



Introduction to the N-body problem: Intro: what other object we see...

Mario Alberto Rodríguez-Meza

Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares

Correo Electrónico: marioalberto.rodriguez@inin.gob.mx

Pre-school

Mexican Numerical Simulations School

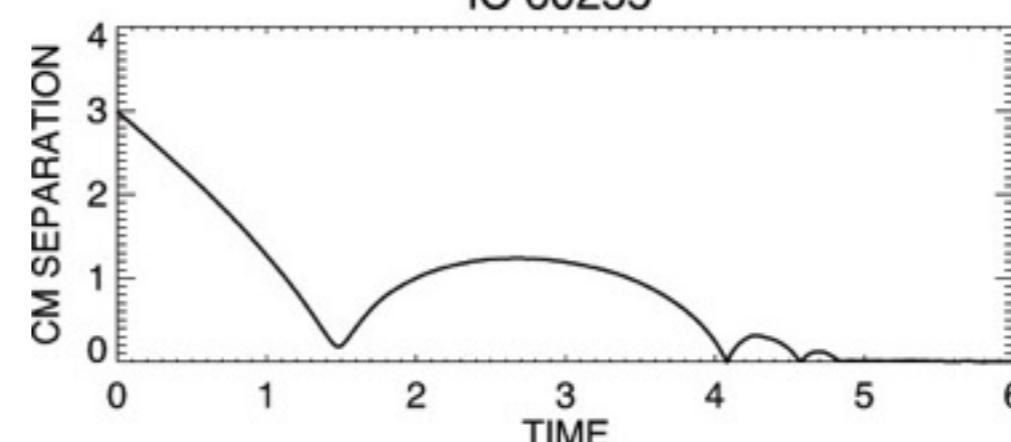
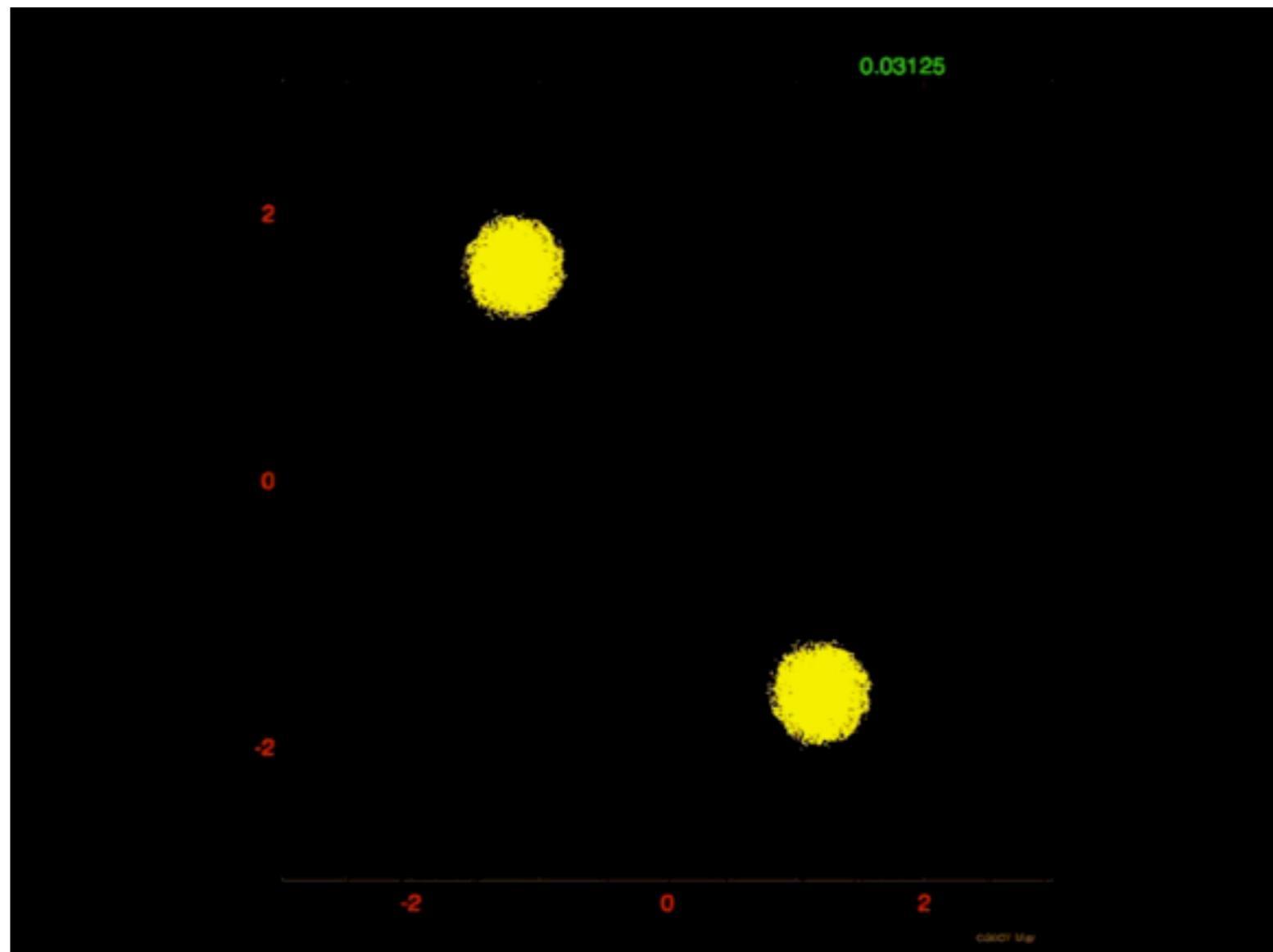
Instituto de Física, UNAM, Mexico City

29-30 september 2016

Mexican Numerical Simulations School

Instituto de Física, UNAM, Mexico City

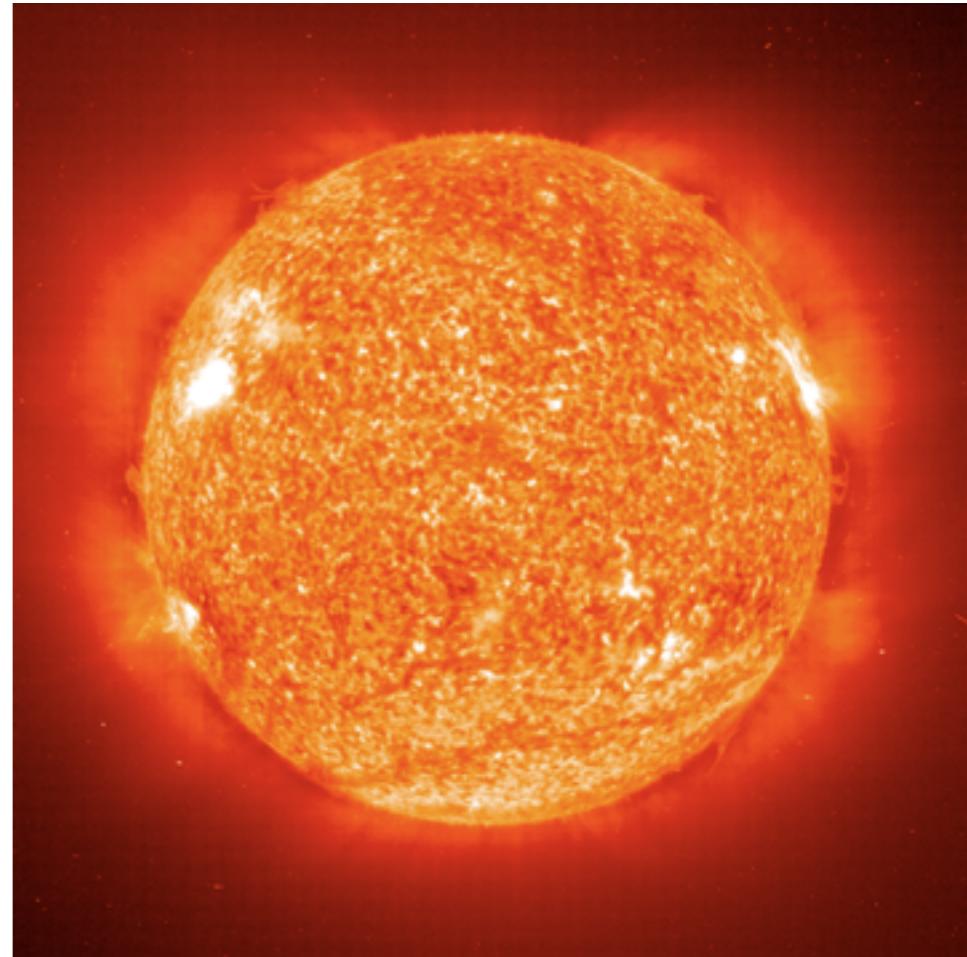
3-6 octuber 2016



Si miramos al cielo ...

- Vemos al astro dominante ... el Sol ...
claro no se la crean ...
no lo vayan a ver ...
- La luz hace ...

$$t = \frac{AU}{c} = \frac{150 \times 10^6 \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/seg}} = 500 \text{ seg}$$



- 8.3 minutos para
alcanzarnos



Si miramos al cielo ...

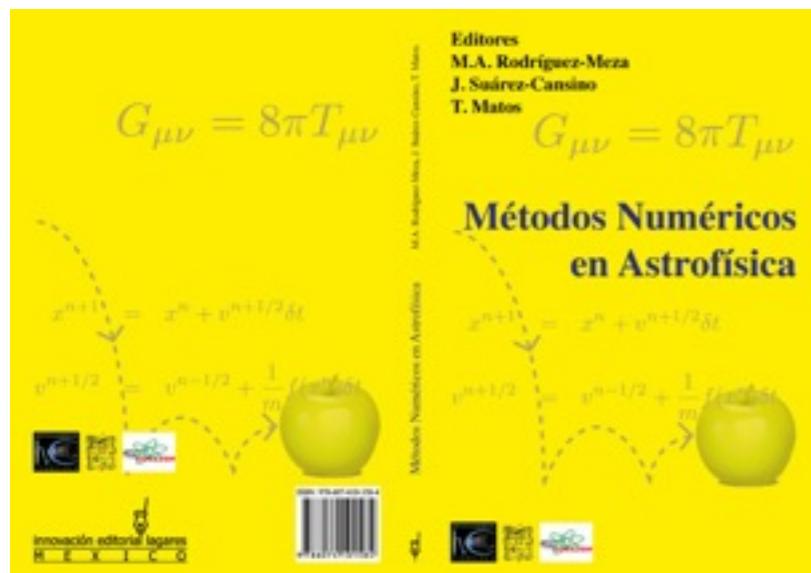
- y a su “molesta novia”
... la Luna



Vemos: cúmulos globulares

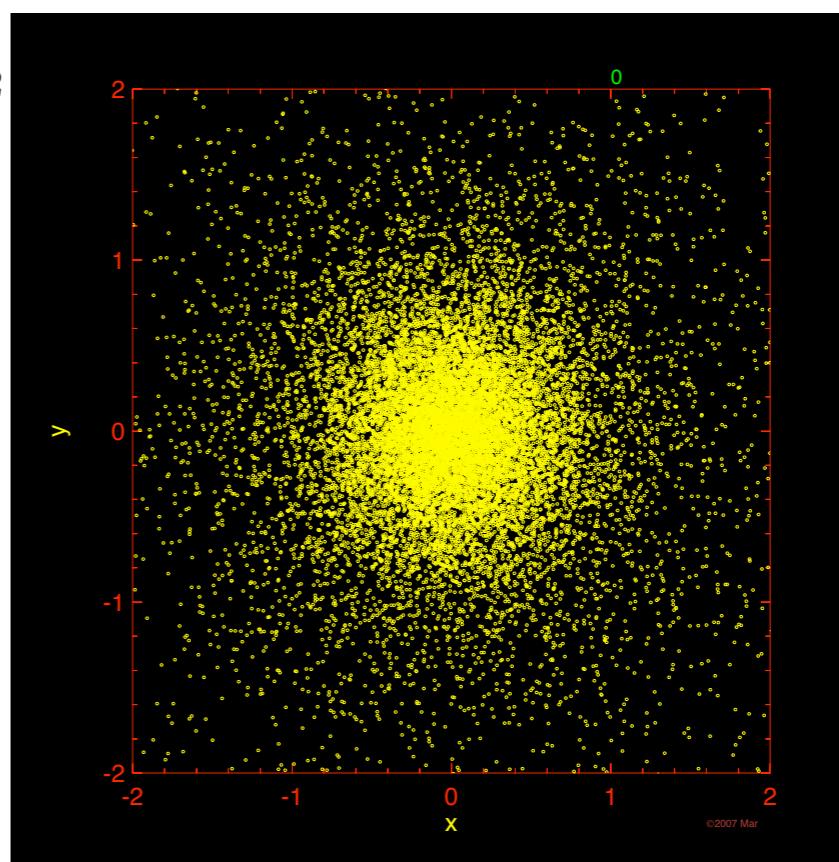
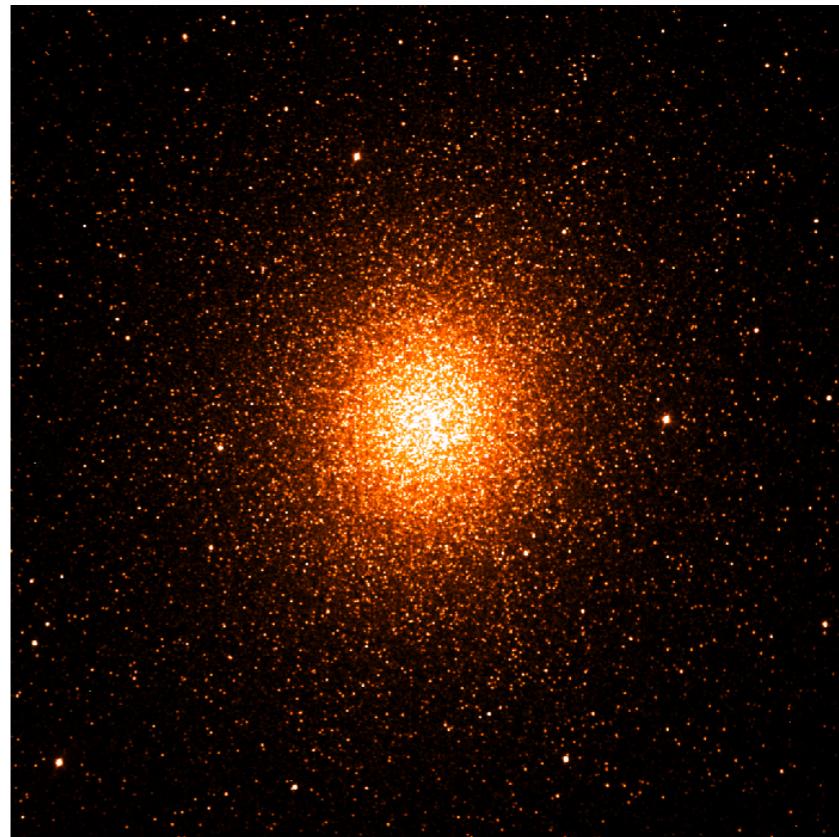
- Cúmulo globular ω-centauri. Es la bola más grande de estrellas en nuestra galaxia. Tiene alrededor de 10 millones de estrellas que orbitan alrededor de su centro de masa. Los cúmulos globulares nos sirven para entender la historia de nuestra galaxia y la edad del Universo.

$$V_P(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad \rho_P(r) = \left(\frac{3M}{4\pi a^3}\right) \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-5/2}$$



$$2K + W = 0$$

$$\langle v_r^2 \rangle = \frac{GM}{6} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$



Cuando miramos al cielo...

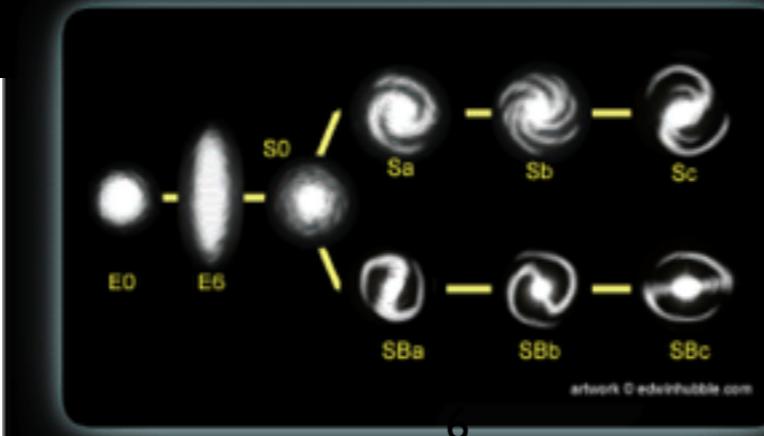
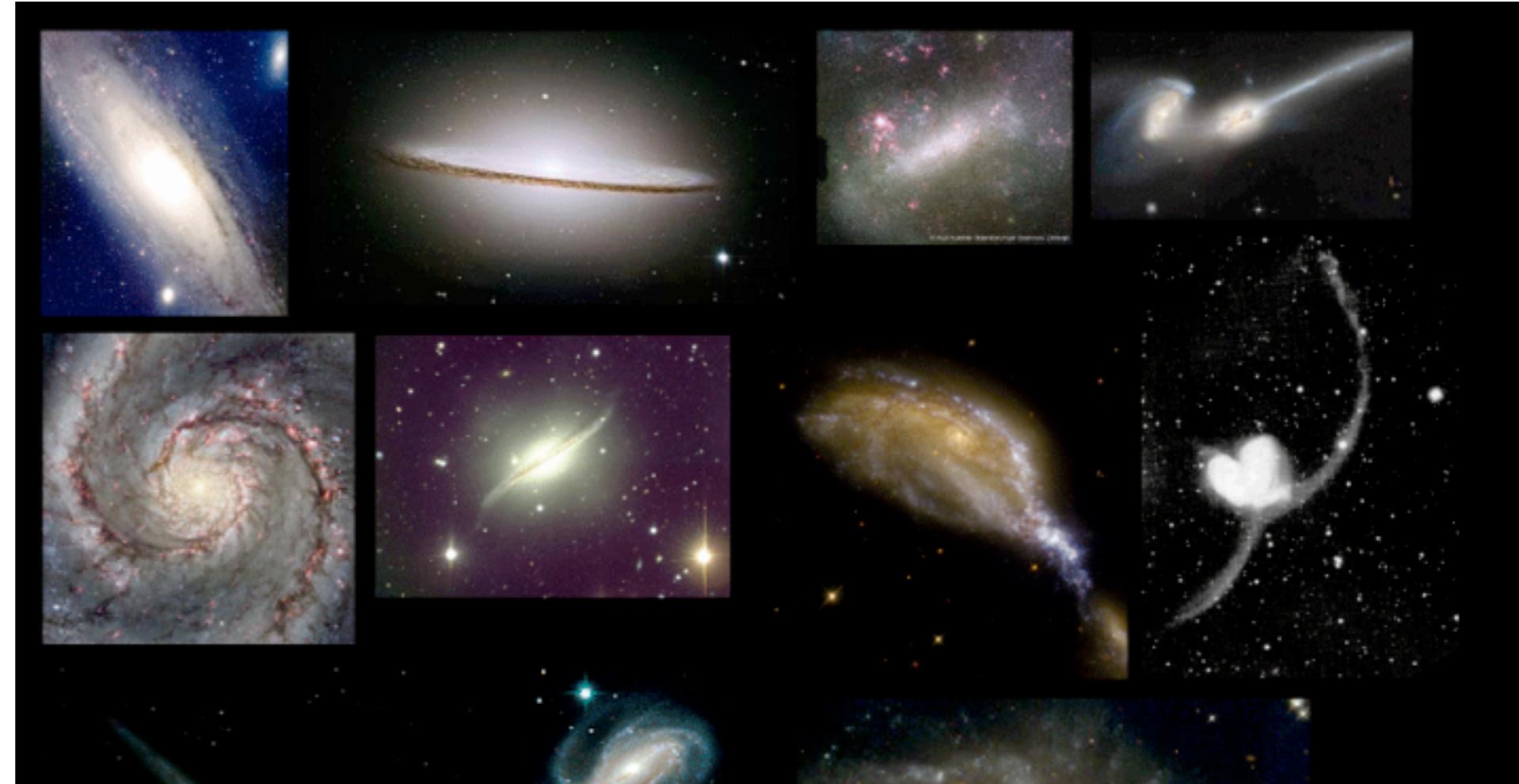
- Vemos agrupados con muchísimas más estrellas, 100,000 millones en número...
- Que aparecen en los telescopios como manchas blanquiscas... se llamaron nebulosas...
- son galaxias en realidad...



Si “miramos” al cielo vemos ...

Muchísimas galaxias...

y de formas muy variadas

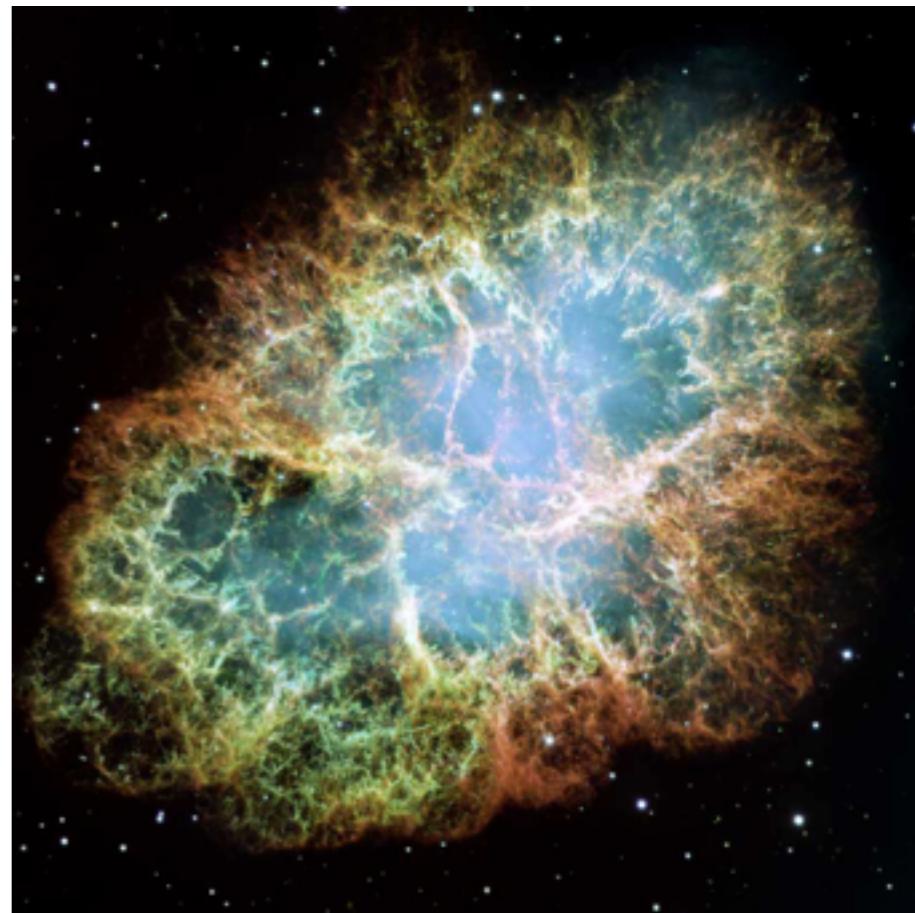


«El tenedor»
de Hubble



En el cielo también hay otros objetos ...

- Las nebulosas verdaderas ... en este caso... la del Cangrejo...
- Es en realidad los restos de la explosión de una Supernova que ocurrió por la edad media... una época oscura.
- Todos la vieron, los chinos, etcétera... menos los europeos porque estaban ocupados con el problema de averiguar cuántos ángeles pueden danzar en una cabeza de alfiler ... **¡lo que depende claro de si es Tango, salsa o samba!**

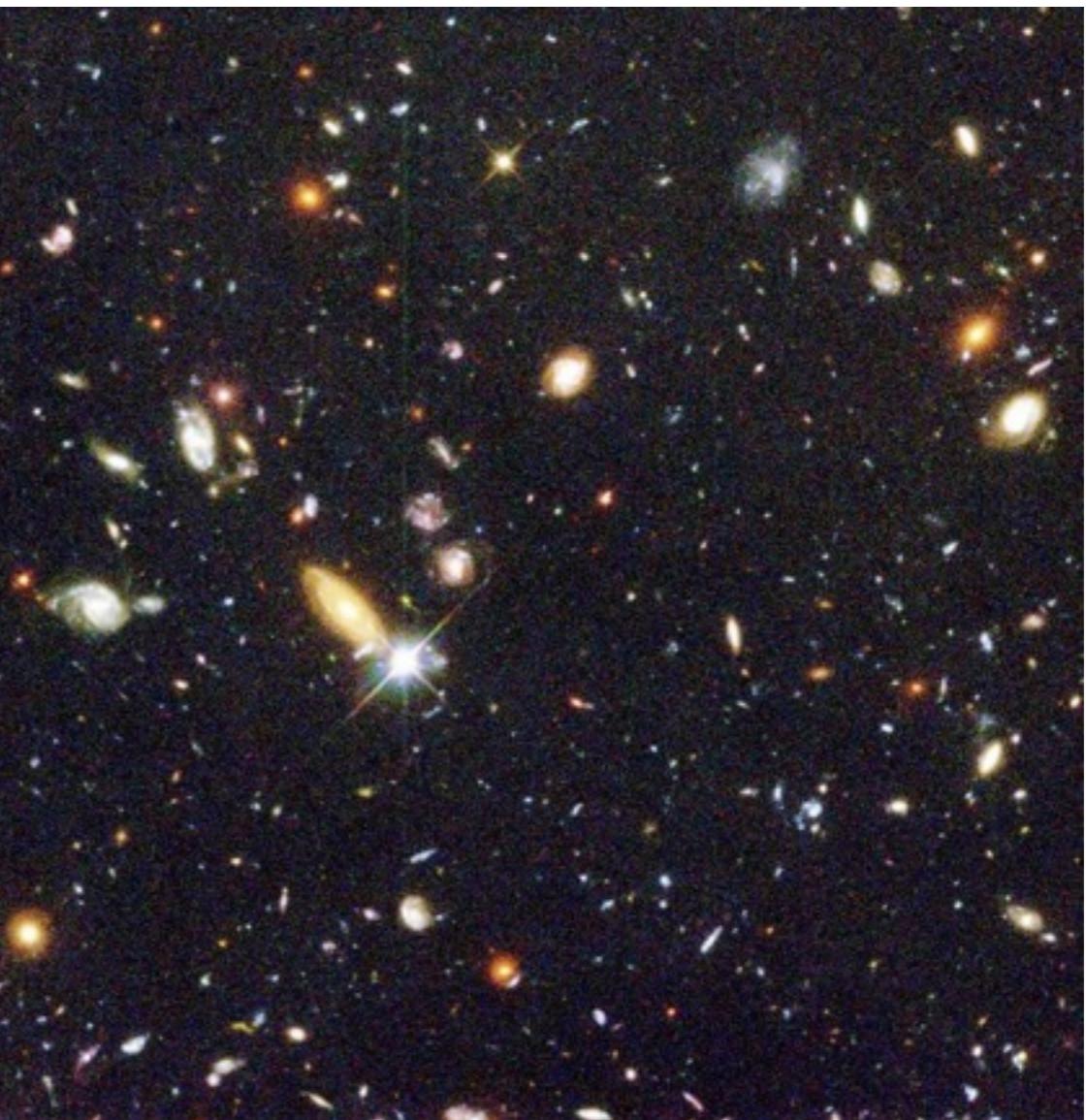


¡Hasta un pulsar tiene!



“Vemos” cúmulos de galaxias...

- “Vemos” pero con el telescopio espacial Hubble...
- que por cierto subió al cielo en un satélite...
- Y cuando “abrió” los ojos “vio” borroso...
¡estaba virolo!...
- ¡Millones de dólares a la basura!...

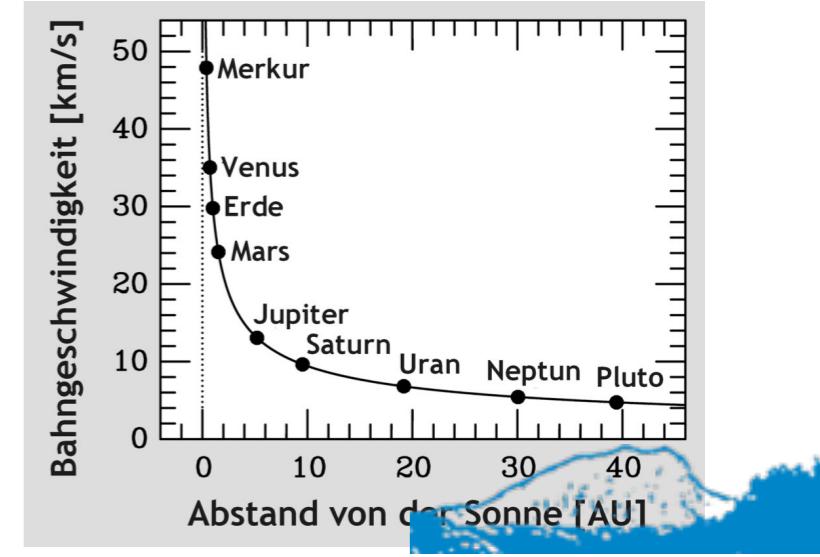
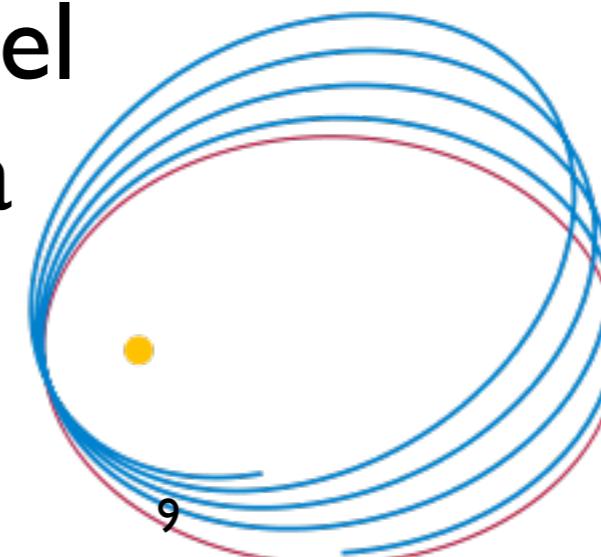
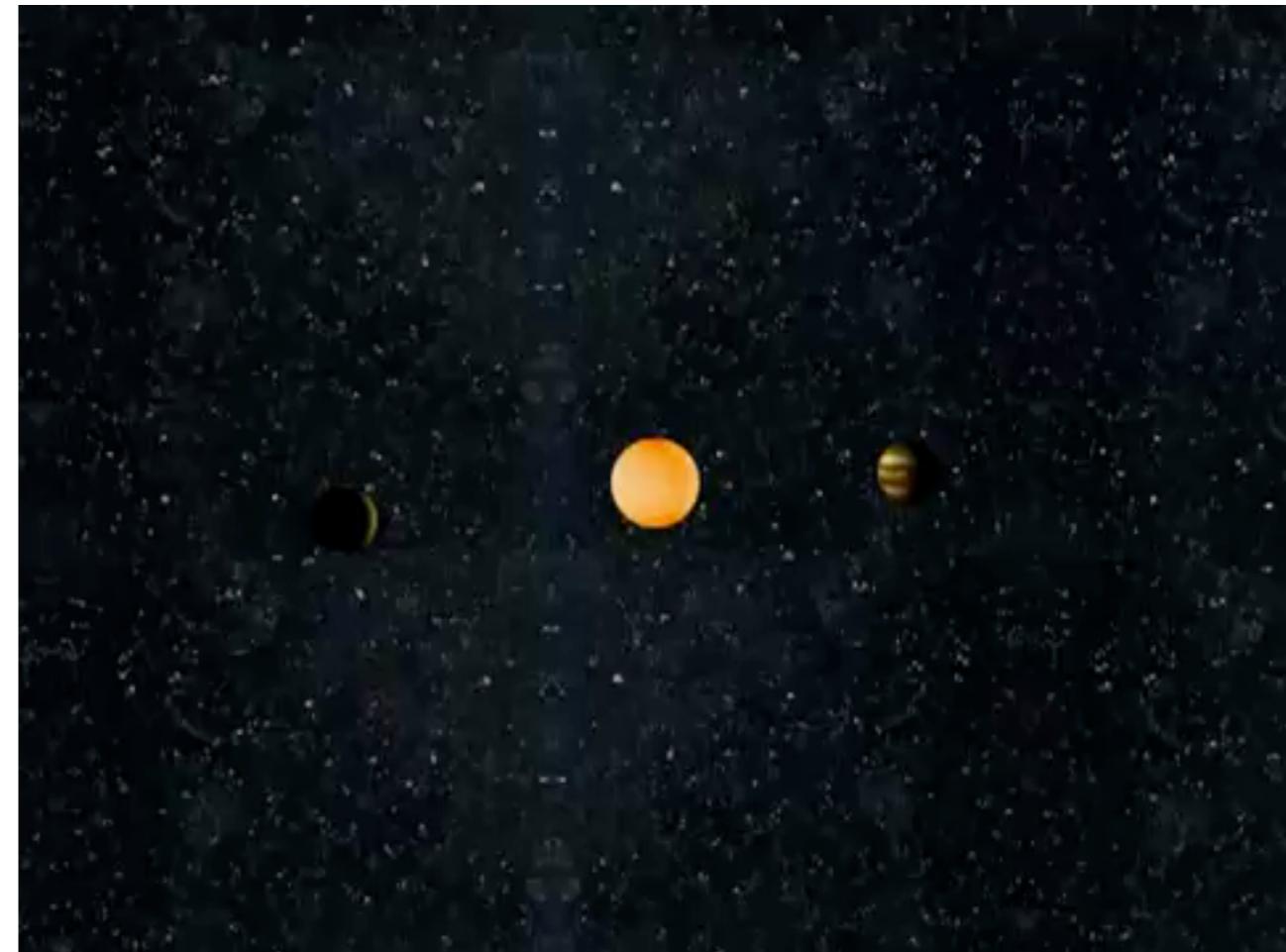


Los planetas

- Los internos más rápidos
- Los externos más lentos
- Descubrimiento de Neptuno. No hubo nueva teoría
- Precesión anómala del perihelio de la órbita de mercurio. ¡Nueva teoría!



$$F = ma \rightarrow v_c = \sqrt{rF}$$
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$



Ventanas astronómicas ...

- Cúmulo de galaxias “Abell 2029”, compuesto de miles de galaxias, envuelto en una nube gigante de gas caliente

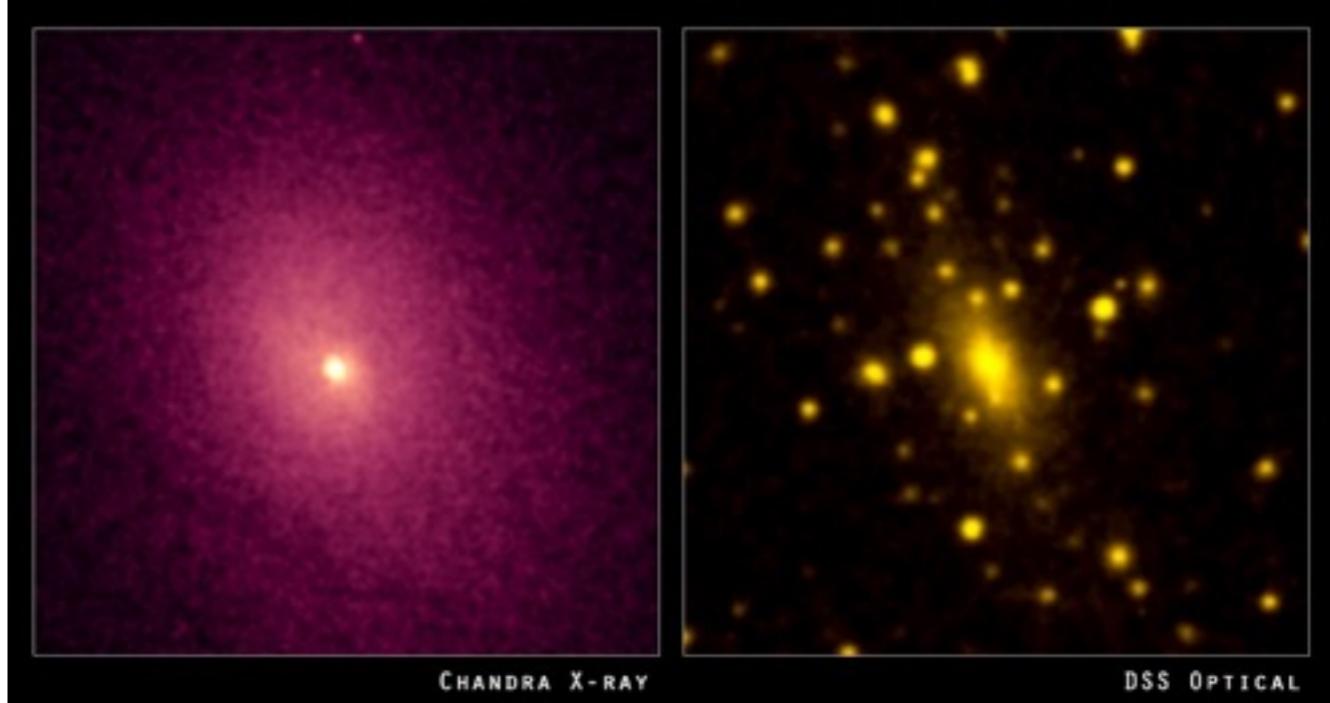


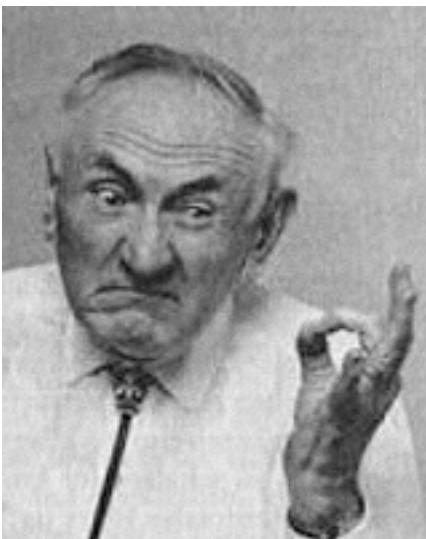
Imagen en rayos X

Imagen en el óptico

Evidencia de *materia oscura* de masa estimada de unos 100,000 millones de soles.

El gas está a una temperatura de decenas de millones de grados lo que es una indicación de la materia presente. Junto con la intensidad de la radiación de rayos X nos indican la presencia de la materia oscura.

La masa del gas puede llegar a ser cinco veces más que la masa de todas las estrellas.

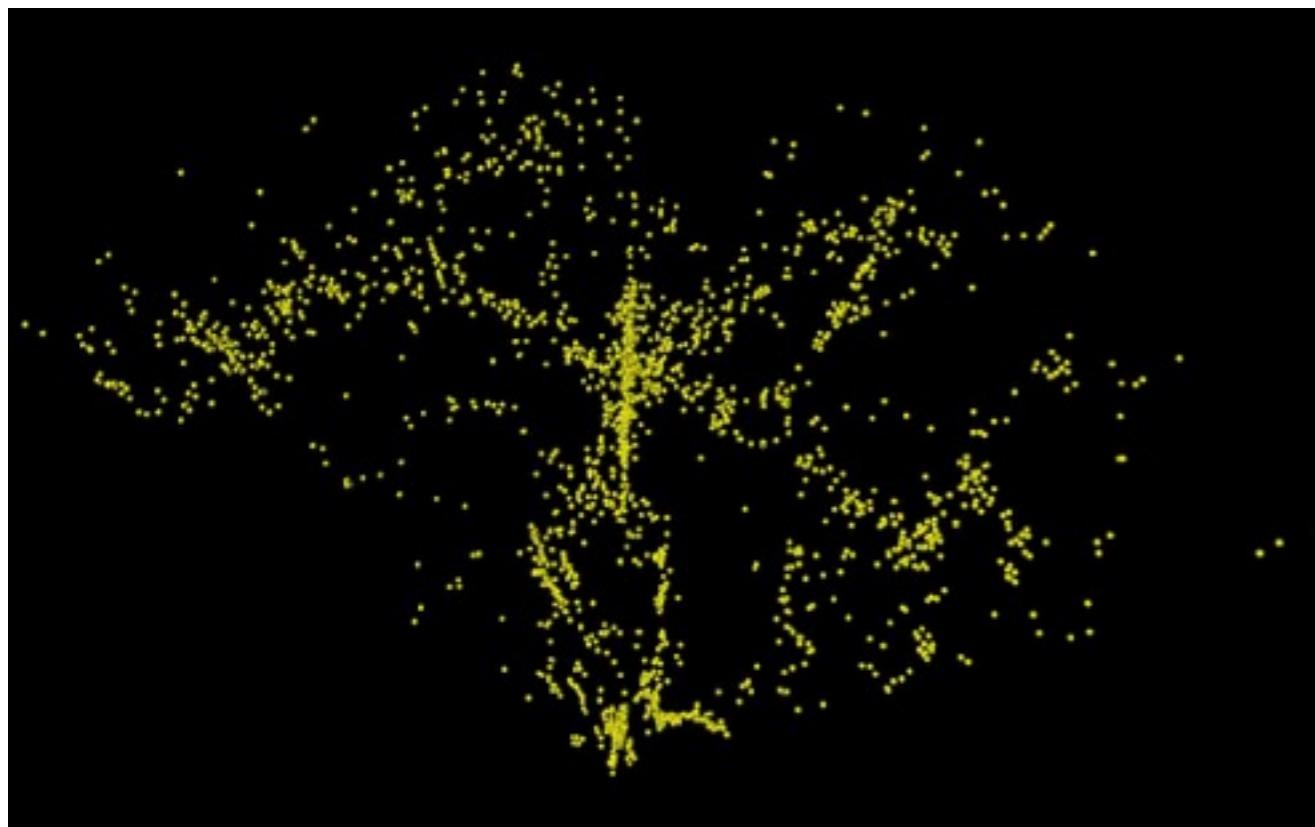


Fritz Zwicky en 1933 analizó las velocidades de las galaxias en los cúmulos de galaxias y encontró que necesitaba como 9 veces más masa para entender el movimiento de las galaxias... una materia invisible... la *materia oscura* ... (*dunkel materie*)



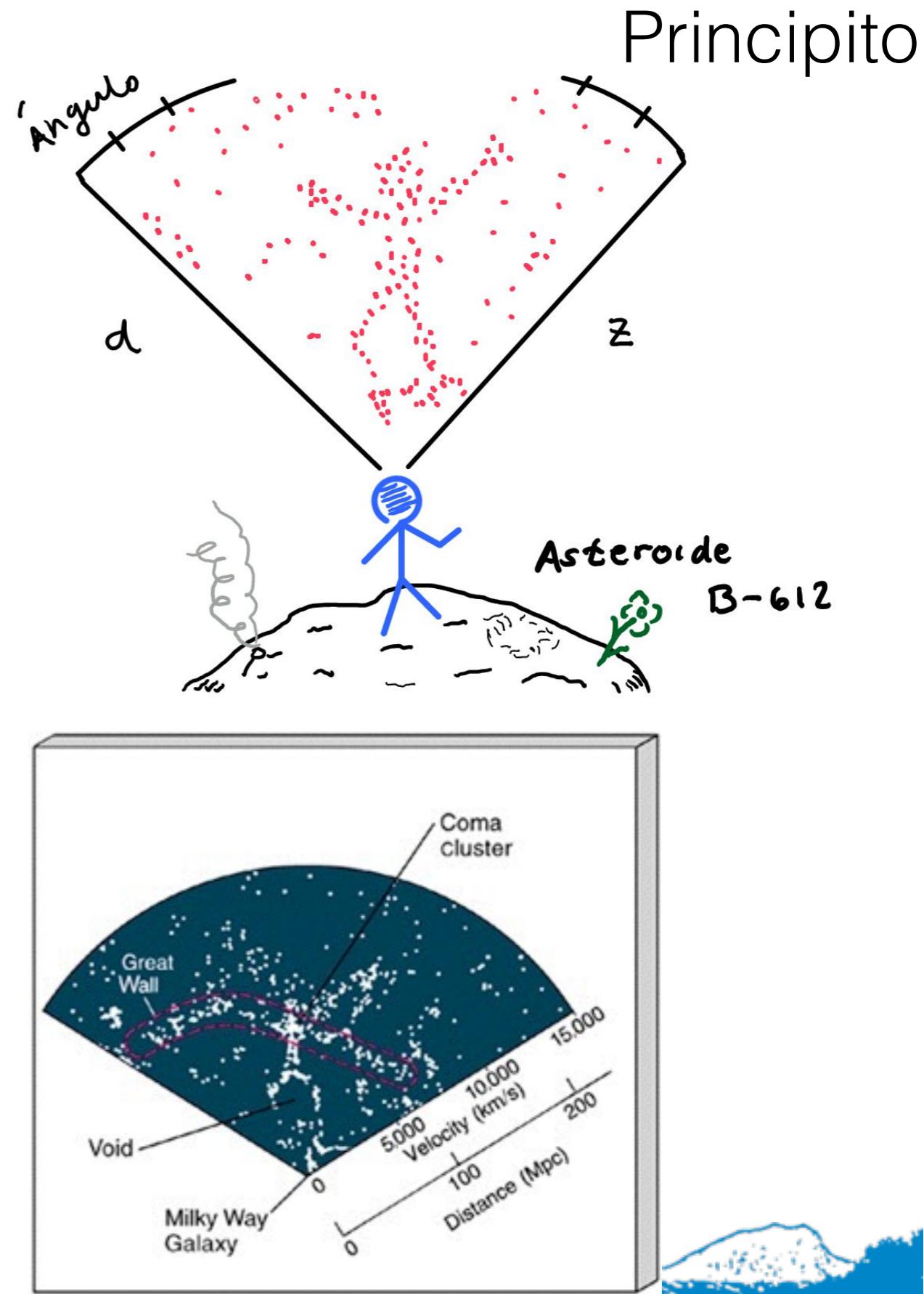
Observaciones: Estructura de gran escala

- El Principito estaba muy triste debido al comportamiento humano.
- Así que en vez de mirarnos en la Tierra volteó a mirar a las galaxias.
- Por desgracia encontró que también a las galaxias les gusta crucificarse.



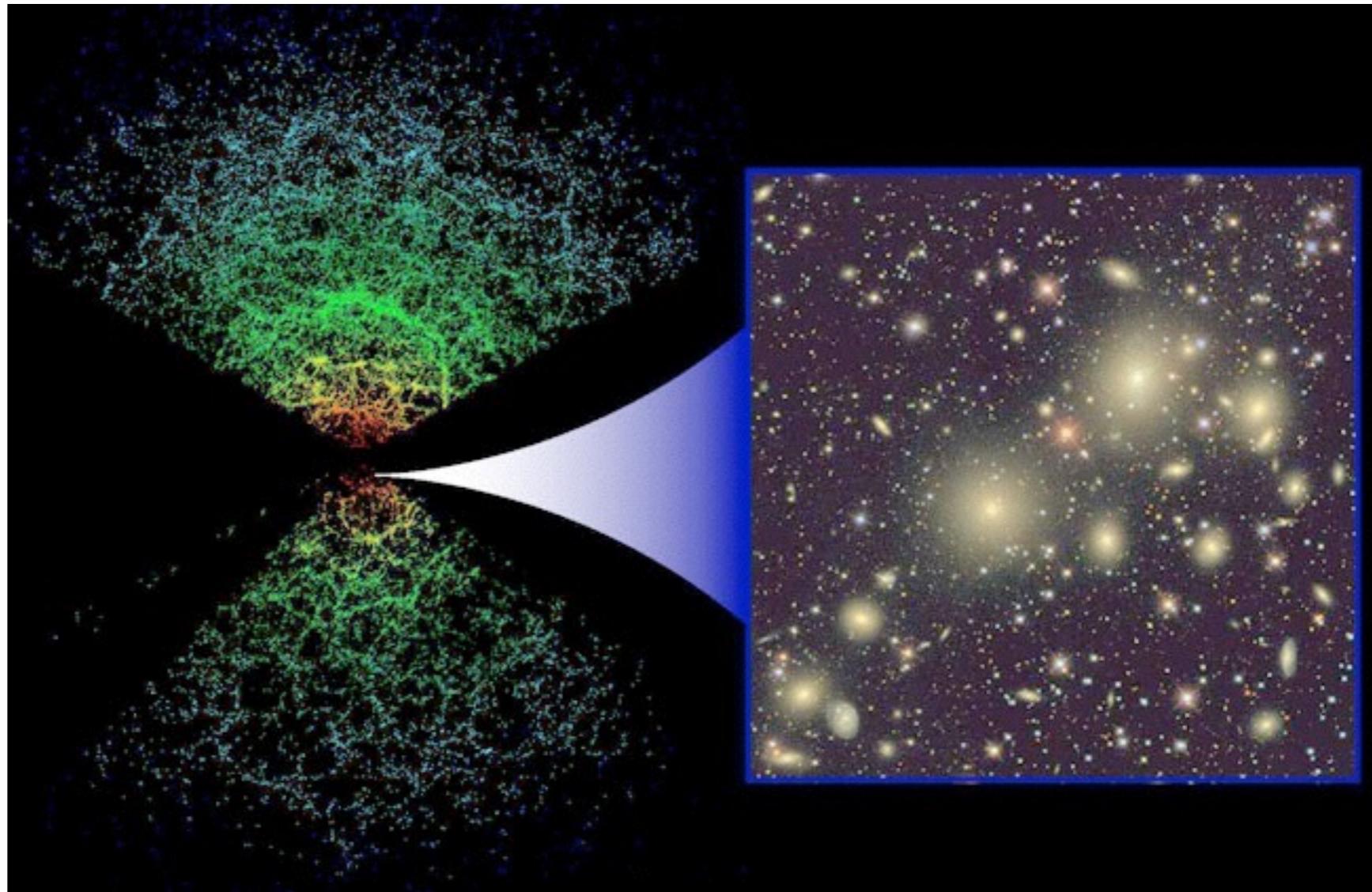
Catálogo CfA

11



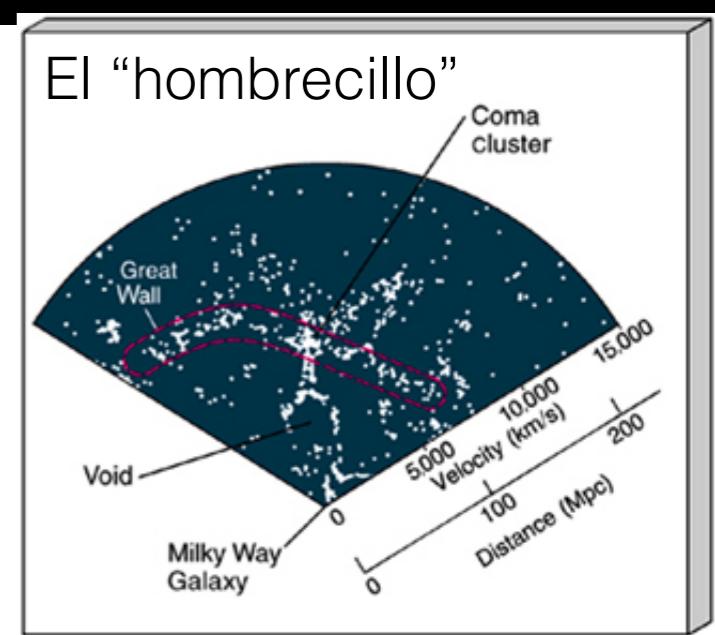
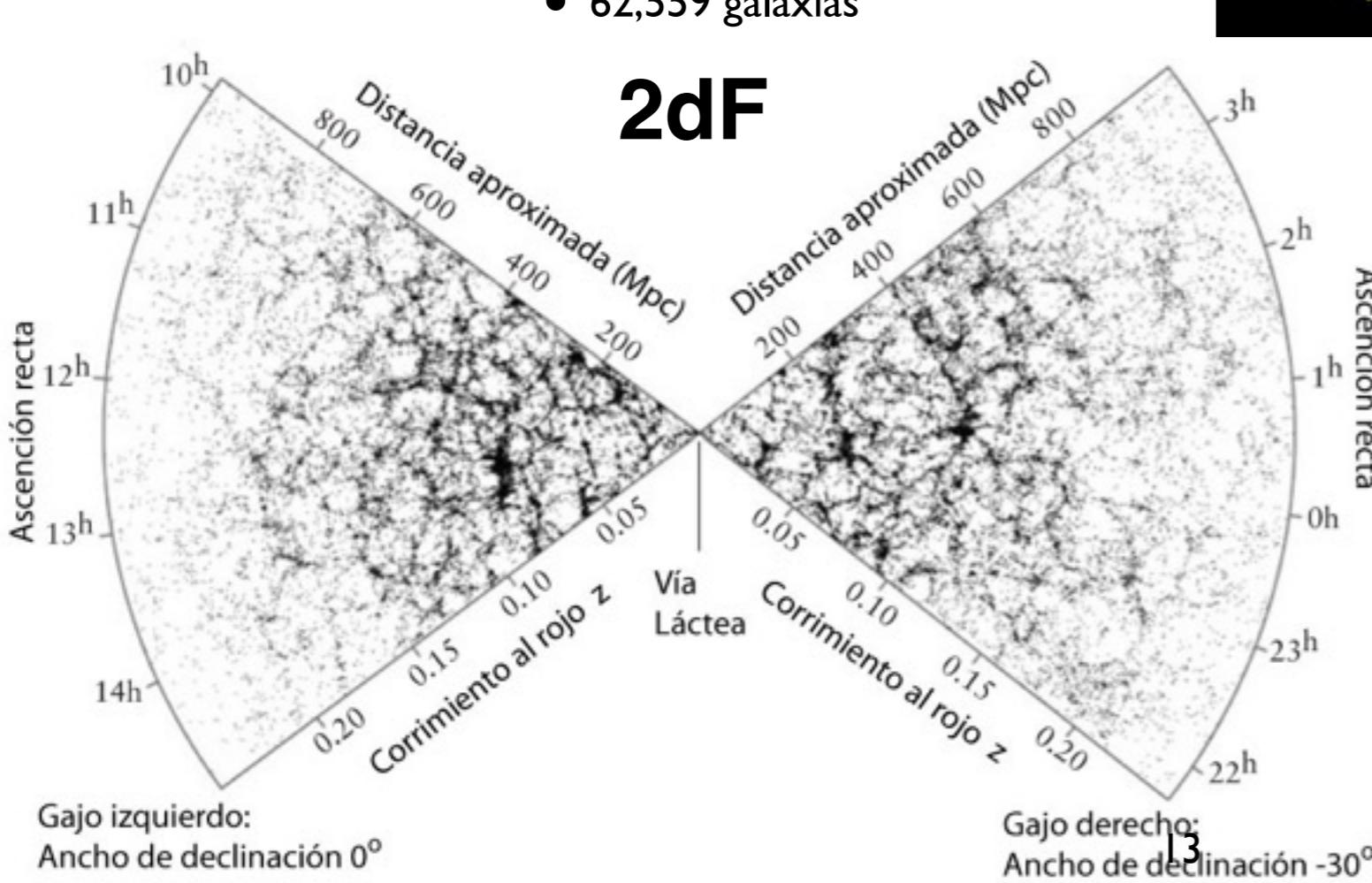
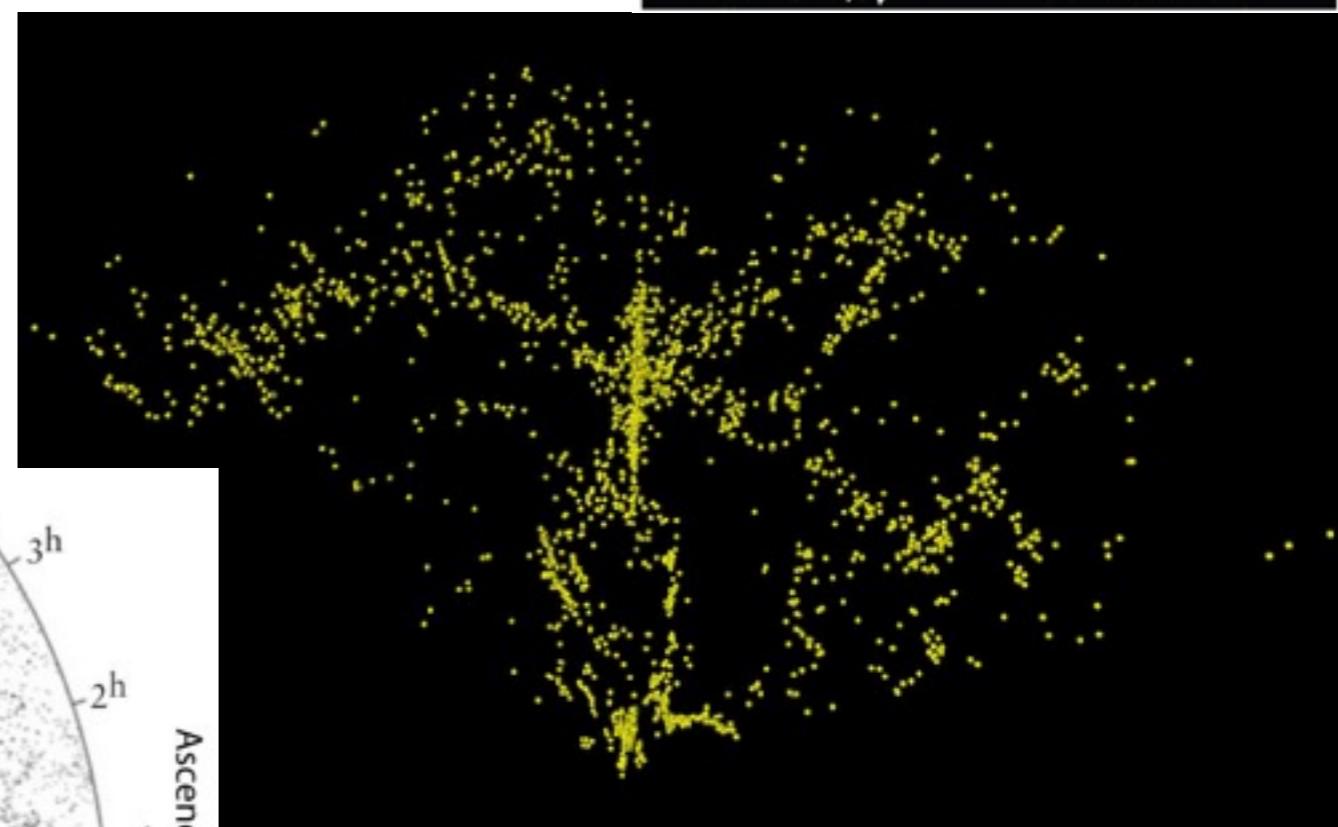
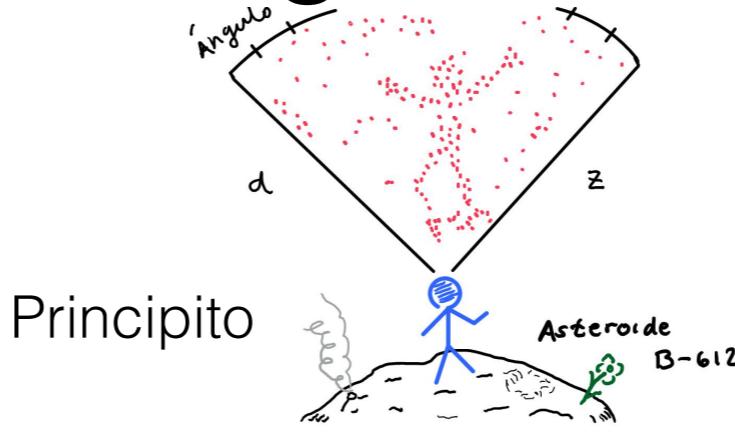
Un mejor catálogo...

- ¡El “hombrecillo” ... desapareció!



Observaciones: estructura de gran escala

- CfA
- 2dF (Redshift Survey Team/Anglo-Australian Observatory)
- 2MASS (Two Micron All Sky Survey)
- Durham/AAT redshift survey (included 200 galaxies at almost $z=1/2!$)
- SSDS (Sloan Sky Digital Survey)



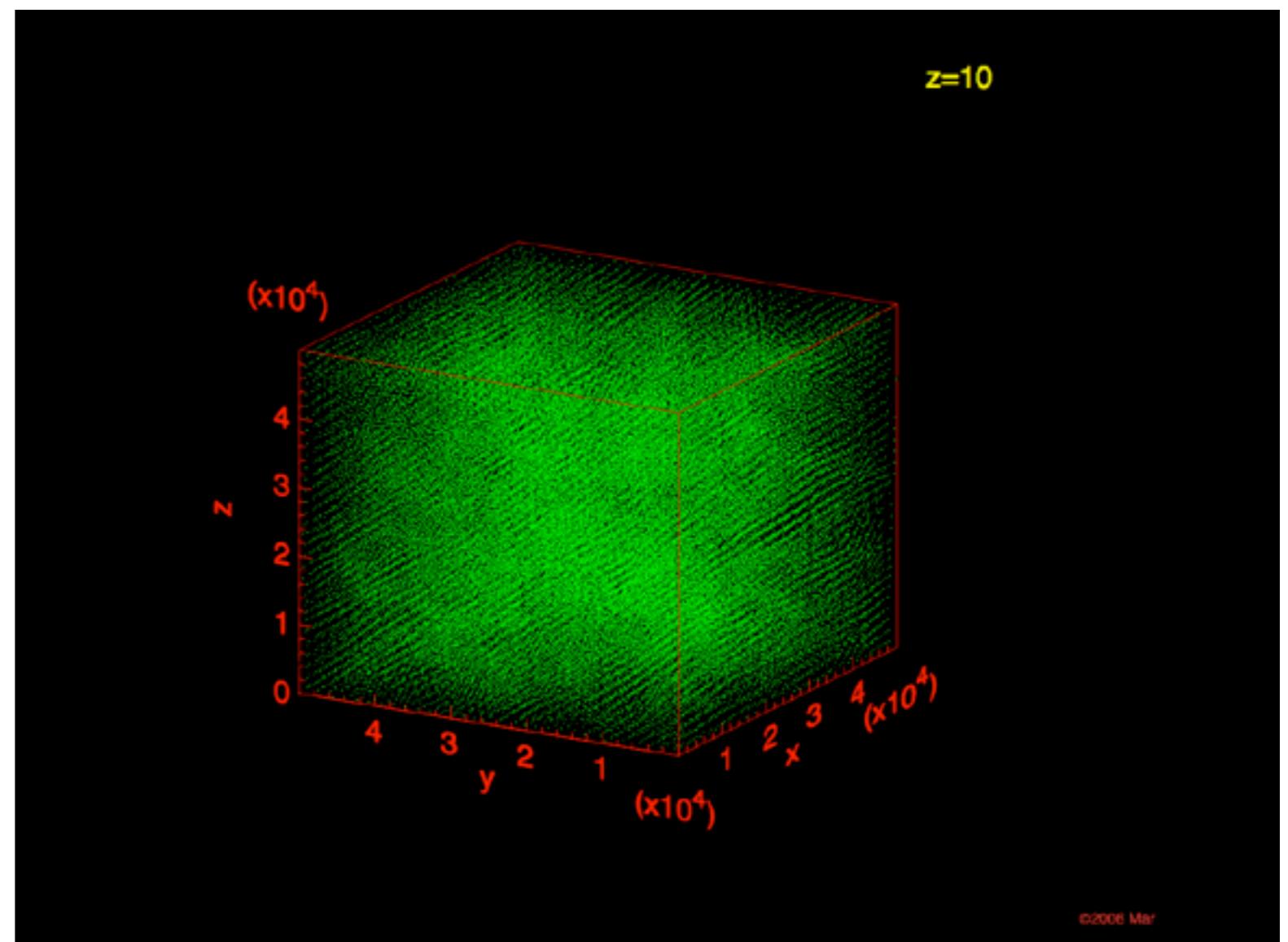
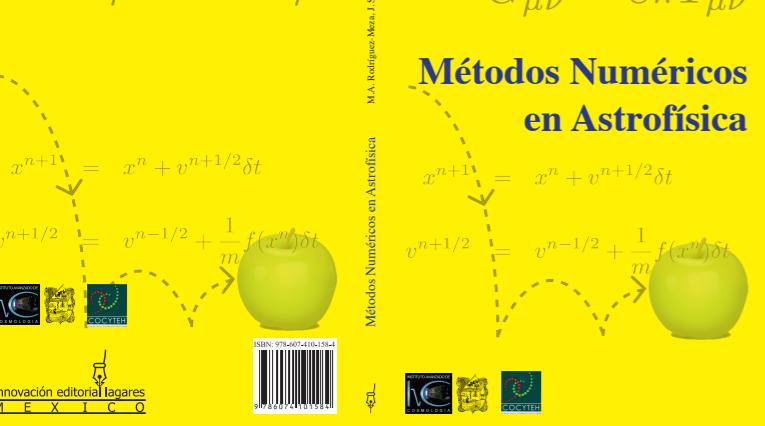
Una simulación numérica

Cómo se forma la estructura en el Universo

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \mathbf{r}_{ij}$$

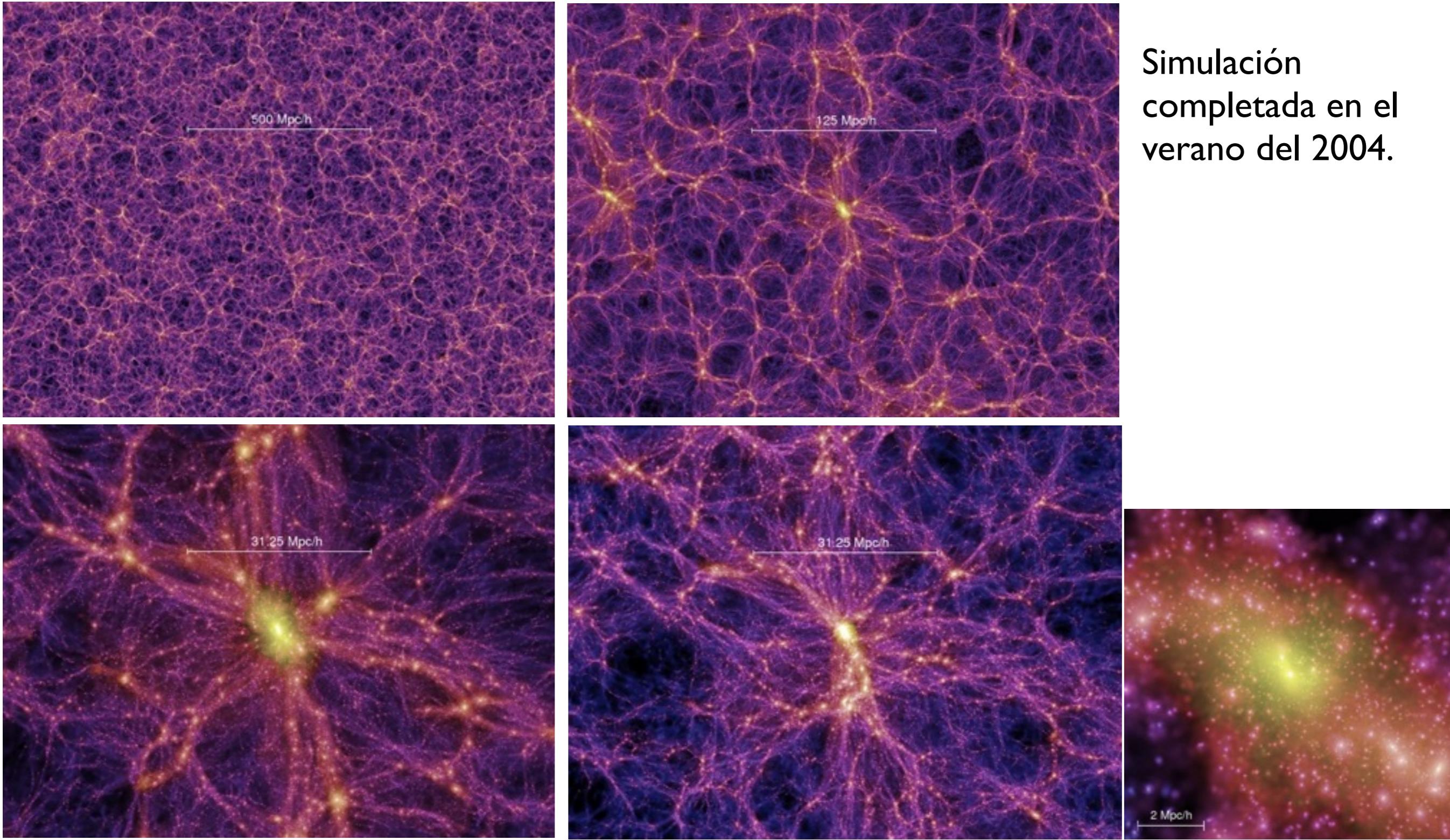
$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$



Simulación Millenium I

Nature 2005.

Simulación
completada en el
verano del 2004.

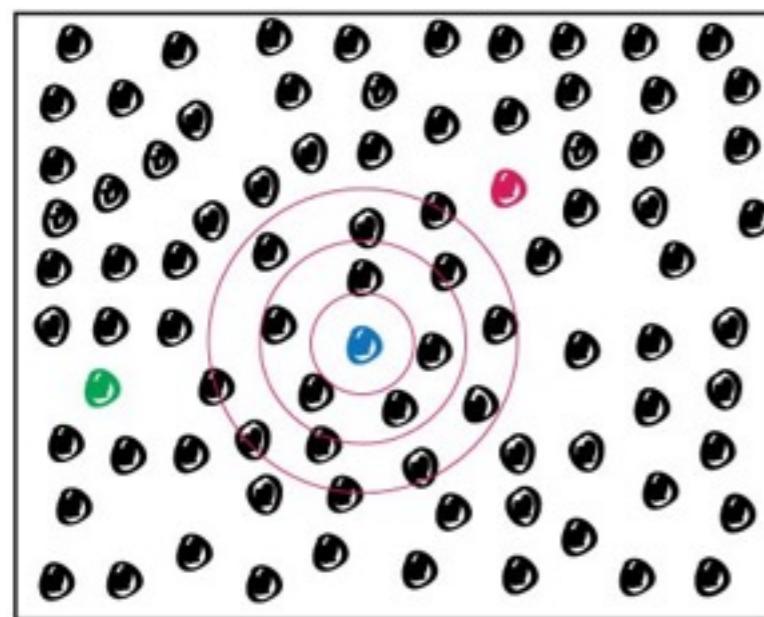
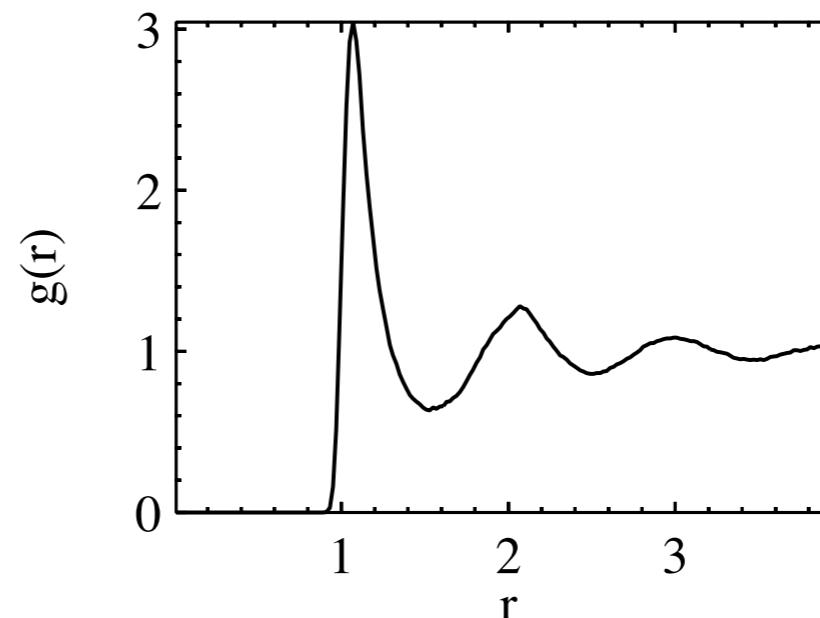
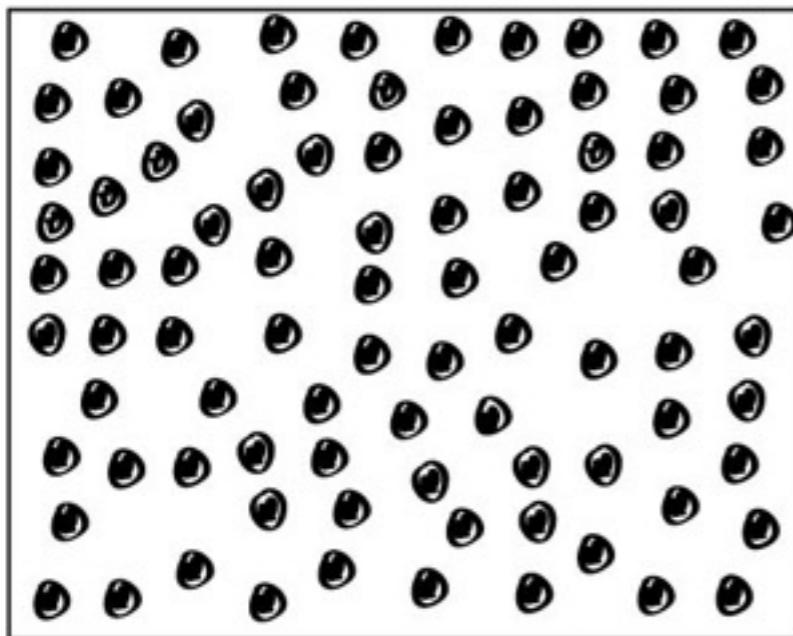


- 10,077,696,000 particles of masses $8.6 \times 10^8 \text{ Msun}/\text{h}$. More than a month of CPU time of a supercomputer. 25 Tbytes data. Evolution history of 20 millions galaxies. Cubic region 500 Mpc/h on a side. Spatial resolution of 5 kpc/h. Initial $z=127$. Cosmology: 0.25 DM and baryons; 0.75 Lambda; $\sigma_8=0.9$; $h=0.73$, $n=1$. Gadget2 (modified version) with TreePM force calculation method.

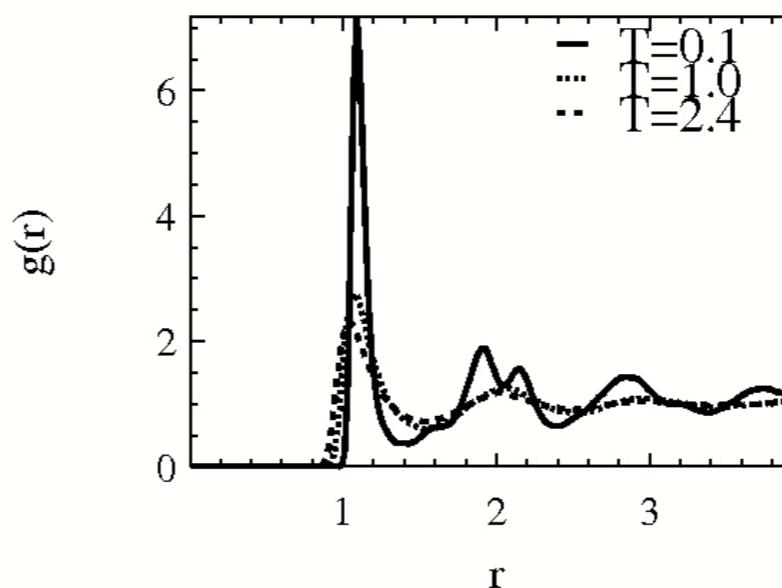


Simulación Millenium I

¿Cómo analizamos la estructura?



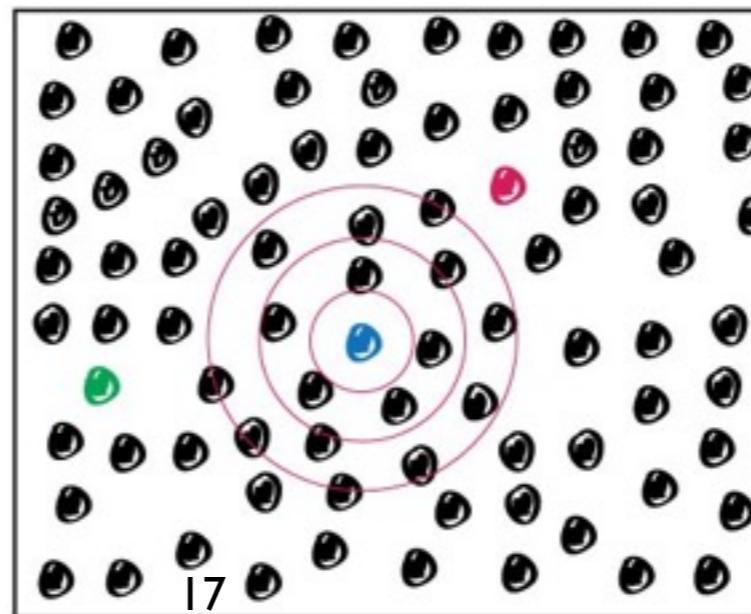
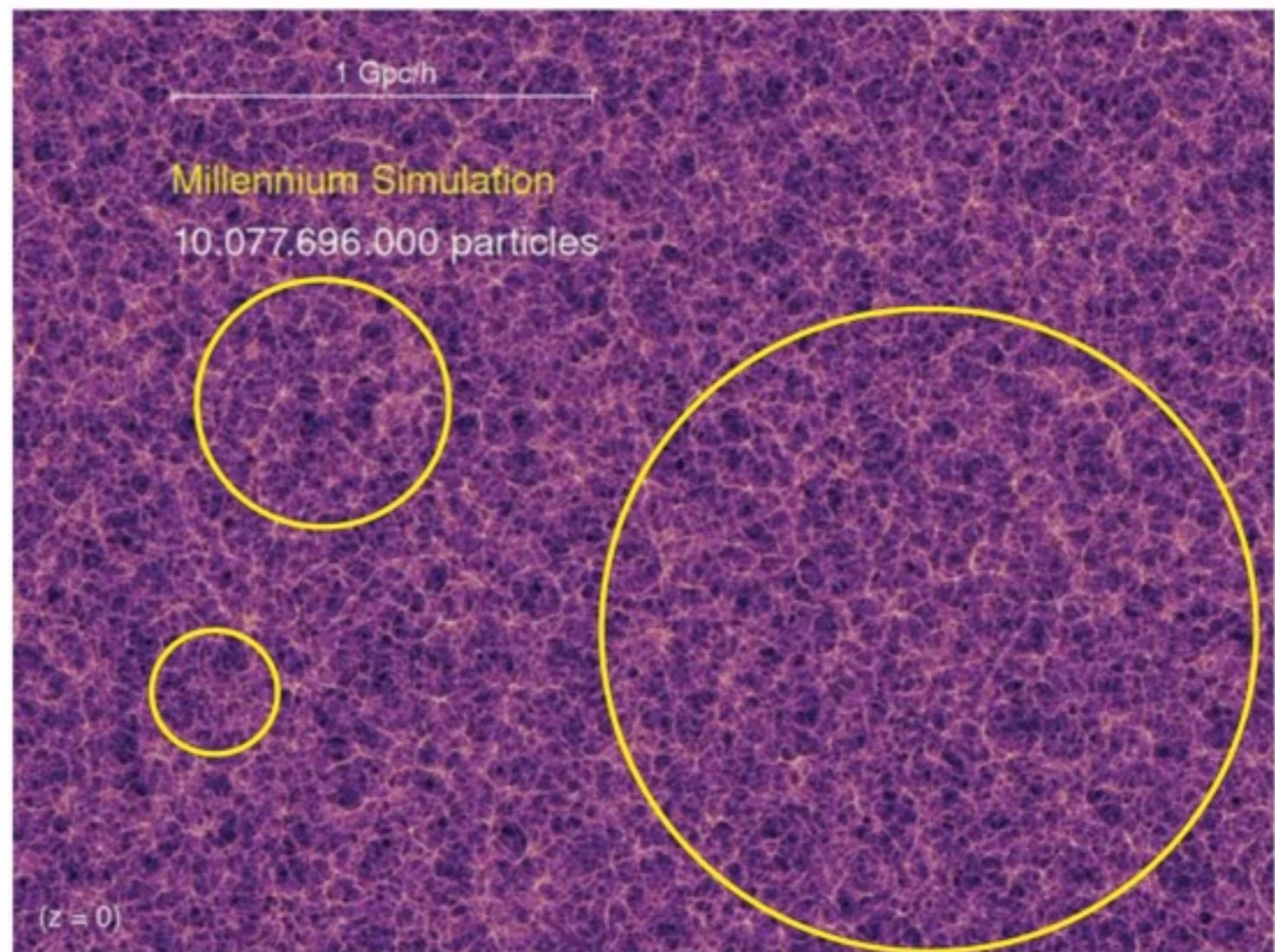
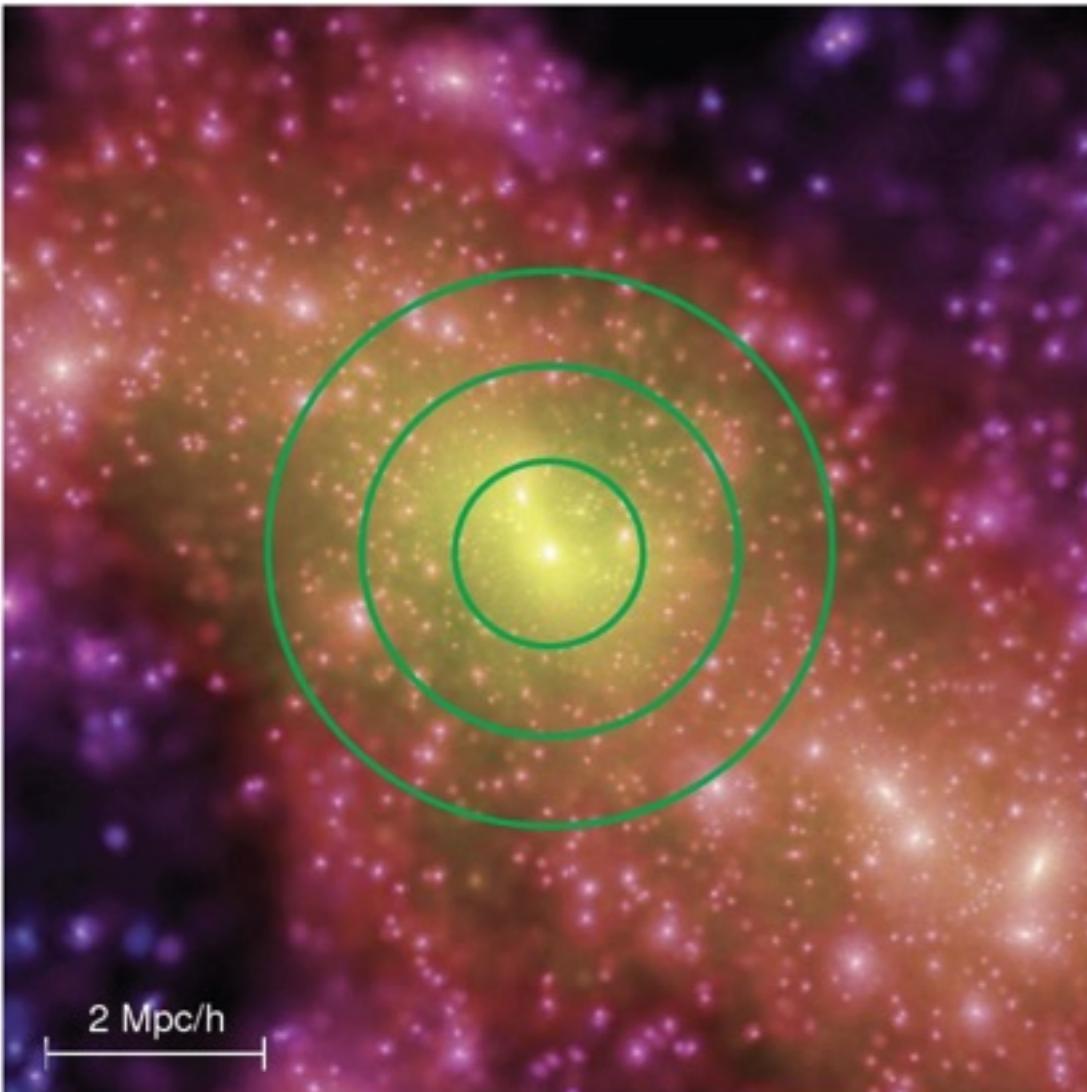
Funcion Radial de Distribucion



Simulación Millenium I

- Principio cosmológico
- Perfil de NFW

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}$$

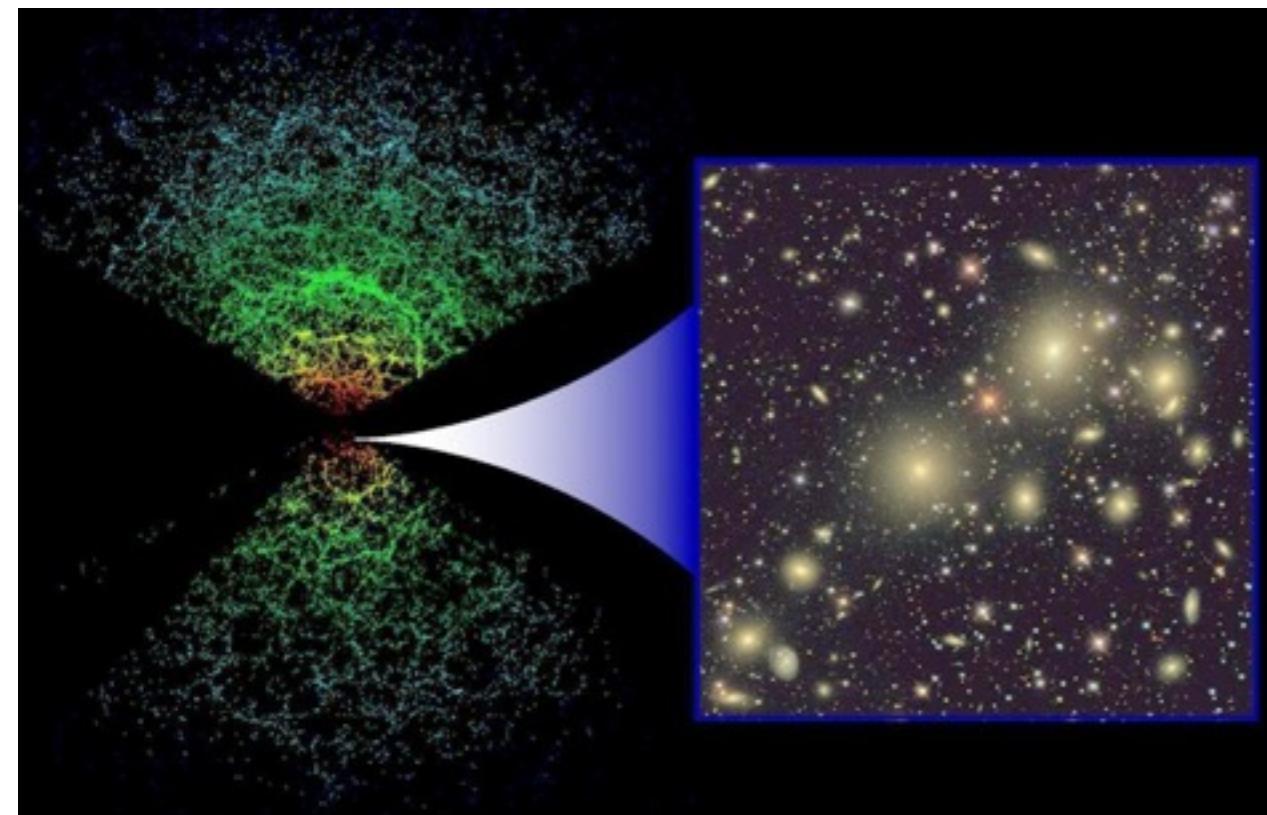
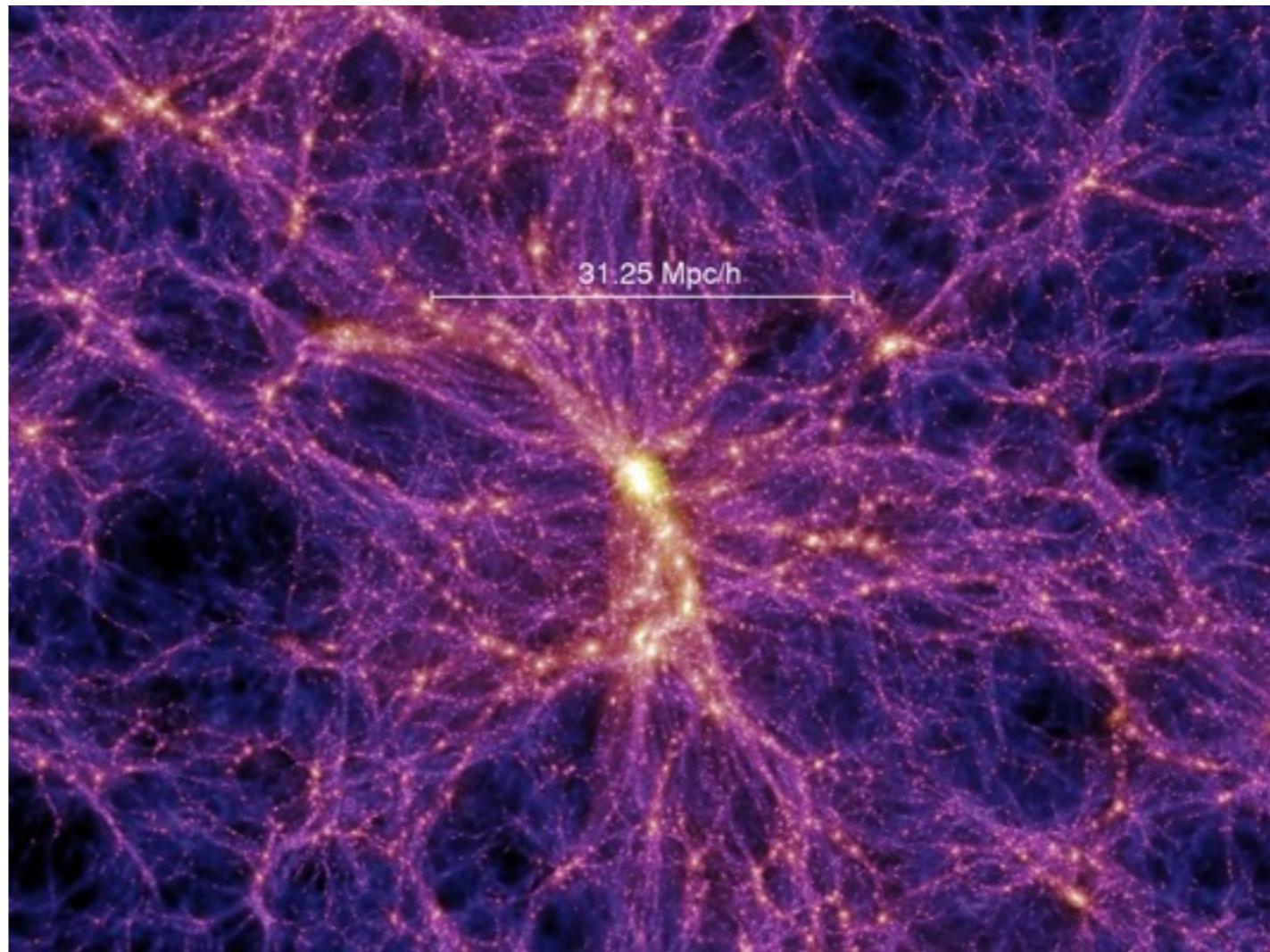


Función de correlación de dos puntos
↓
Espectro de potencias



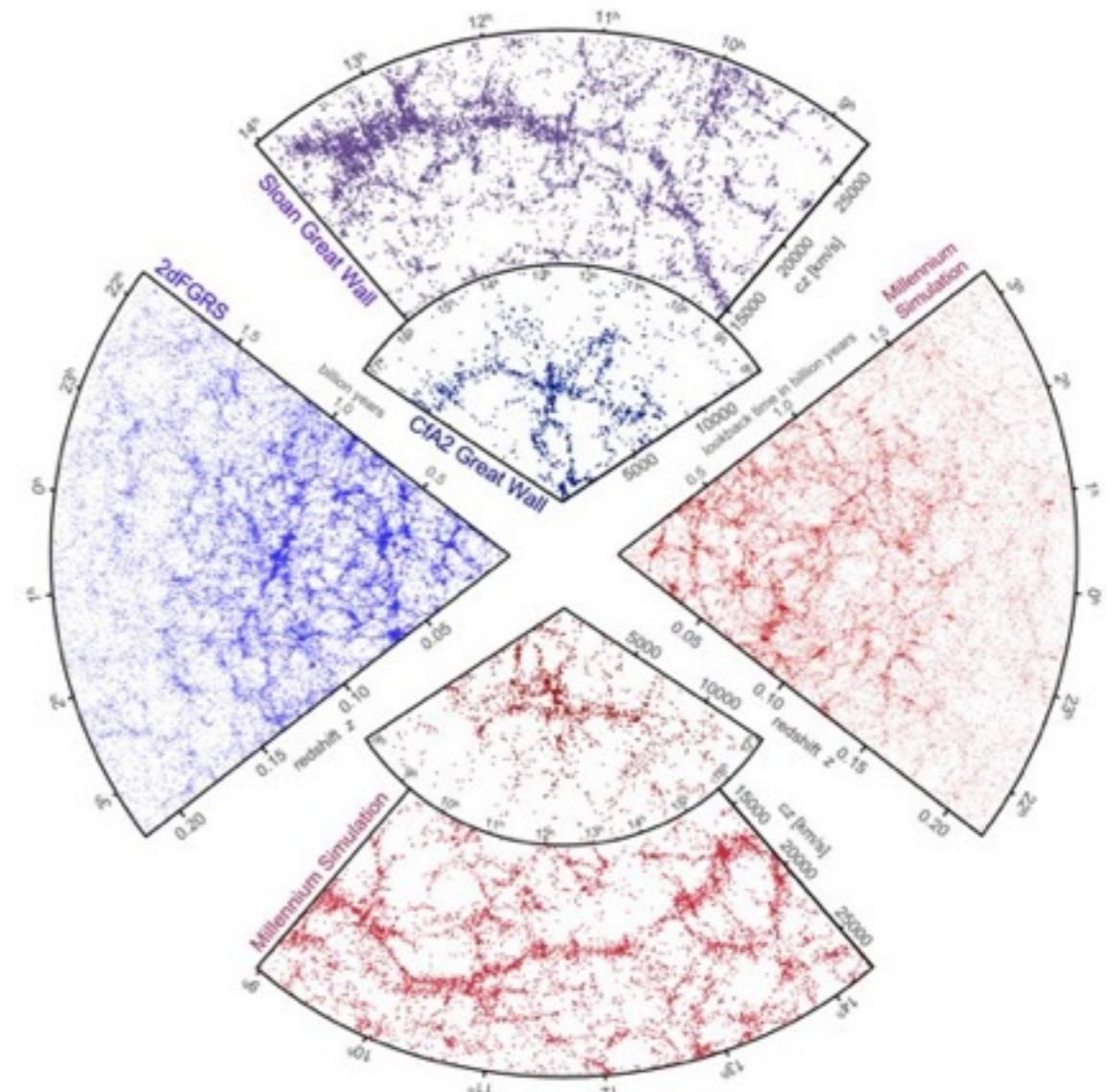
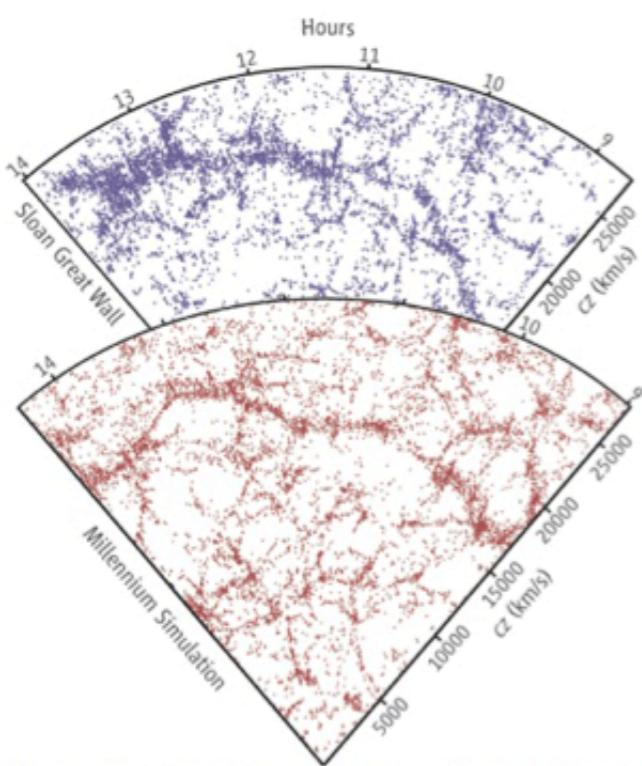
La simulación del “milenio” ...

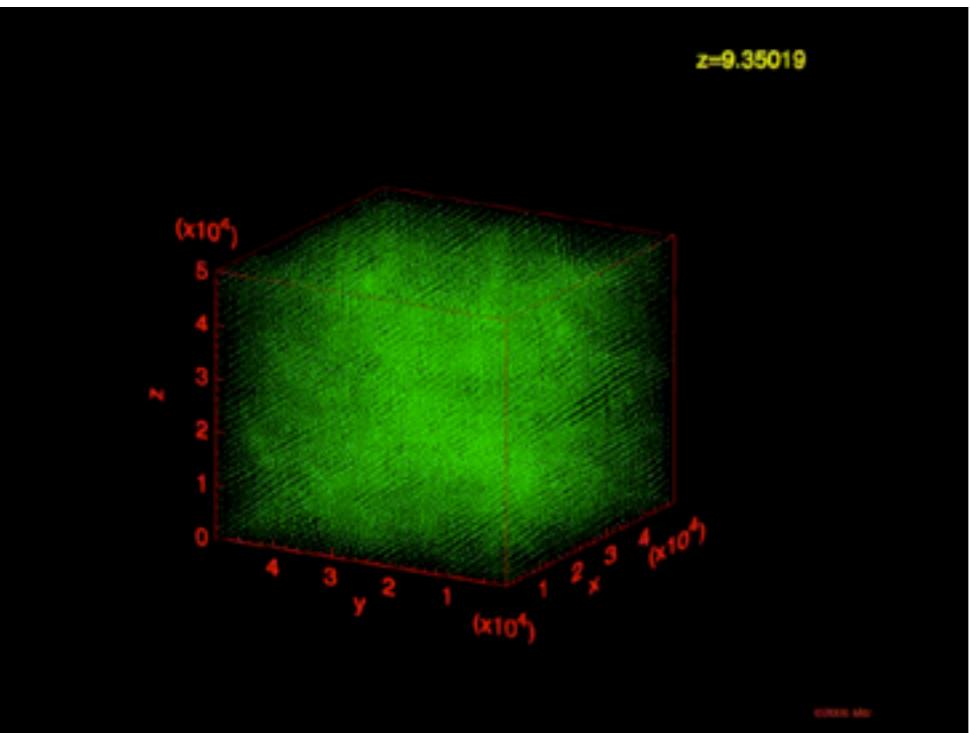
- Hagamos un catálogo de galaxias ...



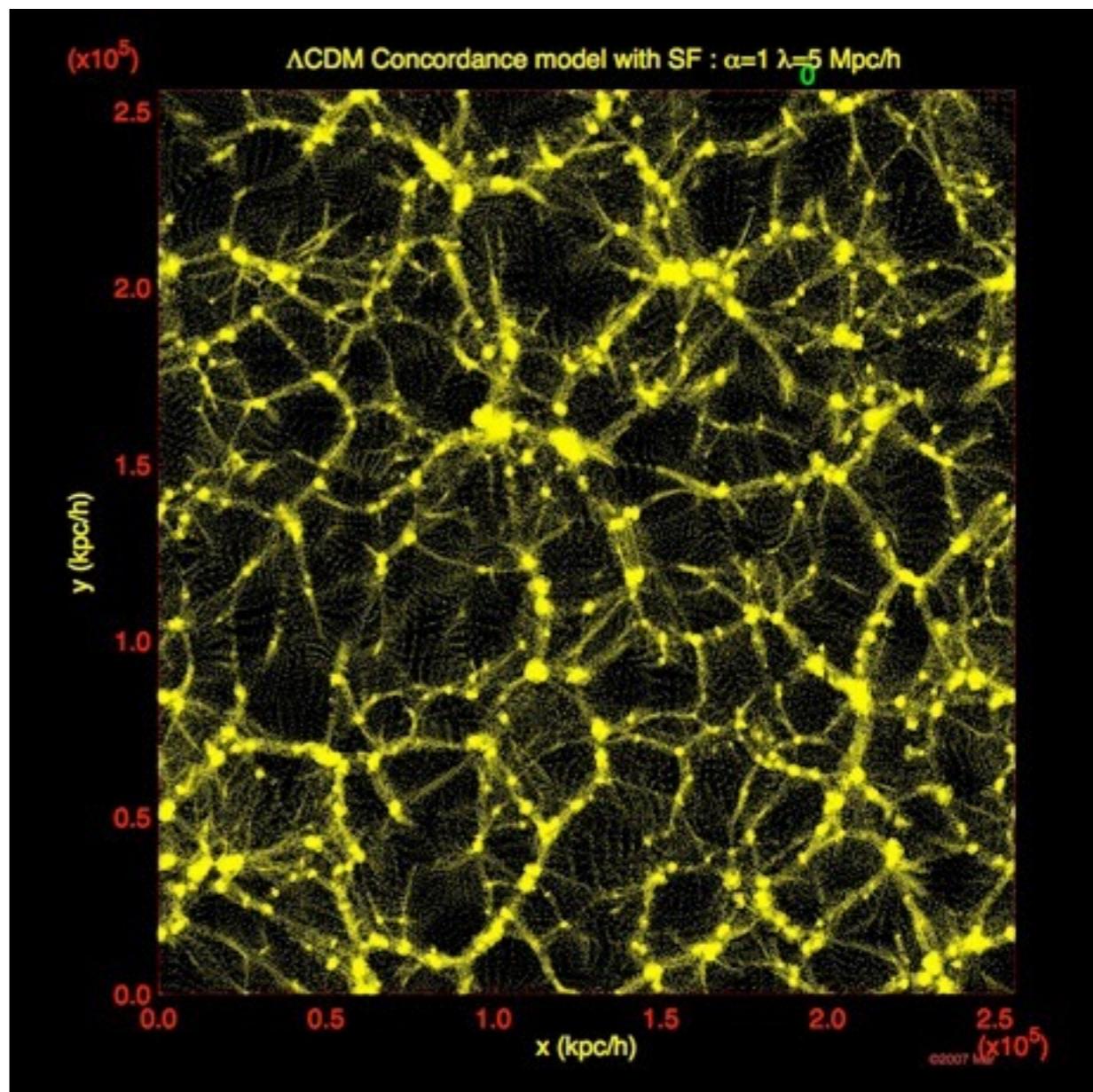
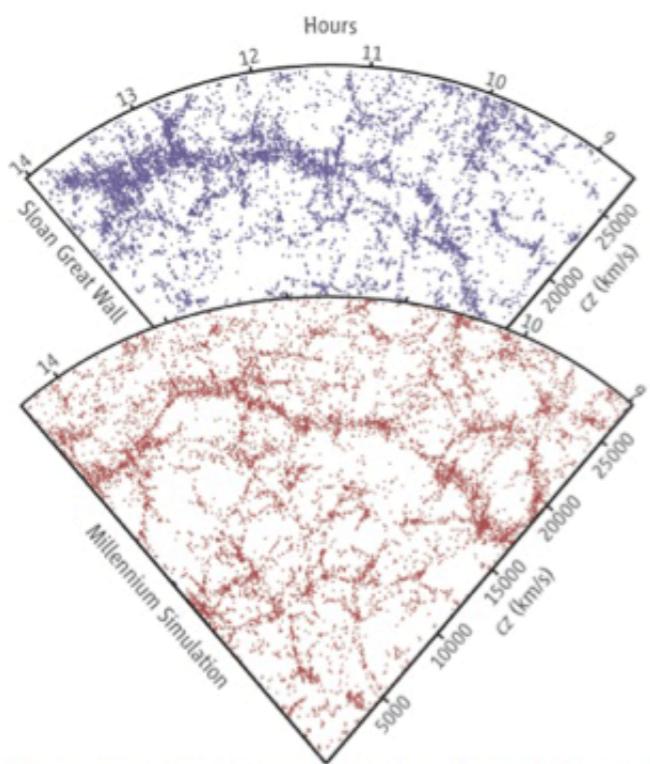
Tenemos ...

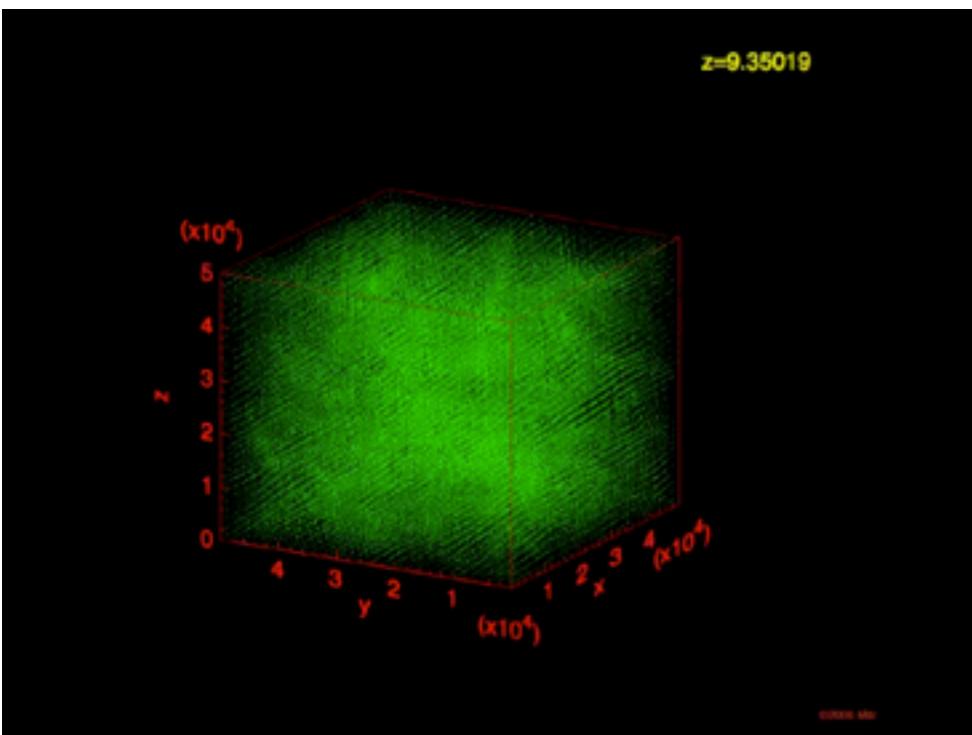
- Hay mucha semejanza estadística ...



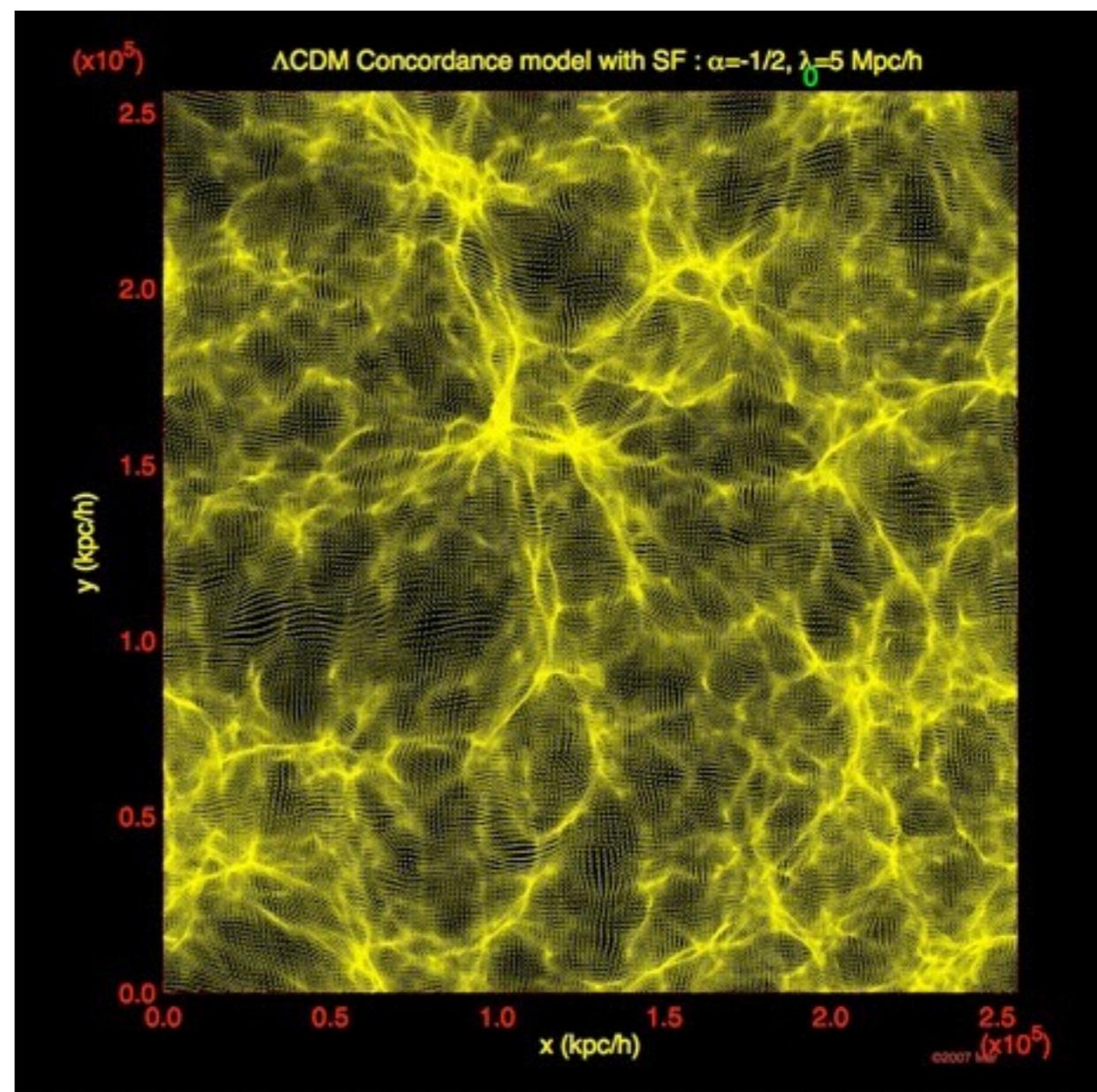
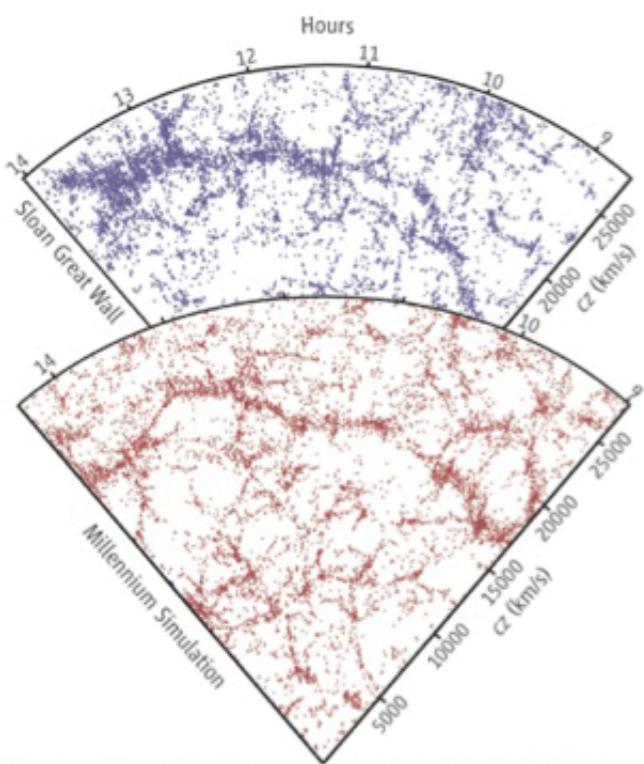


- Mucha ...

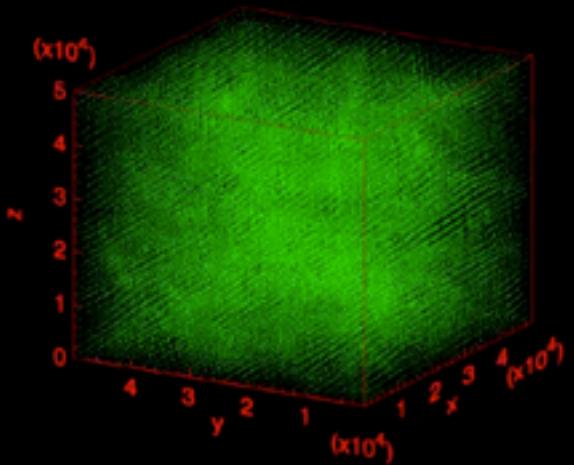




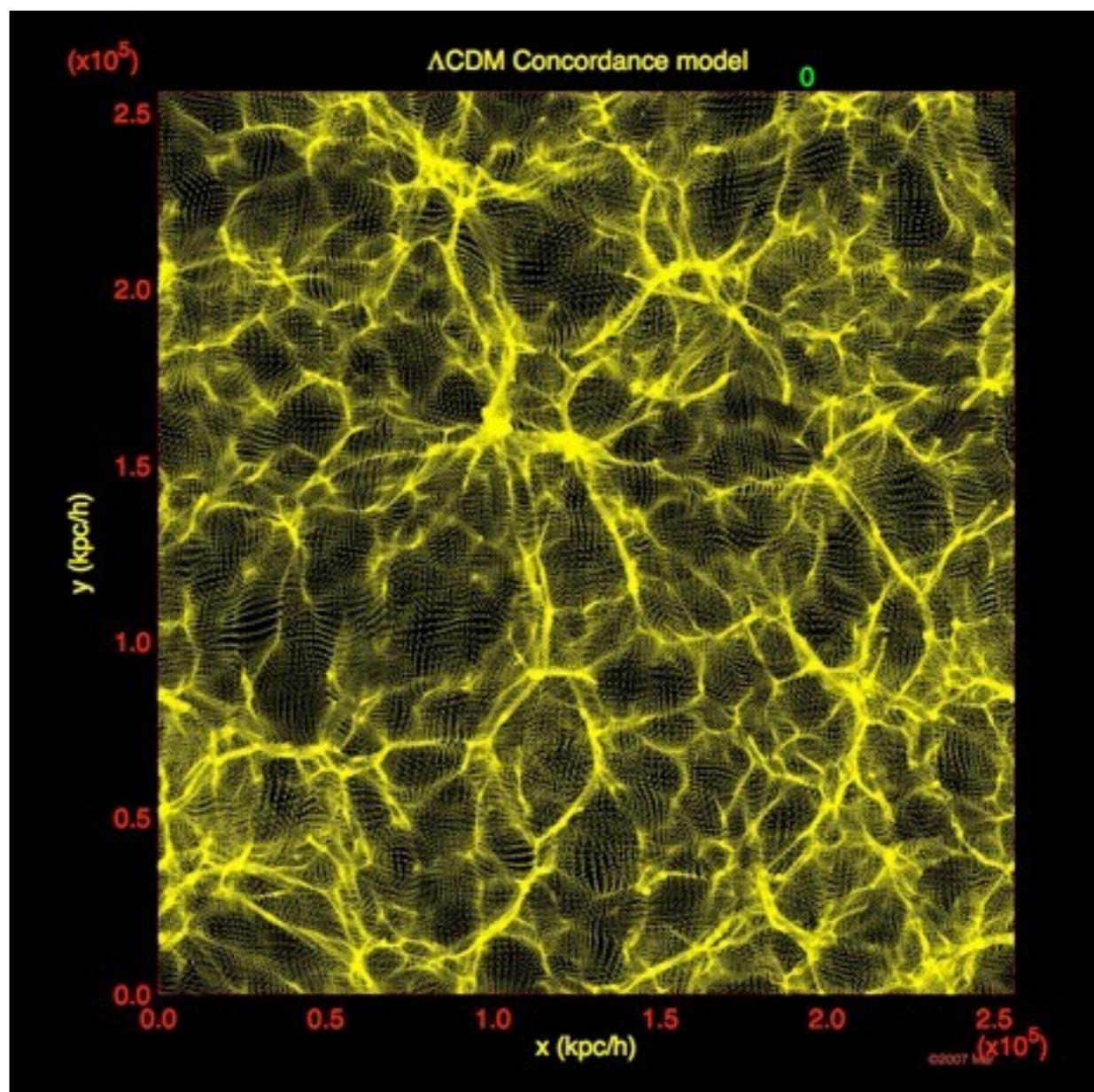
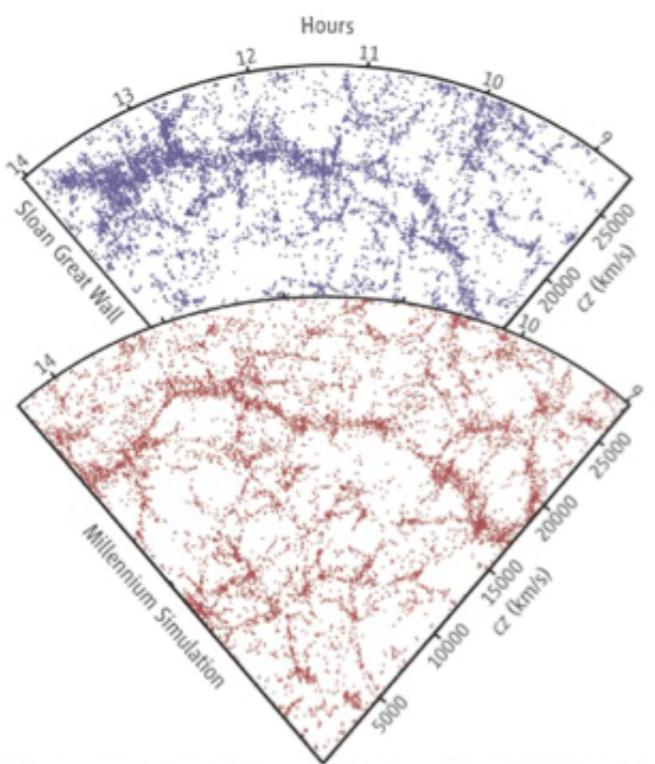
● Menos ...



$z=9.35019$

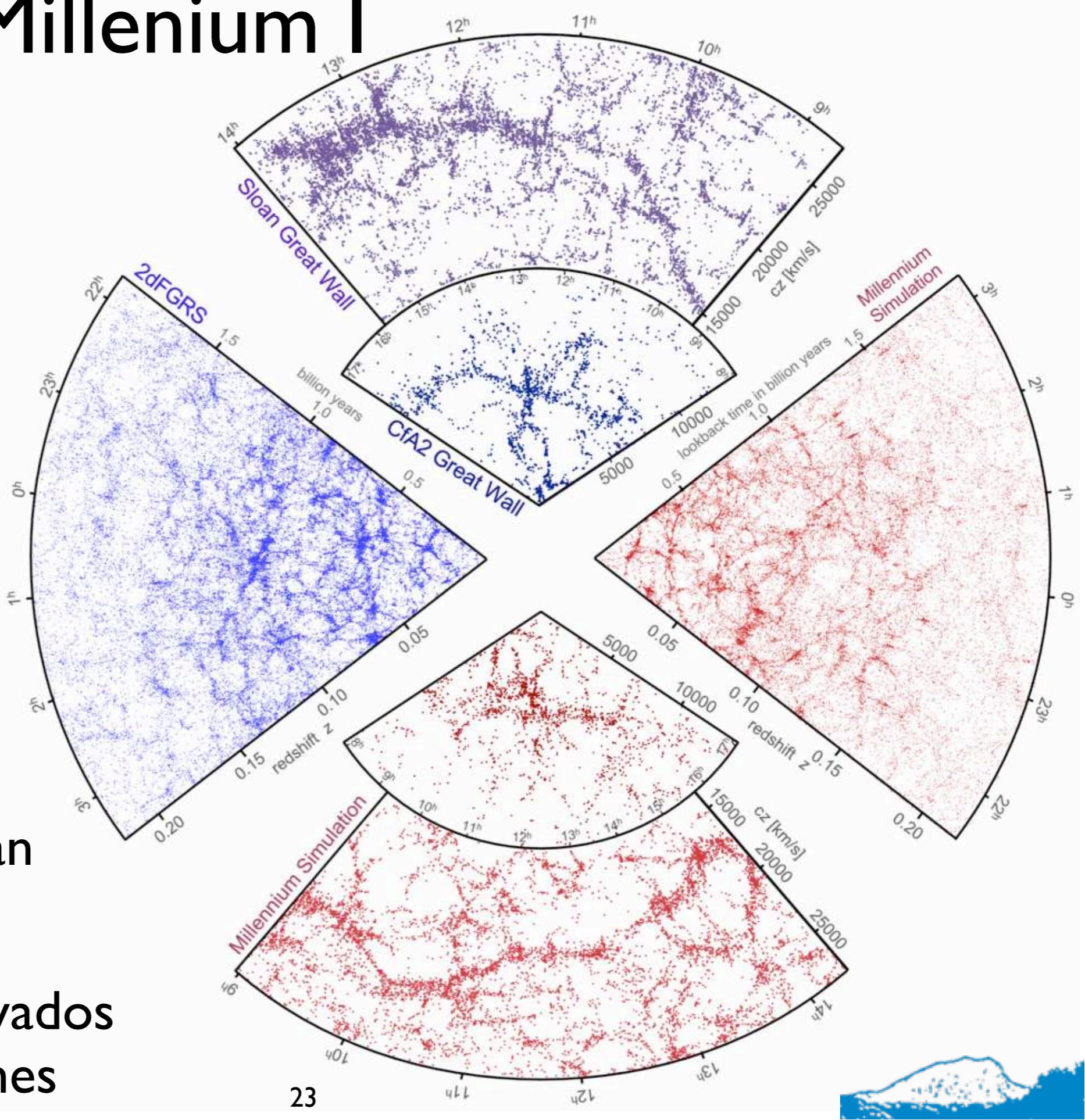


● Lo justo ...



Simulación Millenium I

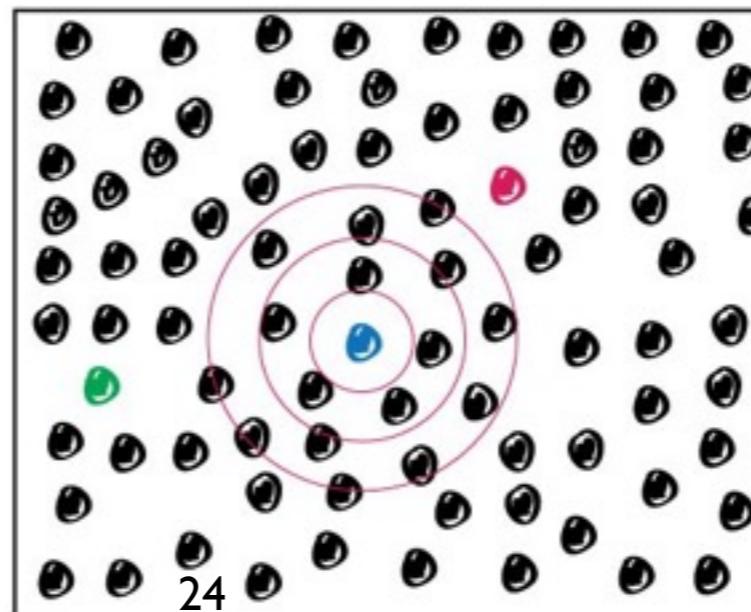
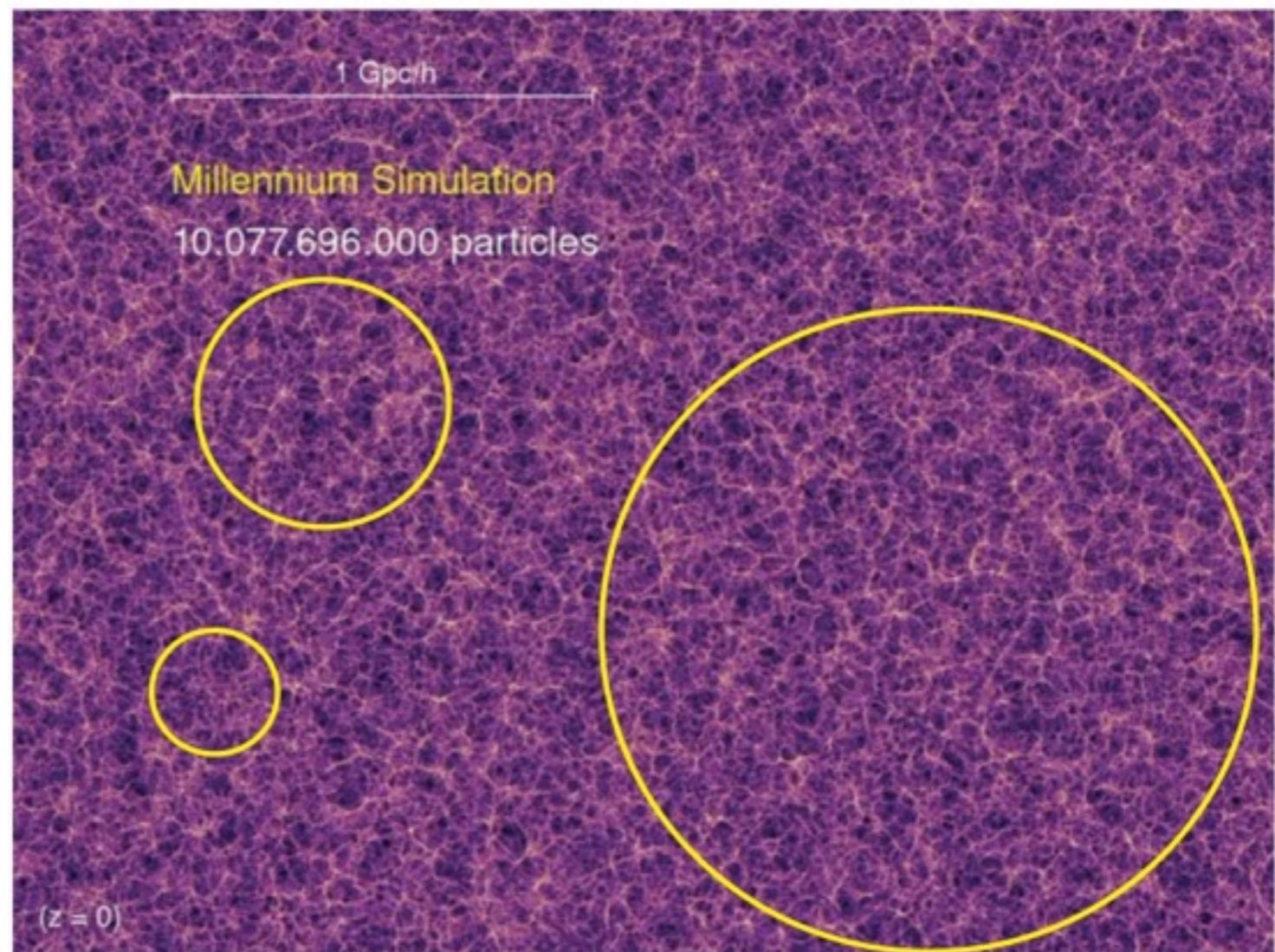
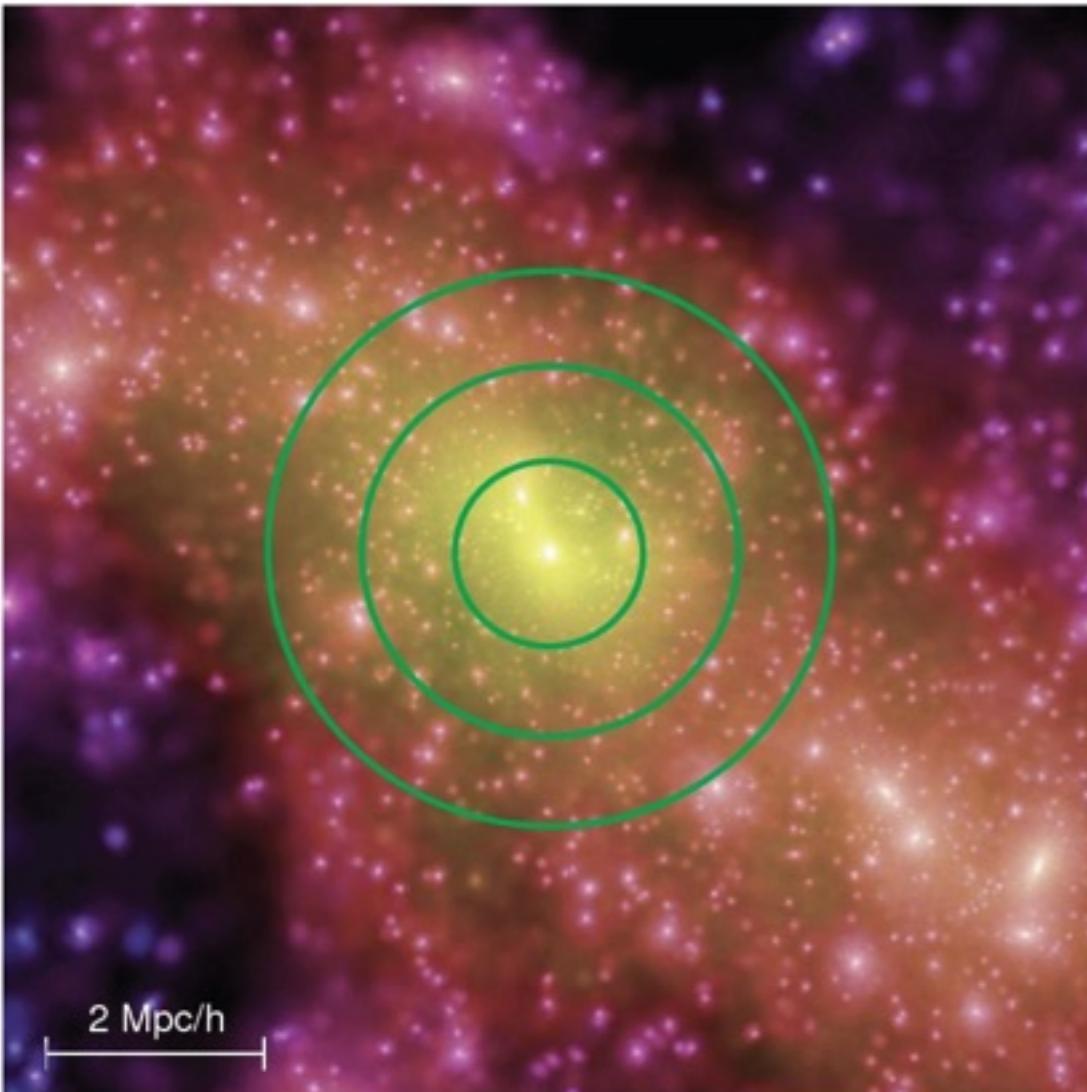
- Estructura de gran escala
- Catálogos observados versus simulaciones



Simulación Millenium I

- Principio cosmológico
- Perfil de NFW

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}$$

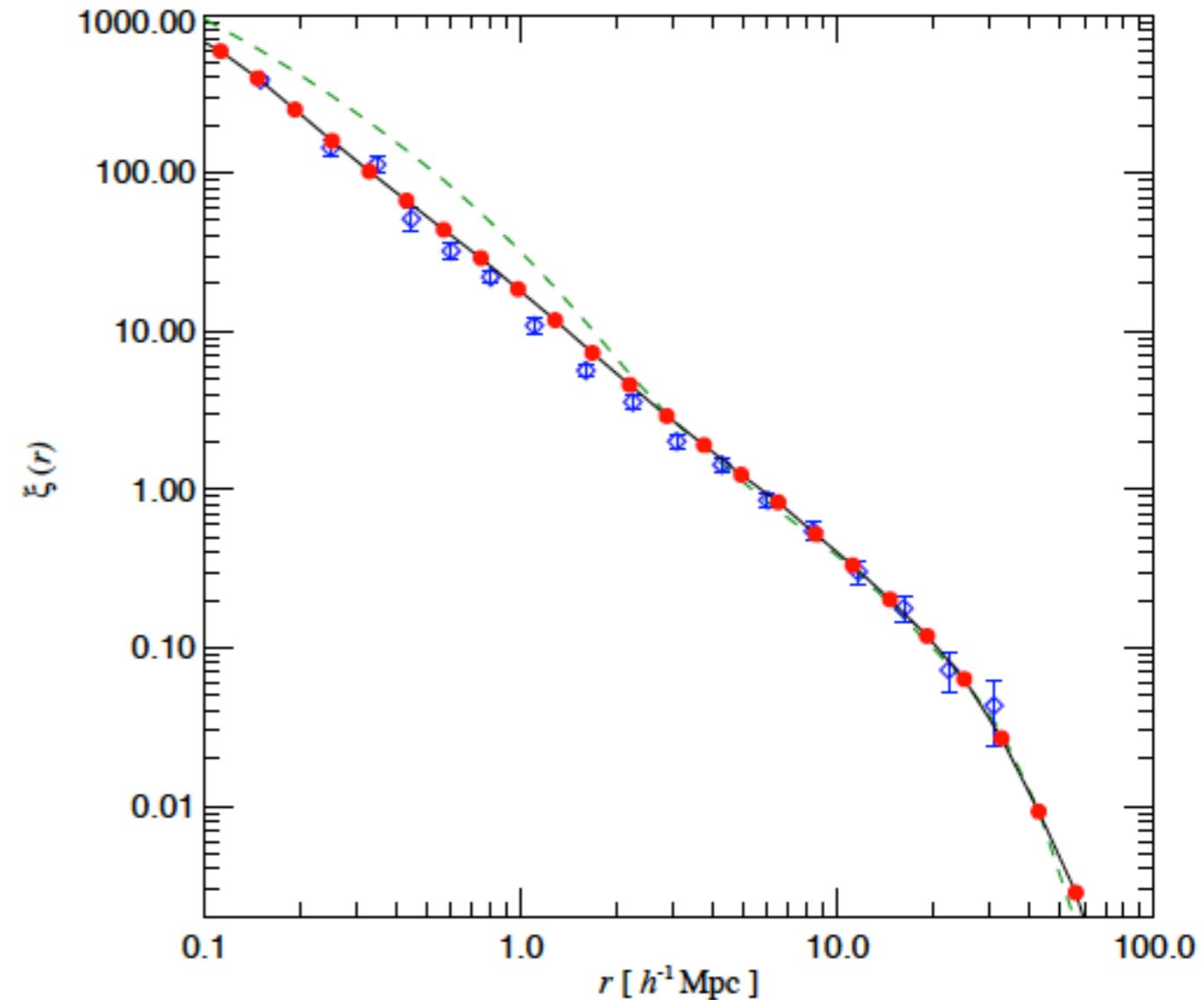


Función de correlación de dos puntos
↓
Espectro de potencias



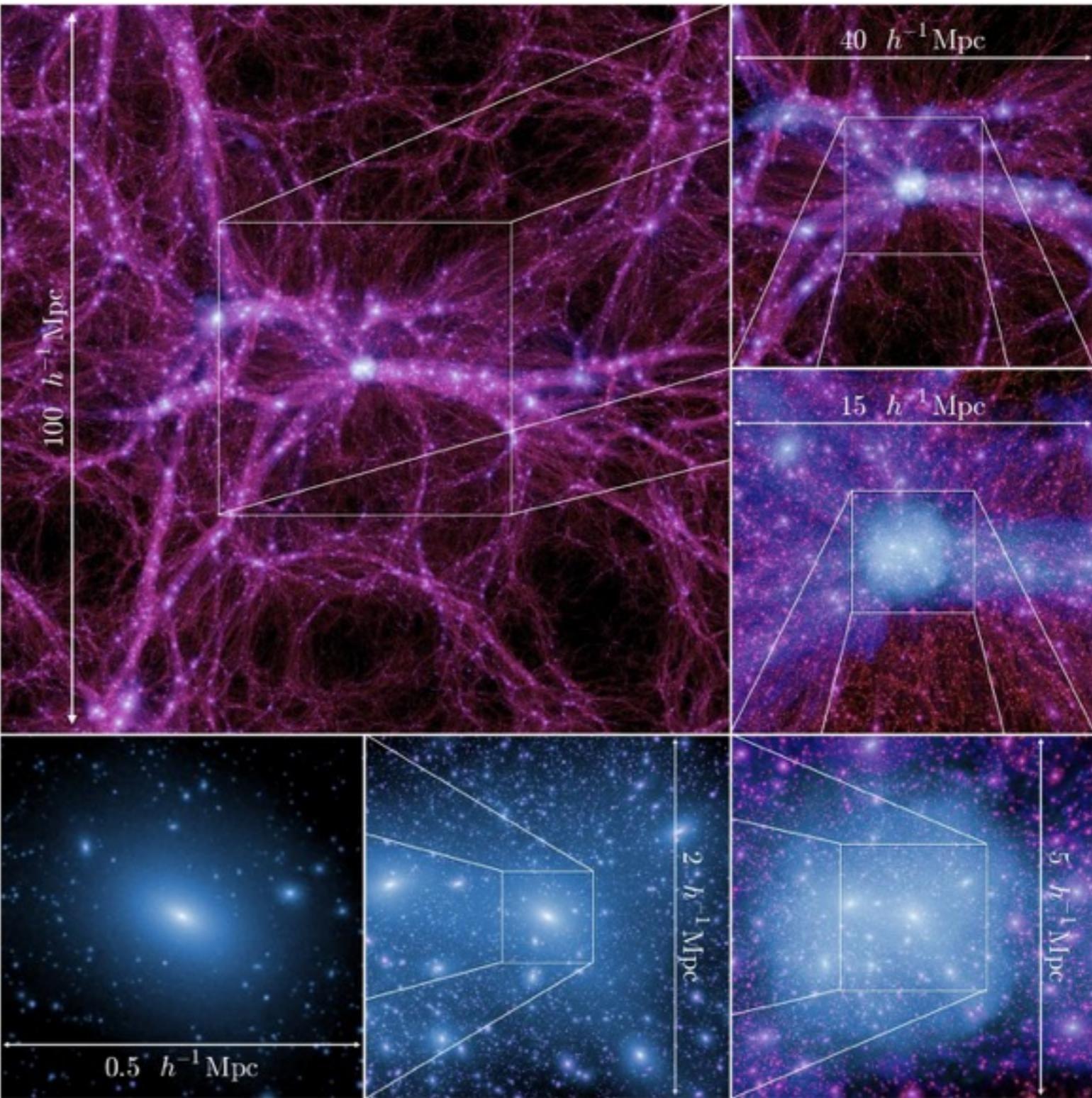
Simulación Millenium I

- Galaxy 2-point correlation function at the present epoch. Red symbols (vanishingly small Poisson error-bars) show measurements for model galaxies brighter than $M_K = -23$. Data for the large spectroscopic redshift survey 2dFGRS are shown as blue diamonds. The SDSS and APM surveys give similar results. Both, for the observational data and for the simulated galaxies, the correlation function is very close to a power-law for $r < 20 \text{ Mpc}/h$. By contrast the correlation function for the dark matter (dashed line) deviates strongly from a power-law



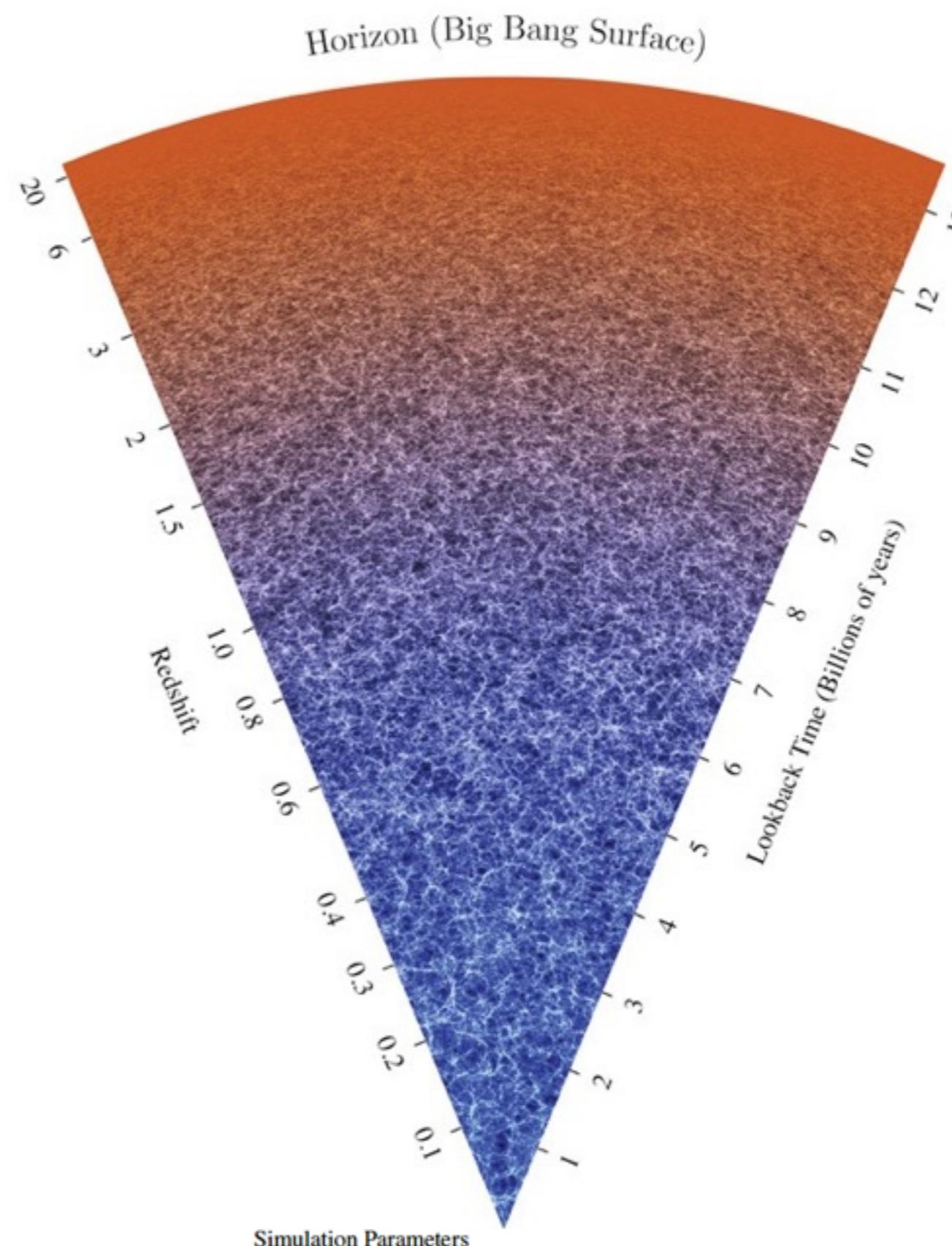
Millenium simulation II

- It uses the same cosmological parameters and number of particles as Millennium I simulation in a cube one-fifth the size ($100 \text{ Mpc}/h$), resulting in 5 times better spatial resolution and 125 times better mass resolution.
- Upper left panel is a $15 \text{ Mpc}/h$ thick slice centered on the most massive halo. This FOF halo has $M=8.2 \times 10^{14} \text{ Msun}/h$, similar to the mass of the Coma cluster and it contains 36,000 resolved subhalos spanning 6.7 decades in mass.



Horizon simulation

- Kim et al. 2009 ApJ: “BAO and topology of large-scale structure of the universe”.
- N-body simulation using $4120^3 = 69.9$ billion particles in a volume $(6.592 \text{ Gpc}/h)^3$, 2000 times the volume of the Millennium run.
- Luminous red galaxies (LRGs) are selected by finding the most massive gravitationally bound, cold dark matter subhalos, not subject to tidal disruption, a technique that correctly reproduces the 3D topology of the LRGs in the Sloan survey.

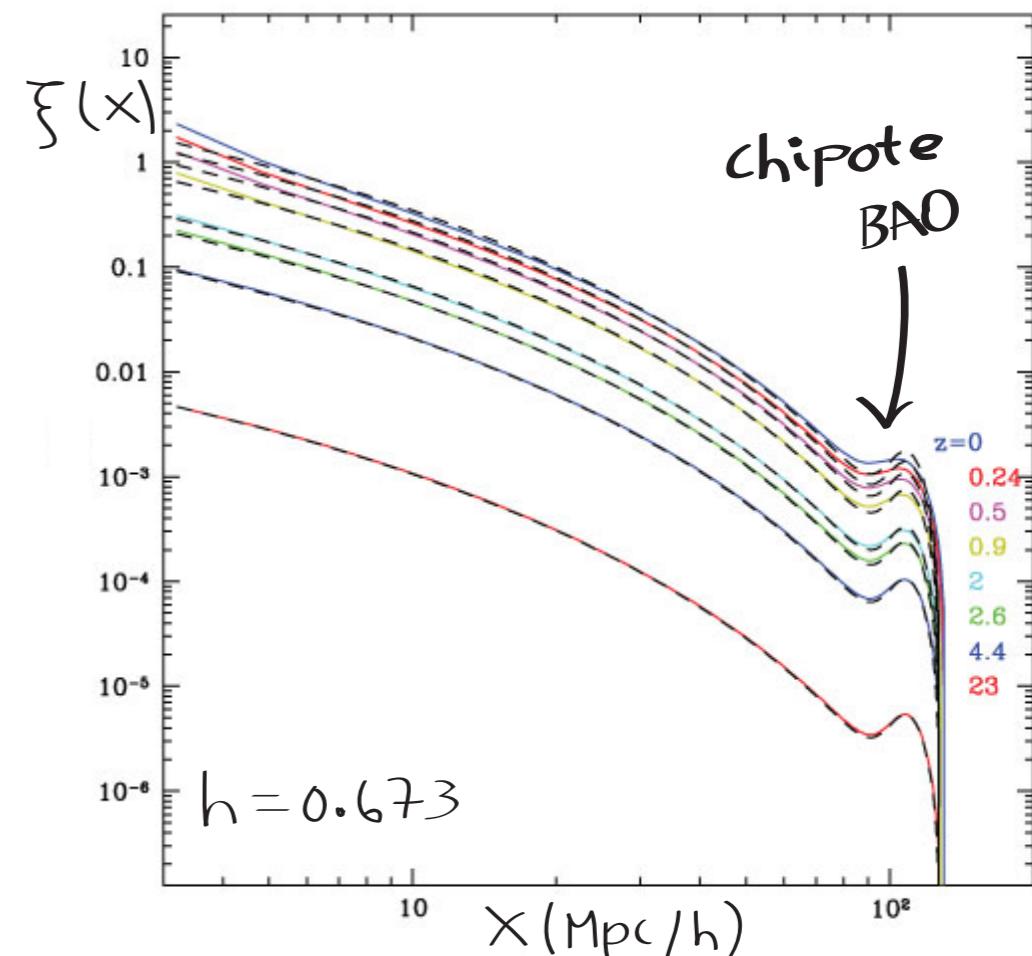


N_p	N_m	L_{box}	N_{step}	z_i	h	n	Ω_m	Ω_b	Ω_Λ	b	m_p	f_ϵ
4120^3	4120^3	6592	400	23	0.72	0.96	0.26	0.044	0.74	1.26	2.96×10^{11}	$160 h^{-1} \text{ kpc}$

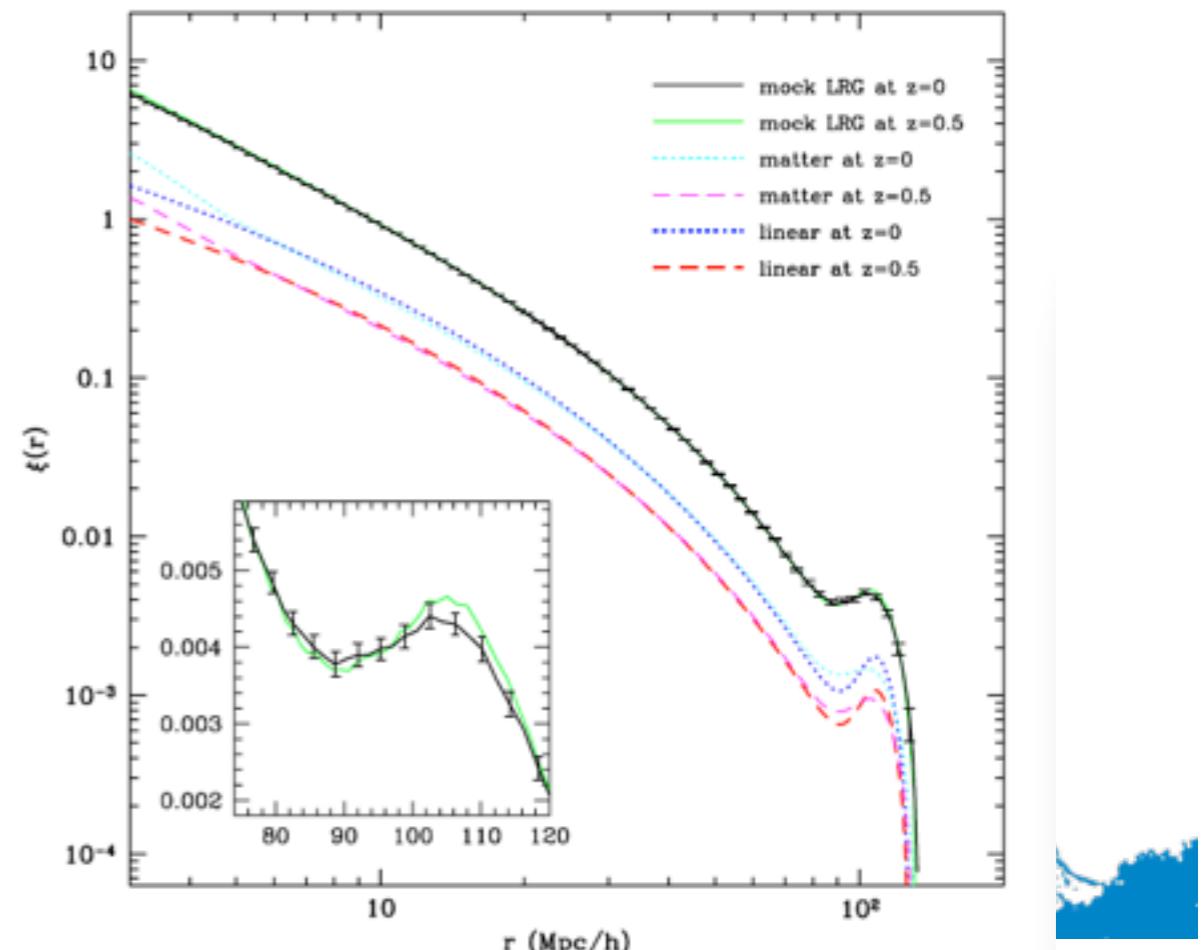
Notes. Columns: (1) number of particles, (2) Size of mesh. Number of initial conditions, (3) Simulation box size in $h^{-1} \text{ Mpc}$, (4) Number of steps, (5) Initial redshift, (6) Hubble parameter in $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, (7) Primordial spectral index of $P(k)$, (27) Matter density parameter at $z = 0$, (9) Baryon density parameter at $z = 0$, (10) Dark energy density parameter at $z = 0$, (11) Bias factor, (12) Particle mass in $h^{-1} M_\odot$, and (13) Gravitational force softening length.

Horizon simulation

- Evolution of the correlation function of the matter density field at the epochs from $z=0$ to 23. Dashed curves are the linearly evolved correlation functions, and the coloured ones are the matter correlation functions measured from the horizon simulation. The inset box magnifies the matter correlation functions near the baryon oscillation bump with amplitudes to match at $r=48 \text{ Mpc}/h$ after scaling the peak of the baryonic bump of matter correlation at $z=23$ to unity.

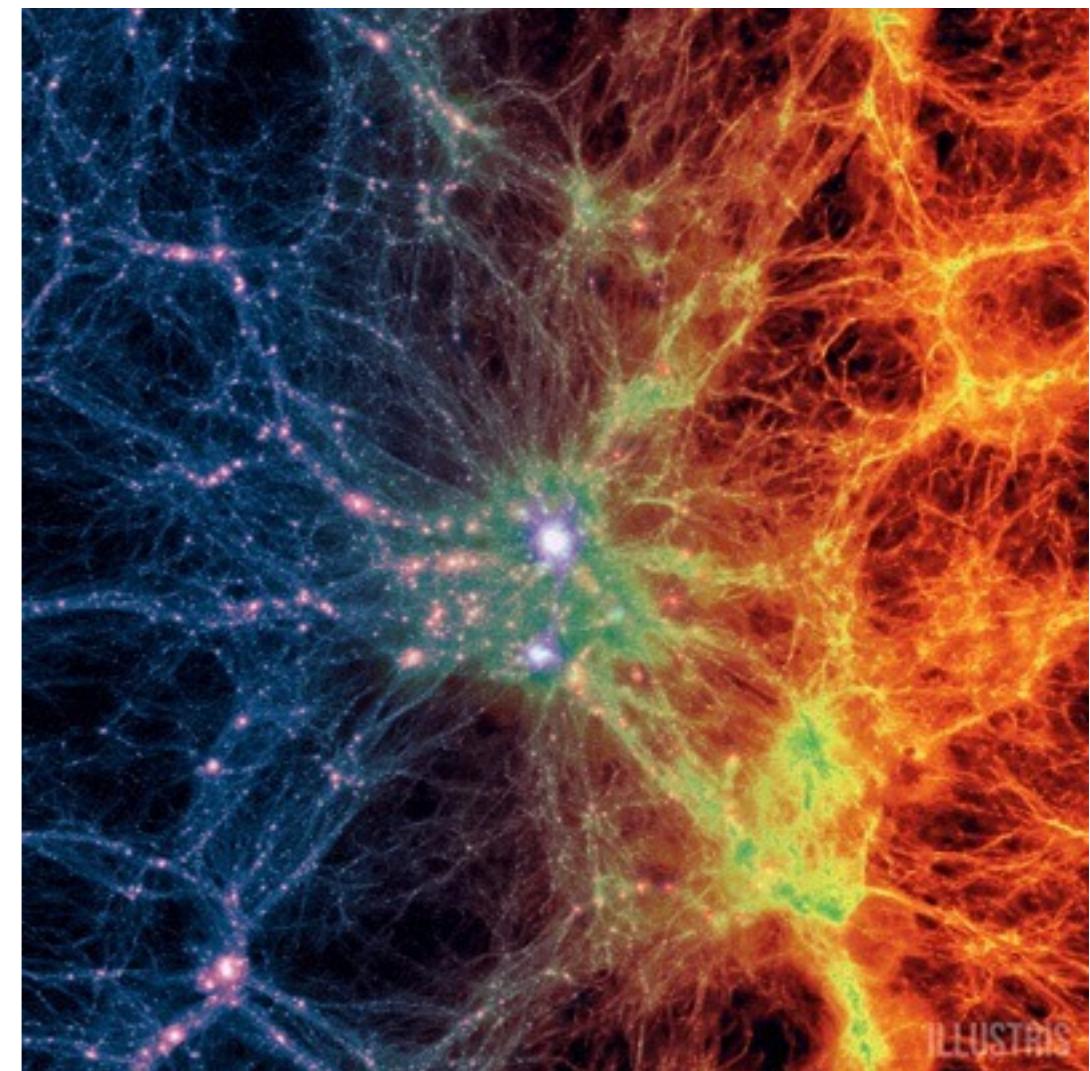


- Top curves: the real space correlation functions of the mock LRGs in the whole cube at $z=0$ and 0.5. 3sigma error bars are attached to the correlation function at $z=0$. The matter density correlation functions and the linear theory correlation functions at $z=0$ and 0.5 (bottom curves), are also shown.

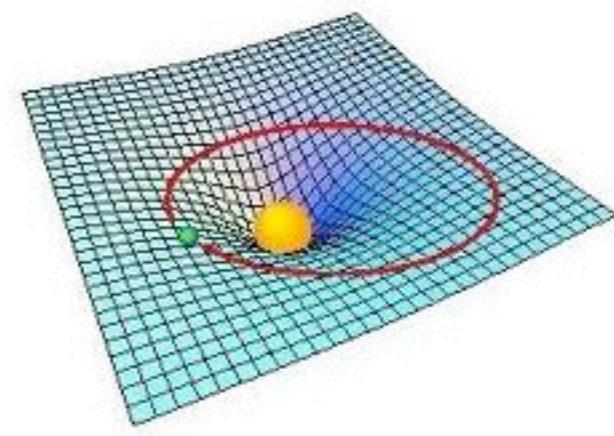


Illustris simulation

- Cosmology and IC: It was used CAMB to compute the linear power spectrum of a LCDM cosmology with 0.2726 DM and baryons, 0.7274 Lambda, 0.0456 Baryons, sigma8=0.809, n_s=0.963 and H0=100 h km/s/Mpc with h=0.704. These parameters are consistent with the latest WMAP-9 measurement.
- The simulation box is a cube with a side length of 75 Mpc/h. It was used FFT to calculate the displacement field and use Lagrangian Perturbation Theory (Zeldovich approximation) to displace particles. Initial condition were generated at z=127 with mesh-generating points added to the initial conditions by splitting each original particle into a dark matter and gas cell pair, displacing them with respect to each other such that two interleaved grids are formed, keeping the centre-of-mass of each pair fixed. The initial gas temperature at z=127 was set to 245 K based on RECFAST calculation.
- The simulation volume contains initially 6,028,568,000 hydrodynamic cells and the same number of dark-matter particles resulting in a dark-matter mass resolution of 6.26×10^6 Msun, and a baryonic mass resolution of 1.26×10^6 Msun. The gravitational softening length was 1 kpc/h. The smalles cells in Illustris have a typical extent of 48 pc. For the least massive cells they achieve a mass resolution of 1.5×10^4 Msun.



Usando la relatividad general de Einstein...



- Principio de equivalencia

masa inercial =
masa gravitacional

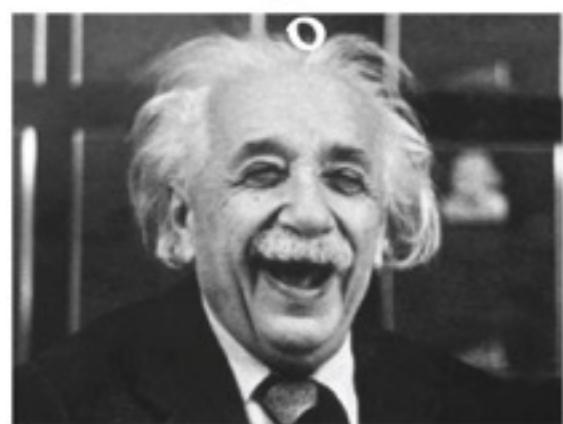
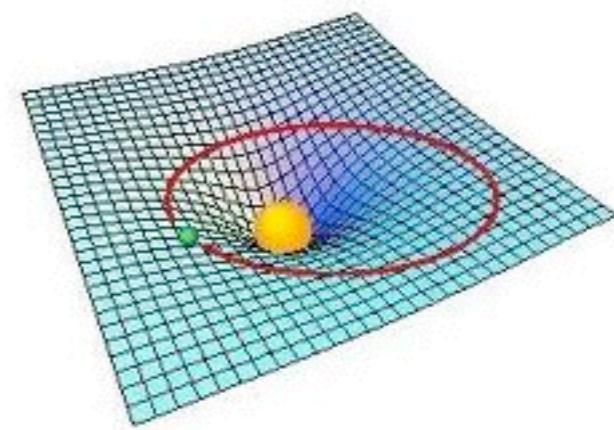


¡Geometría = Contenido de Materia y de Energía!

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

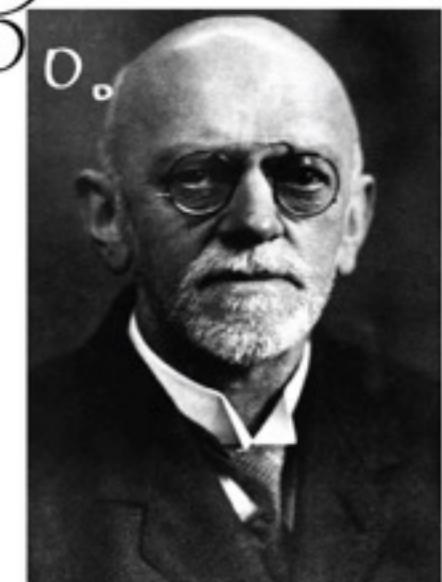


Usando la relatividad general de Einstein ...



$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 4\pi G \rho \\ \downarrow \\ G_{00} &\sim T_{00} \\ \downarrow \\ G_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu} \\ \downarrow & \quad ? \\ G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu} \\ \downarrow & \quad ? \\ G_{\mu\nu} + \cancel{\Lambda g_{\mu\nu}} &= 8\pi G T_{\mu\nu} \\ & \quad ?\end{aligned}$$

$S \sim \int d^4x \sqrt{-g} R$
und
 $\delta S = 0 !$



20/XI/1915

25/XI/1915

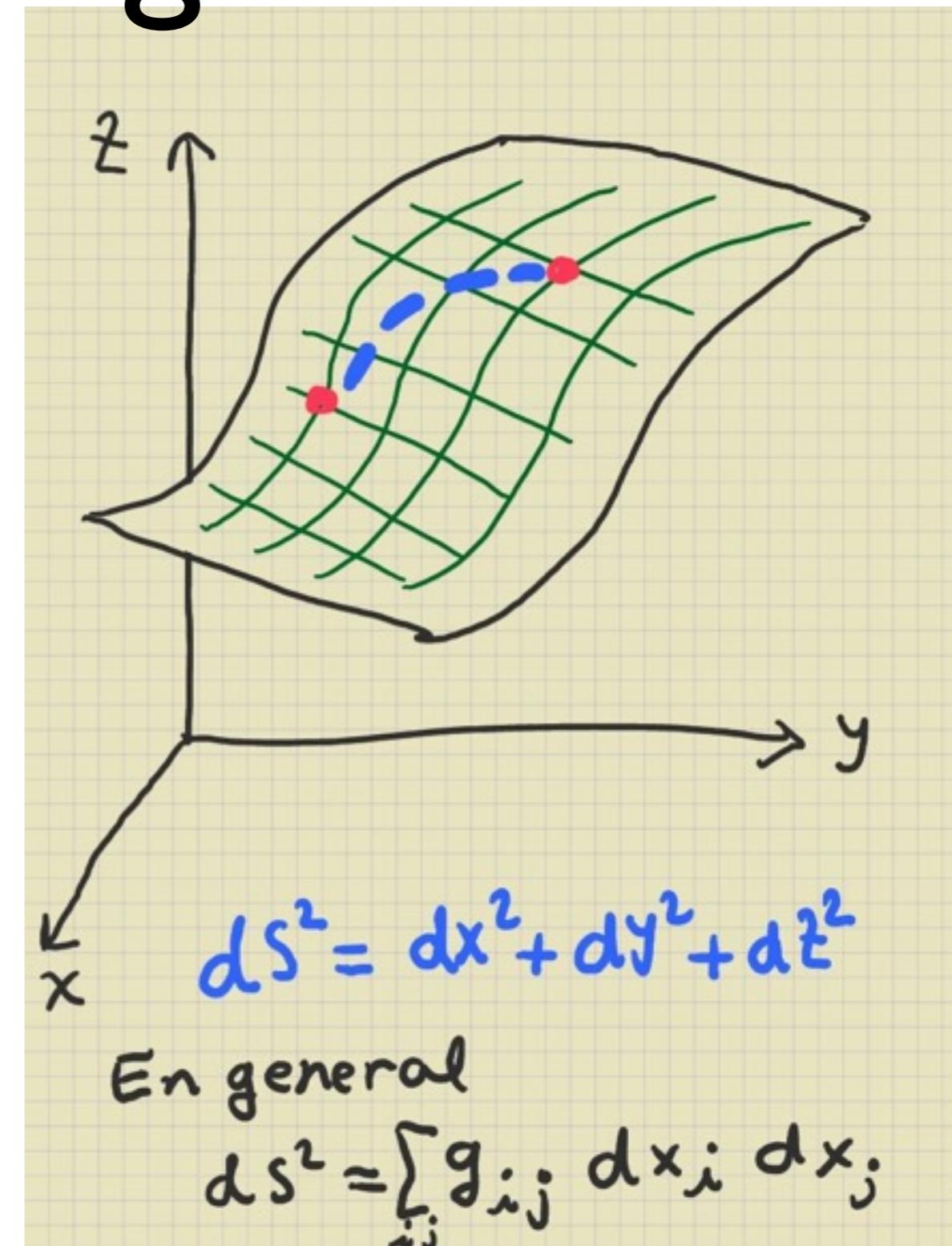
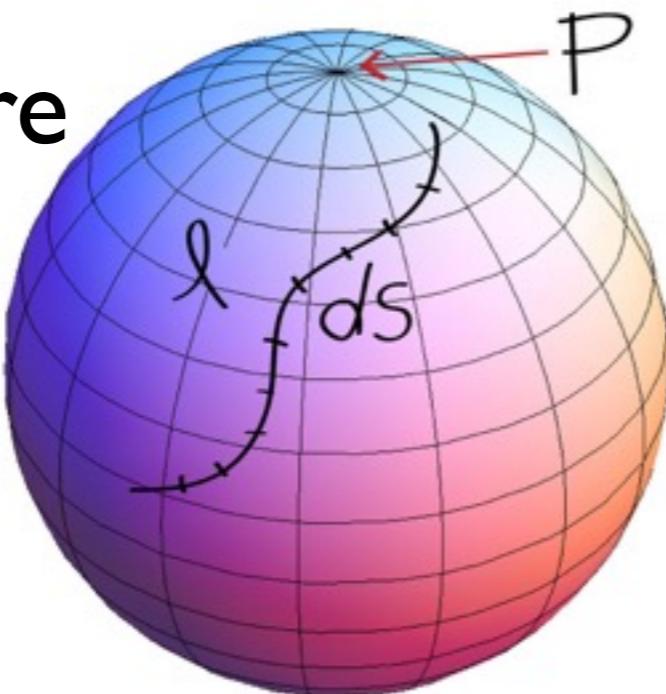
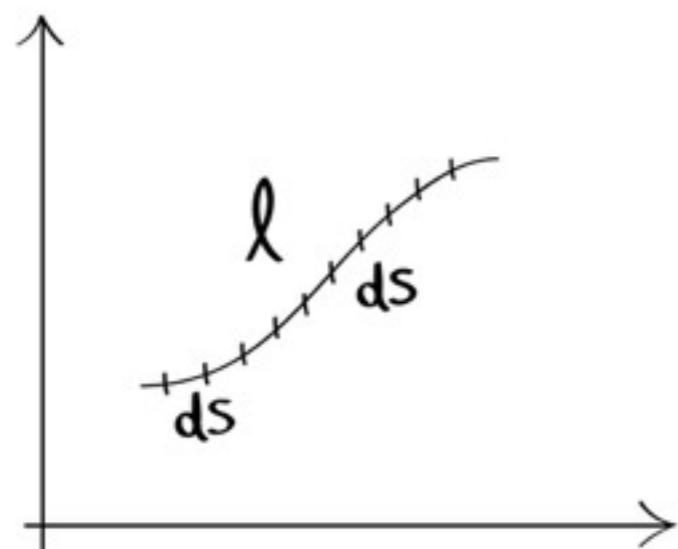
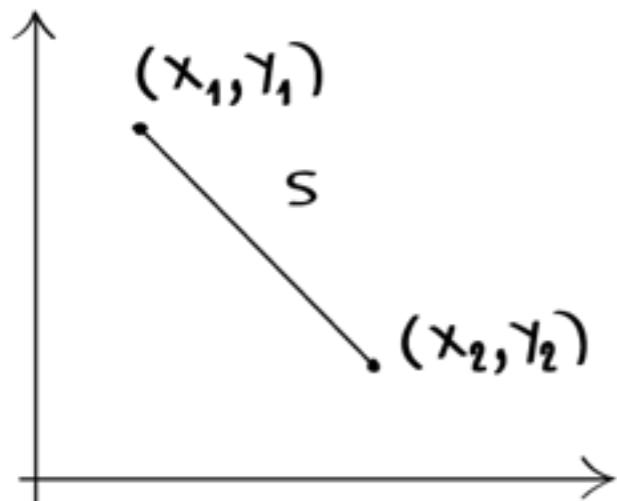
¡Geometría = Contenido de Materia y de Energía!

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$



El teorema de Pitágoras

- ¿Cómo medimos la distancia entre los puntos?

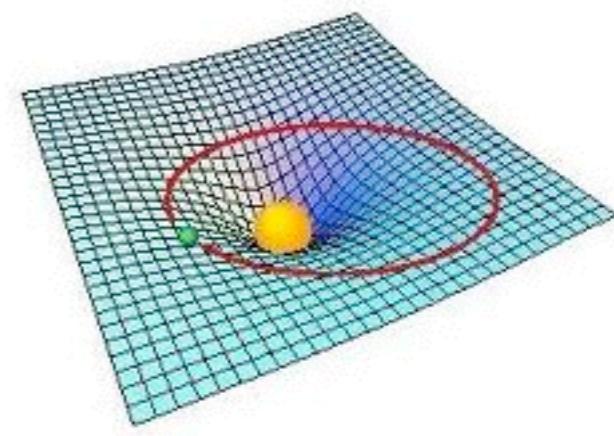


¡Geometría = Contenido de Materia y de Energía!

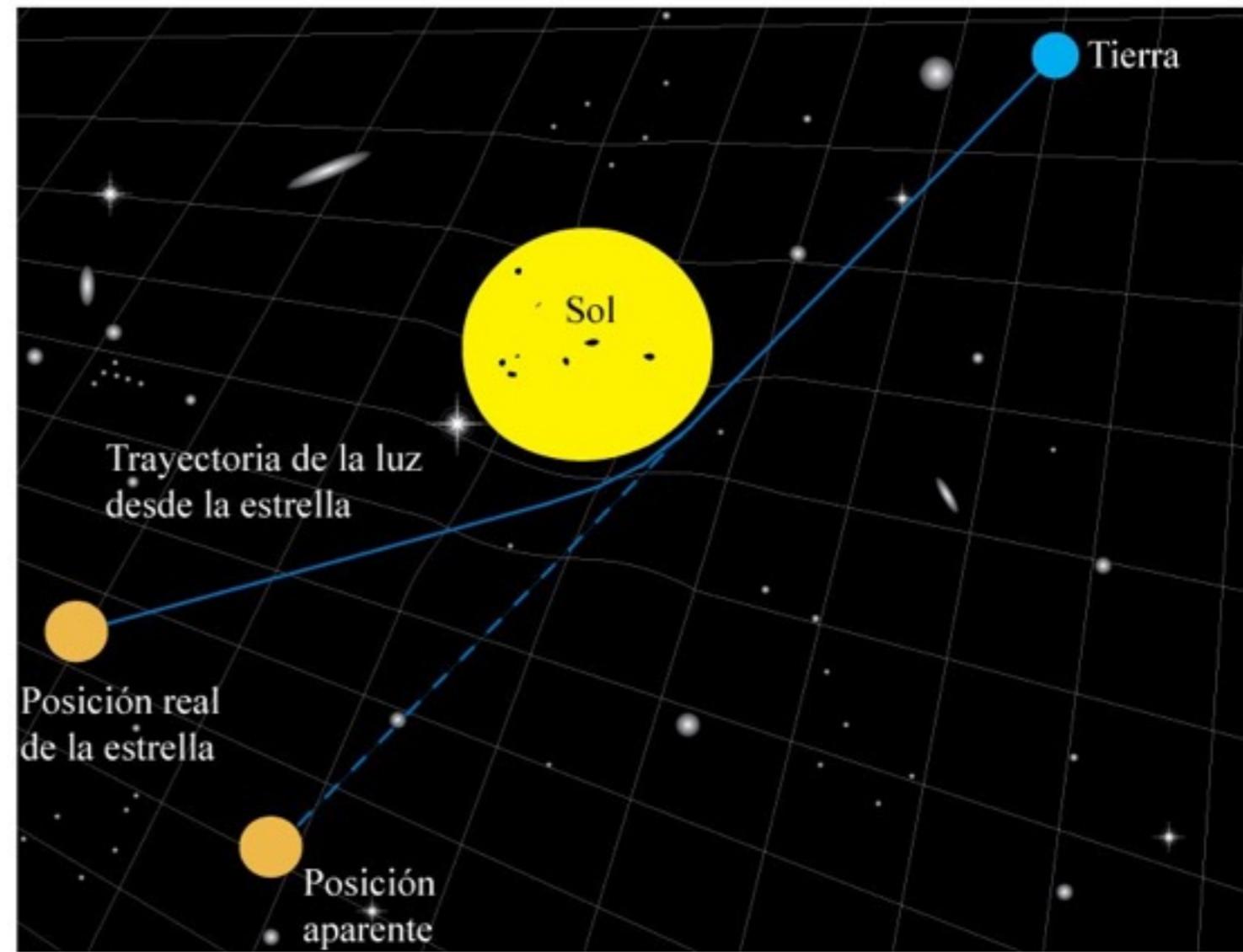
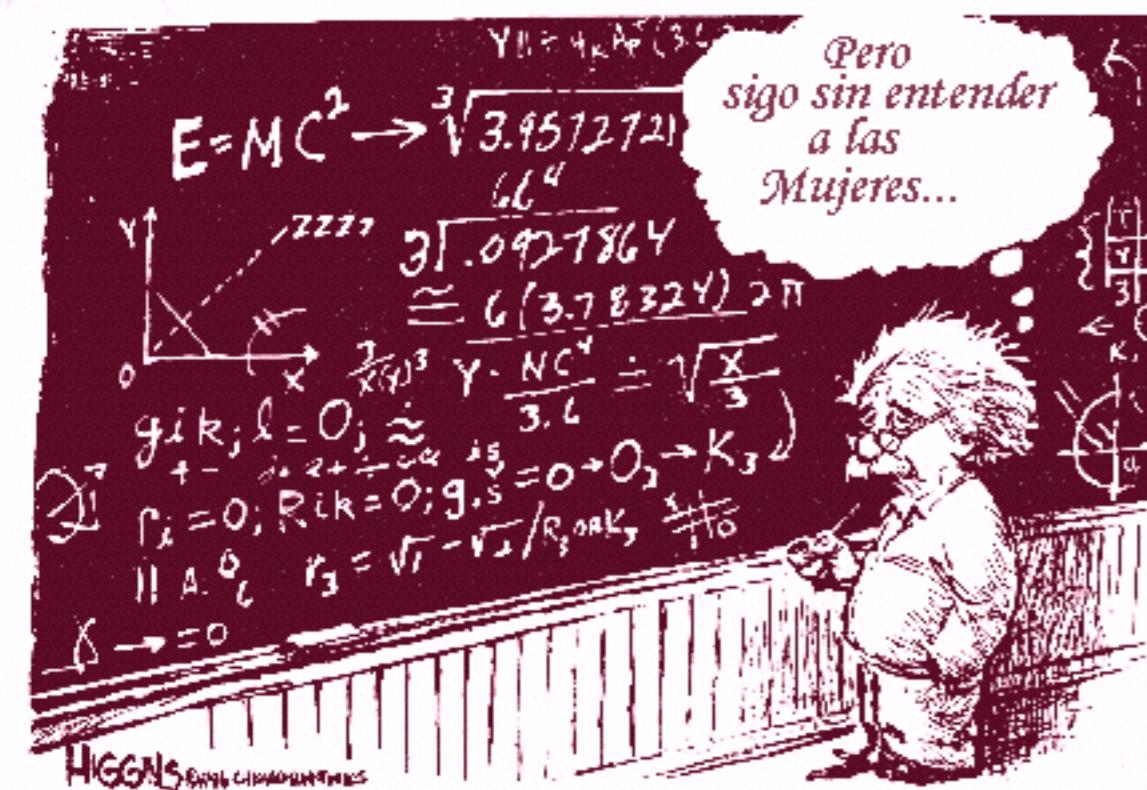
$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$



Usando la relatividad general de Einstein...



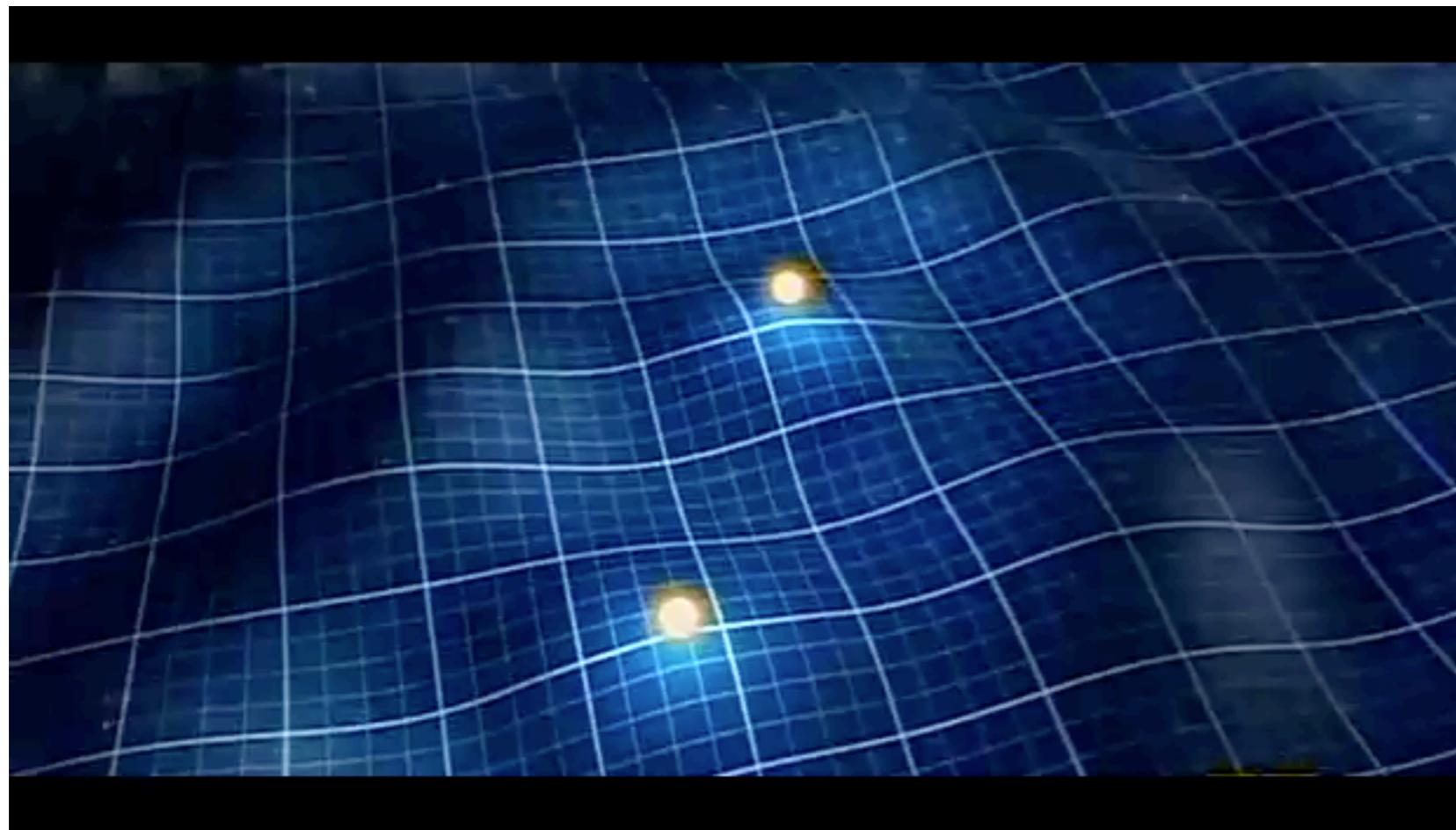
- El primer éxito de la Relatividad General fue ...



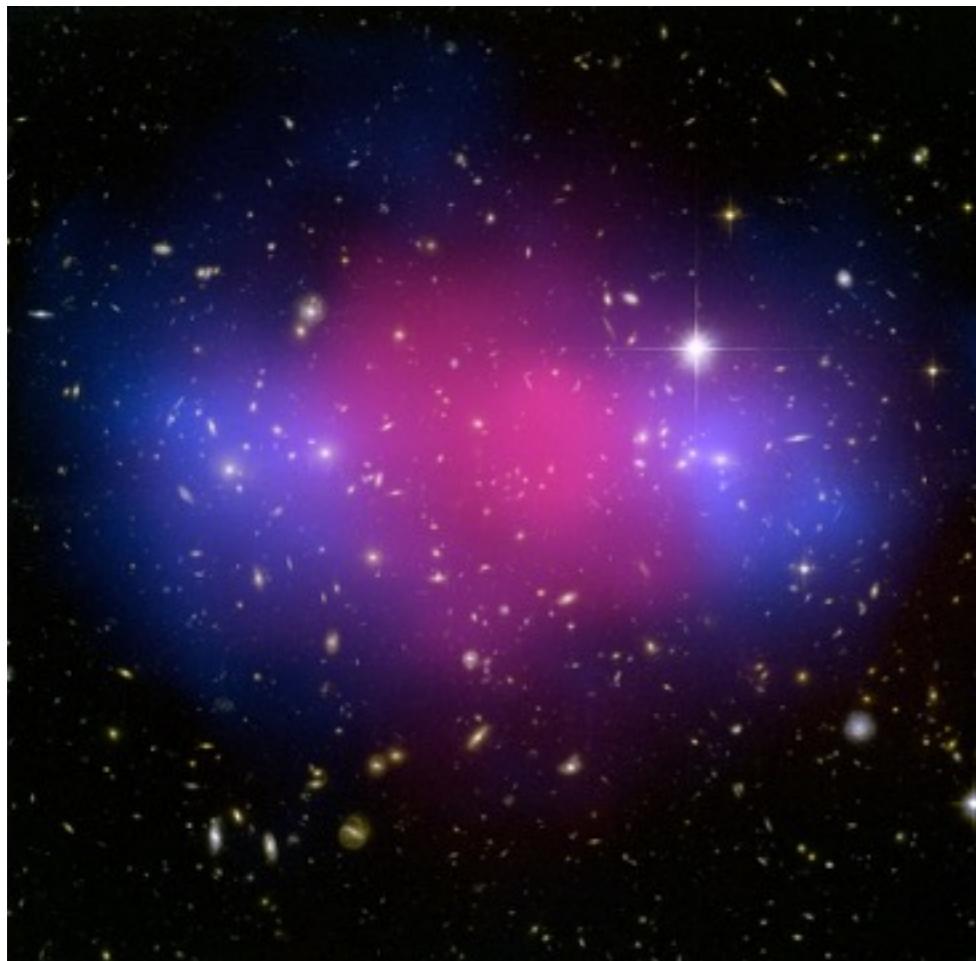
¡Geometría = Contenido de Materia y de Energía!



Ondas gravitacionales



Choques de supercúmulos de galaxias



Velocidades de rotación de las estrellas en una galaxia

- Vera Rubin, una astrónoma, por los 1970's midió las velocidades con que las estrellas rotan alrededor de una galaxia y encontró...



Velocidades de rotación de las estrellas en una galaxia

- Los planetas rotan...
- y las estrellas...

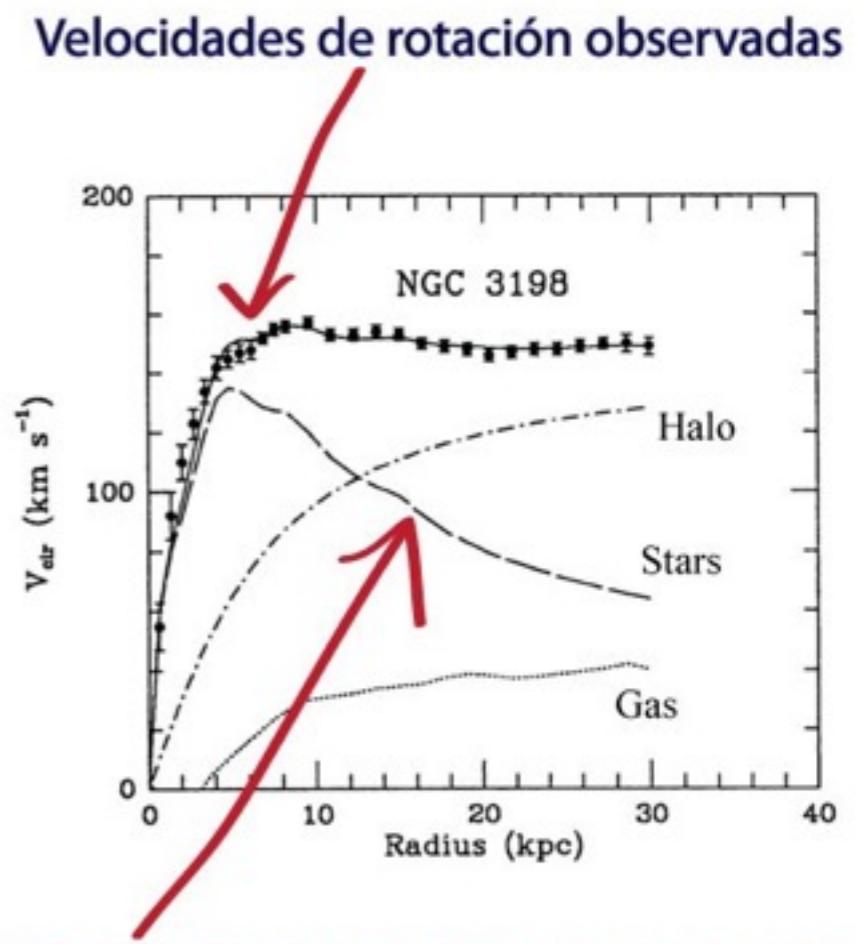


Rotación de las estrellas ...

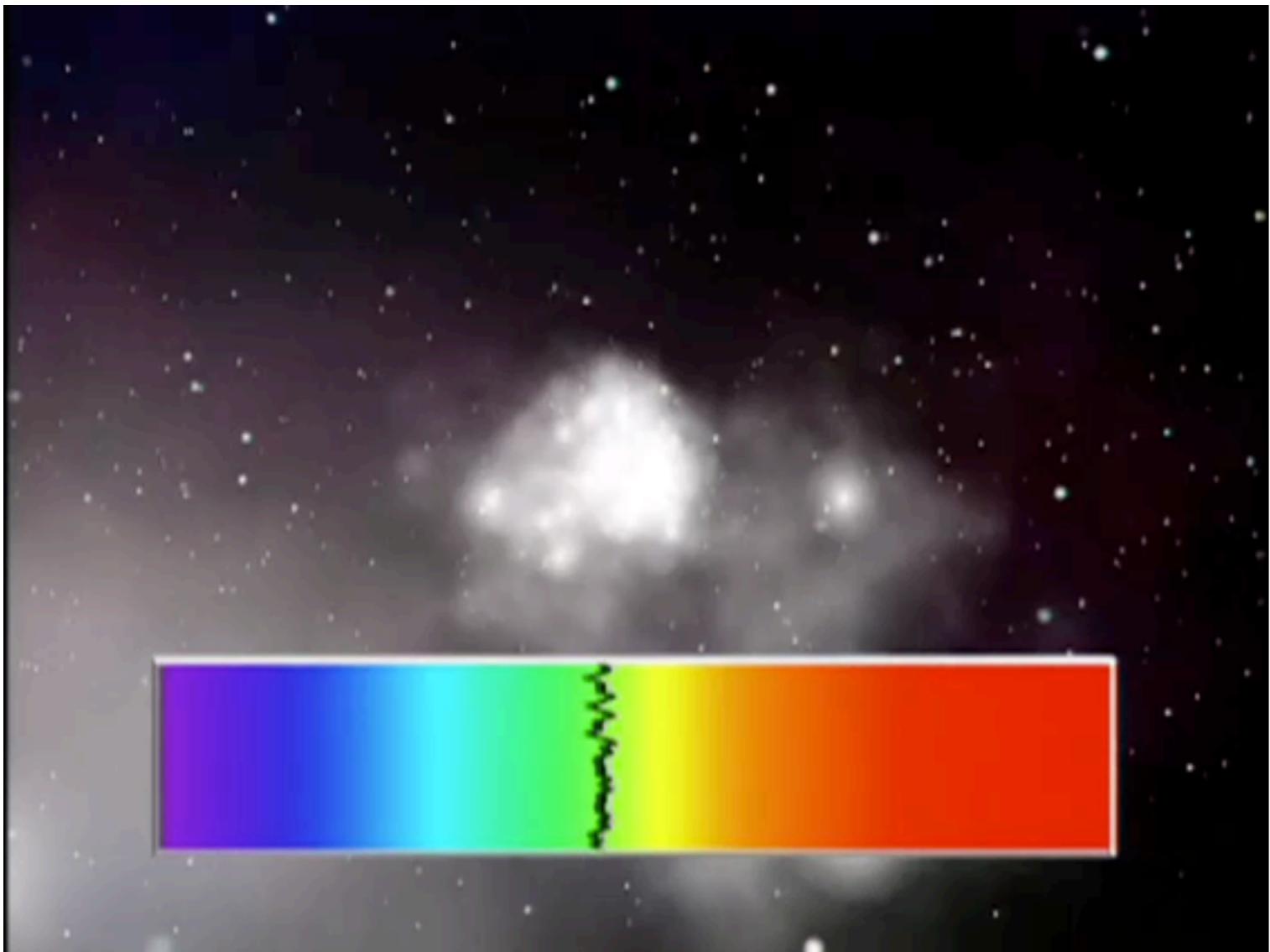


$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad \text{entonces} \quad v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

$$M(r) = \int \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$



Efecto Doppler ...



$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0}$$



Las cefeidas...

Hubble... & Humason, el arriero

- Hubble... Atleta... astrónomo... boxeador... **abogado**... maestro de español... astrónomo... fue a la primera guerra mundial... salvó a una mujer de morir ahogada... y tuvo un duelo con el esposo quién pensó que le estaba poniendo “el cuerno”...



Edwin Hubble



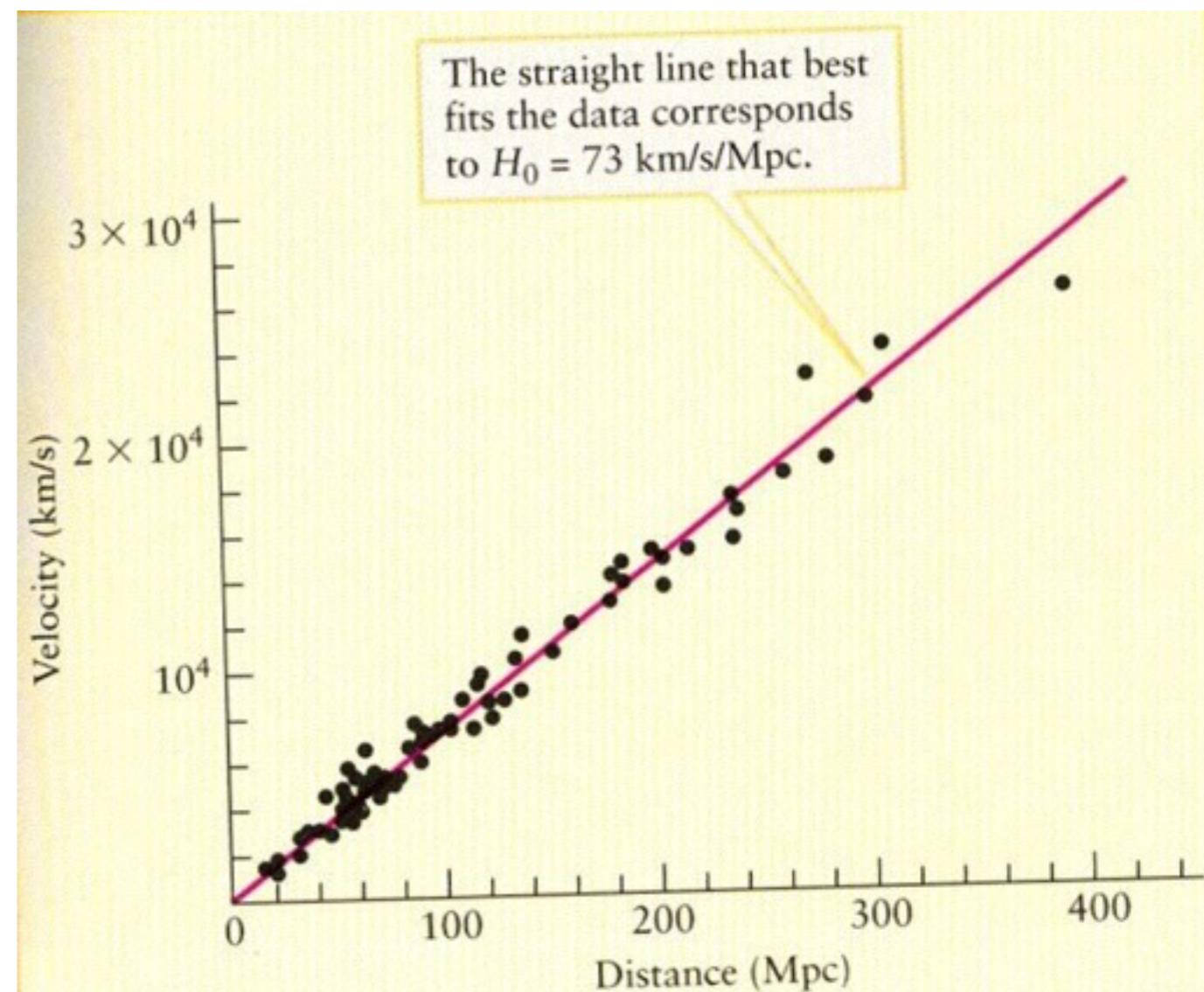
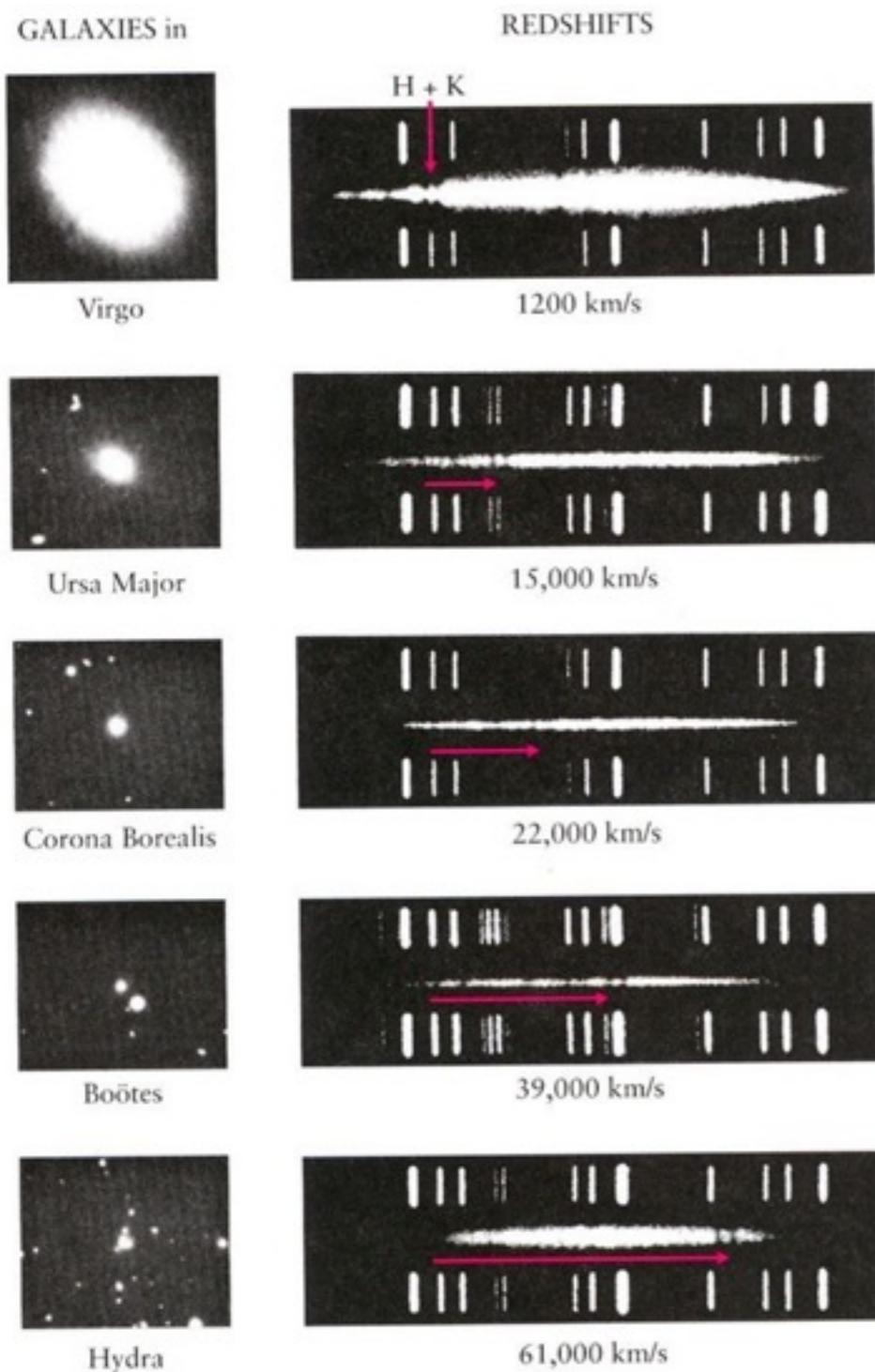
Humason

- Humason, el arriero... su nombre se ha ido borrando de la ley “Hubble-Humason”



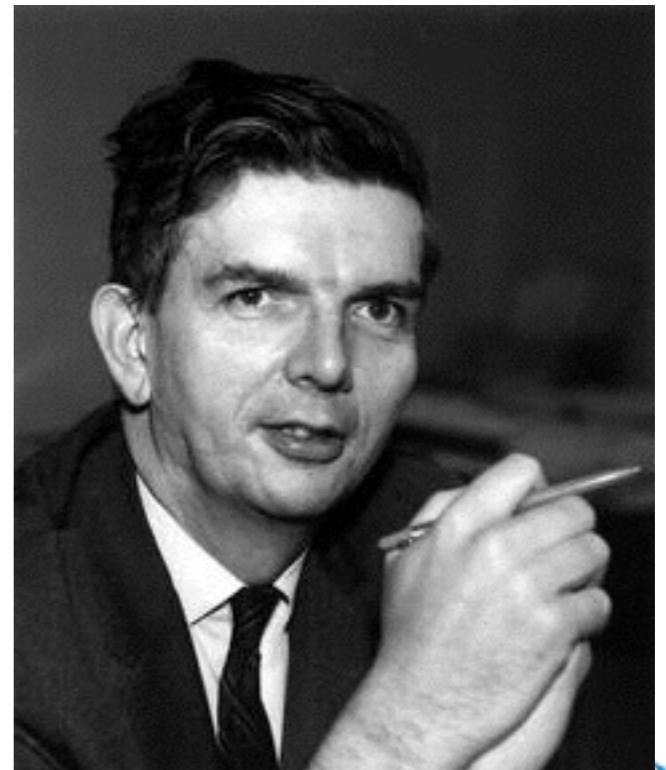
Supernovas Ia...

Hubble ... & Humason, el arriero

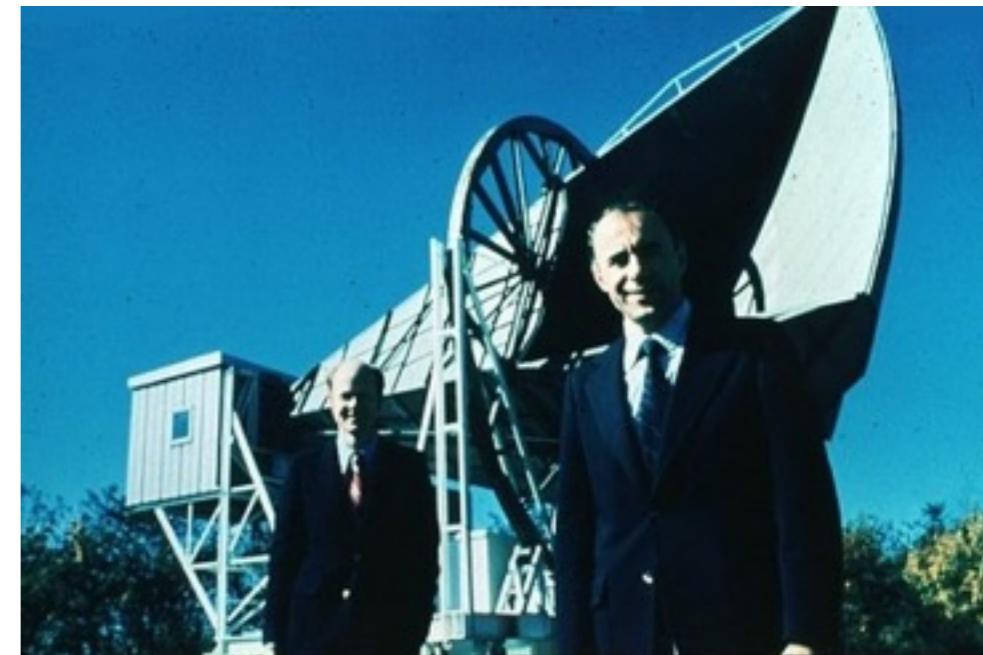


Entonces... nació la gran explosión

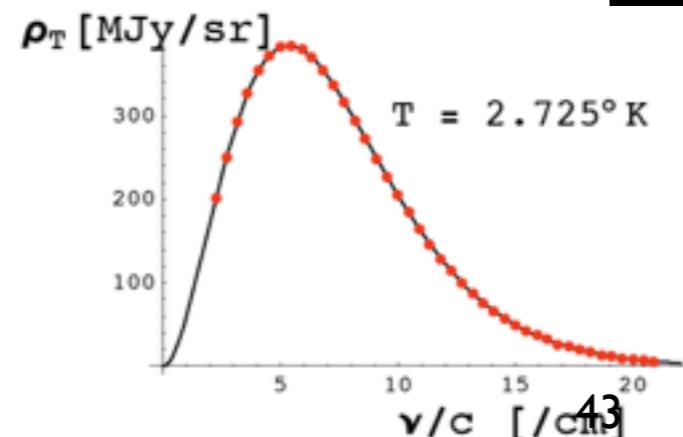
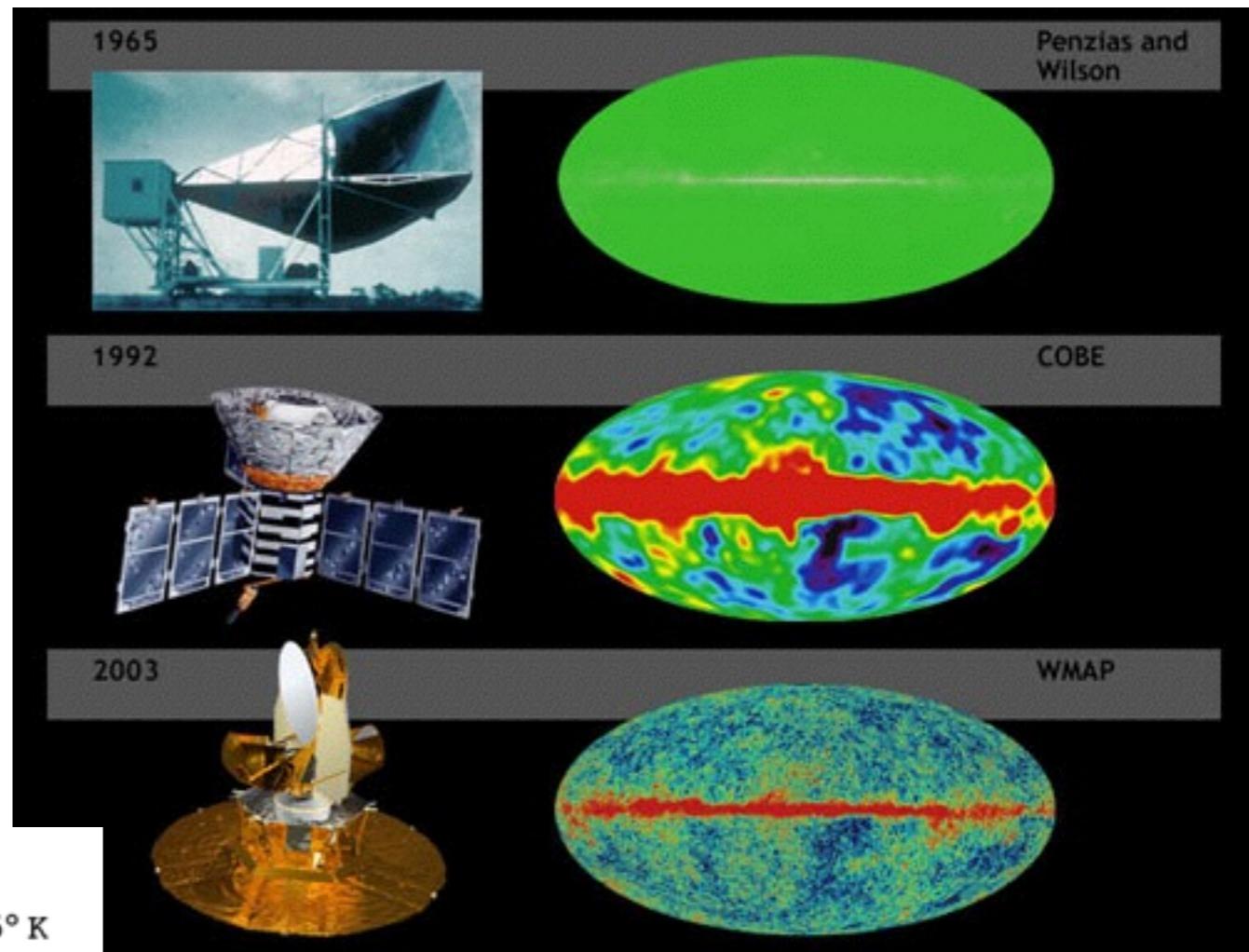
- George Gamow, basado en ella predijo que habría una radiación de unos 5 grados Kelvin.
- Y se pusieron a buscarla Robert Dicke y su equipo (Wilkinson entre ellos)



Los “burros” que tocaron la flauta...



- 1965 Penzias & Wilson:
premios Nobel 1978
- COBE (1992) y WMAP
(2003): Smoot & Matter:
Nobel en 2006

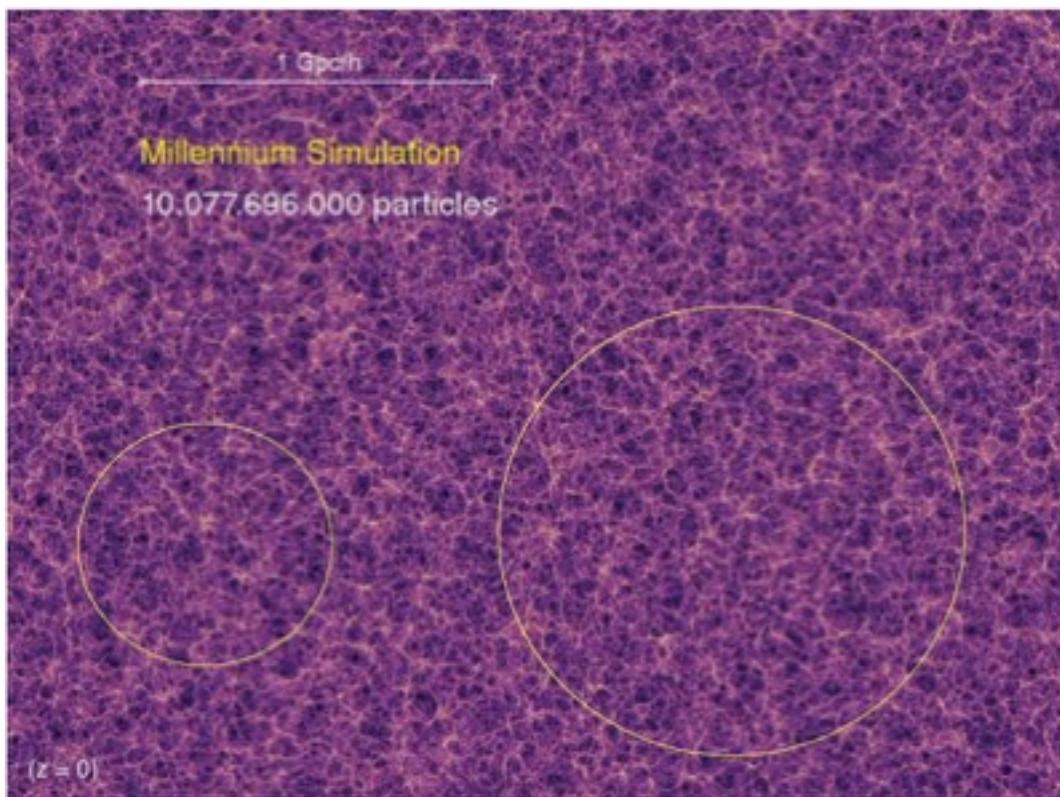


$$T \propto \nu_{max}$$



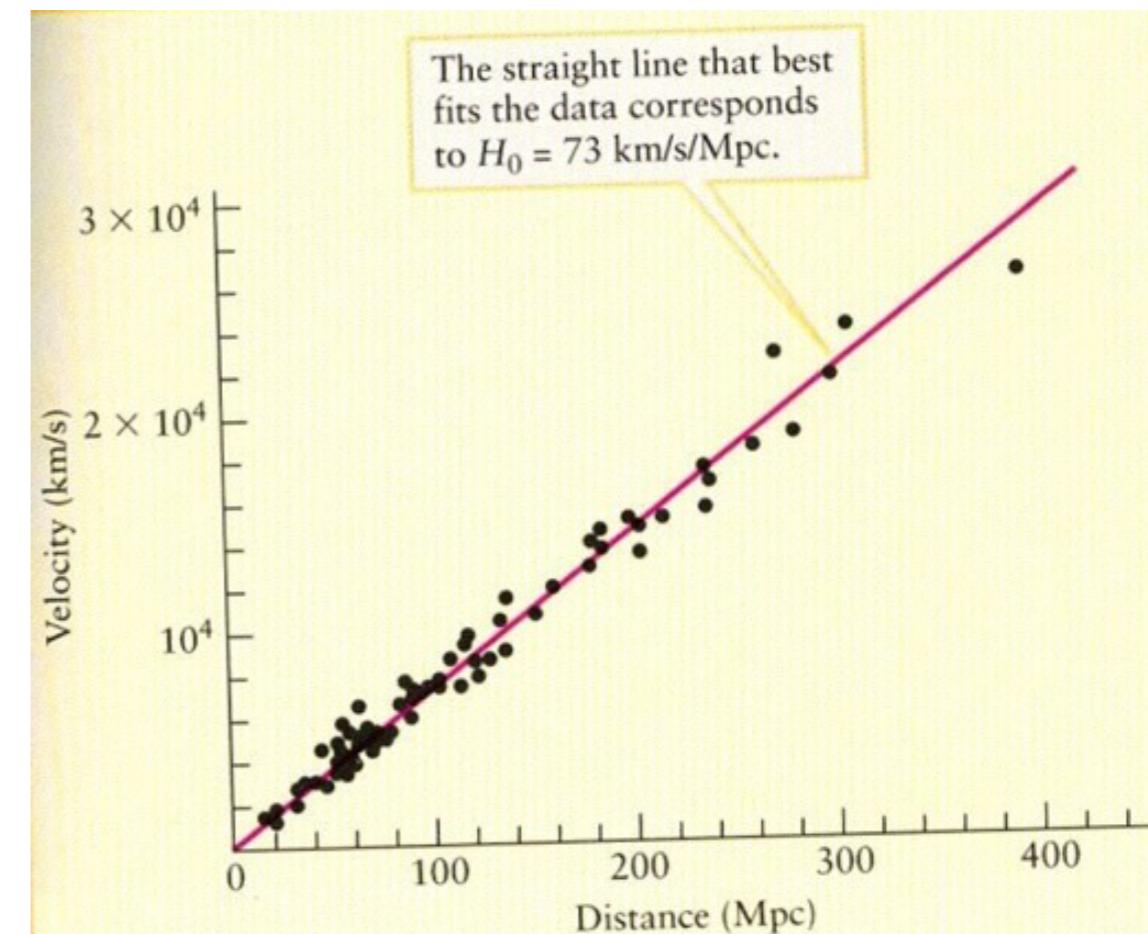
El principio cosmológico y la ley de Hubble

- Hubo un comienzo ... uno muy denso ...



Alexander
Friedman (1922)

Georges
Lemaître (1927)

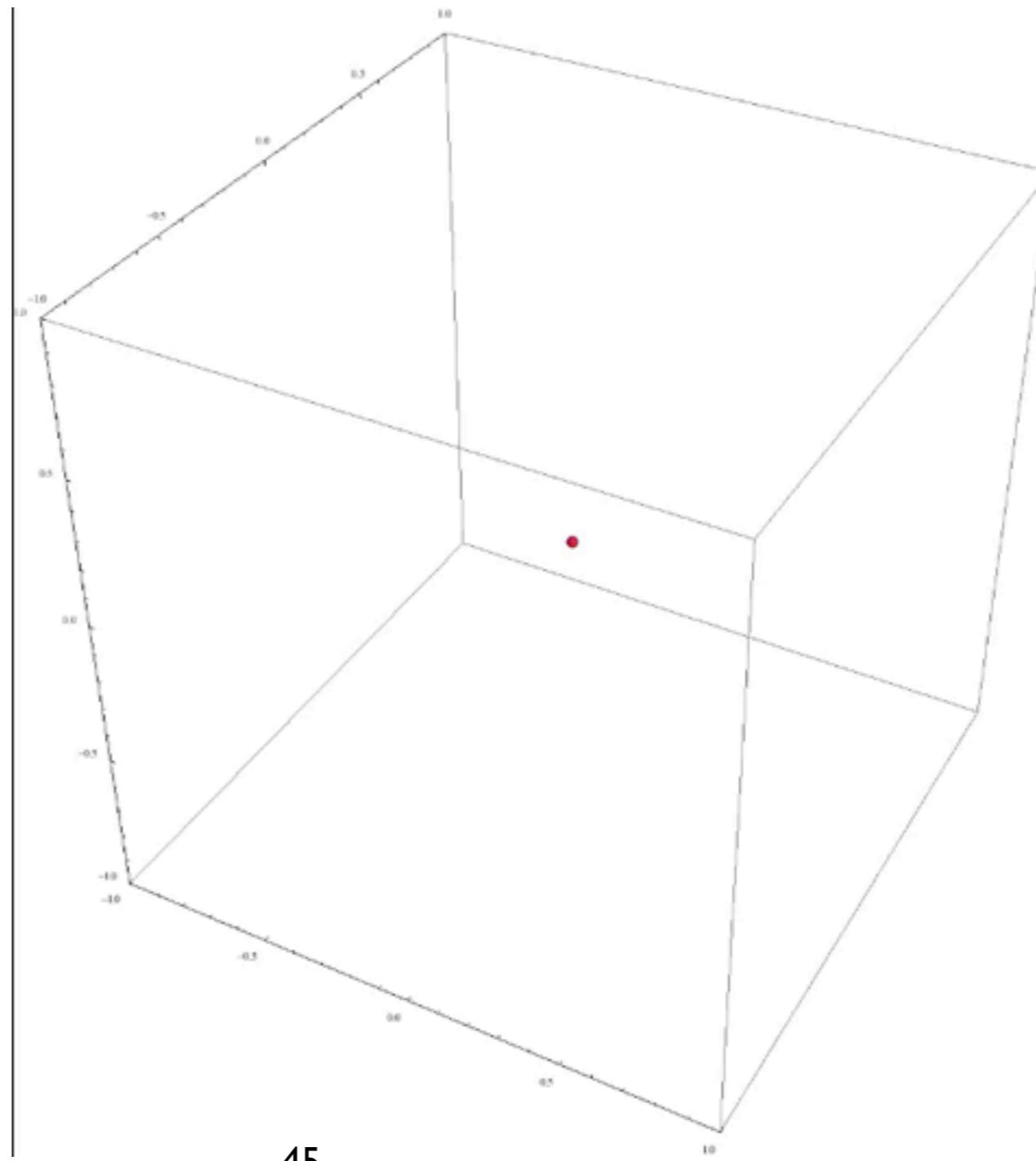


Ambos resolvieron las Ecuaciones de Einstein. Y Lemaître propuso el modelo de “átomo primigenio” en 1931



El “Big-Bang” ... la gran explosión

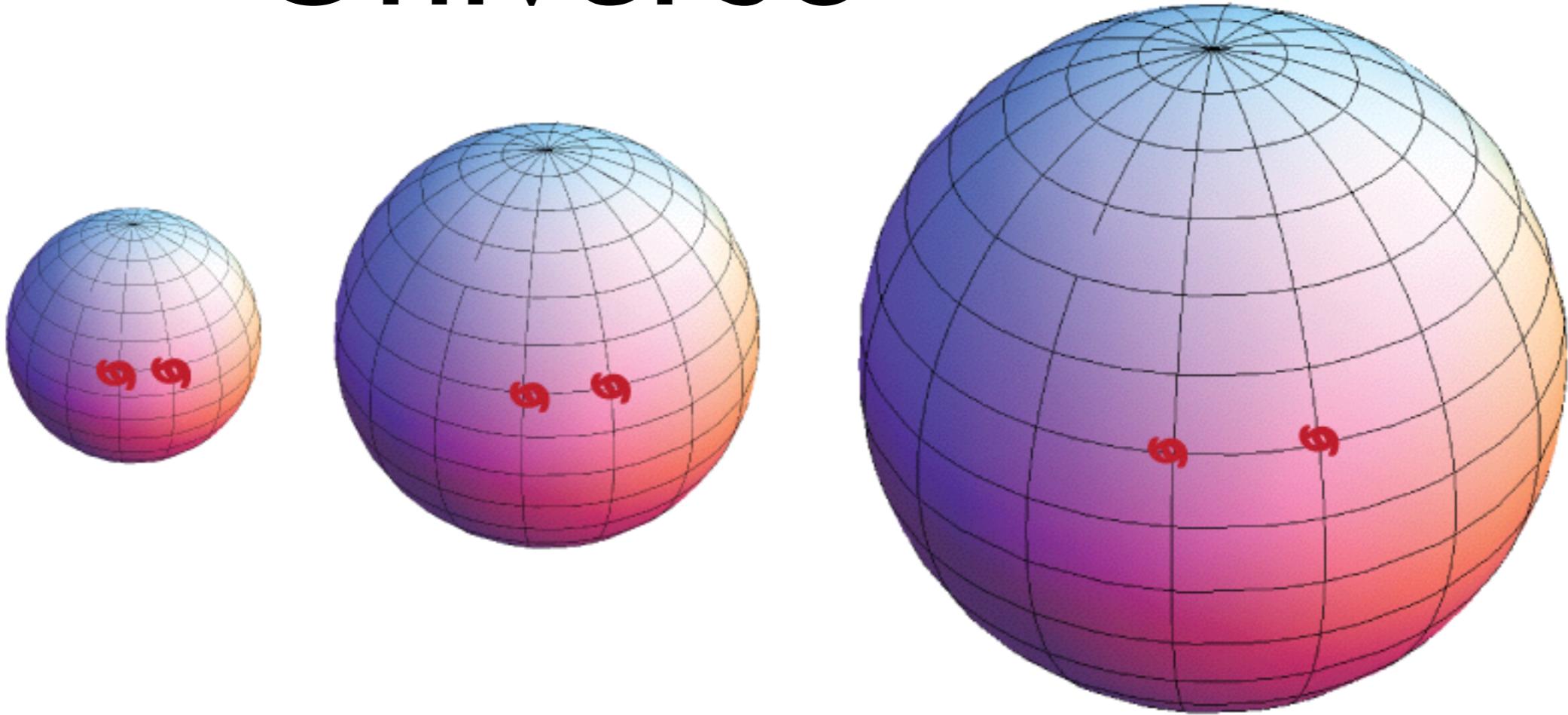
- El gran “pun”
- Bueno ... ni fue “gran” y ni hubo “pun” ...



Finalmente ... llegamos a
la “teoría del Big-Bang”



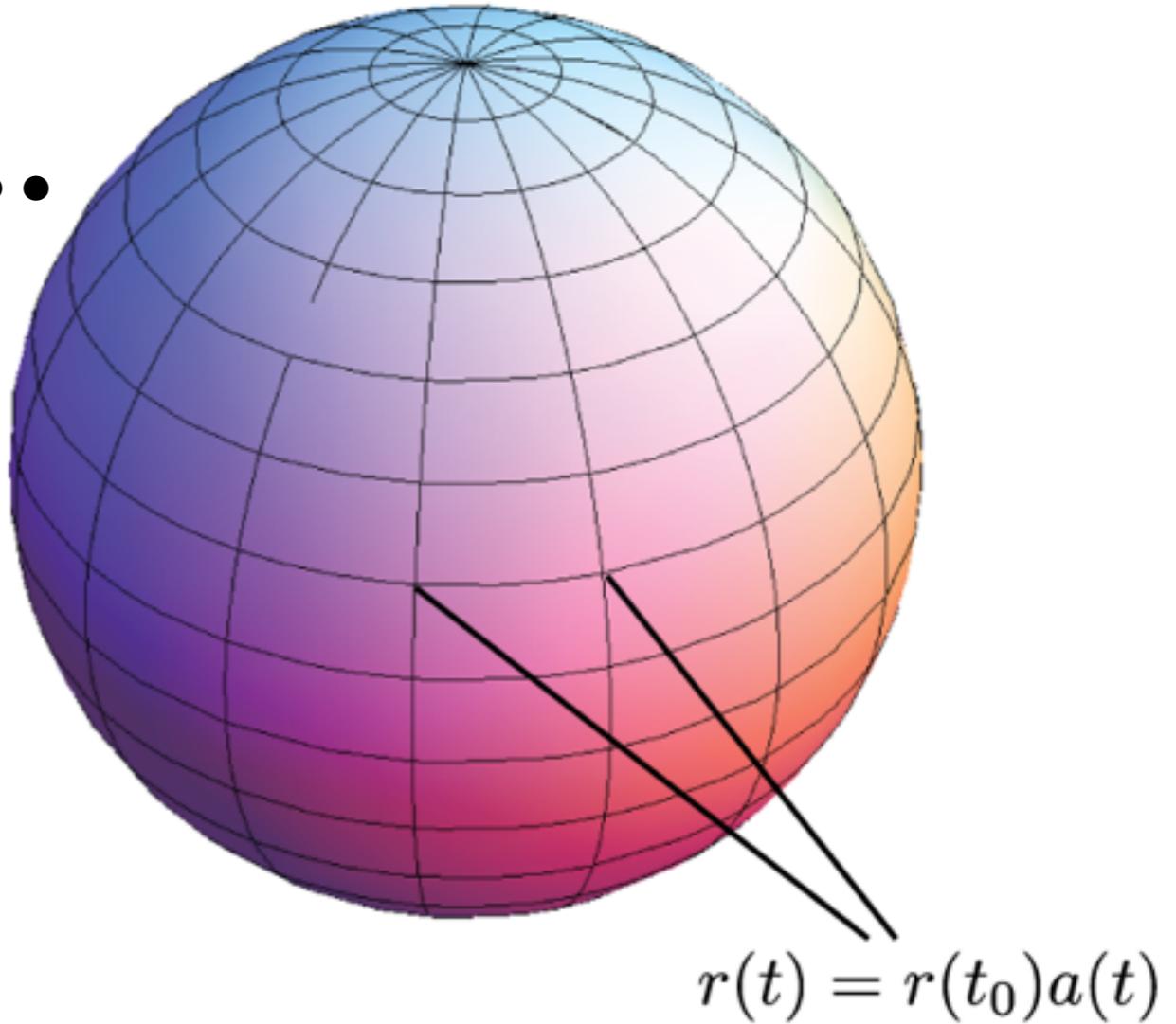
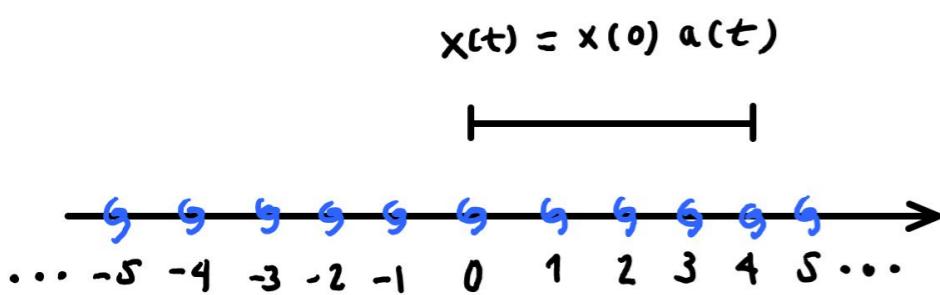
La expansión del Universo



- Los “observadores” ...



El sistema de coordenadas ...

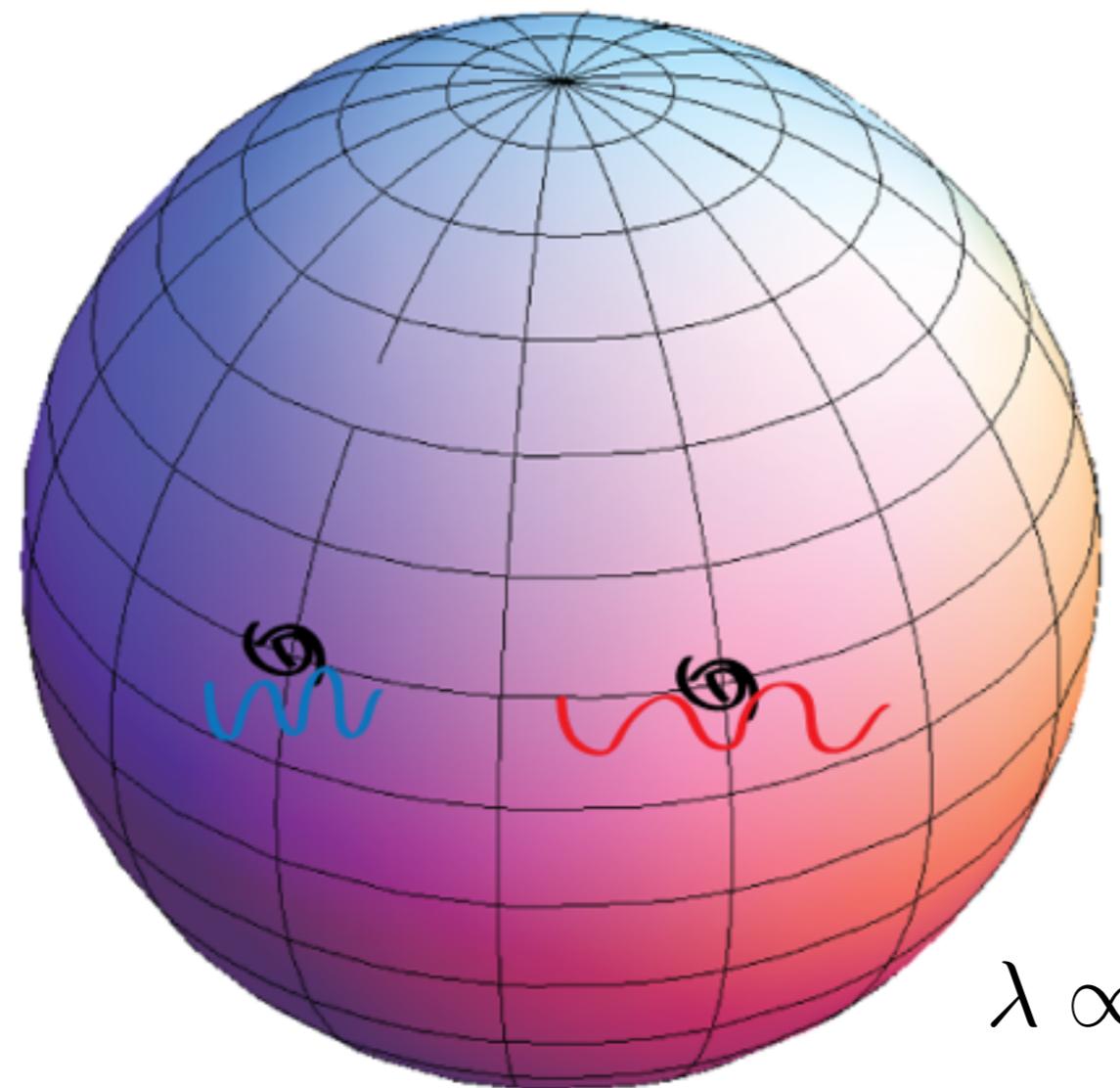


$$v(t) = \frac{dr}{dt} = r(t_0)\dot{a}(t) = r(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t)r(t)$$

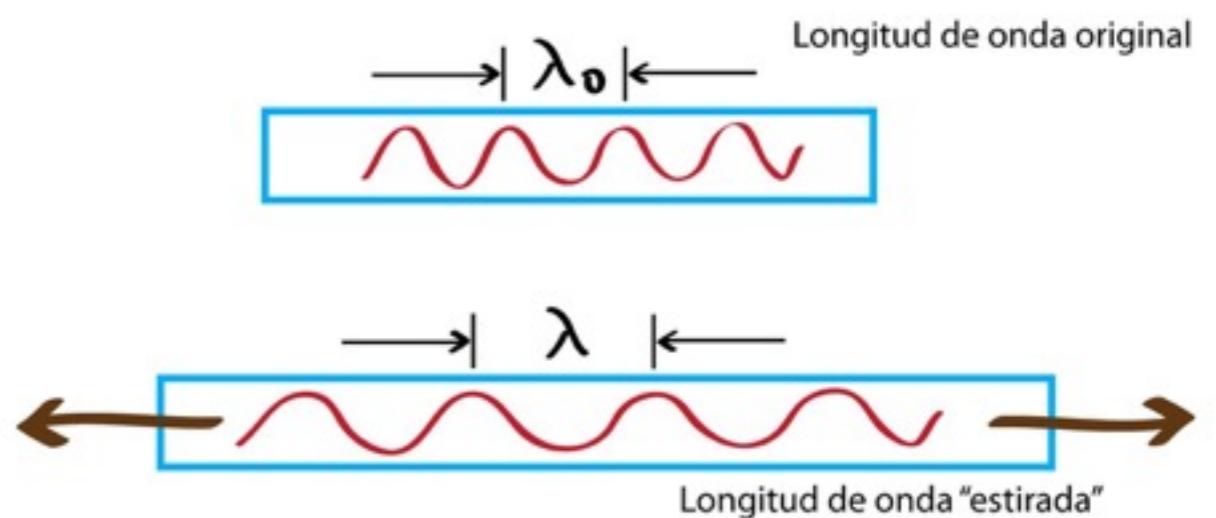
- ¡Qué es la ley de Hubble-Humanson!



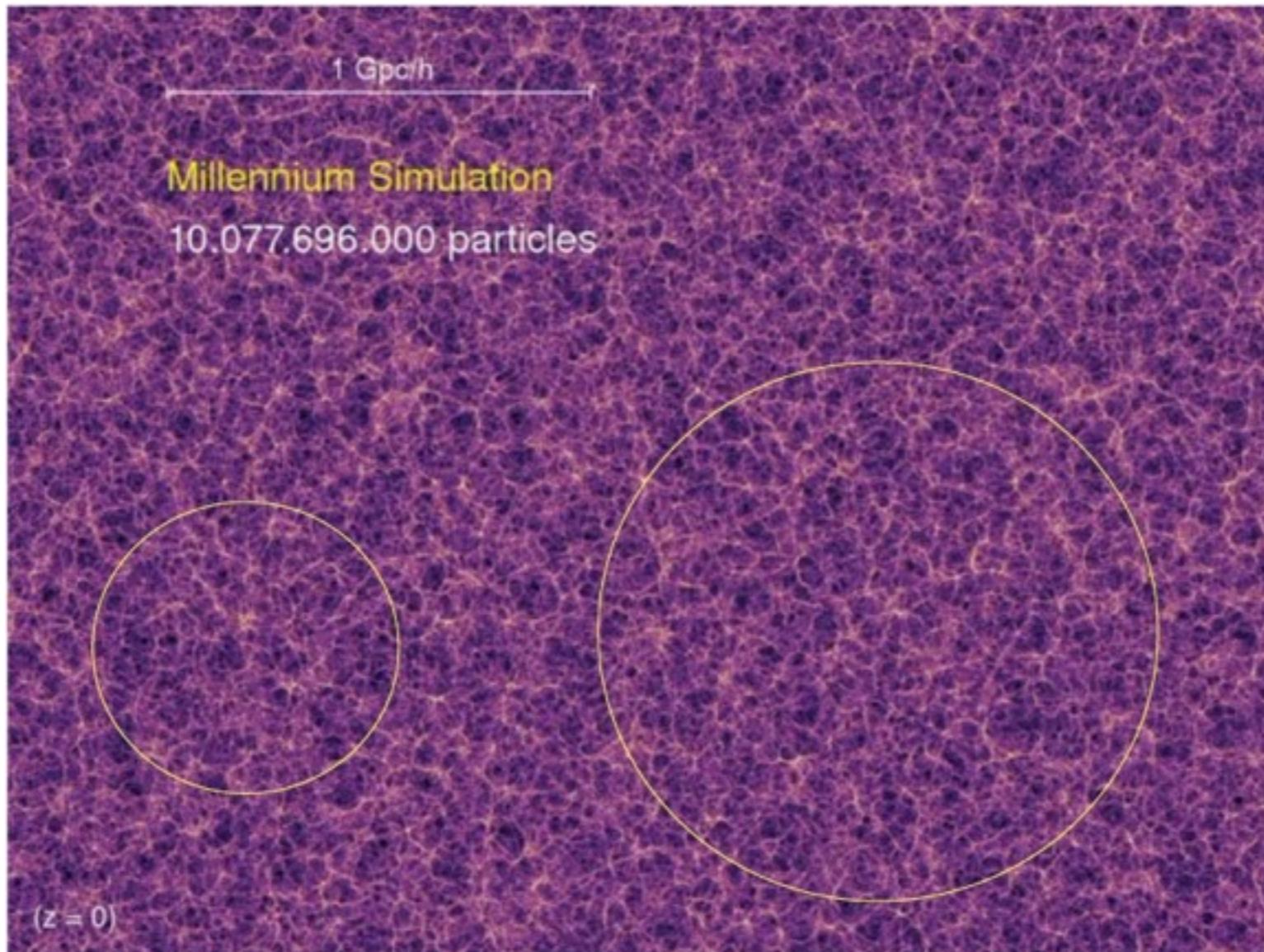
Corrimiento al rojo por la expansión del Universo



$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)} \equiv 1 + z$$



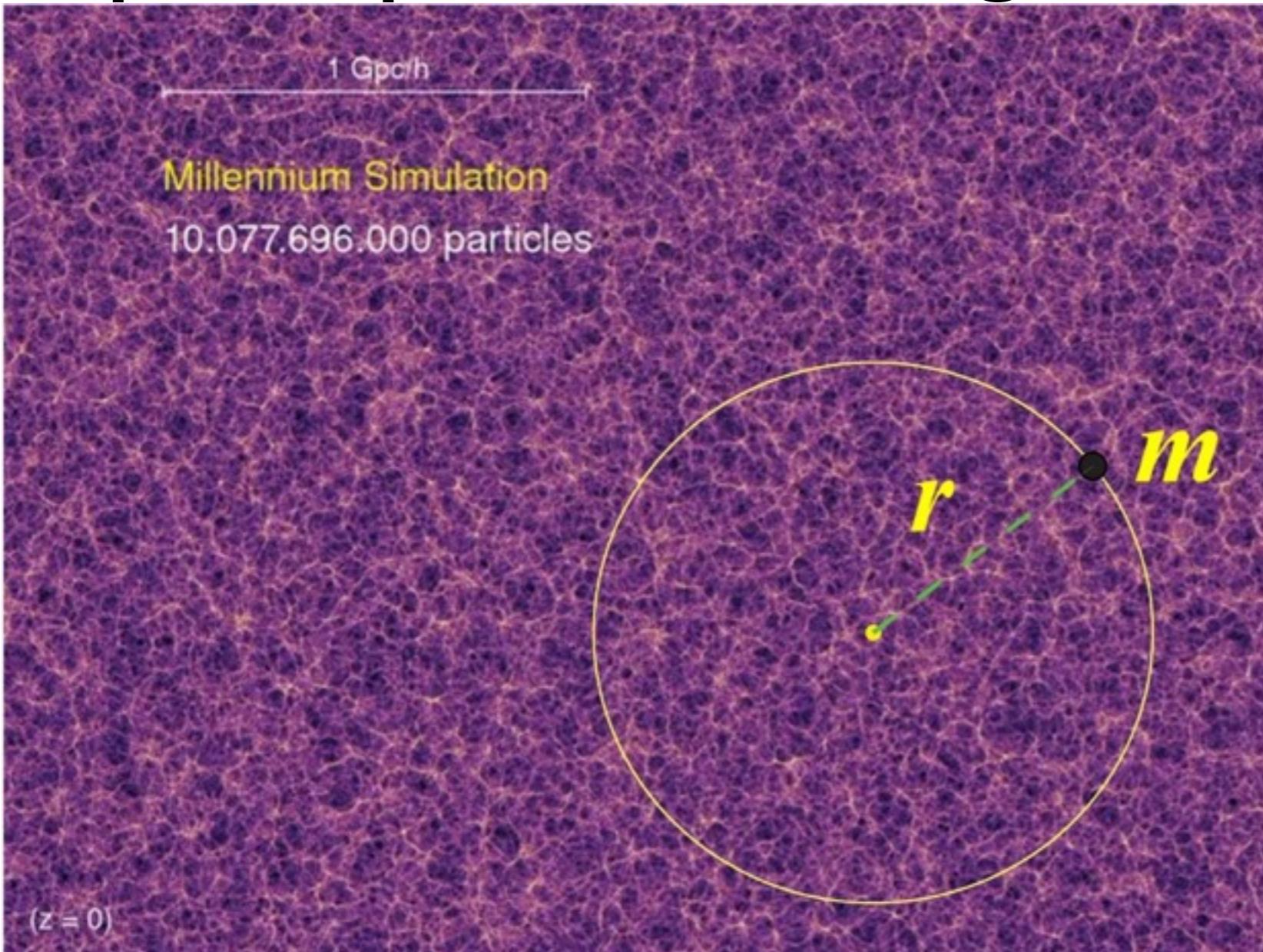
El principio cosmológico ...



Validez del principio cosmológico ...



El principio cosmológico ...



Llegamos a la ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho - \frac{k c^2}{a^2}$$

$$\rho = \sum_i \rho_i$$

$$p_i = w_i \rho_i$$

$$U = -\frac{GM(r)m}{r}$$

$$\text{con } M(r) = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m$$

Recordar que $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$

$$\text{y } v = H(t)r$$

$$\text{con } H(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

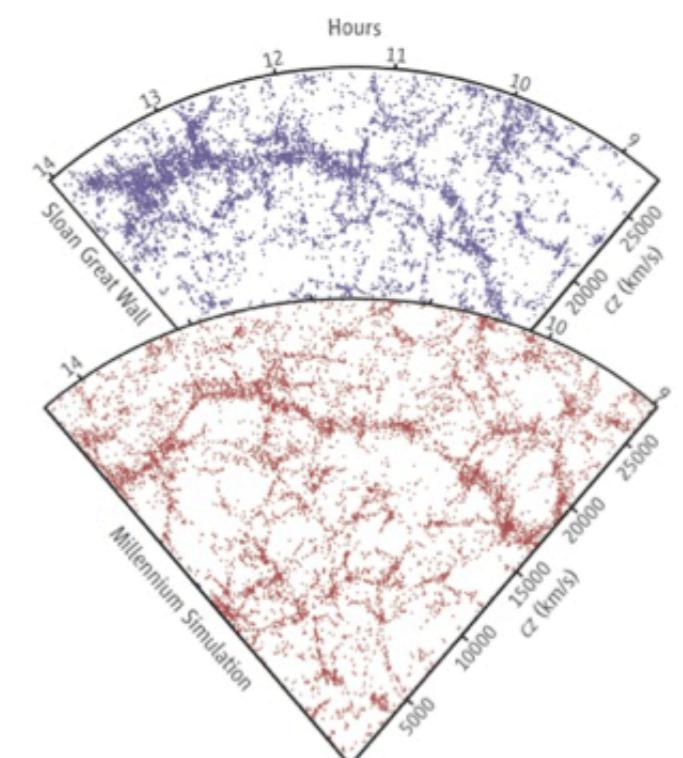
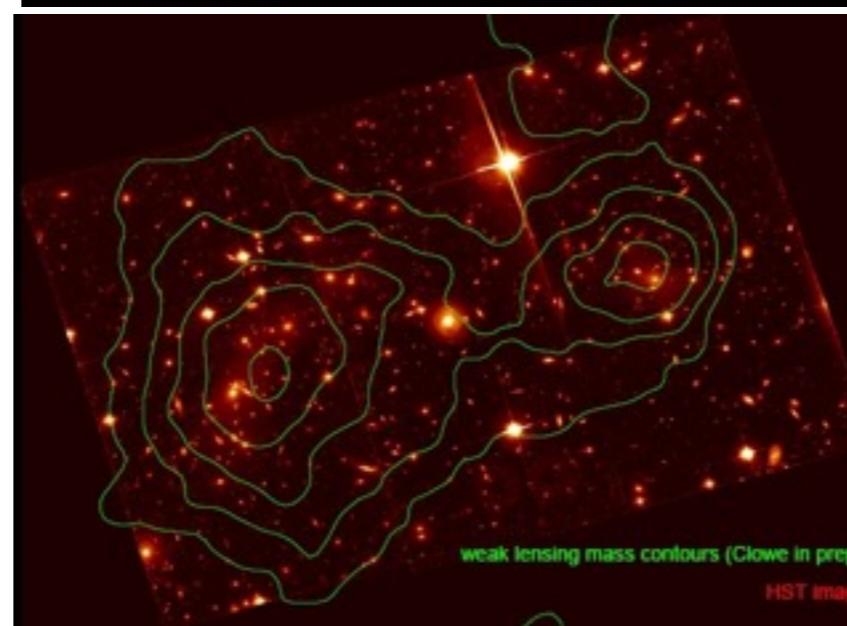
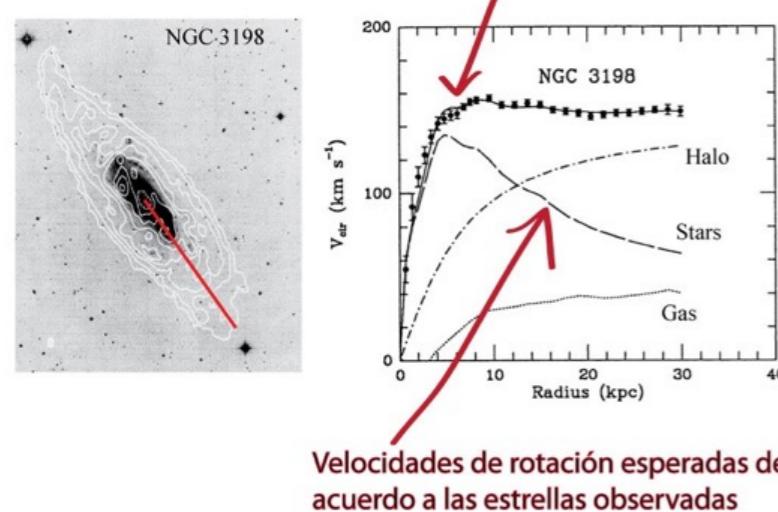
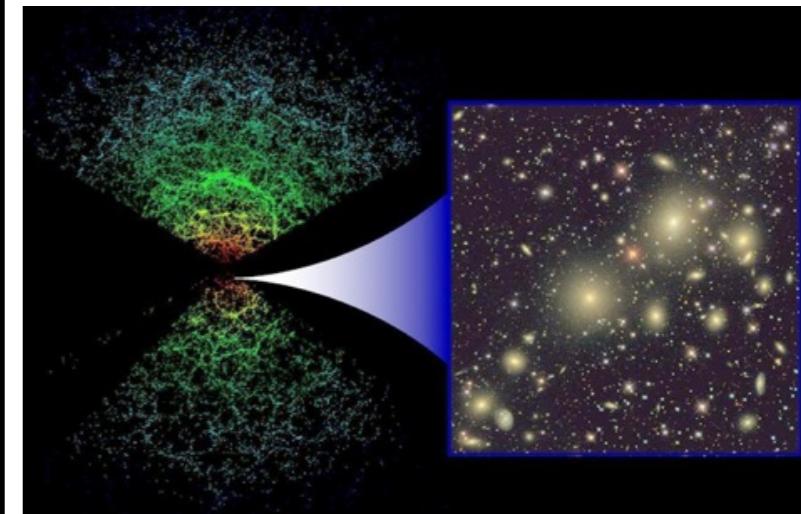
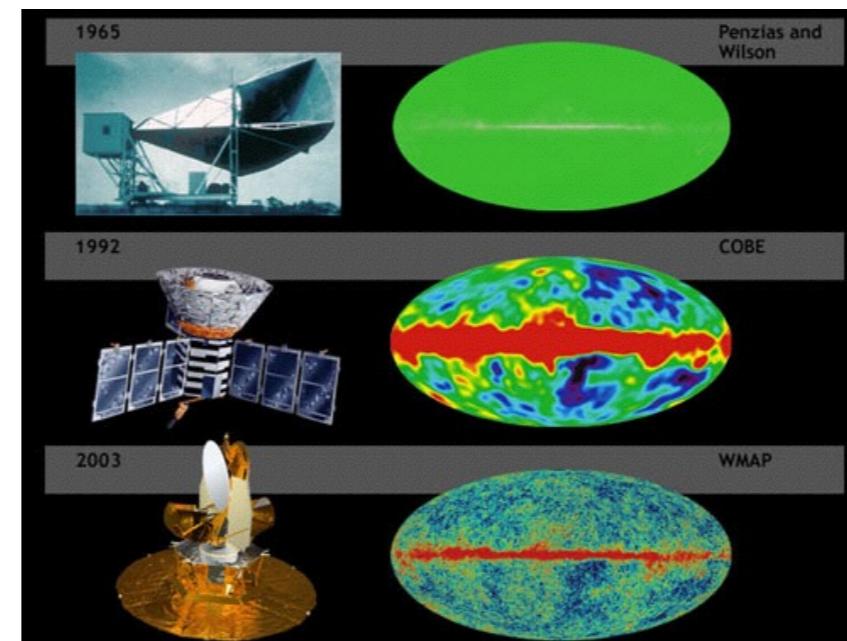
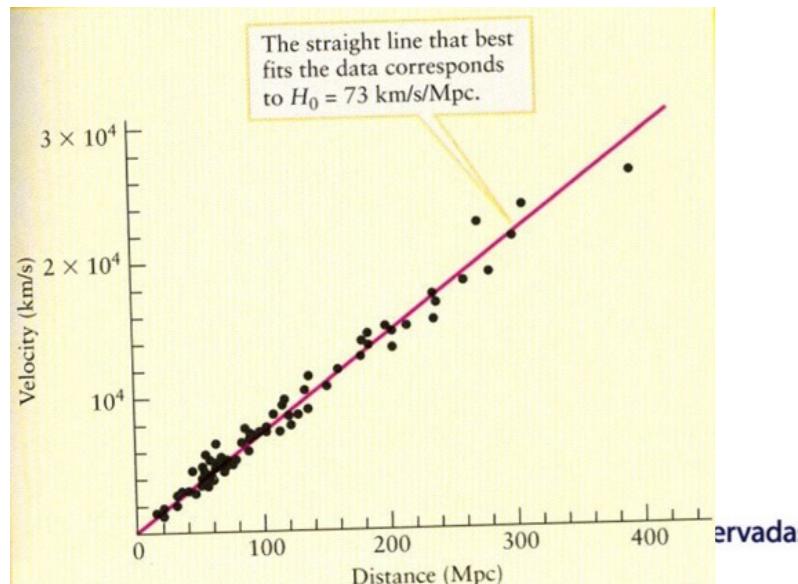
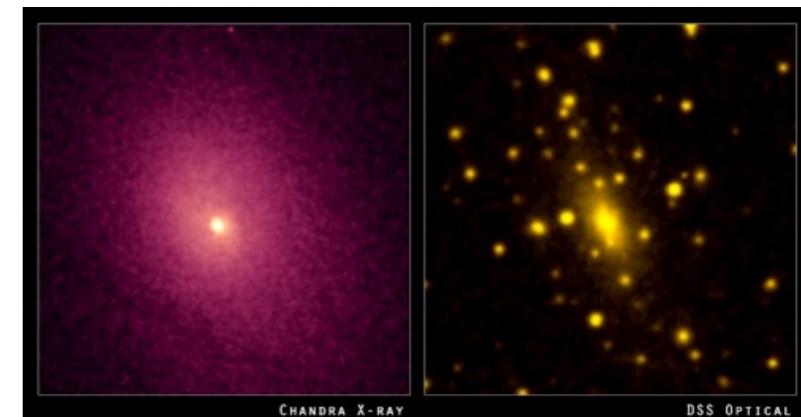
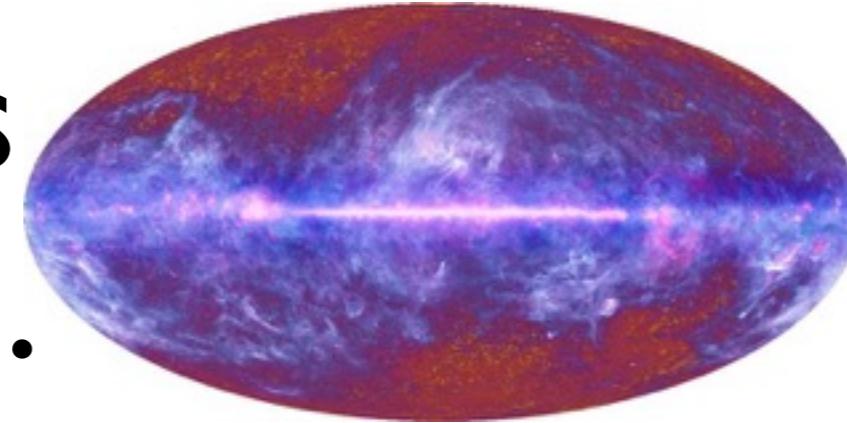
$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{4\pi G}$$

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}$$



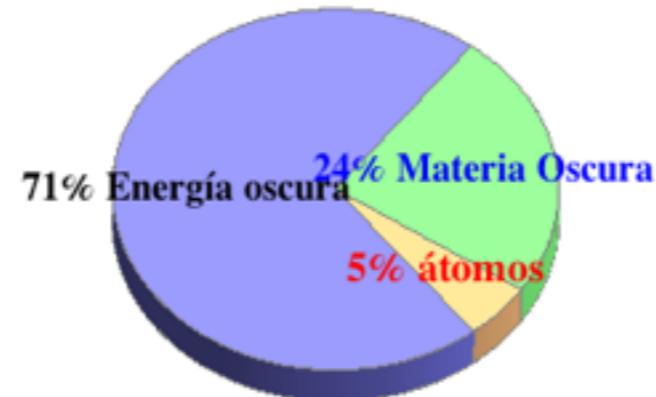
$$\text{Ecuación de fluido: } \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_i + \frac{p_i}{c^2} \right) = 0$$

Resumen de las observaciones...



¡Todo esto nos da! ...

El modelo Λ CDM con el “pie” cosmológico ...

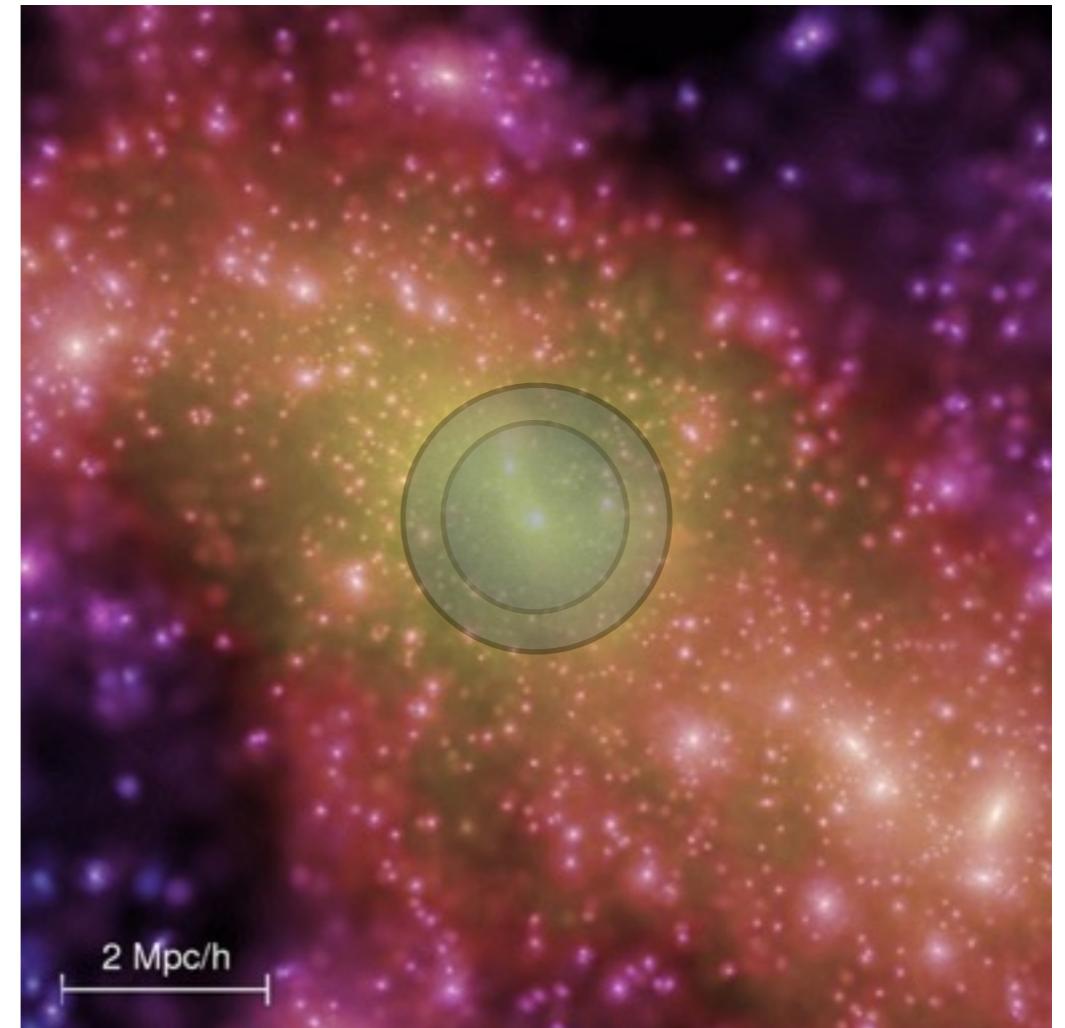


- > O conocido también como el modelo de concordancia.
- > La constante de Hubble es 68 km/s/Mpc y la edad del Universo es de 13,800 millones de años.
- > A gran escala el Universo es homogéneo e isótropo con una geometría plana.
- > La materia oscura es fría (no relativista en el desacople). La energía oscura es una constante, llamada Λ .



Problemas con el modelo Λ CDM

- El número de satélites predicho por el modelo, para una galaxia como la Vía Láctea, es como un orden de magnitud mayor que el valor observado.
- Los perfiles de densidad predichos para los halos o los cúmulos de halos son picudos, i.e., divergen en el origen como $1/r$.
- Pero además y más fundamentalmente, el modelo no responde las preguntas: ¿qué son la materia y energía oscuras?



$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}$$



Modelos de materia oscura

- Machos, WIMP's ...
- Relatividad general con ecuaciones de estado.
- Teorías $f(R)$
- MOND (MOdified Newtonian Dynamics)
- Campos escalares con acoplamiento mínimo y no mínimo.



Comercial: Al dos por uno...

