Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Параллельные численные методы

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

При поддержке компании Intel

Баркалов К.А.,
Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Содержание

- Основные понятия
  - Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), системы ОДУ
- Численные методы решения ОДУ
  - Метод Эйлера
  - Методы Рунге-Кутта
  - Методы Адамса
- Параллельное решение систем ОДУ
  - Системы общего вида
  - Разреженные системы

Основные понятия

- Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$u' = f(x,u) \quad , \quad x \in [a,b] \ .$$

- *Решение* – $u(x)$, обращающая уравнение в тождество.
- Решение определяется единственным образом, если

$$u_0 = u(x_0), x_0 = a$$

- Условия существования и единственности решения см., напр., в [Тихонов]
- Аналитически решить *задачу Коши* можно лишь для некоторых специальных видов уравнений.
- Численное решение задачи – построение таблицы приближенных значений u_i искомого решения $u(x)$ на некоторой сетке $x_i \in [x_0, b]$ значений аргумента x.

Основные понятия

- Система ОДУ

$$
\begin{aligned}
u_1' &= f_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad u_1(x_0) = u_1^0 \\
u_2' &= f_2(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad u_2(x_0) = u_2^0 \\
&\ldots \\
u_n' &= f_n(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad u_n(x_0) = u_n^0
\end{aligned}
$$

- Если ввести векторные обозначения

$$U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T \quad F = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T$$

то формальная запись системы будет выглядеть как

$$U' = F(x, U) \quad U^0 = U(x^0)$$

- Можно обобщить методы, применимые для одного уравнения, для решения систем уравнений, заменив скалярные операции векторными.

Основные понятия

- Системы ОДУ возникают:
  - из мат.модели задачи (например, система «хищник-жертва»);
  - при решении уравнений высших порядков;

    Например, уравнение 2-го порядка

    $$u'' = f(x,u,u') \quad u_0 = u(x_0) \quad u_0' = u'(x_0)$$

    сводится к системе уравнений 1-го порядка

    $$\begin{array}{ll} u' = z & u_0 = u(x_0) \\ z' = f(x,u,z) & z_0 = u'(x_0) \end{array}$$

    с помощью замены переменных
  - При решении дифференциальных уравнений в частных производных методом частичной дискретизации (подробнее рассмотрим позже).

Метод Эйлера

- Занимает ключевую позицию в численных методах решения дифференциальных уравнений.
- Пусть известно приближенное значение v_i в точке x_i (в начале расчетов известно $v_0 = u_0$ в точке x_0).
- Разложим решение в ряд Тейлора в окрестности x_i

$$u(x_i + h) = u(x_i) + u'(x_i)h + \ldots + \frac{u^{(p)}(x_i)}{p!}h^p + \frac{u^{(p+1)}(\xi_i)}{(p+1)!}h^{p+1}, \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

- Отбрасывая слагаемые порядка $O(h^2)$, получаем расчетную формулу метода Эйлера

$$v_{i+1} = v_i + hf(x_i, v_i)$$

- Остаточный член ряда Тейлора можно использовать как локальную погрешность метода

$$r_i(h) = \frac{u''(\xi_i)}{2}h^2$$

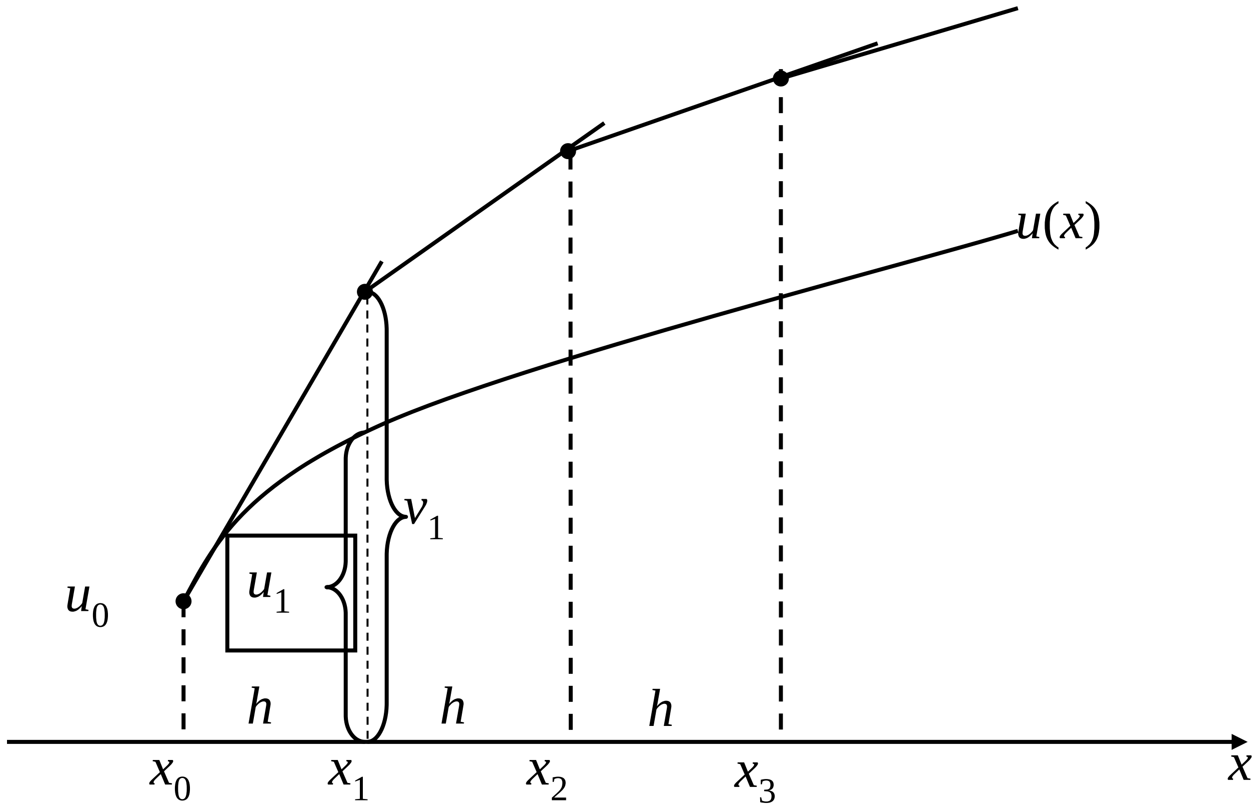
Погрешность метода Эйлера

- Остаточный член ряда Тейлора можно использовать как локальную погрешность метода

$$r_i(h) = \frac{u''(\xi_i)}{2} h^2$$

- За *n* шагов метода образуется *глобальная погрешность*. Известно (см., например, [Вержбицкий]), что порядок глобальной погрешности (относительно шага *h*) на единицу ниже, чем порядок локальной.
- Таким образом, локальная ошибка метода Эйлера есть величина порядка $O(h^2)$, глобальная – $O(h)$, т.е. метод Эйлера относится к методам первого порядка

Графическая интерпретация метода



Повышение порядка метода

- Учтем члены второго порядка в разложении

$$u(x_i + h) = u(x_i) + u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)}{2}h^2 + O(h^3)$$

- Первая производная известна из уравнения $u'(x_i) = f(x_i, u_i)$
- Вторую производную можно найти как

$$u''(x) = f_x'(x,u) + f_u'(x,u)u' = f_x'(x,u) + f_u'(x,u) f(x,u)$$

- Отбрасывая члены порядка $O(h^3)$ получаем метод порядка 2

$$v_{i+1} = v_i + h\left[f(x_i, v_i) + \frac{h}{2}\left(f_x'(x_i, v_i) + f_u'(x_i, v_i) f(x_i, v_i) \right) \right]$$

где v_i – приближенное значение функции u_i.

- Недостаток: нужно вычислять частные производные функции $f(x,u)$ на каждом шаге метода.

Методы Рунге-Кутта

- Идея методов Рунге-Кутта (РК) – построить формулу вида

$$v_{i+1} = v_{i+1} + h\varphi(x_i, u_i, h)$$

где $\varphi(x_i, u_i, h)$ – функция, приближающая отрезок ряда Тейлора до *p*-го порядка и не содержащая частных производных $f(x,u)$. Рассмотрим простейшие методы РК.

- Пусть известно $u(x)$, и нужно вычислить $u(x+h)$. Рассмотрим равенство

$$u(x+h) = u(x) + \int_0^h u'(x+t)dt$$

- Заменим интеграл на величину $hu'(x)$, получим

$$u(x+h) = u(x) + hf(x, u(x)) + O(h^2)$$

- Отбрасывая члены порядка $O(h^2)$ получаем метод Эйлера

$$v_{i+1} = v_i + hf(x_i, v_i)$$

Методы Рунге-Кутта 2-го порядка

- Более точная аппроксимация интеграла будет давать более точные расчетные формулы. Применим формулу трапеций, получим

$$u(x+h)=u(x)+\frac{h}{2}\big(u'(x)+u'(x+h)\big)+O(h^3)$$

что равносильно

$$u(x+h)=u(x)+\frac{h}{2}\big(f(x,u(x))+f(x+h,u(x+h))\big)+O(h^3)$$

- Отбрасывая члены $O(h^3)$, получаем *неявную формулу Адамса* второго порядка

$$v_{i+1}=v_i+\frac{h}{2}\big(f(x_i,v_i)+f(x_{i+1},v_{i+1})\big)$$

- В общем случае данное уравнение неразрешимо относительно v_{i+1}, (спец. случай - линейность функции f).

Методы Рунге-Кутта 2-го порядка

- Заменим $u(x+h)$ в правой части на некоторую величину

$$k=u(x+h)+O(h^2).$$

- Тогда правая часть изменится на величину порядка $O(h^3)$

$$\frac{h}{2}\big(f(x,k)-f(x+h,u(x+h))\big)=\frac{h}{2}f'_u(x+h,\bar{u})(k-u(x+h))=O(h^3)$$

и будет выполняется соотношение

$$u(x+h)=u(x)+\frac{h}{2}\big(f(x,u(x))+f(x+h,k)\big)+O(h^3)$$

- Осталось только предложить подходящий выбор величины k.

Методы Рунге-Кутта 2-го порядка

- Соотношению $k=u(x+h)+O(h^2)$ удовлетворяет результат вычислений по формуле Эйлера, т.е.

$$k = u(x) + hf(x_i, u(x))$$

- Сведя все воедино, получаем расчетные формулы метода Рунге-Кутта 2-го порядка

$$k = v_i + hf(x_i, v_i)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{2}\big(f(x_i, v_i) + f(x_{i+1}, k)\big)$$

- Метод – двухэтапный: 1) расчет k 2) расчет v_{i+1}.
- Правая часть $f(x,u)$ вычисляется два раза.

Методы Рунге-Кутта 2-го порядка

- Построим другую пару формул с погрешностью такого же порядка. Применим формулу прямоугольников, получим

$$u(x+h)=u(x)+hu'\left(x+h/2\right)+O(h^3)$$

Что равносильно

$$u(x+h)=u(x)+hf\left(x+h/2,u\left(x+h/2\right)\right)+O(h^3)$$

- Если рассмотреть вспомогательную величину

$$k=u\left(x+h/2\right)+O(h^2)$$

то, как и в предыдущем случае, получим

$$u(x+h)=u(x)+hf\left(x+h/2,k\right)+O(h^3)$$

- Как выбрать k?

Методы Рунге-Кутта 2-го порядка

- В качестве величины *k* можно взять результат вычислений по формуле Эйлера с половинным шагом.
- В итоге получаем расчетные формулы

$$k = v_i + \frac{h}{2} f(x_i, v_i)$$

$$v_{i+1} = v_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, k)$$

- Метод – двухэтапный: 1) расчет k 2) расчет v_{i+1}.
- Правая часть $f(x,u)$ вычисляется два раза.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

- Когда говорят «метод Рунге-Кутта», не сообщая о нем никаких дополнительных сведений, то под этим подразумевают именно данный классический метод четвертого порядка.

$$k_1 = f(x_i, v_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, v_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, v_i + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, v_i + h k_3\right)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Метод является четырехэтапным (4 раза вычисляется $f(x,u)$)

Общий вид методов Рунге-Кутта

- В процессе вычислений фиксированы некоторые числа a_i, b_{ij}, $i=2,3,\ldots, m$, $j=1,2,\ldots, m-1$, и c_i, $i=1,2,\ldots, m$, с помощью которых вычисляются величины $k_1,\ldots,k_m$ и находится значение v_{i+1}:

$$k_1 = f(x_i, v_i) \qquad k_2 = f(x_i + a_2 h, v_i + b_{21} h k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + a_3 h, v_i + b_{31} h k_1 + b_{32} h k_2)$$

$$\ldots$$

$$k_m = f(x_i + a_m h, v_i + b_{m1} h k_1 + b_{m2} h k_2 + \ldots + b_{m-1,2} h k_{m-1})$$

$$v_{i+1} = v_i + h \sum_{i=1}^{m} c_i k_i$$

- Метод – явный, *m*-этапный.
- В [Хайрер] приведены формулы 18-и этапного метода Рунге-Кутта 10-го порядка.

Контроль локальной погрешности

- Одной и той же погрешности можно достичь, если вести интегрирование с большим шагом в области, где решение изменяется плавно, и с малым шагом – в области резкого изменения решения.
- Как определить величину шага?
- Расчет следующей точки провести в два этапа
  – за один шаг длины *h*, получаем значение v_{i+1} ;
  – за два шага длины *h*/2, получаем значение $\bar{v}_{i+1}$.
- Вычислить величину

$$S = \frac{\bar{v}_{i+1} - v_i}{2^p - 1}$$

где *p* – порядок метода.

Контроль локальной погрешности

1. Если $|S|>\varepsilon$, то положить $h=h/2$, и провести расчет из i-й точки заново.
2. Если $2^{p+1}<|S|\le\varepsilon$, то оставить шаг неизменным, и перейти к расчету следующей точки.
3. Если $|S|<2^{p+1}$, то положить $h=2h$, и перейти к расчету следующей точки.

- Вычисление v_{i+1} и $\bar{v}_{i+1}$ может быть проведено параллельно.
- Предложенный подход является относительно трудоемким. Например, для подсчета одной следующей точки с контролем локальной погрешности по методу Эйлера потребуется три раза вычислить правую часть уравнения $f(x,u)$, а в случае использования метода Рунге-Кутта 4-го порядка число вычислений правой части возрастет до 12-и.
- v_{i+1} и $\bar{v}_{i+1}$ можно вычислять, используя методы разных порядков.

Методы Адамса

- Рассмотрим иной подход к построению численных алгоритмов решения задачи Коши для ОДУ.
- Пусть найдено несколько приближенных значений v_i решения $u(x)$ на равномерной сетке $x_i=x_0+ih$, и надо найти v_{i+1}.
- Проинтегрируем ОДУ от x_i до x_{i+1}

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx$$

- Функция $f(x,u(x))$ как функция одного аргумента x в общем случае не известна, но известны ее приближенные дискретные значения $f(x_i,v_i)$. Значит, $f(x,u(x))$ можно заменить интерполирующим ее полиномом. При этом для построения полинома k-й степени можно использовать либо узлы x_j, $j=i-k,\ldots, i$ (обозначим такой полином $P_k(x)$), либо узлы x_j, $j=i-k+1,\ldots, i+1$ (обозначим такой полином $Q_k(x)$)

Методы Адамса

- Подстановка полиномов приводит к формулам

Адамса-Башфорта $$v_{i+1} = v_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_k(x)dx$$

Адамса-Моултона $$v_{i+1} = v_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_k(x)dx$$

- Методы Адамса-Башфорта – экстраполяционные, Адамса-Моултона – интерполяционные
- Построение интерполяционных полиномов $P_k(x)$, $Q_k(x)$ и их интегрирование можно найти в [Вержбицкий]

Методы Адамса-Башфорта

- Запишем формулы, соответствующие нескольким первым значениям параметра *k*.

k=0: $v_{i+1} = v_i + hf(x_i, v_i)$

k=1: $v_{i+1} = v_i + \frac{h}{2}\left(3f(x_i, v_i) - f(x_{i-1}, v_{i-1})\right)$

k=2: $v_{i+1} = v_i + \frac{h}{12}\left(23f(x_i, v_i) - 16f(x_{i-1}, v_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, v_{i-2})\right)$

k=3: $v_{i+1} = v_i + \frac{h}{24}\left(55f(x_i, v_i) - 59f(x_{i-1}, v_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, v_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, v_{i-3})\right)$

- Локальная погрешность метода Адамса-Башфорта является величиной $O(h^{k+2})$, глобальная – величиной $O(h^{k+1})$.
- Под *шаговостью* метода понимается количество значений решения, используемое в расчетной формуле

Методы Адамса-Моултона

- Запишем формулы, соответствующие нескольким первым значениям параметра *k*.

k=0: $v_{i+1} = v_i + hf(x_{i+1}, v_{i+1})$

k=1: $v_{i+1} = v_i + \frac{h}{2}\left(f(x_{i+1}, v_{i+1}) + f(x_i, v_i)\right)$

k=2: $v_{i+1} = v_i + \frac{h}{12}\left(5f(x_{i+1}, v_{i+1}) + 8f(x_i, v_i) - f(x_{i-1}, v_{i-1})\right)$

k=3: $v_{i+1} = v_i + \frac{h}{24}\left(9f(x_{i+1}, v_{i+1}) + 19f(x_i, v_i) - 5f(x_{i-1}, v_{i-1}) + f(x_{i-2}, v_{i-2})\right)$

- Локальная погрешность метода Адамса-Моултона является величиной $O(h^{k+2})$, глобальная – величиной $O(h^{k+1})$.
- Для методов Адамса-Моултона порядок шаговости на единицу ниже порядка точности метода (за исключением *k*=0).

Схема предиктор-корректор

- Методы Адамса-Башфорта – явные, Адамса-Моултона – неявные. Непосредственное применение методов Адамса-Моултона возможно, напр., в случае линейности функции $f(x,u)$.
- Обычно явные и неявные методы (одного или смежных порядков) применяются совместно, образуя так называемую схему прогноза и коррекции (предиктор-корректор):
  – по явной формуле значение решения задачи в расчетной точке x_{i+1} прогнозируется, т.е. находится его, быть может, грубое приближение;
  – по неявной формуле, в правую часть которой подставляется спрогнозированное значение, оно уточняется (коррекция).
- Пример: парное использование явного метода Эйлера для предсказания и метода трапеций для уточнения (один из методов Рунге-Кутта второго порядка).

Общий вид методов Адамса

$$v_{i+1} = v_i + h\sum_{j=0}^{m} a_j f(x_{i+1-j}, v_{i+1-j})$$

где m – натуральное число. При $a_0=0$ формула определяет явные, а при $a_0 \neq 0$ – неявные методы.

- При любом порядке метода Адамса для реализации одного шага требуется вычисление лишь одного нового значения функции (или двух в схеме предиктор-корректор).
- Выгодно применять многошаговые методы высоких порядков
- Проблема вычисления первых $m-1$ «разгонных» значений $v_1, \ldots, v_{m-1}$:
  – специальные расчетные формулы;
  – использовать одношаговые методы Рунге-Кутта.

Решение систем ОДУ

Параллельное решение систем ОДУ

- При применении метода Эйлера получаем

$$V^{j+1} = V^{j} + hF(x^{j}, V^{j})$$

верхним индексом обозначен номер итерации, а вектор V^j является приближенным значением точного решения $U(x^j)$.

- Вычисление векторов V^j, $j=1, 2, \ldots$, производится последовательно, поэтому распараллеливание возможно лишь при выполнении одной итерации метода:
  – разделим все уравнения системы на $n_p = \lceil n/p \rceil$ блоков;
  – каждый поток проводит вычисление компонент решения v_i^{j+1} только в рамках своего блока
  – после вычисления всех блоков – переход к следующей итерации.
- Синхронизация после проведения каждой итерации

Параллельное решение систем ОДУ

- При применении метода Рунге-Кутта 2-го порядка получаем

$$K^j = V^j + \frac{h}{2} F(x^j, V^j)$$

$$V^{j+1} = V^j + hF(x^j + \frac{h}{2}, K^j)$$

- Очевидно, что в общем случае распараллеливание возможно даже не в рамках одной итерации, а лишь в рамках одного этапа метода. Это опять выводит на первый план накладные расходы на создание/закрытие параллельных секций после каждой итерации в случае быстро вычисляемой правой части.

Метод частичной дискретизации

- Один из известных методов решения уравнений в частных производных (ДУЧП)
- ДУЧП сводится к системе ОДУ.
- Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<1,\ 0<t\le T,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1,\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,\ 0\le t\le T.$$

- По оси X введем равномерную сетку с шагом h с узлами $x_i=ih$, $0\le i\le n$, $h=1/n$; а затем, используя формулу вычисления второй производной, запишем приближенное соотношение

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x_i,t} \approx \frac{u(x_{i+1},t)-2u(x_i,t)+u(x_{i-1},t)}{h^2}, \quad 1\le i\le n-1.$$

Метод частичной дискретизации

- Нужно найти (*n*–1)-у функцию $v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n-1}(t)$ такую, что
  $v_i(t) \approx u(x_i, t)$, $1 \le i \le n-1$.
- Функции можно найти как решение системы ОДУ
  $$v_i'(t) = \frac{v_{i+1}(t) - 2v_i(t) + v_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \le i \le n-1.$$
  из граничных условий $v_0(t)$, $v_n(t)$ - известны
  из начальных условий $v_i(0) = u_0(x_i)$, $1 \le i \le n-1$.
- Полученная нами система ОДУ записывается в матричной форме как
  $$v'(t) = \frac{1}{h^2} A v(t) \qquad v(0) = v^0$$
  где $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n-1}(t)]^T$

Свойства матрицы системы ОДУ

- Матрица *A* трехдиагональная
- в случае решения двумерного уравнения матрица будет пятидиагональной, трехмерного уравнения – семидиагональной.
- Размер системы экспоненциально растет с увеличением размерности.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Система ОДУ, полученная из «одномерного» уравнения при $n=1001$, будет содержать 10^3 уравнений, из «двумерного» – 10^6 уравнений, из «трехмерного» – 10^9 уравнений.

Применение метода Эйлера

- Применим к системе метод Эйлера, то получим

$$v^{j+1} = v^j + \frac{\tau}{h^2} A v^j \text{ , } 0 \le j \le m-1,$$

- В покомпонентной форме это будет записано как

$$v_i^{j+1} = v_i^j + \frac{\tau}{h^2}\left(v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j\right) \text{ , } 1 \le i \le n-1,\ 0 \le j \le m-1,$$

  что соответствует *явной разностной схеме.*
- Аналогично *чисто неявная разностная схема* получается при применении к неявного метода Эйлера, а *схема Кранка-Николсона* – при применении неявного метода Адамса 2-го порядка.
- Указанные разностные схемы будут рассмотрены в следующем разделе.

Решение разреженных систем ОДУ

- Вернемся к общему описанию системы в форме

$$U' = F(x, U) \qquad U(x_0) = U^0$$

- В силу разреженности матрицы *A* аргументы функции f_i будут лежать лишь в некоторой окрестности *i*.
- *Расстояние доступа* $d(F)$ – наименьшее целое *b* такое, что любая функция из правой части имеет доступ лишь к подмножеству $\{w_{j-b}, \dots, w_{j+b}\}$ компонентов вектора *U.*
- Расстояние доступа ограничено, если $d(F) \ll n$.
- В этом случае можно организовать конвейерную схему вычислений. Рассмотрим ее на примере метода Рунге-Кутта четвертого порядка.

Конвейерная схема решения

- Разделим все уравнения системы на $n_B = \lceil n / B \rceil$ блоков размера *B*, где *d*(*F*)≤*B*<<*n*. Тогда при вычислении блока $J = \{1,...,n_B\}$
$$F_J(x,U) = [\, f_{(J-1)B+1}(x,U),..., f_{(J-1)B+\min\{B,n-(J-1)B\}}(x,U)]^T$$
будут использованы только блоки *J*–1, *J*, *J*+1 (кроме очевидного случая граничных блоков). Тогда
  – Первый шаг конвейера: вычисляются 1-й и 2-й блоки коэффициентов K_1^i
  – Второй шаг: вычислить 1-й блок коэффициентов K_2^i, и 3-й блок K_1^i.
  – Третий шаг: вычислить 4-й блок K_1^i и 2-й блок K_2^i.
  – Четвертый шаг: вычислить 5-й блок K_1^i, третий блок K_2^i, и первый блок K_3^i,
  – и т.д.

Конвейерная схема решения

K_1^i	1	1	2	3	4	5	6	7	8	…	
K_2^i	2	3	4	5	6	7	8			…	
K_3^i	4	5	6	7	8					…	
K_4^i	6	7	8							…	
V^i	6	7	8							…	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	

- Отметим, что после вычисления очередного блока K_4^i можно проводить вычисление блока значений V^i, т.к. здесь не содержится трудоемкой операции вычисления правой части $F(x,U)$.

Конвейерная схема решения

- Приведенная схема вычислений позволяет не только организовать конвейер, но и существенным образом сэкономить память:
  – при использовании метода в общем случае потребовалось бы хранить 6*n* значений (для векторов $K_1^i, K_2^i, K_3^i, K_4^i, V^i, V^{i+1}$).
  – при использовании конвейерной схемы достаточно хранить $n + O(n_B)$ значений (вектор *V*, который поблочно пересчитывается из V^i в V^{i+1}, и необходимое количество блоков для очередного шага конвейера).

Заключение

- Рассмотрены
  - Численные методы решения ОДУ
    - Метод Эйлера
    - Методы Рунге-Кутта
    - Методы Адамса
  - Параллельное решение систем ОДУ
    - Системы общего вида
    - Разреженные системы

Литература

1. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы. – М.: Высшая школа, 2001.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
5. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986.
6. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990.

Авторский коллектив

- Баркалов Константин Александрович,
  к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры Математического обеспечения ЭВМ факультета ВМК ННГУ.
  barkalov@fup.unn.ru

- Коды учебных программ разработаны Маловой Анной и Сафоновой Яной