$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + I(V) = \frac{\mathcal{E} - U}{R}, \text{ где I(U)- ток в лампе} \tag{1}$$

Рассмотрим стационарный режим (напряжение U на конденсаторе постоянно). Сила тока в таком случае определяется уравнением

$$I_{\text{ст}} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} \tag{2}$$

Стационарный режим работы схемы определяется путём совместного решения уравнения (2) и уравнения $I = I(U)$, описывающего ВАХ лампы. Очевидно, что точка пересечения существует не при всех R. Случай, когда

$$R = R_{\text{кр}} = \tfrac{\mathcal{E} - U}{I_{\text{г}}}$$

является критическим, при дальнейшем увеличении сопротивления R стационарный режим оказывается невозможным. Именно в этом случае ($R > R_{\text{кр}}$) в системе устанавливаются колебания.

Рассмотрим, как происходит колебательный процесс. Пусть вначале конденсатор не заряжен. При включении схемы он начнет заряжаться через сопротивление R, напряжение U при этом будет увеличиваться. Как только оно достигнет напряжения зажигания $U_{\text{з}}$, газ в лампе начнет проводить ток, причем прохождение тока через лампу сопровождается разрядкой конденсатора. Действительно, нагрузочная прямая в этом случае не пересекается с характеристикой лампы, и значит, батарея $\mathcal{E}$, включенная через сопротивление R, не может поддерживать необходимую для горения лампы величину тока. Пока лампа горит, конденсатор разряжается, и напряжение на нем падает. Когда оно достигнет напряжения гашения $U_{\text{г}}$, лампа перестанет проводить ток, и конденсатор вновь начнет заряжаться. Очевидно, амплитуда колебаний равна $U_{\text{з}} - U_{\text{г}}$. Как ясно из предыдущего, условие возникновения колебаний имеет вид

$$R > R_{\text{кр}} = \tfrac{\mathcal{E} - U}{I_{\text{г}}}$$

Вычеслим период колебаний. Полное время одного колебания T будет складываться из времени зарядки τ_1 и времени зарядки τ_2. Во время зарядки конденсатора лампа не горит (и врут календари), ток через нее $I(V) = 0$, и уравнение (2) принимает вид

$$RC\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E} - U \tag{3}$$

Если отсчитывать время от момента гашения лампы, то

$$U(t = 0) = U_{\text{г}},$$

и уравнение (2) имеет решение

$$U(t) = \mathcal{E} - (\mathcal{E} - U_{\text{г}}) \exp\left[-\frac{t}{RC}\right] \tag{4}$$

Отсюда получаем время зарядки

$$\tau_1 = RC \cdot \ln\frac{\mathcal{E} - U_{\text{г}}}{\mathcal{E} - U_{\text{з}}} \tag{5}$$

Мы будем представлять ВАХ лампы в виде:

$I(U) = \frac{U - U_0}{R_0}$

При этом уравнение (1) примет вид

$$C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{U - U_0}{R_0} = \frac{\mathcal{E} - U}{R} \tag{6}$$

Переобозначим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \tag{7}$$

С учётом (7) получим

$$C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + U\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right) = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{U_0}{R_0}\right) \tag{8}$$

$$\rho C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + U = \rho\left(\frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{U_0}{R_0}\right) \tag{9}$$

Будем полагать, что при $t = 0$ напряжение $U = U_{\text{з}}$. Решая линейное неоднородное дифференциальное уравнение (9), получаем:

$$U(t) = \rho\left(\frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{U_0}{R_0}\right) + \left[U_{\text{з}} - \rho\left(\frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{U_0}{R_0}\right)\right]\exp\left(-\frac{t}{\rho C}\right) \tag{10}$$

За время $t = \tau_2$ напряжение упадет до $U_{\text{г}}$:

$$U_{\text{г}} = \rho\left(\frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{U_0}{R_0}\right) + \left[U_{\text{з}} - \rho\left(\frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{U_0}{R_0}\right)\right]\exp\left(-\frac{\tau_2}{\rho C}\right) \tag{11}$$

И, окончательно, это нам даст время разрядки

$$\tau_2 = \rho C \ln\frac{(U_{\text{з}} - U_0)R + (U_{\text{з}})}{(U_{\text{г}} - U_0)R + (U_{\text{г}})} \tag{12}$$

Таким образом, мы, зная из уравнений (5) и (12) соответственно τ_1 и τ_2, сможем найти период колебаний

$$T = \tau_1 + \tau_2$$