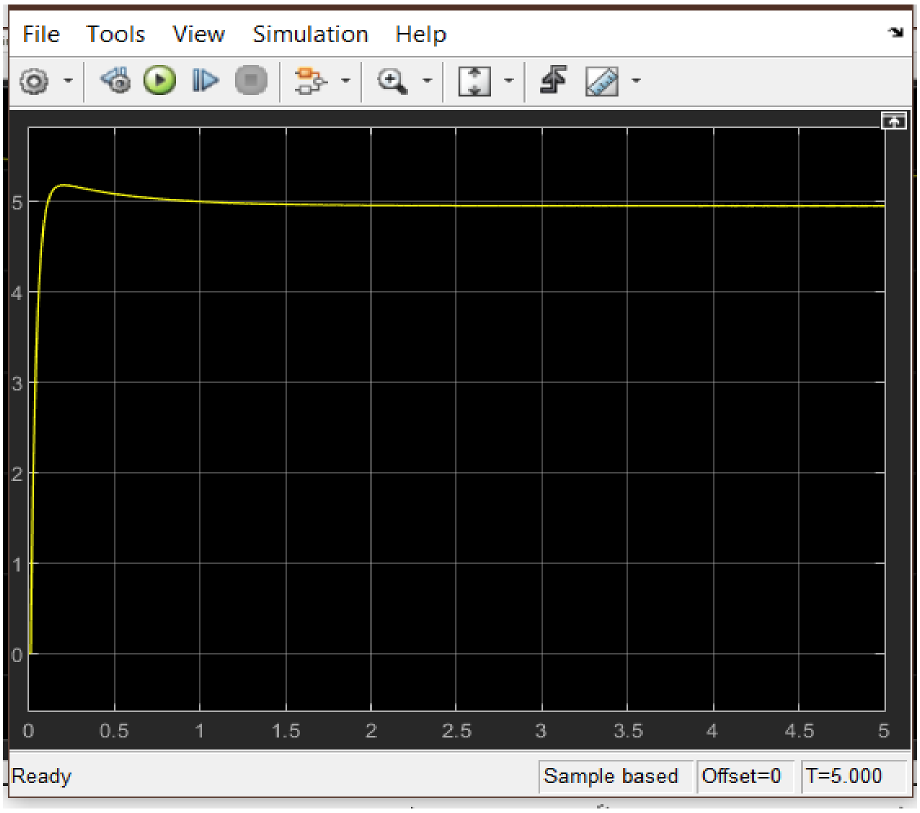


شکل 21 – بلوک دیاگرام سیمولینک برای سیستم جبران شده بهره مشتق گیر برابر 2.5288e+04 است.

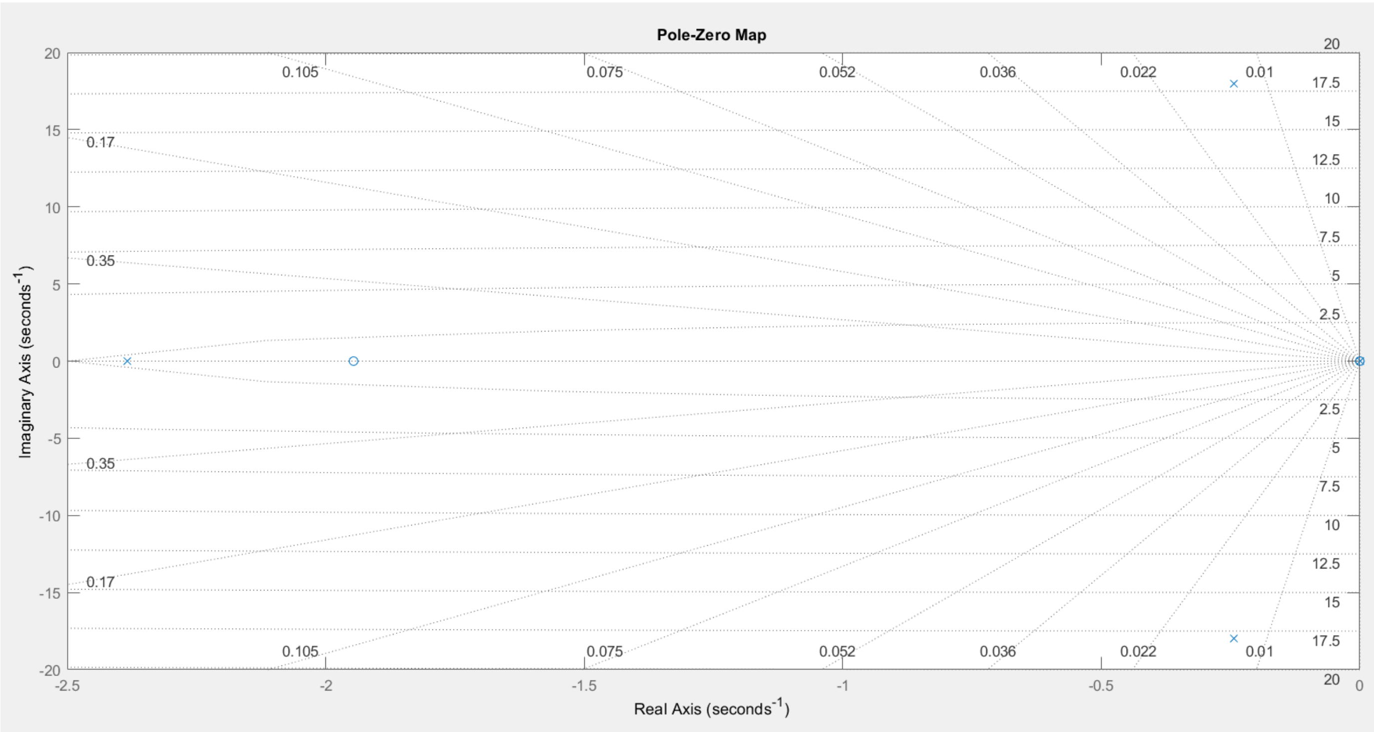


شکل 22 – ضرایب قسمت PI

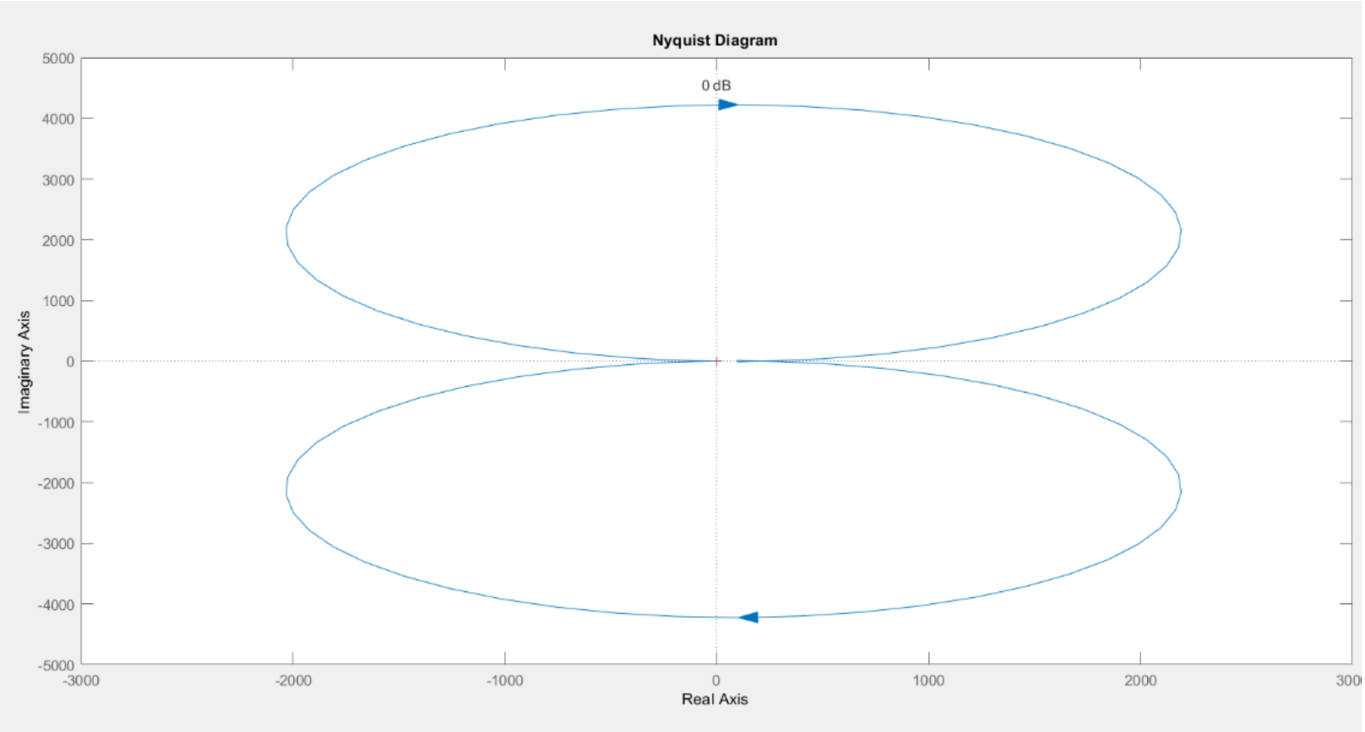
نتایج نهایی سیمولینک سیستم جبران شده به ورودی پله 5 برای رسیدن به زاویه 5 درجه مطابق شکل های 23 تا 26 است.



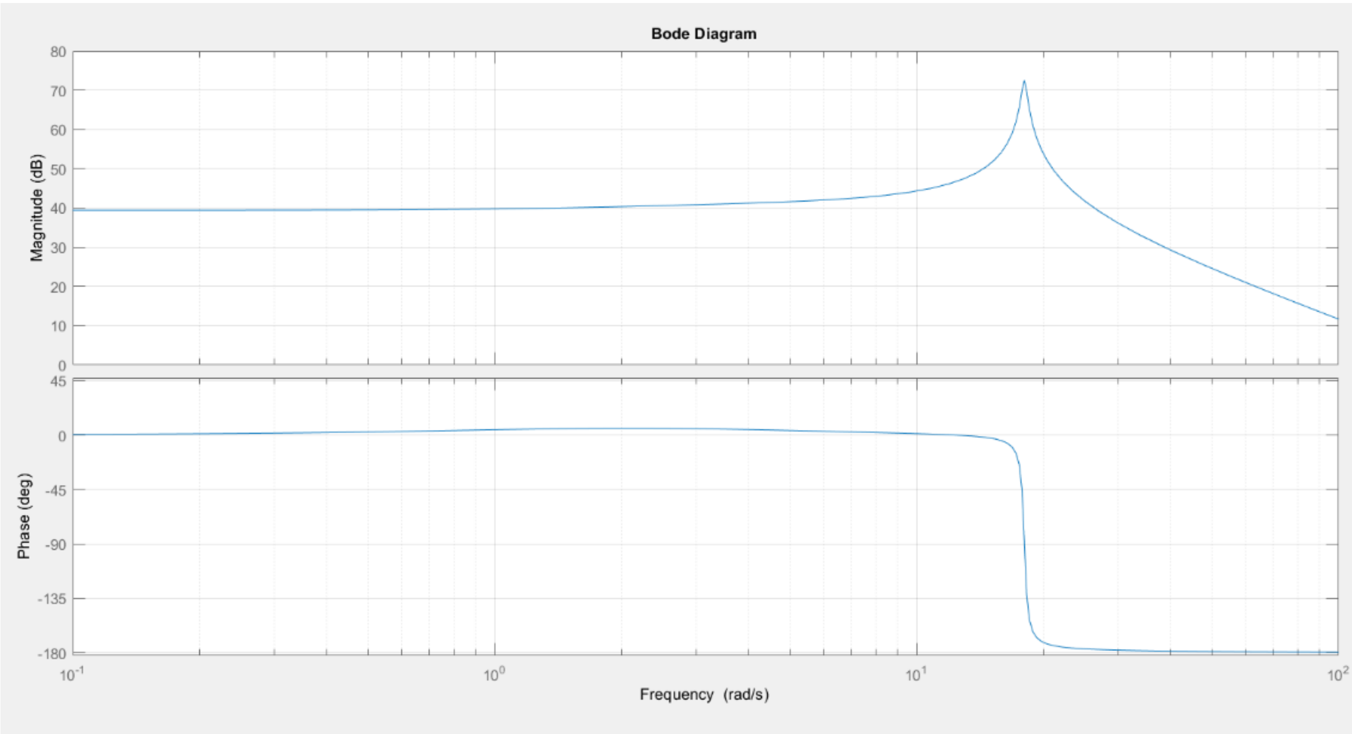
شکل 23 – نمودار پاسخ سیستم حلقه بسته به ورودی پله 5



شکل 24 – محل قطب ها و صفرهای سیستم جبران شده



شکل 25 – نمودار نایکوئیست سیستم جبران شده



شکل 26 – نمودارهای بود سیستم جبران شده