

С. Н. ГУРБАТОВ

---

МЕХАНИКА  
СПЛОШНЫХ  
СРЕД

УДК 532  
ББК 22.253.3

**Гурбатов С.Н.**  
Г 95    Лекции по механике сплошных сред — Изд. ННГУ, 2020.  
— 0 с., илл.  
ISBN 000-0-00000-000-0

*Оформление и вёрстка:  
Сарафанов Ф.Г., Платонова М.В., Есюнин Д.В.*

Книга предназначена для студентов высших учебных заведений направления «радиофизика». Она охватывает курс лекций, читаемый на 3 курсе профессором кафедры акустики радиофизического факультета ННГУ Сергеем Николаевичем Гурбатовым.

УДК 532  
ББК 22.253.3

ISBN 000-0-00000-000-0

© Гурбатов С.Н., 2020

# Оглавление

<b>1. Введение . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1 Исторический экскурс . . . . .	3
1.2 Основные допущения МСС . . . . .	6
<b>2. Гидродинамика идеальной жидкости . . . . .</b>	<b>9</b>
2.1 Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости . . . . .	9
2.2 Связь Лагранжева и Эйлерова описаний . . . . .	11
2.3 Уравнение непрерывности и закон сохранения массы . . . . .	11
2.4 Уравнение Эйлера . . . . .	13
2.5 Закон сохранения энергии идеальной жидкости . . . . .	14
2.6 Закон сохранения импульса . . . . .	15
2.7 Гидростатика . . . . .	18
2.8 Гидростатическое равновесие. Частота Брента – Вяйсяля . . . . .	19
2.9 Уравнение Бернулли . . . . .	21
2.9.1 Случай стационарного движения . . . . .	21
2.9.2 Случай нестационарного невихревого движения . . . . .	23
2.9.3 Энергетический смысл уравнения Бернулли . . . . .	23
2.10 Теорема Томсона. Потенциальные и вихревые движения жидкости . . . . .	26
2.10.1 Нестационарные малые колебания . . . . .	28
2.11 Потенциальные течения несжимаемой жидкости . . . . .	29
2.11.1 Движение сферы в идеальной жидкости . . . . .	31
2.11.2 Парадокс Даламбера-Эйлера . . . . .	33
2.11.3 Присоединённая масса . . . . .	34
2.12 Гидродинамика плоских течений . . . . .	37
2.12.1 Функция тока . . . . .	37
2.12.2 Аналитические функции . . . . .	38
2.12.3 Конформное отображение . . . . .	39
2.12.4 Вихревые движения в идеальной жидкости . . . . .	45
2.12.5 Точечные вихри . . . . .	50
2.13 Поверхностные гравитационные волны . . . . .	55
2.13.1 Волны на мелкой воде . . . . .	59
2.13.2 Волны на глубокой воде . . . . .	60
2.14 Гравитационно-капиллярные волны . . . . .	62
2.15 Внутренние волны . . . . .	65
<b>3. Движение вязкой несжимаемой жидкости . . . . .</b>	<b>68</b>
3.1 Уравнения гидродинамики вязкой жидкости . . . . .	68
3.2 Течение Куэтта . . . . .	74
3.3 Течение Пуазейля . . . . .	75
3.4 Нестационарное движение вязкой жидкости. Вязкие волны . . . . .	77
3.5 Принцип подобия. Формула Стокса . . . . .	79
3.5.1 Формула Стокса . . . . .	80

3.6	Пограничный слой. Формула Прандтля . . . . .	82
3.7	Элементы теории турбулентности . . . . .	88
3.7.1	Устойчивость стационарного течения жидкости . . . . .	88
3.7.2	Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца . . . . .	90
3.7.3	Теория развитой турбулентности . . . . .	92
<b>4.</b>	<b>Сжимаемая жидкость. Звук . . . . .</b>	<b>95</b>
4.1	Монохроматические волны . . . . .	97
4.2	Энергия и интенсивность звуковой волны . . . . .	98
<b>Предметный указатель</b>	. . . . .	<b>102</b>
<b>Список литературы</b>	. . . . .	<b>104</b>

# 1. Введение

Курс **механики сплошных сред**<sup>1</sup> является одним из разделов цикла теоретической физики. В знаменитом курсе теоретической физики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица ему посвящено два достаточно объемных тома [1].

Наш курс рассчитан на радиофизиков: он существенно меньше, чем курсы на специализированных факультетах, и несколько больше внимания уделено волновым процессам.

Студентам радиофизического факультета курс электродинамики и курс МСС читаются в одном семестре. В этих дисциплинах возникают одинаковые уравнения: это одна из причин параллельного прочтения этих курсов, математический аппарат которых в основном базируется на формулах векторного анализа. Стоит отметить, что при этом уравнения МСС существенно сложнее уравнений электродинамики, где базовыми являются линейные уравнения Максвелла.

В списке литературы, предоставленном в конце книги, приведена основная литература по курсу [1-5], дополнительная литература по курсу [6-14], а также монографии, учебники и статьи для углубленного знакомства с отдельными разделами курса.

## 1.1. Исторический экскурс

История развития механики сплошных сред полностью подтверждает наличие тесной связи между становлением науки и запросами практики.

**Механика сплошных сред** – одна из древнейших наук. Ее зарождение началось ещё в античной древности.

Фамилии (но не годы жизни) известных ученых, сделавших вклад в развитие МСС, знают все. Это:

- Аристотель (384-322 г.г. до н.э)
- Архимед (287-212 г.г. до н.э) – закон Архимеда

Средние века:

- Галилей (1564-1642)
- Паскаль (1623-1662)
- Леонардо де Винчи (1452-1519) Это и летательные аппараты, закон Паскаля для давления, наблюдение гидродинамической турбулентности.
- Гюйгенс (1629-1695)
- Ньютон (1642-1727). В своих знаменитых «*Началах*» он приводит теоретический вывод квадратичного закона сопротивления. Именно из законов Ньютона было проведено обобщение на сплошные среды и родилась новая наука «гидромеханика».

<sup>1</sup>Далее будем часто сокращать название дисциплины до «МСС»

Это два академика Российской академии наук:

- Леонард Эйлер (1707-1789) – уравнение Эйлера
- Даниил Бернулли (1700-1782) – уравнение Бернулли

Начало 19 века:

- Даламбер (1717-1783) – парадокс Даламбера
- Лагранж (1736-1813)
- Коши (1789-1857)

Вязкая жидкость:

- Анри Навье (1785-1863)
- Стокс (1819-1903) – уравнение Навье-Стокса

Эксперименты с жидкостью:

- Ж. Пуазейль (1799-1869)

Основы теории турбулентности:

- Осборн Рейнольдс (1842-1912)
- Н.Е.Жуковский (1847-1921) – обтекание крыла, присоединённый вихрь, подъемная сила
- С.А.Чаплыгин (1869-1942)
- Морис Мари Альфред Куэтт (1858-1943) – течение Куэтта

Теории турбулентности и теория устойчивости:

- Людвиг Прандтль (1875-1953)
- Теодор Карман (1881-1963)
- Колмогоров А.Н. (1903-1987), Обухов А.М. (1918-1989) – Закон Колмогорова-Обухова

Практически все эти фамилии будут встречаться в нашем курсе – их именами названы законы **МСС**.

В наше время бурное развитие получила вычислительная **МСС**. Так, не один новый самолет не получит разрешение на эксплуатацию, если не будет построена его математическая модель, включающая процессы самолета обтекания потоком.

Что же включает современная **МСС**? Книга академика Л.Седова «Краткое перечисление современных проблем» включает 21 пункт и занимает 4 страницы [10]. Здесь мы приведем лишь те, которые тесно связаны с предприятиями и НИИ Нижнего Новгорода, и где работают выпускники радиофака.

- 1) Изучение движения жидкости и газа – движение самолетов, вертолетов, подводных лодок. Возникновение турбулентных следов за объектами. Излучение звука винтами и турбулентными струями.

- 2) Движение жидкости и газа в трубах. Взаимодействие волн в оболочках.
- 3) Волновые движения в жидкостях и газах
  - Волны в твердых телах. Акустическая диагностика, взаимодействие с электромагнитными волнами – линии задержки на ПАВ.
  - Волны на поверхности моря и внутренние волны, их нелинейное взаимодействие. Обнаружение ПЛ по изменению характеристик поверхностного волнения.
  - Волны в каналах, реках. Генерация цунами и набег волн цунами на берег.
  - Сейсмические процессы, нелинейная сейсмодиагностика.
  - Звуковые волны, гидроакустика, акустика океана
- 4) Теория турбулентности – гравитационная неустойчивость
- 5) Биологическая механика, движение крови в сосудах, диагностика на различных типах волн – сдвиговые волны

В Нижнем Новгороде работает один из крупнейших институтов Российской академии наук – **Институт прикладной физики**<sup>2</sup>, тесно занимающийся широким спектром задач, в том числе изучаемыми в нашем курсе.

ИПФ РАН входит в структуру Нижегородского научного центра РАН, в который так же входят такие институты, как **Институт физики микроструктур РАН**, **Институт проблем машиностроения РАН**.

---

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПФ РАН) был создан на базе нескольких отделов Научно-исследовательского радиофизического института (НИРФИ) Минвуза РСФСР в апреле 1977 года. Основатель и директор института на протяжении первых 25 лет его работы – академик А. В. Гапонов-Грехов, с 2003 по 2015 год институт возглавлял академик А. Г. Литvak, с 2015 года до своего избрания президентом РАН в 2017 году директором института был академик А. М. Сергеев. С 2019 г. директором ИПФ РАН избран член-корреспондент РАН Г.Г. Денисов.

## 1.2. Основные допущения МСС

Вещество можно рассматривать как непрерывную сплошную среду, пренебрегая его молекулярным строением. И одновременно считаем непрерывным распределение всех характеристик жидкости (плотность, скорость, температура, ...).

Это означает, что всякий малый элемент жидкости или газа содержит большое число молекул(или других частиц). То есть когда мы говорим о бесконечно малом элементе жидкости, то везде мы подразумеваем, что «*физически бесконечно малый объем* мал по сравнению с размерами тел, но велик по сравнению с межмолекулярными расстояниями.

Это позволяет применить в МСС хорошо разработанный для непрерывных функций аппарат высшей математики.

Нетривиальный пример применения МСС – **крупномасштабная структура Вселенной**. Оказывает, описать развитие крупномасштабной структуры можно уравнениями гидродинамики газа гравитационно взаимодействующих частиц. Здесь «*Физически бесконечно малый объем* – объем, в котором содержится много галактик.

Существующие на данный момент крупномасштабные образования возникли из-за малых начальных возмущений плотности за счет гравитационной неустойчивости. Обычная материя (атомов различных веществ) (4%), Темная материя неизвестной физической природы (cold dark matter) (23%). Темная энергия (dark energy) (73%), которая играет антигравитационную роль в процессе формирования Вселенной.

Плотность темного вещества в 6–7 раз превосходит плотность барионов, и поэтому рост неоднородностей определяется в основном темным веществом. Именно рост неоднородностей в темном веществе и ответственен за формирование крупномасштабных структур. Барийонная компонента просто следовала за эволюцией темного вещества.

В космологии понятие крупномасштабной структуры относится к распределению галактик и массы темного вещества (на масштабах от одного до нескольких сотен мегапарсек). Современная теория объясняет формирование крупномасштабной структуры Вселенной как следствие роста исходных слабых флюктуаций плотности вещества за счет гравитационной неустойчивости. При этом формирование ярко выраженных элементов структуры происходит на нелинейной стадии. Именно поэтому процесс формирования крупномасштабной структуры принято иногда гравитационной турбулентностью.

Наиболее очевидный путь преодоления сложности учета законов нелинейной эволюции гравитационной неустойчивости на поведение поля плотности вещества состоит в численном моделировании трехмерного движения  $N$  гравитационно взаимодействующих частиц. Альтернативой являются приближенные аналитические решения некоторых уравнений в частных производных, адекватно описывающих рост флюктуаций неоднородной плотности вещества в расширяющейся Вселенной. Первый из этих подходов был предложен Зельдовичем в 1970 году.

Второй аналитический подход к проблеме описания формирования крупномас-

штабной структуры Вселенной [15] базируется на векторном уравнении Бюргерса. В данном подходе многопотоковое движение гравитационно взаимодействующих частиц в особенностях, приводящее к их локализации, моделируется вязким слагаемым в уравнении Бюргерса. В предельном случае исчезающее малой вязкости это эквивалентно слипанию частиц и поэтому данный подход часто называют приближением слипания - adhesion model (см., например, [16, 18, 19, 20]).

Предельная версия модели слипания естественным образом описывает характерную мозаичную структуру распределения вещества во Вселенной. Основные элементы «мозаики» в трехмерном пространстве (вершины, ребра, грани и внутренности ячеек) могут быть ассоциированы с наблюдаемыми структурами трехмерного распределения галактик (компактные скопления галактик, филаменты – цепочки галактик, поверхности со сравнительно высокой плотностью галактик, и темные области между ними, бедные галактиками).

Сама эволюция крупномасштабной структуры Вселенной может трактоваться как непрерывный процесс транспортировки вещества преимущественно из объектов большой размерности к объектам мозаичной структуры, обладающим меньшей размерностью. К примеру, вещество из внутренних ячеек мозаичной структуры (трехмерных объектов) перетекает в ее грани (квазидвумерные объекты), а из них в ребра и вершины мозаичной структуры. В то же время, сами ячейки участвуют в непрерывном движении, деформации и поглощении одних ячеек другими.

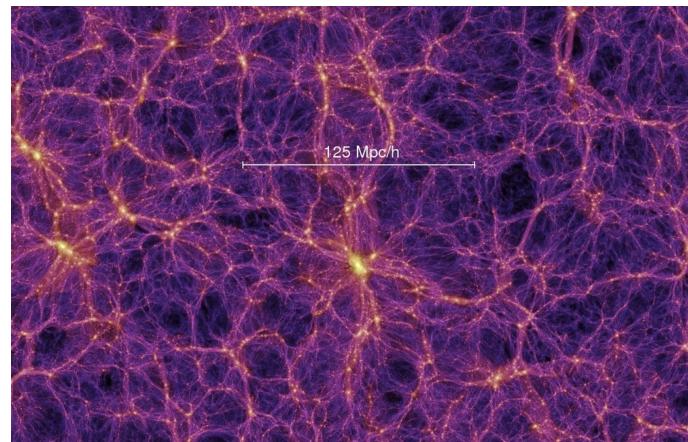


Рис. 1. Крупномасштабная структура Вселенной

В заключение отметим, что результаты динамического моделирования в рамках приближения слипания можно посмотреть на YouTube (**The Sticky Geometry of the Cosmic Web, version 2.01**)

<https://www.youtube.com/watch?v=wI12X2zcqI>

Результаты прямого численного моделирования (N-body simulation) можно также посмотреть на YouTube.

Двухмерный случай:

<https://www.youtube.com/watch?v=nHvcqV92oqY>

<https://www.youtube.com/watch?v=74IsySs3RGU>

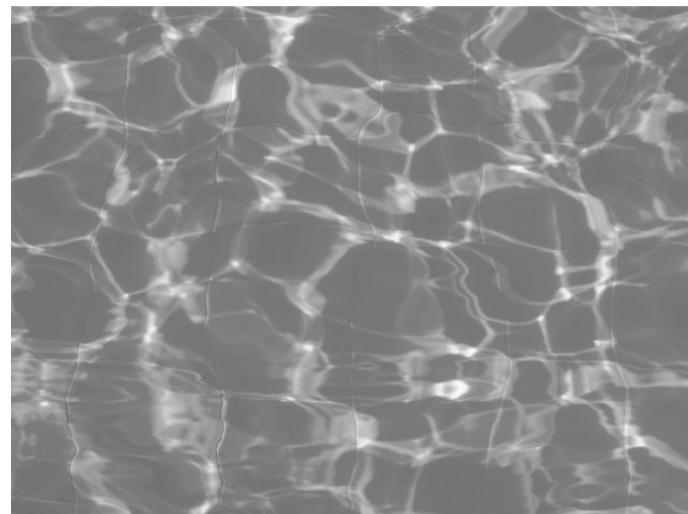


Рис. 2. Система каустик на дне бассейна

Трехмерный случай

<https://www.youtube.com/watch?v=eDGtFRj4xXc>

## 2. Гидродинамика идеальной жидкости

В данном разделе мы рассмотрим законы движения и равновесия идеальной жидкости, то есть жидкости, в которой не учитывается внутреннее трение, и следовательно, нет перехода механической энергии в тепловую. Будем также пренебречь теплообменом между различными объемами жидкости.

Это означает, что все процессы протекают при постоянной энтропии, а состояние жидкости характеризуется одной скалярной величиной – давлением  $p$ . Это, конечно, идеализация, которая приводит к ряду парадоксальных результатов (например, парадокс Даламбера-Эйлера – сила сопротивления при равномерном движении тела в жидкости равна нулю). Тем не менее, без этой идеализации невозможно дальнейшее изучение реальных ситуаций.

### 2.1. Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости

Прежде чем перейти к выводу уравнений, рассмотрим два альтернативных способа описания движения жидкости. Оба они были предложены Леонардом Эйлером, но один из них носит имя Лагранжа.

**Лагранжево описание.** В основу этого способа положено описание движения отдельных «жидких частиц». При этом все величины, в том числе и координаты частиц жидкости определяются как функции времени  $t$  и некоторых переменных  $\xi_k (k = 1, 2, 3)$ , идентифицирующих определенную частицу («метки» частиц):

$$x_i = x_i(\xi_k, t), \quad P = P(\xi_k, t), \quad \rho = \rho(\xi_k, t), \quad \dots$$

В качестве переменных  $\xi_k$  обычно используют начальные координаты частиц жидкости

$$\xi_i = x_i(\xi_k, t_0)$$

Таким образом, при лагранжевом описании мы следим за определенными частицами жидкости и смотрим, как изменяются во времени их координаты, скорости, ускорения, а также давление, температура, плотность в их окрестности.

При этом скорости  $\vec{v}$  и ускорения  $\vec{a}$  частиц вычисляются по формулам

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

Здесь  $\vec{v}(\xi_k, t)$  – скорость частицы в момент времени  $t$  имела координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

Отметим, что такому описанию соответствует способ исследования реки с помощью геофизических буев с нулевой плавучестью (см. рис. 3).

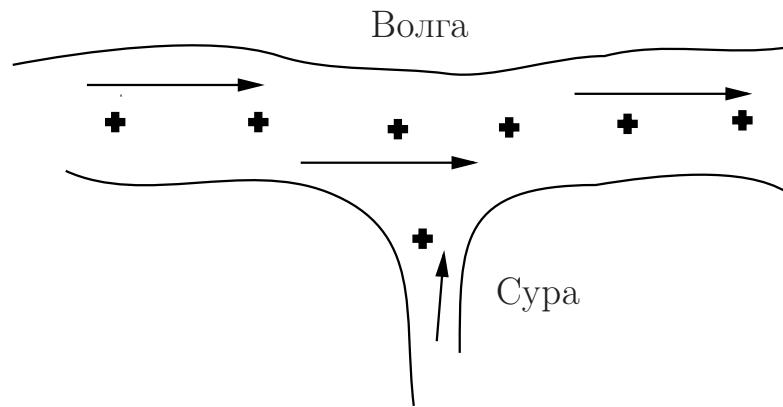


Рис. 3. Схематичная картина Лагранжева и Эйлерова описания

**Эйлерово описание.** В этом случае неподвижное пространство заполнено движущейся жидкостью. Движение жидкости будет определено, если все величины, характеризующие жидкость (скорость движения, давление, плотность, температура и т.д.) будут определены. Это означает, что мы можем проследить, как изменяются эти величины от точки к точке:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad T = T(\vec{x}, t)$$

В Эйлеровом описании мы не знаем, что делается с отдельной частицей.

При этом частные производные от скорости не являются ускорением. Так, если течение стационарно и частная производная по времени равна нулю, частицы в данной точке могут иметь ускорение. Пример – водопад.

Найдем ускорение частицы. За время  $\Delta t$  частица, находящаяся в момент времени  $t$  в точке с координатами  $x_k$ , переместится в точку  $x_k = x_k + \Delta x_k$ . Тогда для  $i$ -ой компоненты ускорения имеем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta t} = \frac{\partial x_k}{\partial t} = v_k$$

$$\begin{aligned} a_i &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(x_k + \Delta x_k, t + \Delta t) - v_i(x_k, t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ v_i(x_k, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t - v_i(x_k, t) \right]}{\Delta t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k + \frac{\partial v_i}{\partial t} \end{aligned}$$

Таким образом

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_i$$

Или в векторной форме

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \right) \vec{v}$$

Аналогично находятся и производные от любой другой величины. Эта производная носит название *субстанциональной производной*:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla)$$

Первое слагаемое здесь – *локальная производная*.

## 2.2. Связь Лагранжева и Эйлерова описаний

Пусть нам известно Эйлерово поле скорости  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ . Чтобы найти, как двигаются Лагранжевы частицы  $\vec{x}(t, \vec{\xi})$ , нам нужно решить уравнение

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(t=0, \vec{\xi}) = \vec{\xi}$$

Как найти Эйлерово поле скорости? Если нам известно поведение лагранжевых частиц  $\vec{x}(t, \vec{\xi})$ , то вначале нам нужно решить уравнение

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{\xi})$$

Решение этого уравнения  $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$  позволяет найти Лагранжеву частицу, которая в момент времени  $t$  попала в точку  $x$ . Отсюда в Эйлеровом представлении

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}\left(t, \vec{\xi}(\vec{x}, t)\right)$$

## 2.3. Уравнение непрерывности и закон сохранения массы

Пусть имеется некоторый объем пространства  $V$ , заполненный движущейся жидкостью. Количество жидкости (масса) в этом объеме:

$$m = \int_V \rho dV,$$

где  $\rho$  - плотность жидкости. Жидкость может притекать и вытекать из объема. Введем элемент поверхности  $d\sigma$  и вектор  $d\vec{\sigma} = d\sigma \vec{n}$ , направленный по внешней нормали к поверхности.

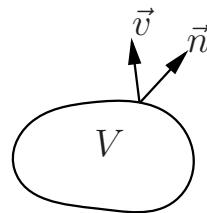


Рис. 4. Объем, скорость и нормаль к поверхности

Поток через элемент поверхности определяется скалярным произведением:

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}$$

Уравнение баланса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}$$

Это интегральный закон сохранения массы. Если на поверхности скорость равна нулю, то масса сохраняется.

Используя формулу Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma} = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV$$

получим

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

Так как объем произвольный, то мы получаем дифференциальный закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Вектор  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  - плотность потока массы. Используя формулу векторного анализа

$$\nabla [ab] = b \nabla a + a \nabla b,$$

перепишем закон сохранения массы в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}(\vec{v})$$

**Несжимаемая жидкость** - плотность частицы вдоль траектории не меняется.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Это означает, что поле скорости соленоидально:  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .

## 2.4. Уравнение Эйлера

Это уравнение описывает движение идеальной жидкости и является аналогом 2 закона Ньютона) классической механики. Запишем второй закон Ньютона для жидкого элемента:

$$\rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_S + \vec{F}, \quad \vec{F} = \rho \vec{f}$$

Здесь  $\vec{F}$  – объемная сила, действующая на элемент  $dV$ ,  $\vec{f}$  – сила, отнесенная к единице массы (плотность силы), для силы тяжести  $\vec{f} = \vec{g}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.

$\vec{F}_S$  – сила, действующая на элемент объема со стороны окружающей среды. В идеальной среде силы трения нет, и единственная сила определяется только силами давления. На элемент поверхности  $d\sigma$  действует сила  $p d\vec{\sigma}$  и результирующая сила равна:

$$\vec{F}_S = - \oint_S p d\vec{\sigma} = - \int_V \nabla p dV \approx - \nabla p dV$$

В результате получаем *уравнение Эйлера*:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}$$

Здесь мы учли, что в уравнение Ньютона входит полная производная. У нас 5 неизвестных – 3 компоненты скорости, давление и плотность. А есть только 4 уравнения: 3 уравнения Эйлера для трех компонент и уравнение непрерывности.

Нужно еще одно уравнение – уравнение состояния, связывающее давление,

плотность и энтропию  $S$ :

$$p = p(\rho, S)$$

и уравнение для энтропии. Для изоэнтропической жидкости

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \nabla S = 0$$

Если в начальный момент времени энтропия была одинакова во всем пространстве, то она не будет меняться с течением времени и уравнение состояния принимает вид:  $p = p(\rho)$ .

В идеальном газе уравнение адиабаты имеет вид *уравнения Пуассона*:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Для идеального газа  $\gamma = \frac{i+2}{i}$ , где  $i$  - количество степеней свободы.

Для жидкостей дело обстоит сложнее: в разных диапазонах давления имеют место быть разные уравнения состояния. Эмпирическая формула для давления  $p$ , измеряемого в атмосферах:

$$\frac{p + B}{1 + B} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

где  $B = 3000$  атм,  $\gamma = 7$ , давление до  $10^5$  атмосфер.

Итак, **система уравнений для идеальной жидкости** принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ p &= p(\rho) \end{aligned}$$

## 2.5. Закон сохранения энергии идеальной жидкости

Энергия единицы объема складывается из кинетической энергии и внутренней энергии:

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon$$

Закон сохранения энергии в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) dV = - \oint_S \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \vec{v} d\vec{s} - \oint_S p \vec{v} d\vec{s}$$

Изменение энергии в объеме происходит за счет притока (оттока) энергии в объеме через границы, а также за счет работы внешних сил давления.

Из курса термодинамики и общей физики можно вспомнить, что энталпия равна

$$W = \rho\varepsilon + p$$

Используя понятие энталпии, получается упростить выражение ЗСЭ в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{1}{2}v^2 + \varepsilon \right) dV = - \oint_S \left( \frac{1}{2}\rho v^2 + W \right) \vec{v} d\vec{\sigma}$$

По формуле Стокса переходим в правой части от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему:

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{1}{2}v^2 + \rho\varepsilon \right) + \operatorname{div} \left( \frac{1}{2}\rho v^2 + W \right) \vec{v} \right] dV = 0$$

Поскольку объем произвольный, можно перейти к дифференциальной форме закона сохранения энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{N} = 0, \quad \text{где} \quad E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon, \quad \vec{N} = \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + p \right] \vec{v}$$

Здесь  $E$  – плотность энергии,  $\vec{N}$  – вектор плотности потока энергии, аналог вектора Пойнтинга в электродинамике<sup>3</sup>.

## 2.6. Закон сохранения импульса

Для единицы объема жидкости импульс равен  $\vec{p} = \rho\vec{v}$ . Если закон сохранения энергии мы выводили в интегральной форме, то здесь мы будем стартовать с дифференциальных уравнений. Запишем изменения для  $i$ -ой компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Запишем уравнение Эйлера и уравнение непрерывности по компонентам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Введен в 1874 году Умовым.

В результате для изменения компоненты импульса имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \left( - \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \right) + v_i \left( - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \right).$$

Здесь по индексу  $k$  идет суммирование. Обычно для сокращения записей суммирование по повторяющимся индексам не пишут: такое правило называется *соглашением Эйнштейна*. Таким образом, далее сумма по индексу  $k$  будет опускаться.

Хочется привести получившееся уравнение к дивергентной форме, чтобы получить закон сохранения. Учтем, что

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}.$$

Внешние силы приводят к изменению импульса. Нужно что-то придумать с давлением:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial(\delta_{ik} p)}{\partial x_k}$$

Здесь  $\delta_{ik} = 1, i = k; \delta_{ik} = 0, i \neq k$  - символ Кронекера.

В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_{ik} + \rho v_i v_k) + \rho f_i$$

Введем тензор плотности потока импульса:  $\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$ . Тогда закон сохранения импульса запишется как:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

Проинтегрируем последнее равенство по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \int_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV + \int_V \rho f_i dV$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса для тензора получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \oint_S \Pi_{ik} n_k d\sigma + \int_V \rho f_i dV$$

Таким образом, изменение импульса в объеме  $V$  связано с потоком импульса через

поверхность  $S$ . Векторная же форма закона сохранения импульса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S [p \vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})] d\sigma,$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль.

**Следствие.** Как использовать закон сохранения импульса для нахождения силы действия потока на тело? Если движение стационарно, то

$$\oint_S [pn_i + \rho v_i v_k n_k] d\sigma = 0,$$

отсюда для силы действия потока на тело имеем:

$$F_i = - \oint_S pn_i d\sigma = \oint_S \rho v_i v_k n_k d\sigma$$

В качестве примера силы со стороны жидкости на тело, которую можно найти с помощью ЗСИ, можно привести течение жидкости по изогнутой трубке (например, в быту – трубка душа)

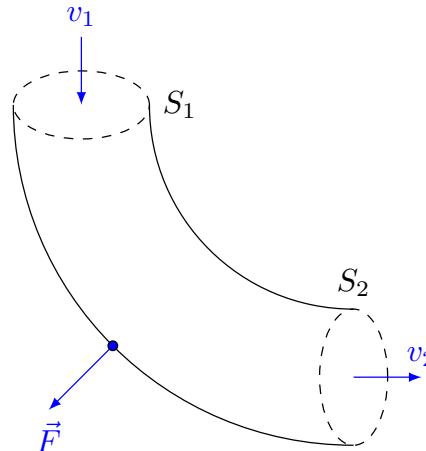


Рис. 5. Реакция текущей жидкости на стенки изогнутой трубы

В одно сечение жидкость втекает, а из другого вытекает. При этом текущая жидкость действует на стенки трубы, и такую силу нетрудно сосчитать.

## 2.7. Гидростатика

Рассмотрим простейший случай, когда скорость жидкости равна нулю. Из исходной системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ p &= p(\rho)\end{aligned}$$

в статическом случае следует

$$\nabla p = \rho \vec{f}, \quad p = p(\rho).$$

Пусть внешняя сила потенциальна

$$\begin{aligned}\vec{f} &= -\nabla u \\ \nabla p &= -\rho \nabla u,\end{aligned}$$

то есть градиенты давления и сила параллельны.

При какой зависимости плотности от координаты последнее уравнение имеет решение? Применим к последнему уравнению операцию ротора:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\nabla p) &= 0 \\ \operatorname{rot}(-\rho \nabla u) &= -\rho \operatorname{rot}(\nabla p) - [\nabla p \times \nabla \rho] \\ [\nabla p \times \nabla \rho] &= 0\end{aligned}$$

Таким образом, вектора градиентов плотности  $\rho$  и потенциала  $u$  должны быть параллельны.

Часто встречаются задачи на *распределение давления в поле тяжести*. Запишем уравнения гидростатики в этом случае:

$$\nabla p = \rho \vec{g}, \quad p = p(\rho),$$

то есть в поле тяжести стационарное решение существует, если плотность зависит от высоты.

Рассмотрим некоторые примеры задач гидростатики.

**Жидкость в поле тяжести.** Попросту говоря, простой жизненный пример – вода в земных условиях. Плотность постоянна. Ось  $z$  направлена вниз.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dz} &= \rho_0 g \\ p &= p_a + \rho_0 g z\end{aligned}$$

Давление увеличивается на 1 атмосферу на 10 метрах.

**Изотермическая атмосфера.** Под ней понимается идеальный газ с постоянной температурой  $T$ . Ускорение можно считать постоянным. Ось  $z$  направлена вверх.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g, \quad p = \frac{Rm}{\mu V}T = \frac{R}{\mu}\rho T$$

Здесь  $R$  - универсальная газовая постоянная.  $\mu$  - молярная масса газа.

$$\frac{RT}{\mu} \frac{d\rho(z)}{dz} = -\rho(z)g$$

Простое интегрирование даст ответ:

$$\rho = \rho_0 \exp(-z/h), \quad p = p_0 \exp(-z/h), \quad \text{где} \quad h = \frac{RT}{\mu g}$$

Здесь  $h$  - высота атмосферы, величина порядка 8 км, поэтому изменением силы тяжести можно пренебречь.

**Закон Архимеда.** На тело, погруженное в жидкость, со стороны жидкости действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненную этим телом.

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

Сила со стороны жидкости на элемент поверхности  $d\vec{F} = -p\vec{n} dS$ . Здесь  $\vec{n}$  - внешняя нормаль. Тогда сила Архимеда равна:

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= - \oint_S p\vec{n} dS = - \int_V \nabla p dV = - \int_V \rho \vec{g} dV = \vec{P} \\ &\int_V \rho \vec{g} dV \approx \rho V \vec{g} \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{P}$  – вес вытесненной жидкости. Причем и плотность, и ускорение не обязательно постоянны!

## 2.8. Гидростатическое равновесие. Частота Брента – Ваясля

Выясним условия, при которых состояние равновесия стратифицированной жидкости в поле тяжести будет устойчивым. Будем считать, что плотность зави-

сит от глубины произвольным образом  $\rho = \rho(z)$ . Ось  $z$  направлена вниз.

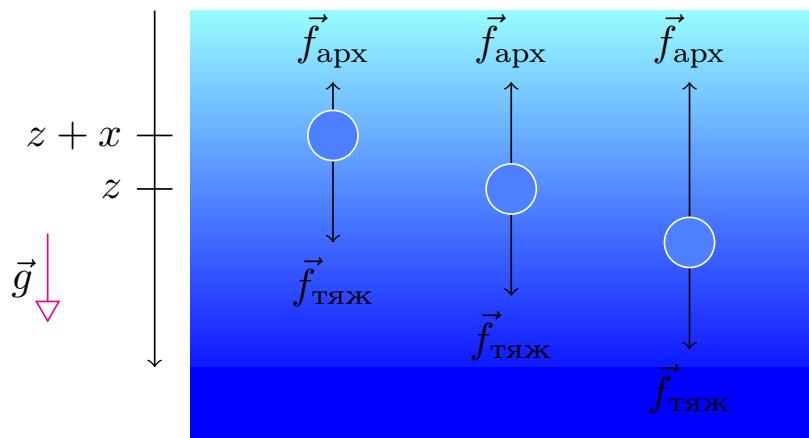


Рис. 6. Действие силы Архимеда на возмущенный элемент

Рассмотрим элементарный элемент жидкости, который находился в равновесии на глубине  $z$ , потом возмущается перемещением на глубину  $z + x$ .

На этот элемент жидкости действуют две силы: сила тяжести и сила Архимеда, и в равновесии они равны по величине:

$$\begin{aligned} F_g(z) &= g\rho(z)V_0 \\ F_A(z) &= -F_g(z) = -g\rho(z)V_0 \end{aligned}$$

Пусть данный объем смещается по вертикали на расстояние  $x$ . Масса сохраняется и сила тяжести не меняется. Пусть жидкость несжимаема, тогда объем не меняется. А сила Архимеда изменяется, так как плотность вокруг частицы изменилась. Тогда уравнение Ньютона для объема запишется как:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= g\rho(z)V_0 - g\rho(z+x)V_0 \\ m &= \rho(z)V_0 \end{aligned}$$

Разлагая плотность в ряд, и ограничиваясь линейными членами, получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} x$$

Это уравнение гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + N^2 x &= 0 \\ N^2 &= \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \sim \frac{g}{L} \end{aligned}$$

Здесь  $N = \left( \frac{g d\rho}{\rho dz} \right)^{1/2}$  – частота Брента-Вяйсаля.

- 1) Устойчивость жидкости наблюдается при  $N^2 > 0$ ,  $\frac{d\rho}{dz} > 0$ . Элемент совершает колебания с частотой  $N$ .
- 2) Неустойчивость жидкости наблюдается при  $N^2 < 0$ . Элемент падает вниз или стремится всплыть.

## 2.9. Уравнение Бернулли

Запишем уравнение Эйлера. Внешней силой здесь является сила тяжести, которую можно записать через градиент (так как орт оси  $z$  равен  $\nabla z$ ):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}, \quad \vec{g} = g \nabla z$$

Ось  $z$  направлена вниз. Учтем два равенства: из курса векторного анализа

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (v^2) - [\vec{v}, [\nabla, \vec{v}]]$$

и из курса термодинамики (для равновесных обратимых изобарических процессов):

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla W,$$

где  $W$  – энталпия. Заметим, что если плотность среды постоянна, то  $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right)$ .

Получаем уравнение Эйлера в форме Громэко-Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) = [\vec{v}, \operatorname{rot} \vec{v}]$$

Рассмотрим частные случаи, получающиеся из этого уравнения при некоторых условиях.

### 2.9.1 Случай стационарного движения

В стационарном случае ( $\vec{v} = \text{const}$ ) можно выделить два подслучаи: безвихревого и вихревого движения. Рассмотрим их подробнее.

**Безвихревое движение.** Движение потенциальное,  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Тогда из уравнения Громэко-Лэмба имеем

$$\begin{aligned}\text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) &= 0 \\ \frac{v^2}{2} + W - gz &= \text{const}\end{aligned}$$

Заметьте, константа в этом случае *сохраняется во всем пространстве*. Если жидкость несжимаема и однородна, то:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const}$$

Это уравнение Бернулли для стационарного **потенциального** движения однородной несжимаемой жидкости.

**Вихревое движение.** Теперь  $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ . Введем понятие линии тока.

**Линия тока** - это линия, касательные к которой в данный момент времени и в каждой точке совпадают с вектором скорости  $\vec{v}$ .

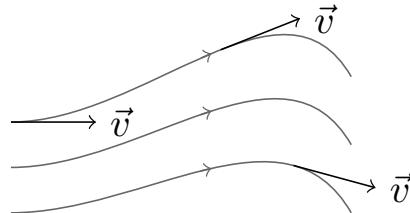


Рис. 7. Линии тока

Линии тока определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dv_x} = \frac{dy}{dv_y} = \frac{dz}{dv_z}$$

Умножим скалярно уравнение Эйлера в форме Громэко-Лэмба на вектор скорости (т.е. спроектируем уравнение на линии тока):

$$\vec{v} \cdot [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] = 0, \quad \text{так как } \vec{v} \perp [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}]$$

В таком случае уравнение Эйлера в проекции на линию тока сводится в виду

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) = 0$$

Но такое произведение можно трактовать как производную по направлению:

$$\vec{v} \nabla \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) = \frac{d}{dl} \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) = 0$$

отсюда получаем по форме тот же закон сохранения, что и для безвихревого движения:

$$\frac{v^2}{2} + W - gz = \text{const}$$

Но здесь константа сохраняется только вдоль линии тока, и *для разных линий тока константы разные!*

### 2.9.2 Случай нестационарного невихревого движения

В этом случае

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0, \quad \text{rot } \vec{v} = 0$$

Рассматриваем потенциальные течения:  $\vec{v} = \nabla \varphi$ . Тогда из уравнения Громэко-Лэмба, используя возможность перестановки  $\nabla$  и  $\frac{\partial}{\partial t}$  местами, нетрудно получить закон сохранения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W - gz = \text{const}$$

Этот интеграл движения носит название *интеграла Коши*.

### 2.9.3 Энергетический смысл уравнения Бернули

Закон Бернули – это ничто иное, как следствие законов сохранения массы и энергии вдоль некоторой лучевой трубы через 2 сечения: входящее  $S_1$  и выходящее  $S_2$  (см. рис. 8).

**Определение.** Лучевая трубка тока – это трубка, образованная множеством линий тока, проходящих через некоторый замкнутый контур

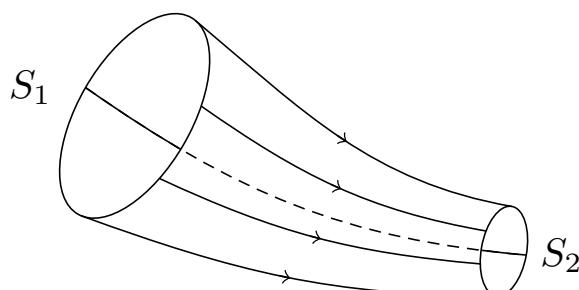


Рис. 8. Лучевая трубка

Закон сохранения массы заключается в равенстве: сколько втекает, столько и вытекает.

$$m_i = \rho_i S_i v_i \Delta t, \quad i = 1, 2$$

Изменение энергии за счет вытекания и работы силы тяжести равно работе внешних сил:

$$\begin{aligned} A_i &= p_i S_i v_i \Delta t \\ E_i &= \frac{v_i^2}{2} + u_i + \varepsilon_i \\ A_1 - A_2 &= \Delta m (E_2 - E_1) \end{aligned}$$

Здесь  $u$  и  $\varepsilon$  - потенциальная и внутренняя энергия. Рассмотрим случай несжимаемой жидкости. В этом случае внутренняя энергия не меняется, а  $u = -gz$ . В результате получим уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет множество приложений.

**Трубка Вентури.** Трубка представляет собой устройство для измерения скорости потока жидкости (газа). Измерение возможно за счет специальной формы трубы: она имеет сужение и пару отводов из разных сечений трубы, в которых можно измерять давление. Зная сечения и измеряя давления – можно найти скорость потока:

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} &= \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \\ S_1 v_1 &= S_2 v_2 \end{aligned}$$

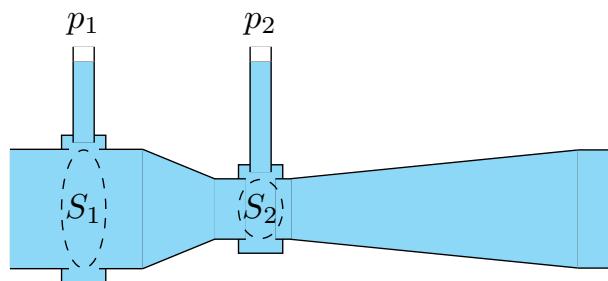


Рис. 9. Трубка Вентури

**Обтекание двух цилиндров.** Сближение линий тока, увеличение скорости. Возникает притяжение цилиндров.

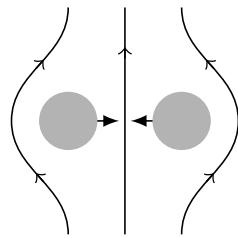


Рис. 10. Схематический вид цилиндров

**Вытекание жидкости из сосуда.** Эта задача имеет известное решение – формулу Бернулли для вытекания из сосуда. При этом считается, что отверстие мало (много меньше площади сосуда). В этом случае

$$v = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}, \quad \text{где} \quad \sigma \ll S.$$

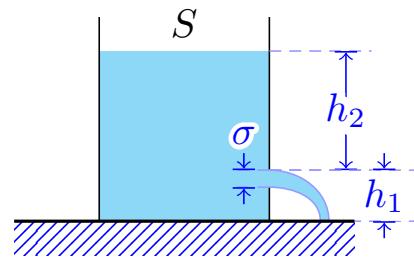


Рис. 11. Схематичный вид вытекающей жидкости

**Задача Прандтля.** Эта задача описывает косое падение плоской струи на поверхность и так называемые *кумулятивные снаряды*. Наряду с уравнением Бернулли нужно использовать закон сохранения импульса.

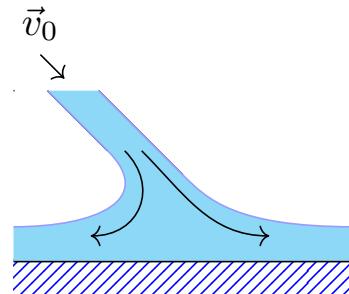


Рис. 12. Наклонное падение струи

## 2.10. Теорема Томсона. Потенциальные и вихревые движения жидкости

Введём понятие циркуляции скорости – интеграл, взятый вдоль некоторого замкнутого контура

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} d\vec{r}$$

Докажем теорему о сохранении циркуляции скорости – теорему Томсона (lorda Кельвина): **Циркуляция скорости вдоль замкнутого контура, перемещающегося в идеальной жидкости, остается постоянной.**

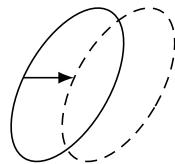


Рис. 13. Два контура: начальный и смещенный

Выберем замкнутый контур, состоящий из фиксированных частиц («жидкий» контур) и перемещающийся вместе с ними. Найдем полную производную по времени от этого контура. Происходит изменение как скорости, так и изменение контура во времени

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} d\vec{r} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \oint_L \vec{v} d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right).$$

Распишем вначале второе слагаемое.  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ , а интеграл  $\oint \vec{v} d\vec{v} = 0$ . Используем определение скорости и уравнение Эйлера

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}.$$

Пусть внешняя сила потенциальна, а процесс адиабатический:

$$\vec{f} = -\nabla u, \quad \frac{\nabla p}{\rho} = \nabla W,$$

где  $W$  – энталпия. Учтем, что  $(\nabla \varphi d\vec{r}) = d\varphi$  и окончательно получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L d\left(\frac{v^2}{2} - W - u\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \text{const.}$$

**Следствие 1.** Используем теорему Стокса:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} d\vec{r} = \int_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{v} dS$$

Для потенциальных течений  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$ : Циркуляция скорости по односвязному контуру в потенциальном течении идеальной жидкости равна нулю.

**Следствие 2.** Поток вихря через поверхность, натянутую на односвязный контур в потенциальном течении идеальной жидкости – величина постоянная:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} d\vec{r} = \int_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{v} dS = \text{const}$$

**Следствие 3.** В потенциальном течении не может быть замкнутых линий тока (иначе, взяв одну из них в качестве контура, мы получим, что циркуляция вдоль данного контура не равна нулю).

**Следствие 4.** В однородной несжимаемой жидкости можно исключить из рассмотрения уравнений движения давление. Запишем уравнение Эйлера в форме Громэко-Лэмба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) = [\vec{v}, \operatorname{rot} \vec{v}]$$

Возьмем от него ротор и учтем, что ротор от градиента равен нулю ( $\operatorname{rot}(\nabla(\dots)) = 0$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot}[\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v}], \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Получили полное описание поля скорости с помощью одного уравнения.

**Основные выводы из теоремы Томсона.** Если в какой-то точке линии тока завихренность отсутствует, то она отсутствует и вдоль этой линии. На первый взгляд, отсюда следует:

*Первый вывод.* Стационарное обтекание любого тела набегающим из бесконечности потоком должно быть потенциальным:  $\vec{v} = \text{const}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ .

*Второй вывод.* Если движение жидкости потенциально в некоторый момент времени, то оно будет потенциальным и в дальнейшем. В частности, потенциальным должно быть всякое движение, при котором в начальный момент жидкость покончилась.

В реальности, однако, это имеет ограниченную область применимости. Дело в том, что приведенное выше утверждение о сохранении ротора скорости вдоль линии тока неприменимо для линий, проходящих вдоль поверхности твердого тела. Около стенки *нельзя провести односвязный замкнутый контур*.

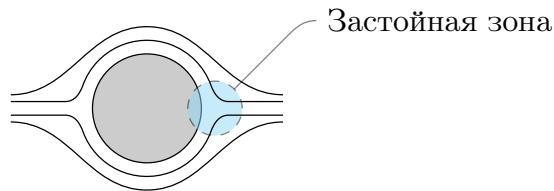


Рис. 14. Обтекание тела с застойными зонами

Уравнения движения идеальной жидкости допускают решения в которых на поверхности твердого тела, обтекаемого жидкостью твердого тела происходит «отрыв» струи: линии тока, следовавшие вдоль поверхности, в некотором месте отрываются от него, уходя в глубь жидкости. Возникает застойная область и на границе течения становится непотенциальным (см. рис. 14), возникает поверхность «тангенциального» разрыва. Скорость терпит разрыв непрерывности.

При учете таких разрывных решений решение уравнений идеальной жидкости неоднозначно: наряду с непрерывным решением появляется бесконечное множество разрывных решений. При этом разрывные решения не имеют физического смысла, так как тангенциальные разрывы **абсолютно неустойчивы**, в результате чего движение жидкости становится **турбулентным**.

Реальное течение безусловно однозначно. Всякая жидкость обладает вязкостью. Малая вязкость практически не проявляется во всем пространстве, но она будет играть определяющую роль в пристеночной области (пограничный слой).

Тем не менее, в ряде случаев это достаточно хорошее приближение. Например, *хорошо обтекаемые тела*: самолет, автомобиль, корабль – движение жидкости от потенциального отличается только в области «пограничного» слоя и «следа» позади тела.

Кроме того, это приближение работает и в случае *малых нестационарных колебаний*. Рассмотрим его подробнее.

### 2.10.1 Нестационарные малые колебания

Рассмотрим слабо колеблющееся тело в жидкости. Пусть  $l$  – линейный размер тела,  $a$  – характерная амплитуда колебаний,  $v$  – скорость колеблющегося тела.

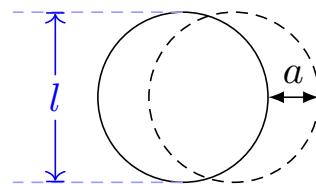


Рис. 15. Сфера размером  $l$  и сфера, смещённая на  $a$ .

Если  $l \gg a$ , то движение жидкости вокруг тела потенциально. Покажем это, оценив порядок величины различных членов в уравнении Эйлера (для несжимаемой жидкости, без внешних сил):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla W$$

Скорость (порядка скорости колеблющегося тела  $u$ ) изменяется на масштабах  $l$ . Поэтому производные от скорости по координатам порядка  $\sim u/l$ . Изменения же скорости во времени определяются частотой колебаний  $\sim \omega u \sim (u/a)u$ . Тогда

$$\frac{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|}{|(\vec{v} \nabla) \vec{v}|} \sim \frac{\frac{u^2}{a}}{\frac{u^2}{l}} \sim \frac{l}{a} \gg 1$$

Значит, вторым членом можно пренебречь, и тогда уравнение Эйлера принимает вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla W$$

Возьмем от полученного уравнения ротор. Так как при колебательном движении среднее значение скорости по периоду равно нулю, то  $\text{const} = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = 0, \quad \text{rot } \vec{v} = \text{const} = 0$$

Таким образом, *малые нестационарные колебания потенциальны*.

## 2.11. Потенциальные течения несжимаемой жидкости

В идеальной баротропной жидкости в поле потенциальных сил вихри не исчезают и не возникают. Если в начальный момент течение было потенциальным, то оно будет потенциальным всегда. В ряде случаев это достаточно хорошее приближение, а уравнения гидродинамики существенно упрощаются.

Уравнение непрерывности несжимаемой жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

Поле скорости несжимаемой жидкости соленоидально. Уравнение Эйлера для несжимаемой жидкости в форме Громэко-Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz \right) = [\vec{v} \text{rot } \vec{v}]$$

Отсюда легко получить следствие из уравнения Эйлера (мы это делали раньше):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v}]$$

Это означает, что если движение было потенциальным в начальный момент времени, то и в дальнейшем оно будет потенциальным. Поэтому можно ввести потенциал поля скорости

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{v} &= 0, \quad \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \Delta \varphi = 0\end{aligned}$$

Таким образом, описание потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0, \quad \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

Для решения этого уравнения также необходимы граничные условия.

**Границное условие непротекания:** нормальная компонента скорости жидкости на поверхности тела должна совпадать с проекцией  $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n$  скорости самого тела на эту нормаль.

**Границное условие на бесконечности:** обычно используют значение потенциала на бесконечности.

Давление теперь можно найти из уравнения Бернулли:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u &= \text{const} \\ p &= -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + u \right) + \text{const}\end{aligned}$$

Константа может зависеть от времени. Для стационарного течения:

$$p = -\rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + \text{const}$$

Рассмотрим несколько частных решений уравнения Лапласа, известных в электростатике.

**Сдвиговый поток.** Эта задача аналогична задаче поля плоского конденсатора в электростатике. Все частицы жидкости двигаются с постоянной скоростью

$$\vec{v}_0 = \{v_x, v_y, v_z\}, \quad \vec{r} = \{x, y, z\}$$

Потенциал здесь будет

$$\varphi = (\vec{v}_0, \vec{r}) = v_x x + v_y y + v_z z$$

Очевидно, он удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

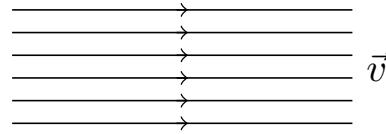


Рис. 16. Параллельные линии тока

**Монополь.** Эта задача о стоке и истоке массы: потенциал здесь

$$\varphi = \frac{\alpha}{r}, \quad \vec{v} = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{i}, \quad \vec{v} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{r}$$

Решение сферически симметрично и имеет особенность в точке  $r = 0$ . Заметим, что поток массы через сферу вокруг монополя произвольного радиуса – величина постоянная:

$$m = \rho 4\pi r^2 |v| = \rho \cdot 4\pi \alpha$$

Знак «+» говорит о стоке массы, «-» – о истоке.

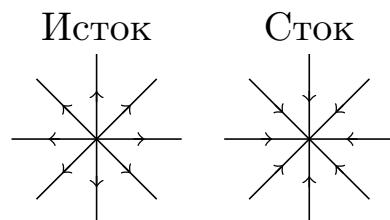


Рис. 17. Сток и исток массы

**Диполь.** Поместив сток и исток рядом, устремим их интенсивность в бесконечность, а расстояние между ними к нулю. Потенциал диполя

$$\varphi = \vec{A} \cdot \text{grad} \frac{1}{r}$$

### 2.11.1 Движение сферы в идеальной жидкости

Пусть сфера радиуса  $R$  движется с постоянной скоростью в несжимаемой неограниченной жидкости. Течение при этом потенциально, а на бесконечности поставим «граничное условие»  $v = 0$ . На поверхности сферы должны быть равны нормальные (относительно поверхности) компоненты скорости сферы и жидкости. При этом систему координат выберем с началом в центре сферы.

Математическая формулировка такой задачи будет следующей:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \vec{v}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad v_r|_{r=R} = v_{c\phi_r}|_{r=R}$$

Попробуем подобрать решение в виде диполя (сток-исток не подходит):

$$\varphi = \vec{A} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = B \vec{v}_0 \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -B \frac{(\vec{v}_0, \vec{r})}{r^3}$$

Тогда скорость жидкости

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi = -B \frac{\vec{v}_0}{r^3} + 3B \frac{(\vec{v}_0, \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5}$$

Удовлетворим граничным условиям. Условие равенства нормальных (в нашей системе координат направление нормали – радиальное):

$$v_r|_{r=R} = v_{0_r}|_{r=R} - \frac{Bv_{0_r}}{R^3} + 3 \frac{Bv_{0_r}}{R^3} = v_{0_r}$$

Отсюда константа  $B = \frac{R^3}{2}$ , и тогда для потенциала и скорости конечные формулы

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} (\vec{v}_0, \vec{r}), \quad \vec{v} = -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^5} (\vec{v}_0, \vec{r}) \cdot \vec{r}$$

В сферической системе координат

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} v_0 \cos \theta, \quad \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{I}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{I}_\theta,$$

Отсюда радиальная и тангенциальная компоненты скорости соответственно

$$v_r = \frac{v_0 R^3}{r^3} \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{v_0 R^3}{2r^3} \sin \theta$$

**Объединение решений сферы и плоского потока.** В силу линейности уравнения Лапласа, можно легко решить задачу об обтекании сферы постоянным потоком объединением решений плоского потока и диполя (сферы). Для определённости, будем считать что поток набегает на сферу справа.

При этом математическая формулировка задачи будет

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = -v_0 \cos \theta, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$$

Решение задачи будут суперпозицией решений задачи сферы и задачи плоского потока:

$$\varphi = -v_0 \cos \theta \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right), \quad v_r = -v_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right),$$

$$v_\theta = v_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right)$$

При этом на поверхности сферы

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{3}{2}v_0 \sin \theta$$

В точках  $\theta = 0, \pi$  скорость  $v_\theta = 0$ , а в точках  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  скорость  $v_\theta = \frac{3}{2}v_0$ .

### 2.11.2 Парадокс Даламбера-Эйлера.

Найдём давление и силу, действующие со стороны потока на неподвижную сферу. Для этого задействуем уравнение Бернулли:

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_s + \frac{\rho v_\theta^2}{2}$$

Учитывая, что  $v_\theta = \frac{3}{2}v_0 \sin \theta$ , получим

$$p_s = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right)$$

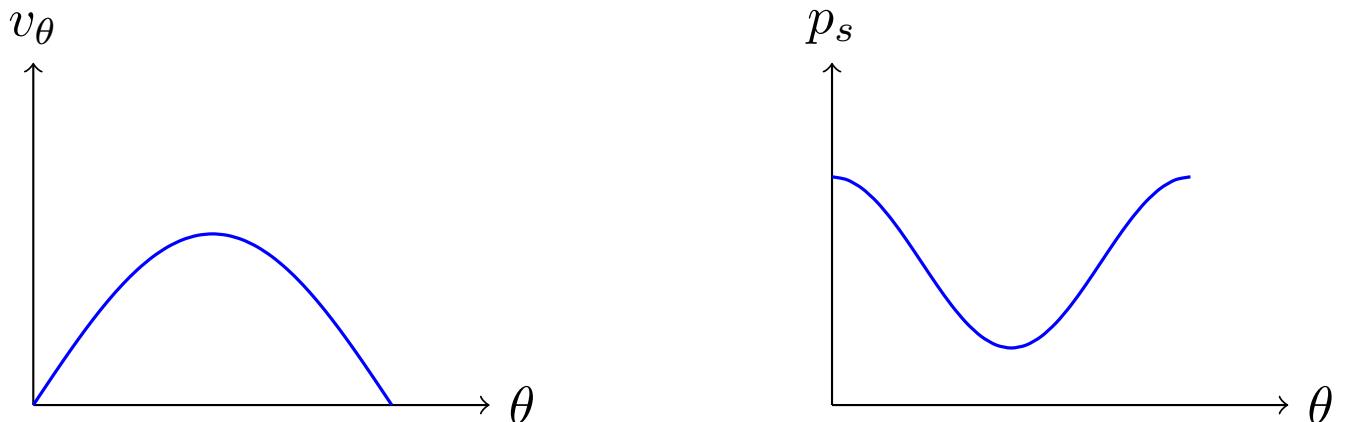


Рис. 18. Графики скорости и давления от угла

Давление симметрично относительно миделя (серединной плоскости) сферы. Найдём полную силу со стороны жидкости на сферу:

$$\vec{F} = - \oint_S p_s \vec{n} dS$$

Можно подставить сюда давление и посчитать силу в лоб. Но намного проще заметить, что давление - чётная функция угла  $\theta$ , а нормаль меняет знак при

интегрировании. Значит, интеграл будет равен нулю, и это и есть содержание парадокса Даламбера-Эйлера:

$$\vec{F} = 0$$

Словами можно сформулировать парадокс так:

**Формулировка 1.** При обтекании тела с гладкой поверхностью *идеальной несжимаемой жидкостью* сила лобового сопротивления, действующая на тело со стороны потока, равна нулю.

**Формулировка 2.** Для тела, движущегося *равномерно в идеальной несжимаемой жидкости постоянной плотности без границ*, сила сопротивления равна нулю.

Парадокс возникает вследствие идеализации: отсутствия вязкости и волн, убегающих от тела. Физический смысл этого заключается в том, что если бы сила была не равна нулю, то внешняя сила, поддерживающая движение с постоянной скоростью, совершила бы работу, которая должна либо диссирироваться в жидкости, либо уносится волнами на бесконечность.

### 2.11.3 Присоединённая масса

При формулировке парадокса Даламбера-Эйлера особое внимание следует уделить тому факту, что силы лобового сопротивления нет при *равномерном движении* тела. Если же тело будет двигаться с ускорением  $a$ , то сила появится. Второй закон Ньютона даёт тогда

$$F - F_{\text{сопр}} = ma,$$

или, если ввести присоединённую массу как  $M = F_{\text{сопр}}/a$ ,

$$F = (m + M)a$$

Получить выражение для присоединённой массы можно двумя способами: энергетическим и динамическим (решением уравнений). Рассмотрим оба способа.

**Энергетический вывод присоединённой массы.** Пусть шар массы  $m$  и радиуса  $R$  движется с постоянным ускорением  $a$  из состояния равновесия до скорости  $v_0$ .

В таком случае нетрудно найти время, путь и работу:

$$T = \frac{v_0}{a}, \quad S = \frac{aT^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a}, \quad A = FS = \frac{Fv_0^2}{2a}$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{Fv_0^2}{2a} = \frac{mv_0^2}{2} + \int_{r>R} \frac{\rho v^2}{2} dV,$$

где интегрирование идёт по внешнему объёму. Теперь запишем второй закон Ньютона через присоединённую массу:

$$F = ma + Ma$$

Подставив силу в ЗСЭ, получим выражение для *присоединённой массы шара*:

$$M = \frac{\rho}{v_0^2} \int_{r>R} v^2 dV$$

Найдём её, задействовав выведенные ранее формулы для скорости жидкости при движении в ней шара со скоростью  $v_0$ :

$$v_r = \frac{v_0 R^3}{r^3} \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{v_0 R^3}{2r^3} \sin \theta \Rightarrow v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{v_0^2 R^6}{4r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

Для поиска массы надо провести интегрирование в сферической системе координат:

$$M = \frac{\rho}{v_0^2} \int_{r>R} v^2 dV = \frac{\rho}{v_0^2} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{v_0^2 R^6}{4r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta) 2\pi r^2 dr d\theta$$

Заметим, что если честно довести интегрирование до конца, получится

$$M = \rho \cdot \frac{2}{3} \pi R^3$$

Этот результат можно трактовать так: **присоединённая масса шара равна половине массы жидкости, вытесненной шаром.**

**Вывод на основе динамических уравнений.** Векторное поле жидкости определяется только скоростью шара, и не зависит от его ускорения. Но для давления это не так. Запишем нестационарное уравнение Бернулли:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const} = \frac{p_0}{\rho} \Rightarrow p_s = p|_{r=R} = p_0 + \rho gz - \frac{\rho v^2}{2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Теперь, зная давление на поверхности, можем найти силу, действующую на шар со стороны жидкости:

$$\vec{F} = - \oint_S p_s \vec{n} dS = \vec{F}_0 + \vec{F}_A + \vec{F}_{\text{Ber}} + \vec{F}_a$$

Интеграл от  $p_0$  даёт силу  $\vec{F}_0$ , и она очевидно равна нулю, так как  $p_0$  – константа на площади сферы. Вторая сила – это сила Архимеда. В лоб её считать трудно, но ранее мы уже этим занимались и можем считать известным, что она направлена по вертикали. Третья сила – связана с движением тела с постоянной скоростью, и мы только что показали парадокс Даламбера: она равна нулю.

Таким образом, остаётся сосчитать только последнюю силу.

$$\vec{F} = \rho \oint_S \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} (\vec{v}_0, \vec{r}_0) \right] \vec{n} dS = \rho \oint_S \left[ -\frac{1}{2} Ra \cos \theta \right] \vec{n} dS$$

Найдём значение силы в проекции на ось  $x$ , сонаправленную ускорению:

$$\begin{aligned} F_x &= \rho \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} n_x dS = -\frac{\rho Ra}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \cos \theta \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\psi = \\ &= -\pi \rho R^3 a \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \pi \rho R^3 a \int_1^{-1} x^2 dx = -\frac{2}{3} \pi \rho R^3 a \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad F_x &= -Ma, \quad M = \rho \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{M_g}{2} \end{aligned}$$

Получили тот же результат, что и энергетическим способом.

**Применение присоединённой массы.** Решим такую задачу: шарик падает в идеальной жидкости. Запишем для него второй закон Ньютона, учитывая присоединённую массу, в проекции на ось  $x$ , направленную вниз:

$$\begin{aligned} \left( \rho_{\text{ш}} V + \frac{\rho_{\text{ж}} V}{2} \right) a_x &= F_{\text{тяж}_x} + F_{\text{апx}_x} = \rho_{\text{ш}} V g - \rho_{\text{ж}} V g \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad a_x &= \frac{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ш}} + \frac{\rho_{\text{ж}}}{2}} g \end{aligned}$$

Если это капля воды в воздухе, то  $a_x \approx g$ , а если капля воздуха в воде, то  $a_x \approx -2g$ .

## 2.12. Гидродинамика плоских течений

Займёмся изучением плоских потенциальных течений. В этом случае оказывается эффективным использование математического формализма теории функций комплексного переменного.

### 2.12.1 Функция тока

Течение плоское, потенциальное, в несжимаемой идеальной жидкости:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}, \quad \text{rot } \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

Введём новую функцию – функцию тока так, чтобы уравнения неразрывности выполнялись автоматически:

$$\psi = \psi(x, y, t), \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Термин *функция тока* обусловлен тем, что в каждой точке линий уровня этой функции ( $\psi = \text{const}$ ) вектор скорости направлен к ним по касательной. Эти линии также называют *линиями тока*. Покажем это.

Если уравнения линий тока заданы как  $y = y(x)$ , то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad v_x dy = v_y dx$$

Распишем формально дифференциал функции тока:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

Но в силу предыдущего равенства эта сумма равна нулю. Значит, на линии тока  $\psi = \text{const}$ .

**Поток через функцию тока.** Найдём поток через плоскую кривую, соединяющую точки  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} Q &= \int_A^B (v_x n_x + v_y n_y) dl = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \\ &= \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\Psi = \psi(B) - \psi(A) \end{aligned}$$

Видно, что поток не зависит от формы кривой и равен разности значений функции тока на концах линии. Это значит, что функция тока, как и потенциал скорости, являются гармонической функцией и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Найдём связь между потенциалом и функцией тока:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Используя эту связь, нетрудно показать *ортогональность линий уровня*  $\varphi = \text{const}$  и  $\psi = \text{const}$ :

$$(\nabla \varphi, \nabla \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x v_y + v_y v_x = 0$$

Функции потенциала и тока в известном смысле можно считать равноправными. Течение, у которого эти функции поменяны местами, называют *сопряжённым течением*.

## 2.12.2 Аналитические функции

У нас есть некоторое комплексное число

$$z = x + iy \leftrightarrow F(z) = \alpha + i\beta$$

Функция аналитическая, если независимо от направления стремления  $\Delta z$  к нулю существует предел:

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z}$$

Будем стремить разными способами  $\Delta z$  к нулю.

Первый способ:  $\Delta z = \Delta x$

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x + \Delta x, y) + i\beta(x + \Delta x, y) - \alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \end{aligned}$$

Второй способ:  $\Delta z = i\Delta y$

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, y + \Delta y) + i\beta(x, y + \Delta y) - \alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{i\Delta y} = \\ &= \frac{\partial \beta}{\partial y} - i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{aligned}$$

Очевидно, производные должны совпасть. Отсюда условие аналитичности функций

ции

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Раньше мы вводили потенциал и функцию тока следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Теперь, если взять комплексную функцию  $F(z) = \varphi + i\Psi$  (действительная часть потенциал, мнимая – функция тока), то это и будет т.н. *комплексный потенциал*.

Мы помним, что

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0, \quad \varphi = \operatorname{Re}\{F\}, \quad \Psi = \operatorname{Im}\{F\}$$

$$v = |F'_z|, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

### 2.12.3 Конформное отображение

Пусть у нас есть функция  $z = f(\xi)$ , где  $z, \xi$  – комплексные. Соответственно

$$F(z) = F(f(\xi))$$

Ниже мы будем решать задачу об обтекании цилиндра. Но крыло самолета в сечении конформными преобразованиями связано с окружностью. Имея решение об обтекании цилиндра, сможем решить задачу об обтекании крыла самолета. А здесь рассмотрим несколько примеров.

**Однородный поступательный поток.**  $F(z) = a \cdot z = ax + i \cdot ay$ ,  $\varphi = ax$ ,  $\Psi = ay$ . Что такое линии тока? Это линии  $\Psi = \text{const}$ . Скорость  $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = a$

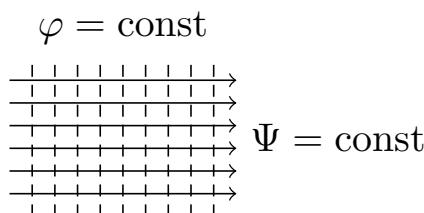


Рис. 19. Однородный поступательный поток

**Сопряженное течение.**  $F(z) = -iF(z) = ay - i \cdot ax$ :

$\varphi = ay$ ,  $\Psi = -ax$ . Линии тока  $\Psi = \text{const}$  ортогональны линиям равного потенциала  $y = \text{const}$ . Скорость  $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ ,  $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = a$ .

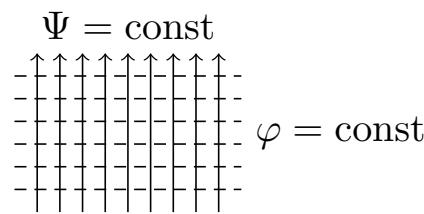


Рис. 20. Сопряженное течение

Пусть  $a = \alpha + i\beta$ . Подумайте, что будут представлять из себя линии тока, если  $\alpha = 1, \beta = 1$ ? Нужно найти угол наклона.

**Сток-исток-вихрь.** В предыдущем разделе было рассмотрено поле конденсатора и поле точечного заряда. В двумерном случае рассмотрим потенциал равномерно заряженной нити.

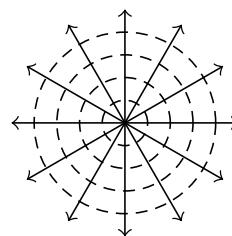
$$F(z) = m \ln(z)$$

Используем полярную систему координат

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= x + iy = re^{i\theta} \\ F(z) &= m \ln(re^{i\theta}) = m \ln(r) + mi\theta \end{aligned}$$

$$\varphi = m \ln r, \quad \Psi = m\theta, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{m}{r}$$

Линии уровня  $\Psi = \text{const}$  задают радиально отходящие от центра при  $m > 0$  и подходящие при  $m < 0$  линии тока:

Рис. 21. Линии тока при  $m > 0$ 

Посчитаем поток.

$$Q = \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \Psi(B) - \Psi(A) = m(\theta_b - \theta_a)$$

Если контур является замкнутым, то  $\theta_b = \theta_a$  и интеграл равен нулю. Попробуем

вычислить поток через замкнутый контур произвольного радиуса  $R$ , зная зависимость скорости от пространственных координат:

$$Q = \oint_A^B \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \oint_A^B v_r dl = \int_0^R \frac{m}{r} \cdot 2\pi dr = 2\pi m$$

Отличие величины потока, вычисленным двумя разными способами, заключается в том, что выбранный контур охватывает особую точку  $r = 0$ . Необходимо использовать теорему о вычетах для подсчета потока первым способом. Тогда ответ совпадет со значением  $Q = 2\pi m$ .

### Сопряженное течение.

$$F(z) = i \cdot m \ln z = i \cdot m \ln r e^{i\theta} = \operatorname{Im} \ln r - m\theta$$

$$\varphi = m\theta, \quad \Psi = m \ln r$$

Тогда

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{m}{r}$$

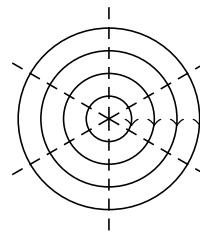


Рис. 22. Линии  $\Psi = \text{const}$

Циркуляция:

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{l} = \int \frac{m}{r} \cdot 2\pi dr = 2\pi m = \text{const.}$$

Самостоятельно исследуйте случай  $m = \alpha + i\beta$ . Линии тока для данной задачи представляют собой спираль.

### Гидродинамический диполь.

$$F(z) = -\frac{P}{z} = -\frac{P}{x+iy} = \varphi + i\Psi$$

Выражения для потенциала скорости  $\varphi$  и функции тока  $\Psi$  примут следующий вид:

$$\varphi = -\frac{Px}{x^2+y^2}, \quad \Psi = \frac{Py}{x^2+y^2}$$

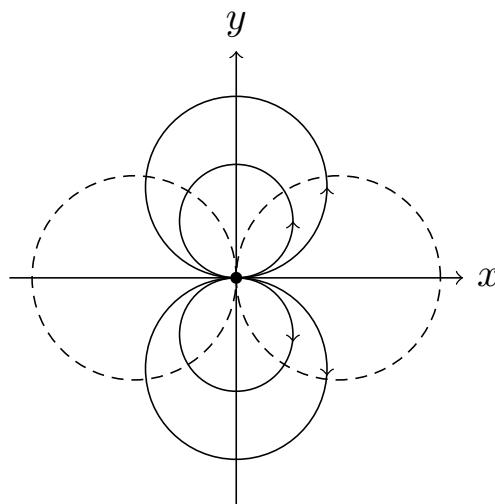


Рис. 23. Линии тока диполя

Линии тока  $x^2 + y^2 = c \cdot y$  – смещенные окружности.

$$x^2 + y^2 - 2\frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2$$

Отсюда

$$x^2 + (y - c/2)^2 = \frac{1}{4}c^2 = r^2,$$

где  $r = \frac{c}{2}$  – радиус окружности, координаты центра окружности  $(0, c/2)$ .

Вспомним, что  $\varphi = -\frac{Px}{x^2+y^2}$ , а  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Тогда

$$v_x = \frac{P(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

**Циркуляционное обтекание кругового цилиндра.** На круговой цилиндр радиуса  $R$  слева набегает из бесконечности (справа) поток жидкости с постоянной скоростью  $v_0$ .

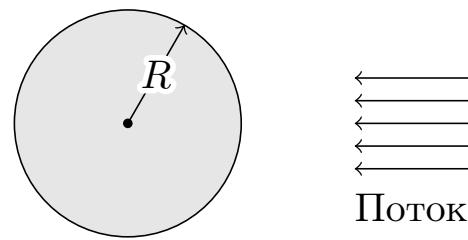


Рис. 24. Поток, набегающий на цилиндр

На цилиндре реализовано условие непротекания, а на больших расстояниях постоянный поток:

$$v_r|_{r=R} = 0, \quad v_x|_{r \rightarrow \infty} = -v_0, \quad v_y|_{r \rightarrow \infty} = 0.$$

В силу линейности уравнения Лапласа будем искать решение в виде сумму двух решений, сдвиговый поток и потенциал диполя. По отдельности они не удовлетворяют граничным условиям

$$F = F_1 + F_2$$

$F_1 = -v_0 z$  – набегает поток.  $F_2 = -\frac{A}{z}$  – потенциал диполя

Тогда

$$F = -\frac{v_0}{z} - \frac{A}{z} = -v_0 r e^{i\theta} - \frac{A}{r} e^{-i\theta}$$

Вычислим  $v_r$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\left(v_0 - \frac{A}{r}\right) \cos \theta$$

Воспользовавшись граничным условиями  $v_r = 0$  при  $r = R$ , находим константу  $A = v_0 R^2$ .

Тогда

$$F = -v_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right).$$

Добавим течение типа «вихрь»  $F_3 = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z$ .

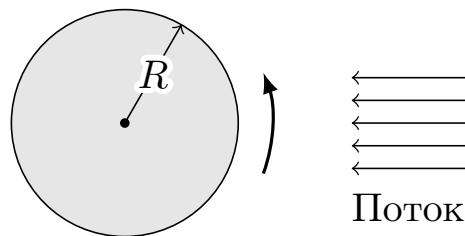


Рис. 25. Обтекание потоком цилиндра

$$F = -v_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z$$

Течение автоматически удовлетворяет граничным условиям. Для потенциала и функции тока имеем

$$\varphi = -v_0 \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

Найдем выражение для скорости.

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -v_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$v_\theta \Big|_{r=R} = 2v_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Ниже приведены картины линий тока при разных значениях  $\Gamma$ .

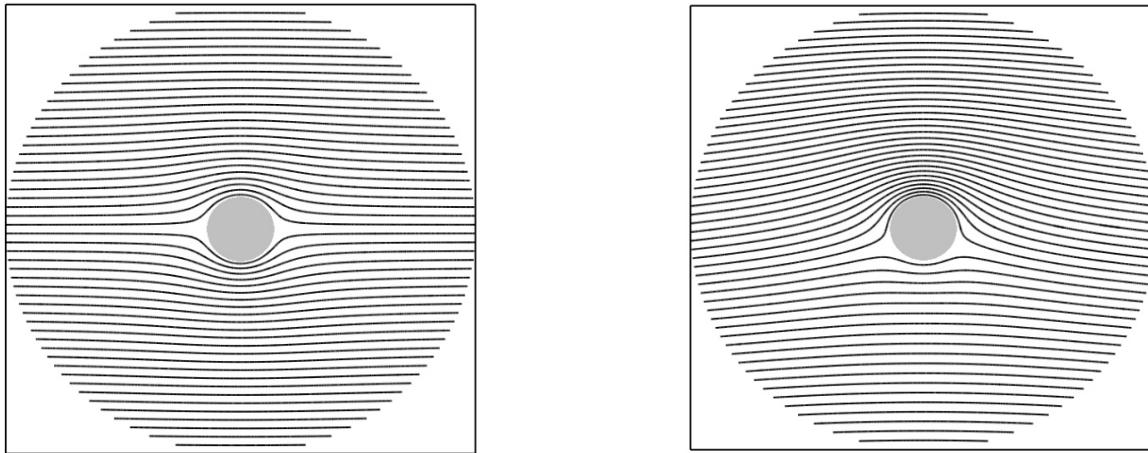


Рис. 26. Линии тока при  $\Gamma = 0$  (слева) и  $0 < \Gamma < \Gamma^*$  (справа)

При добавлении кругового движения линии тока искривляются, исчезает симметрия по вертикали. При дальнейшем увеличении  $\Gamma$  искривление нарастает:

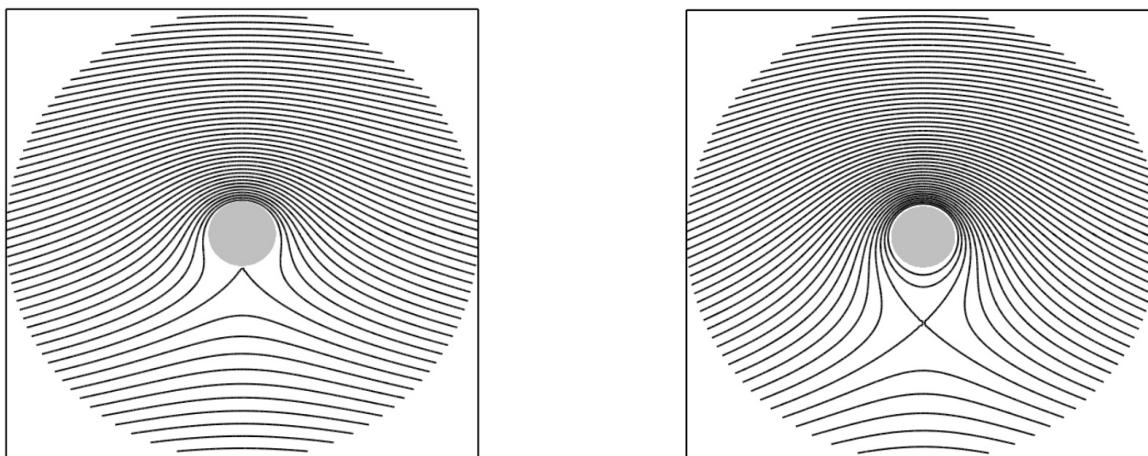


Рис. 27. Линии тока при  $\Gamma = \Gamma^*$  (слева) и  $\Gamma > \Gamma^*$  (справа)

Критическое значение

$$\Gamma^* = 4\pi v_0 R.$$

Если  $\Gamma$  меньше критического, то критическая точка на поверхности цилиндра, если больше, то вне области цилиндра и появляется сепаратриса (на рисунке справа).

Как видно из рисунков, при циркуляции цилиндра не нарушается симметрия относительно миделя (то есть силы сопротивления потоку не возникает) но над цилиндром скорость больше чем под ним. Этот факт отражает возникновение подъёмной силы.

Используя уравнение Бернулли, найдем распределение давления на поверхности цилиндра

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_s + \frac{\rho v_\theta^2}{2}$$

Отсюда

$$p_s = p_0 + \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v_\theta^2)$$

Ну и получается

$$p_s = p_0 + \frac{1}{2} \rho \left( v_0^2 - 4v_0^2 \sin^2 \theta - \left( \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 - \frac{2\Gamma v_0 \sin \theta}{\pi R} \right)$$

Найдем силу действующую на единицу длины цилиндра со стороны потенциального потока

$$\vec{F} = - \int p \vec{n} dl.$$

По горизонтали силы никакой нет, по вертикали вклад дает только последнее слагаемое в выражении для давления. Давление больше где скорость меньше, значит оно больше внизу, значит, возникнет подъемная сила. (скорость больше, сложение скорости набегающего потока и кругового).

$$F_y = - \int p n_y dl = \rho \Gamma v_0.$$

Это есть формула Жуковского. Сила пропорциональна плотности, скорости параметру, характеризующему вихрь.

#### 2.12.4 Вихревые движения в идеальной жидкости

До сих пор мы занимались потенциальными течениями: сток, исток, двумерное движение и так далее. Теперь рассмотрим другой класс движений идеальной жидкости – вихревые движения.

Введем понятие вектора завихренности  $\vec{\Omega}$ :

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$$

Завихренность можно связать с циркуляцией скорости. Для этого запишем определение циркуляции и применим теорему Остроградского-Гаусса:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} dl = \int_S \text{rot } \vec{v} dS = \int_S \vec{\Omega} \vec{n} dS$$

Это означает, что циркуляция скорости по замкнутому контуру равна потоку завихренности.

Воспользуемся ранее доказанной теоремой Томсона: *циркуляция скорости вдоль замкнутого контура, перемещающегося в идеальной жидкости, остается постоянной.*

Следовательно, сохраняется постоянным и поток вихря через поверхность, натянутую на односвязный контур:  $\Gamma = \text{const}$ .

Введем понятие *вихревой линии* и *вихревой трубы*. Вихревой линией называют линию, касательные к которой в каждой точке коллинеарны вектору вихря. Если взять замкнутый контур и через каждую его точку провести вихревую линию, то внутри образуется вихревая трубка.

**Теорема Лагранжа.** Элементы идеальной жидкости, лишенные вихрей в начальный момент времени, будут лишены их и в дальнейшем.

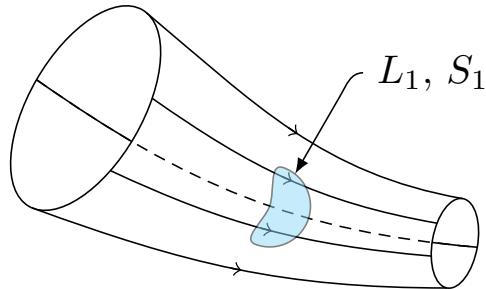


Рис. 28.

На поверхности трубы разместим маленький контур  $L_1$  с площадью  $S_1$ . Со считаем поток через этот маленький контур:

$$\Gamma_1 = \int \vec{\Omega} \vec{n} dS_1 = \oint_{L_1} \vec{v} d\vec{l} = 0$$

Так как на поверхности трубы все линии тока проходят сквозь выбранный контур в поверхности контура, то циркуляция по такому контуру будет равна нулю.

В силу теоремы Томсона, если циркуляция  $\Gamma_1 = 0$  в начальный момент времени, то она будет равна нулю и в любой дальнейший момент времени. А так как маленький контур произвольный, то он все время будет находиться на поверхности вихревой трубы. Устремляя сечение трубы к нулю, мы получаем, что элементы идеальной жидкости, лишенные вихрей в начальный момент времени, будут лишены их и в дальнейшем.  $\square$

Вихри в идеальной жидкости возникнуть и исчезнуть не могут. Чтобы они появились, необходимы взаимодействие с поверхностью (что приводит к неоднозначности контура), и непотенциальность сил. Например, вихри могут возникнуть в заряженной жидкости в магнитном поле.

**Вторая теорема Гельмгольца.** Поток вектора вихря через поперечное сечение лучевой трубы остается постоянным.

Распишем поток через поверхность лучевой трубы, представив её как объединение боковой поверхности  $S_b$  и поверхностей двух торцов  $S_{1,2}$ :

$$\oint \vec{\Omega} \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{\Omega} \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \vec{n}_2 dS + \int_{S_b} \vec{\Omega} \vec{n}_b dS$$

Очевидно, поток через боковую поверхность равен нулю. Используем формулу Остроградского-Гаусса и учтываем, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ :

$$\oint \vec{\Omega} \vec{n} dS = \iiint \operatorname{div} \vec{\Omega} dV = 0$$

Учитывая произвольность выбора поверхностей и то, что единичный вектор нормали  $\vec{n}$  меняет на торцах знак, получаем инвариантность потока вихря через сечение вихревой трубы

$$\int_{S_1} \vec{\Omega} \vec{n} dS = \int_{S_2} \vec{\Omega} \vec{n} dS.$$

**Замечание.** Если сечение достаточно мало, так что завихренность постоянна вдоль трубы  $\Omega S$ , сохраняется величина  $\Omega S$  – называемая интенсивностью вихревой трубы.

Рассмотрим несколько примеров, в которых получим значение вектора завихренности.

**Плоское течение.** Пусть течение направлено вдоль оси  $x$ :  $\vec{v} = (v_x(y), 0, 0)$ .

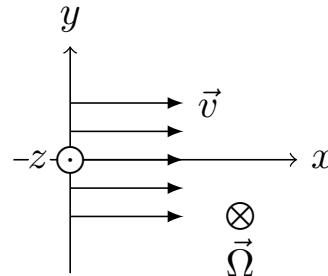


Рис. 29. Плоское течение

Дивергенция, как нетрудно получить, равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Сосчитаем завихренность  $\vec{\Omega}$ .

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Итак, завихренность есть, но она направлена либо на нас, либо от нас по рисунку.

Если  $v_x = by$ , то  $\vec{\Omega} = -b\vec{k}$ . Это тривиальная задача.

Рассмотрим ещё случай, когда скорость задана ступенчатой функцией. В этом случае наблюдается так называемая *вихревая пелена*:

$$v_x(y) = \begin{cases} v_0, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{k} \cdot v_0 \delta(y)$$

Найти циркуляцию можно двумя способами: сосчитать интеграл

$$\Gamma = lv_0 + 0 + 0 + 0,$$

или найти поток вектора завихренности

$$\Gamma = \int \vec{\Omega} \vec{n} dS = lv_0.$$

Мы привыкли считать, что завихренность – это вращение слоев жидкости. В этой задаче течение плоско-параллельное, но скорости у разных сечений разные: движение остается вихревым.

**Вращение жидкого цилиндра.** Пусть жидкий цилиндр радиуса  $R$  вращается как твердое тело: При этом скорость жидкости задается как

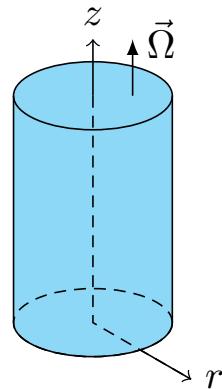


Рис. 30. Вращение жидкого цилиндра

$$v_\theta(r) = \begin{cases} \omega r, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Нам нужно знать выражение для ротора в в цилиндрической системе координат. Но здесь можно обойтись формулой попроще.  $\vec{\Omega}$  направлен по оси  $z$ , и получается простая формула:

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\Omega} = \vec{I}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta = 2\omega \vec{I}_z, \quad \text{когда } r < R$$

Будем считать, что снаружи от цилиндра течение потенциальное:  $\vec{\Omega} = 0$ , тогда

$$\frac{\partial}{\partial r} r v_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\theta = \frac{A}{r}$$

Найдем циркуляцию  $\Gamma$  по контуру  $L$ :

$$\Gamma = \int_L \vec{v} d\vec{l} = 2\pi R v_\theta = 2\pi A.$$

С другой стороны,  $\Gamma$  – это поток вихря в области, где течение вихревое,  $S = \pi R^2$ :

$$\Gamma = \iint (\text{rot } \vec{v}, \vec{n}) dS = \iint \Omega_n dS = 2\omega \pi R^2.$$

Из этих формул находим

$$v_\theta = \frac{\omega R^2}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Ради чего мы все это делали? Надо найти давление:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2}.$$

Используем уравнение Бернулли, и ищем ошибку, которая здесь была допущена. По формуле получилось на бесконечности и в центре скорость ноль, и давление в центре нуля и на бесконечности одно и тоже. А из опыта известно, что в центре смерча, например, давление пониженное.

Подсказка: использовали уравнение Бернулли, а оно сформулировано в разных случаях: 1) для стационарного потенциального течения во всем пространстве, 2) вдоль лучевой трубки, 3) нестационарное

При  $r > R$  можно пользоваться, течение потенциальное. А внутри-то там есть вихрь, течение не потенциально, и формулой Бернулли пользоваться нельзя.

$$r > R : p = p_0 - \frac{\rho \omega^2 R^4}{2r^2}$$

Внутри пользуемся уравнением Эйлера. Как мы его выводили: масса умножить на ускорение равно силе.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho}$$

У нас  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ . Нужно знать  $\vec{v} \nabla \vec{v}$  в сферической системе координат. Есть два способа: первый - посмотреть, второй - смотрим на картинку: частичка движется по окружности, радиус у неё известен  $R$ , скорость известна  $\omega r$ . Ускорение

центростремительное  $a_r = -\frac{v^2}{R} = -\omega^2 r$ . Тогда можем записать:

$$-\omega^2 r = -\frac{dp}{dr} \frac{1}{\rho}$$

$$p(r) = \begin{cases} p_0 - \frac{\rho\omega^2 R^4}{2r^2}, & r > R \\ p_0 - \frac{\rho\omega^2 R^4}{R^2} + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}, & r < R \end{cases}$$

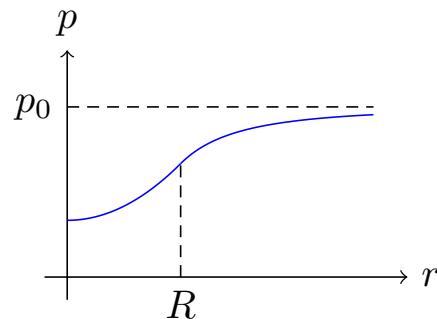


Рис. 31. Зависимость давления от расстояния

Получается, что давление в центре  $p(r = 0) = p_0 - \frac{\rho\omega^2 R^4}{R^2}$  меньше, чем на давление на бесконечности. Чем больше радиус вихря, тем меньше давление.

### 2.12.5 Точечные вихри

Устремляем сечение нашей вихревой трубы к нулю так:

$$R \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad \Gamma = 2\pi\omega R^2 = 2\pi A, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Пусть у нас есть много вихрей:

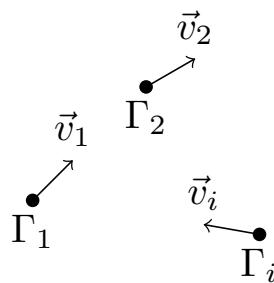


Рис. 32. Много вихрей

Как они между собой будут взаимодействовать? У нас есть уравнение Лапласа, которое работает всюду, кроме вихревых линий. Скорость в данной точке

равняется суперпозиции скорости от всех вихрей. Дальше, по теореме Гельмгольца, завихренность переносится частицами жидкости. То есть, скорость точечного вихря  $\Gamma_i$  равняется скорости жидкости в данной точке, создаваемой всеми остальными вихрями.

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{v}_k(\vec{r}_i)$$

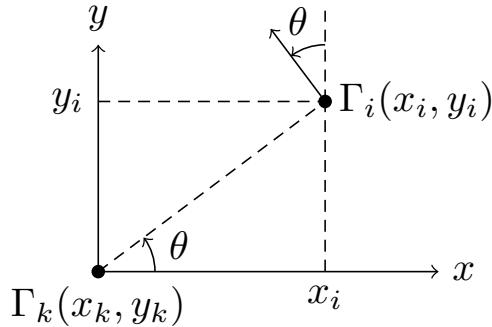


Рис. 33. Координаты вихря

$$r = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}, \quad \sin \theta = \frac{y_i - y_k}{r}, \quad v_\theta = \frac{\Gamma_k}{2\pi r_{ik}}.$$

Запишем уравнения для координат вихря

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq i} \frac{\Gamma_k(y_i - y_k)}{r_{ik}^2},$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq i} \frac{\Gamma_k(x_i - x_k)}{r_{ik}^2}.$$

Какие интегралы есть у этой системы?

$$\sum \Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = - \sum \sum \frac{\Gamma_k \Gamma_i (y_i - y_k)}{r_{ik}^2} = 0$$

Это значит, что

$$\sum x_i \Gamma_i = \text{const} = \bar{x} \sum \Gamma_i, \quad \text{где} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i \Gamma_i}{\sum \Gamma_i}$$

Тривиально, что то же самое можно записать по координате  $y$ . Если  $n > 2$ , других интегралов нету.

Рассмотрим более простую задачу. Всего два вихря:  $r_1$  и  $r_2$ .

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\Gamma_2(y_1 - y_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\Gamma_1(y_1 - y_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\Gamma_2(x_1 - x_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{\Gamma_1(x_1 - x_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Домножаем, складываем:

$$\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 = \text{const}, \quad \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = \text{const}$$

Мы нашли два интеграла: центр тяжести не изменяется. Ну, давайте попробуем еще найти интегралы. Если мы найдем еще два интеграла, то задачу сделаем. Подсказка: из первого уравнения вычесть второе.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1 - x_2) &= -\frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r}, \\ \frac{d}{dt}(y_1 - y_2) &= \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r} \end{aligned}$$

Домножаем, складываем:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) \frac{dx_1 - x_2}{dt} + (y_1 - y_2) \frac{dy_1 - y_2}{dt} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{d(x_1 - x_2)^2}{dt} + \frac{d(y_1 - y_2)^2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда еще один интеграл

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r^2 = \text{const}$$

Вихри врачаются вокруг неподвижного центра тяжести, с сохранением расстояния между ними. Какие при этом траектории движения? Чтобы найти траекторию, из первого уравнения находим  $x_1$ , из второго  $y_2$ , подставляем в это уравнение и получим уравнение окружности.

а) Что же у нас теперь будет? Посмотрим частный случай, когда  $\Gamma_2 = 0$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma$ . (рис) Движение по окружности  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ , центр тяжести в точке ненулевого вихря.

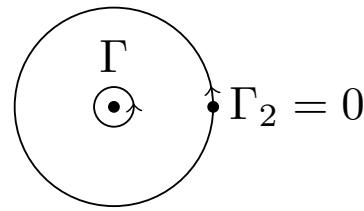


Рис. 34.

6) Два вихря  $\Gamma, \Gamma$  – центр тяжести посередине, расстояние между вихрями  $l$ ,  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi l}$ .

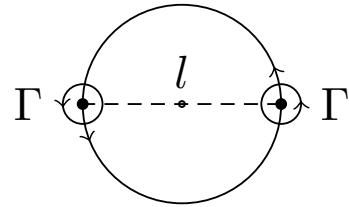


Рис. 35.

в) Два вихря  $\Gamma, -\Gamma$ . Центр тяжести будет находиться на бесконечности (нетрудно посчитать).  $v = \frac{\Gamma}{2\pi l}$ . Два таких вихря двигаются с постоянной скоростью.



Рис. 36.

г) Вихрь над плоскостью. Метод изображений даст, что вихри будут двигаться параллельно плоскости.

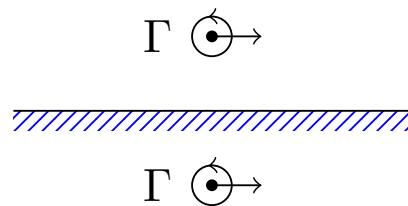


Рис. 37.

д) Вихрь в угле будет двигаться на бесконечности параллельно линиям угла. Для нахождения траектории можно использовать метод изображений:

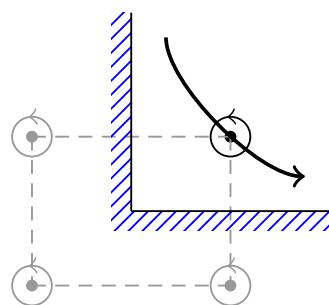


Рис. 38.

е) Цепочка вихрей после обтекания цилиндра – цепочка Кармана.

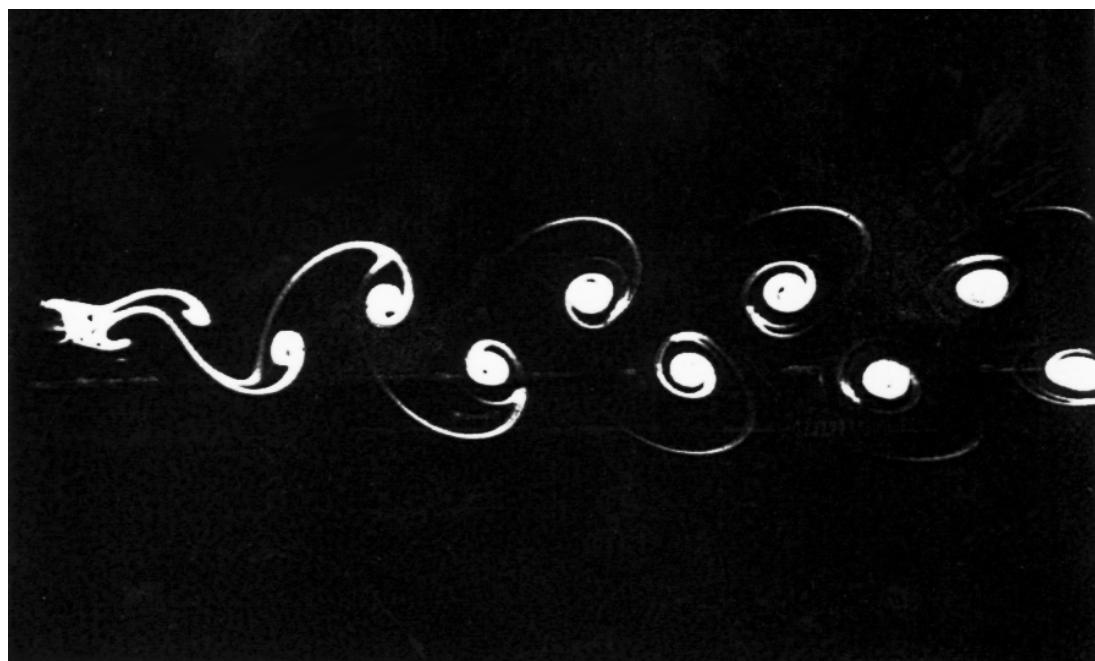


Рис. 39. Цепочка Кармана

## 2.13. Поверхностные гравитационные волны

Надо отметить большое разнообразие волновых движений в жидкостях и газах. Это волны на поверхности жидкости, внутренние волны в океане.

Мы будем рассматривать гравитационные волны на поверхности несжимаемой жидкости. Если ровная поверхность жидкости выведена из состояния равновесия, то под действием силы тяжести возмущение стремится вернуться в равновесие и возникнет колебательное движение.

К таким волнам относятся корабельные волны, цунами, ветровые волны, внутренние волны в неоднородной жидкости. При исследовании мы будем использовать ряд приближений. Во-первых, жидкость должна быть **идеальная и несжимаемая** (нет вязкости, звука). Также она должна быть **однородна** (плотность постоянна). При этом **поверхность жидкости плоская и неограниченная** (земля в данных масштабах плоская). Кроме того, мы будем рассматривать только волны **малой амплитуды**.

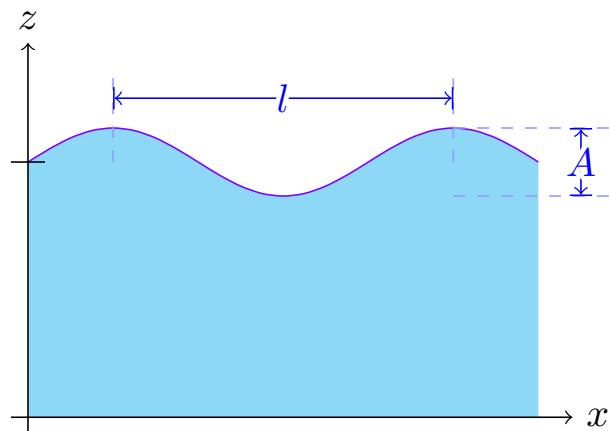


Рис. 40. Характеристики волны

Оценим слагаемые в уравнении Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{v}{\tau}, \quad A \sim V\tau, \quad \tau \sim \frac{A}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{v^2}{a}, \quad (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \sim \frac{v^2}{l}, \quad l \gg a$$

Значит, вторым слагаемым можно пренебречь, и тогда

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla(gz)$$

Берем от этого уравнения ротор:

$$\text{rot grad} = 0, \quad \text{rot } \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \text{grad } \varphi,$$

Из несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Тогда

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Волны описываются (в отсутствии силы тяжести и постоянной плотности воды) уравнением Лапласа.

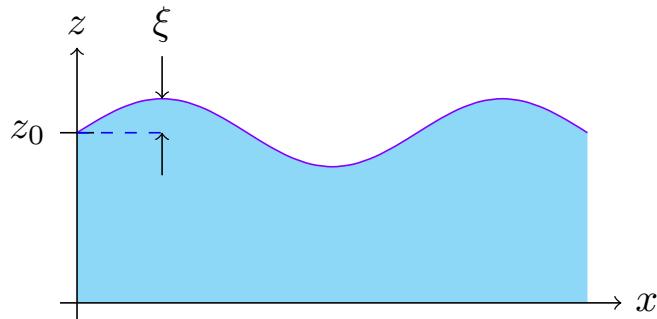


Рис. 41. Новые координаты

**Решение задачи о волнах.** Введем новую координату  $\xi = z - z_0$  для решения задачи так, как это показано на рисунке 41. Начнем решение задачи с поверхности волны: это граница с воздухом, значит, есть некое давление  $p_0$ . Можем вернуться к уравнению Эйлера, вместо скорости подставить  $\nabla \varphi$ , и тогда мы получим нестационарное уравнение Бернули

$$\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho_0} + gz \right) = 0,$$

откуда следует, что на поверхности жидкости

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \xi = -p_0,$$

где введено малое смещение волны от плоскости  $\xi(x, y, t)$ .

Переопределим потенциал, чтобы избавиться от  $p_0$ , добавлением не зависящей от координат величины  $p_0/\rho$ . Тогда условие на поверхности примет вид

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\xi} + \rho g \xi = 0$$

Найдем, чему равняется вертикальная скорость:

$$v_z = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \cancel{(\nabla v_z \cdot \operatorname{grad})\xi},$$

здесь из-за малости колебаний вторым слагаемым мы пренебрегли, и тогда

$$v_z = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

С другой стороны,

$$v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Продифференцировав по времени уравнение для  $\varphi$  и заменив  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  на  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , получим окончательно граничное условие на потенциал:

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

В силу малости возмущений мы заменили граничное условие на поверхности жидкости на граничное условие на плоскости  $z = 0$ . Граничное условие на поверхности мы получили выше. Еще нужно граничное условие на дне – условие непротекания: вертикальная компонента скорости на дне равна нулю:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0$$

Если волны идут в однородном полупространстве, то в качестве второго граничного условия берем  $\varphi \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Введем волновую замену потенциала  $\varphi = \Phi(z) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ . Тогда уравнение Лапласа примет вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - k^2 \Phi = 0$$

Оно взялось из  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Нам надо найти такое решение, чтобы оно удовлетворяло нулю на дне.

Будем искать решение в виде

$$\Phi = A \operatorname{ch} k(z + H),$$

тогда

$$\varphi = A \operatorname{ch} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)}.$$

Считаем производные:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = A k \operatorname{sh} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\omega^2 A \operatorname{ch} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

В итоге получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A \operatorname{ch} k(z+H) \cdot e^{i(kx-\omega t)} + g A k \operatorname{sh} k(z+H) \cdot e^{i(kx-\omega t)} &= 0 \Big|_{z=0} \\ \Rightarrow \quad \omega^2 &= gk \operatorname{th} kH = gk \frac{e^k H - e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} = gk \frac{\operatorname{sh} kH}{\operatorname{ch} kH} \end{aligned} \quad (1)$$

**Траектории частиц в волне.** Нас интересует, как двигаются частицы. Запишем потенциал:

$$\varphi = A \operatorname{ch} k(z+H) \cdot \exp(ikx - i\omega t)$$

Найдем компоненты скоростей на глубине  $z$ :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = ikA \operatorname{ch} k(z+H) e^{i(kx-\omega t)} \\ v_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = kA \operatorname{sh} k(z+H) e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= v_x, \quad \xi = \frac{v_x}{-i\omega} = -\frac{kA}{\omega} \operatorname{ch} k(z+H) e^{i(kx-\omega t)} \\ \frac{d\eta}{dt} &= v_z, \quad \eta = \frac{v_z}{-i\omega} = \frac{ikA}{\omega} \operatorname{sh} k(z+H) e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned}$$

При  $z = 0$  у нас  $\xi = a$  (амплитуда на поверхности равна амплитуде колебаний):

$$a = \xi|_{z=0} = \frac{ikA}{\omega} \operatorname{sh} kH$$

Поскольку величины у нас комплексные, мы должны взять действительную часть. После нехитрых математических операций смещения частицы по вертикали ( $\xi$ ) и по горизонтали ( $\eta$ ) найдутся в виде

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{a}{\operatorname{sh} kH} \operatorname{ch} k(z+H) \sin(kx - \omega t) \\ \eta &= \frac{a}{\operatorname{sh} kH} \operatorname{sh} k(z+H) \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что траектории двигаются по эллипсу:

$$\frac{\xi^2}{a_\xi^2} + \frac{\eta^2}{a_\eta^2} = 1, \quad a_\xi = \frac{a \operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}, \quad a_\eta = \frac{a \operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}$$

### 2.13.1 Волны на мелкой воде

Как следует из названия этого раздела, мы будем рассматривать волны на мелкой воде, где будем работать в приближении  $\lambda \gg H$  или, что тоже самое,  $kH \ll 1$ .

Дисперсионное уравнение (1) для волн на мелкой воде примет вид

$$\omega^2 = gk^2H, \quad \omega = \pm k\sqrt{gH}$$

Зависимость от  $k$  линейная, значит, *волны на мелкой воде – это волны без дисперсии*. Яркий пример волн без дисперсии – это цунами в океане. Глубина океана 5-6 км, а цунами имеет длину волны десятки – сотни километров.

У нас есть понятие фазовой и групповой скоростей:

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

Если воспользоваться соответствующим дисперсионным уравнением, окажется, что для волн на мелкой воде фазовая и групповая скорости совпадут.

Если у нас есть некий волновой пакет, и мы смотрим как он распространяется, у нас есть огибающая и есть фаза. Групповая скорость – скорость огибающей, фазовая – скорость постоянной фазы:

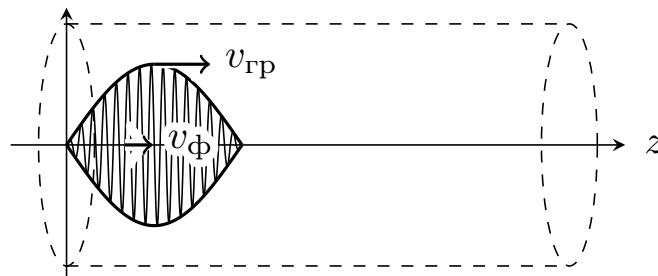


Рис. 42. Распространение волнового пакета

Теперь уточним вид траекторий частицы в мелкой волне. Ранее мы нашли, что в любом случае это движение по эллипсу с амплитудами  $a_\xi, a_\eta$ . Найдем их в случае  $kH \ll 1$ , для этого разложим гиперболические функции в ряд Тейлора при малых аргументах:

$$\operatorname{sh} x \approx x + \dots, \quad \operatorname{ch} x \approx 1 + \dots$$

Учтем ещё, что в выбранной нами системе координат (ось  $z$  вверх, на глубине  $z$  отрицательны)  $k(z + H) < kH$ . Тогда из полученных ранее формул несложно получить

$$a_\xi = \frac{a}{kH}, \quad a_\eta = a \left\{ 1 + \frac{z}{H} \right\}$$

Частички двигаются по сильно вытянутым эллипсам:  $a_\xi \gg a_\eta$ .

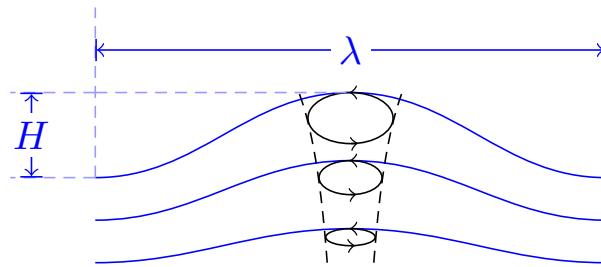


Рис. 43. Движение частиц на разной глубине

### 2.13.2 Волны на глубокой воде

В этом случае  $kH \gg 1$ . Тогда  $\operatorname{tg} kH$  равен 1, и тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$\omega = \pm \sqrt{gk}$$

Волна не чувствует дно, но появляется сильная дисперсия.

Найдем фазовую и групповую скорости:

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad v_{gr} = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2}v_f$$

На мелкой воде пакет волн движется вместе, а на глубокой гребни волн будут убегать вперед<sup>4</sup>

Определим траектории частиц. По определению,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Отбросив некоторые слагаемые по порядку малости, получим

$$\operatorname{sh} kH \approx \operatorname{ch} kH \approx \frac{e^{kH}}{2}$$

После подстановки в формулы для эллипсов получим

$$a_\xi = a_\eta = ae^{kz}, \quad z < 0$$

Траектории представляют собой окружности, радиус которых быстро спадает с глубиной.

Займёмся численным экспериментом. Оценка такая: мы находимся в море, амплитуда волны  $a$  равна 5 метрам. Это очень серьёзные волны. Давайте считать, что длина волны  $\lambda = 10$  метров, а мы опустились на глубину 10 метров. Какая

<sup>4</sup>Задание к экзамену: оценить время расплывания пакета (рис. 42) из второй производной

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$$

будет амплитуда колебаний частиц? Если посчитать, то будет один сантиметр. Вот так быстро спадает. Наверху штурм, а на глубине фактически стоит штиль.

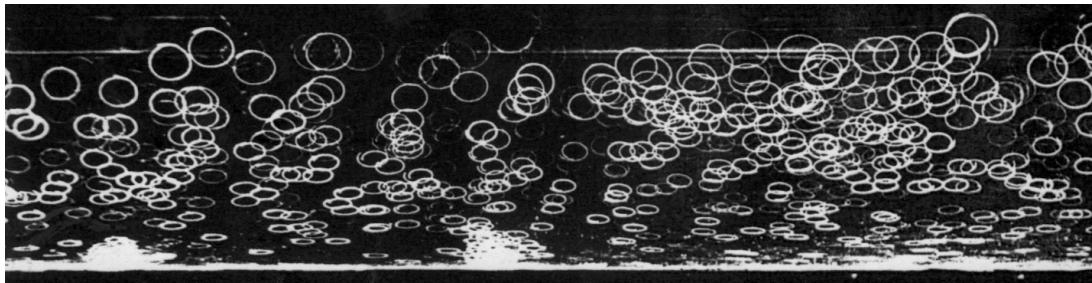


Рис. 44. Траектории частиц в чисто бегущей волне

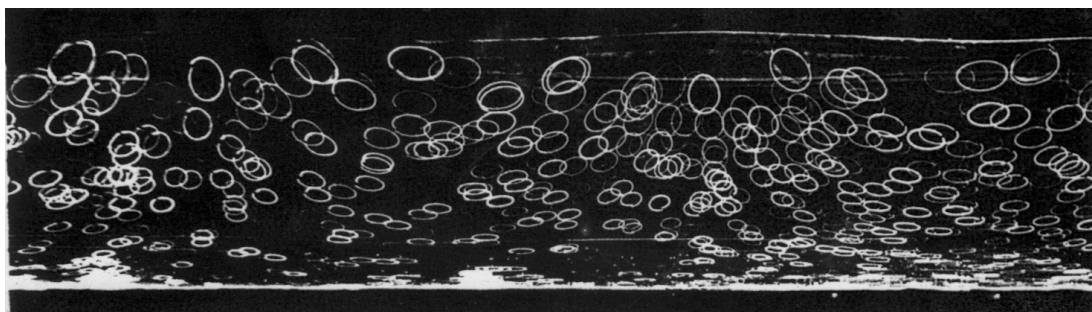


Рис. 45. Траектории частиц в частично стоячей волне ( $R = 0.24$ )

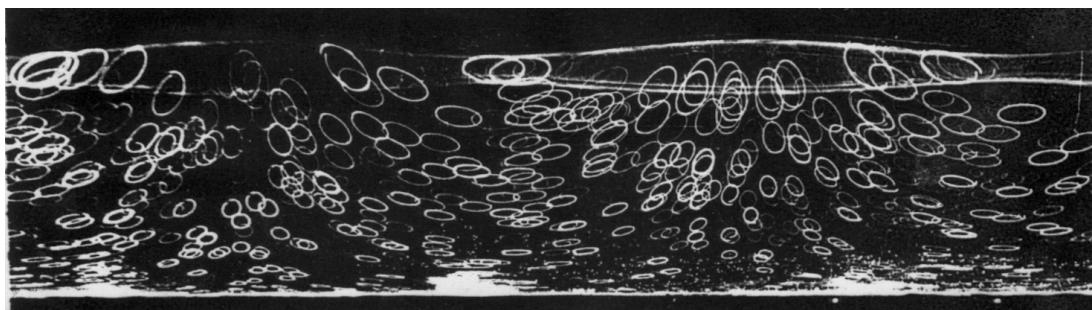


Рис. 46. Траектории частиц в частично стоячей волне ( $R = 0.38$ )

## 2.14. Гравитационно-капиллярные волны

Ранее мы не учитывали поверхностное напряжение.

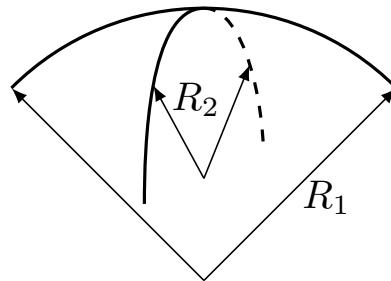


Рис. 47. Два главных радиуса кривизны

Есть два главных радиуса кривизны, и возникает избыточное давление:

$$\delta p_s = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \alpha \frac{1}{R} = -\alpha \nabla \left( \frac{\nabla \xi}{\sqrt{1 + (\nabla \xi)^2}} \right)$$

Если  $\nabla \xi \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1$ , то  $\delta p_s = -\alpha \Delta \xi$ .

Задача свелась к предыдущей. Граничное условие на дне – непротекание, а на поверхности за счет сил поверхностного натяжения граничное условие изменится:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \xi + p_0 + \delta p_s = 0, \quad z = 0$$

От  $p_0$  мы избавляемся аналогично предыдущей задаче, и в итоге получаем граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \xi + \alpha \Delta \xi = 0 \quad \Big|_{z=0}$$

Продифференцируем граничное условие по времени, учитывая, что

$$v(z) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Будем считать, что волна бежит по оси  $x$ , и тогда  $\Delta \xi = \partial^2 \xi / \partial x^2$ , отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \xi = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z}.$$

В результате получаем граничное условие:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} = 0$$

Как и раньше, внутри слоя воды мы имеем для потенциала уравнение Лапласа. Решаем уравнение Лапласа, учитываем граничные условия на дне, и получаем

решение для потенциала

$$\varphi = A \operatorname{ch} k(z + H) \cdot \exp(ikx - i\omega t).$$

Теперь подставляем это решение в последнее уравнение, и получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= (gk + \gamma k^3) \operatorname{th} kH, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\rho}. \\ kH &\gg 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = gk + \gamma k^3.\end{aligned}$$

Когда же волны существенно капиллярны? Для ряби на воде, например. Понятно, что для цунами этот эффект незначителен. Давайте найдём фазовую скорость:

$$v_f^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \gamma k$$

Такая зависимость имеет минимум, как показано на графике:

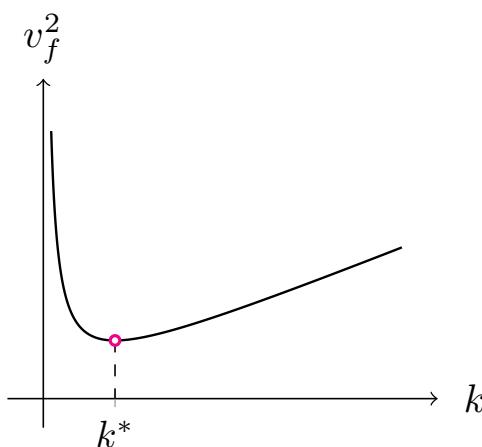


Рис. 48. График с минимумом,  $\lambda_0 = 1.7$  см

Ищем, чему равен минимум: он равен  $k_* = \sqrt{\frac{g}{k}}$

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{gr}} = \frac{v_f k_*^2 + 3k^2}{2(k_*^2 + k^2)}$$

При очень маленьких волновых векторах  $v_{\text{gr}} = \frac{v_f}{2}$  (как на мелкой воде). При больших  $k$  групповая скорость  $v_{\text{gr}} = \frac{3}{2}v_f$ . Итак, у нас есть капиллярные и гравитационные волны. В одном случае групповая скорость меньше фазовой, в другом – больше фазовой.

**Резюме: гравитационные и гравитационно-капиллярные волны.** Дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = (gk + \gamma k^3) \operatorname{th} kH$$

Если  $k \gg k_*$ , это капиллярные волны. Если  $\frac{1}{H} \ll k \ll k_*$ , то это гравитационные короткие волны (дно ещё не чувствуется). Если же  $k \ll \frac{1}{H}$ , то это длинные

гравитационные волны.

**Задача о устойчивости.** Попробуем обсудить случай, когда у нас есть слои жидкости, причем тяжелая жидкость сверху. Здесь мы возвращаемся к гидростатике. Является ли такое состояние решением уравнения гидростатики? (вверху тяжелая, внизу лёгкая). Гравитация параллельна градиенту плотности, это хорошо. А является ли такое состояние устойчивым?

Нужно написать уравнение Лапласа, поставить граничные условия, написать дисперсионное уравнение с учётом капиллярных сил. Считаем, что поверхность достаточно недалеко.

Задача отличается от предыдущей лишь тем, что мы фактически перевернули её вверх ногами. Тогда можно получить правильное уравнение дисперсии просто сменой знака  $g$ :

$$\omega = \sqrt{-gk + \gamma k^3}$$

Тут возникают проблемы: отрицательные  $\omega^2$  при  $k < k_* = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}$ . Если  $k > k^*$  (мелкие возмущения), то всё нормально:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma k^3} \quad \Rightarrow \quad \xi = c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{i\omega_2 t}$$

А при мнимых  $\omega$ :

$$\xi = c_1 e^{-|\omega|t} + c_2 e^{|\omega|t}$$

Итак, при малых возмущениях жидкость просто колеблется, а при больших начинает течь.

Значит, решение устойчивое. Простой пример из жизни – это перевернутый флакон духов. Бутылочку можно перевернуть вверх ногами, но духи не вытекут: потому что горлышко узкое, и масштабы маленькие, а  $k$  большое (подавлены крупномасштабные возмущения).

Из жизненного опыта известно, что в таком случае духи надо потрясти: действительно, согласно Эйнштейну, движение с ускорением эквивалентно увеличению силы тяжести:

$$k_{*\exists} = \sqrt{\frac{g+a}{k}}$$

## 2.15. Внутренние волны

Пусть у нас есть устойчивая стратификация жидкости: жидкость двухслойная, с плотностями слоев  $\rho_2 > \rho_1$ .

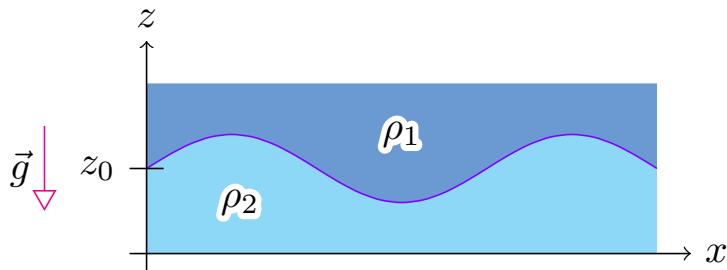


Рис. 49. Внутренние гравитационные волны

Считаем, что до границы достаточно далеко. На границе есть какие-то возмущения

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \Delta\varphi_2 = 0$$

Справа налево начнём писать уравнение. Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= Ae^{-kz}e^{i(kx-\omega t)} \\ \varphi_2 &= Be^{kz}e^{i(kx-\omega t)}\end{aligned}$$

Наша задача – найти дисперсионное уравнение. Займёмся константами. Мы по-прежнему считаем, что колебания относительно малы, т.е. амплитуда колебаний много меньше длины волны.

Из кинематического граничного условия, нормальная компонента скорости на границе раздела слоев непрерывна:

$$v_z = (\approx) \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

Отсюда сразу следует  $B = -A$ .

Мы должны поставить второе граничное условие. Используем нестационарное уравнение Бернулли:

$$p_1 = -\rho_1 g \xi - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad p_2 = -\rho_2 g \xi - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$$

Здесь мы пренебрегли слагаемым  $v^2$  в силу малости колебаний. Граничные условия – давления на поверхности одинаковы:

$$kg(\rho_2 - \rho_1) = \omega^2(\rho_2 + \rho_1)$$

Мы избавились от  $\xi$  и в итоге получаем дисперсионное уравнение:

$$\omega = \sqrt{gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} \approx \sqrt{gk \frac{\Delta\rho}{\rho}}$$

Предельный случай:  $\rho_1 \rightarrow 0$  даёт переход к случаю гравитационных волн на глубокой воде. В океане  $\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim 10^{-2}$ .

**Мертвая вода.** В 1893 г. знаменитый норвежский полярник Фритьоф Нансен, совершивший плавание по арктическим водам, столкнулся со странным явлением. Вот что записал он в отчете: «*Мы почти не двигались с места ... и будто тащили всю воду за собой. Что мы ни делали, – круто поворачивали, лавировали, описывали полный круг и пр., – все напрасно. Лишь только машина переставала работать, судно тотчас же останавливалось, точно схваченное чем-то за корму*».

Встречается явление лишь там, где слой пресной или сильно распресненной воды лежит поверх соленой морской воды. Впрочем, чтобы «попасться», как попалось судно Нансена, нужно еще одно совпадение: толщина верхнего пресного слоя должна примерно равняться толщине судна. Тогда на малом ходу его винт будет расходовать почти всю свою энергию не на движение вперед, а на создание внутренних волн на границе двух слоев воды – корабль почти замирает на месте, при этом сами волны с корабля незаметны.

Переход к частоте Брента-Вяйсяля:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Уравнение гидростатики:

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0(z)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_0 + \nabla p_1}{\rho_0 + \rho'} + \vec{g}$$

Несжимаемость даст

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Нетривиальность в следующем: не хватает одного уравнения: переменных 5, уравнений скалярных 4. Вспомним полную производную:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho = 0$$

Перепишем уравнение для возмущений  $\rho = \rho_0 + \rho'$ :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\vec{v} \nabla)[\rho_0 + \rho'] = 0$$

Пренебрежём  $\vec{v} \nabla \rho'$ , тогда получим ещё уравнение

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = 0$$

Вспомним и запишем частоту Брента-Вяйсаля:

$$N^2 = -g \frac{d\rho_0}{dz} \frac{1}{\rho_0}$$

Тогда последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - v_z \frac{N^2}{g} p_0 = 0$$

Таким образом у нас появилась частота Брента-Вяйсяля, которая ранее возникала при качественном рассмотрении рассмотрении вопроса об устойчивости стратифицированной жидкости. Обычно еще делается предположение о малости стратификации. Это так называемое *приближение Буссинеска*. Мы не будем приводить эти выкладки.

Без всякого вывода рассмотрим один частный случай: экспоненциальная атмосфера, где  $\rho_0(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}}$ , и  $N^2 = gH$ .

$$v_z = A \exp\{-i\omega t + ik_x x + ik_z z\}$$

Здесь  $H$  – эффективная высота атмосферы. Дисперсионное уравнение здесь будет

$$\omega^2 = N^2 \cdot k_x^2 \quad \text{или} \quad \omega = N \sin \theta, \quad \text{где} \quad \sin \theta = \frac{k_x}{k}$$

1) Волны существуют только с частотой  $\omega < N$ . 2) Зависимость направления от частоты. Если  $\omega \rightarrow N$ , то волновой вектор направлен горизонтально. Если же  $\omega \ll N$ , напротив, вертикально. 3)  $\vec{v}_f \perp \vec{v}_{gr}$ :

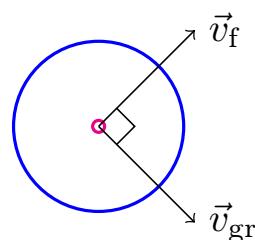


Рис. 50.

### 3. Движение вязкой несжимаемой жидкости

Мы уже столкнулись с рядом парадоксов: парадокс Даламбера – на тело в потоке идеальной жидкости не действует сила. Из жизненного опыта хорошо известно, что это не так. Второй недостаток теории идеальной жидкости – невозможность образования вихрей.

Наконец, для идеальной жидкости у нас было граничное условие непротекания: отсутствовала нормальная компонента скорости. Но это вступает в противоречие с опытным фактом: на поверхности неподвижного тела равен нулю модуль скорости. Это происходит из-за наличия сил молекулярного сцепления между жидкостью и твердым телом. Следствием этого является следующий «парадокс»: на лопастях крутящегося вентилятора собирается пыль.

#### 3.1. Уравнения гидродинамики вязкой жидкости

Займёмся получением уравнений, которые учитывали бы вязкость и разрешали вышеперечисленные парадоксы. Для этого мы можем использовать закон сохранения массы (уравнение неразрывности), так как мы его получили без дополнительного предположения об отсутствии вязкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Для идеальной жидкости мы смогли получить уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

Для вязкой жидкости его вывести уже не получится. Мы будем конструировать уравнение с помощью экспериментальной задачи.

**Экспериментальная задача.** Пусть у нас есть две пластины. Нижняя бесконечная пластина (плоскость) неподвижна, а верхняя пластина площади  $S$  находится на высоте  $h$  над нижней. К верхней пластине мы прикладываем силу  $F$ , и она двигается с постоянной скоростью  $v$ .

Из опытов известно: чтобы пластинка двигалась с постоянной скоростью, нужно выполнение равенства

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{V_0}{h}$$

здесь  $\eta$  – это *динамический коэффициент вязкости*. Для жидкости он убывает с ростом температуры, а для газов медленно растёт. Принято также вводить вязкость на единицу массы – так называемую *кинематическую вязкость*.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Вещество при 20°	$\eta, \frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}}$	$\nu, \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$
вода	0.010	0.010
воздух	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.15
спирт	0.018	0.022
глицерин	8.5	6.8
ртуть	0.0156	0.0012

Из таблицы видно, что для движения воздуха вязкость оказывается более существенной, чем для воды.

**Конструирование уравнений Навье-Стокса.** Попытаемся сконструировать (но не вывести!) уравнения движения вязкой жидкости. За основу возьмём закон сохранения импульса. Он фундаментален и верен и для вязкой жидкости, в отличие, например, от закона сохранения энергии, который уже использовать нельзя: вязкость есть внутреннее трение, значит есть диссипация.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad \text{где } \Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$$

Добавили одно слагаемое – тензор вязких напряжений  $\sigma_{ik}$ . Попробуем его собрать на основе логичных предположений.

Во-первых, очевидно – если жидкость двигается или вращается как целое, то внутреннего трения нет. Трение возникает только при относительном смещении слоёв жидкости (значит, в тензор войдут производные скоростей по координатам, то есть градиенты скорости).

Второе – мы не рассматриваем экстремальные движения, и считаем что зависимость ( $\sim \eta$ ) линейна. Вязкие силы возникают на молекулярных масштабах и все величины в гидродинамике медленно меняются на этих масштабах.

Наконец, жидкость будем считать изотропной. В таких предположениях можно записать наиболее общий вид тензора вязких напряжений (это тензор 2-го ранга):

$$\sigma_{ik} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + c \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \quad (2)$$

Рассмотрим случай вращения жидкости как целого:

$$\vec{v} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= \Omega_y z - \Omega_z y, \\ v_y &= \Omega_x z - \Omega_z x, \\ v_z &= \Omega_x y - \Omega_y x \end{aligned} \quad (3)$$

Прямая подстановка (3) в (2) даёт

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0, \quad \sum \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} = 0$$

Так как при вращении жидкости как целого тензор вязких напряжений равен нулю, а мы получили равенство нулю двух из трех слагаемых тензора, то очевидно, третье тоже равно нулю. Так как в общем случае

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \neq 0,$$

единственным вариантом остается положить в (2) константу  $c = 0$ .

Посмотрим внимательнее на последнее слагаемое в (2). Оказывается, это не что иное, как дивергенция:

$$\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{v}$$

это слагаемое существенно, только если жидкость сжимаема.

Переобозначим константы  $a = \eta$ ,  $b = \xi$ . Тогда тензор вязких напряжений перепишется как

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \xi \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

После подстановки тензора, дифференцирования и перегруппировки слагаемых получим

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k}$$

Это и есть уравнение Навье–Стокса<sup>5</sup>. Его можно также записать в векторной форме:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

Часто также употребляется форма записи через кинематическую вязкость  $\nu = \eta/\rho$ :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

<sup>5</sup>Уравнения Навье–Стокса – система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости. Уравнения Навье–Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач. Названы по имени французского физика Анри Навье и британского математика Джорджа Стокса. В анализе решений уравнений заключается суть одной из семи «проблем тысячелетия», за решение которых Математический институт Клэя назначил премию в 1 млн. долларов США. Необходимо доказать или опровергнуть существование глобального гладкого решения задачи Коши для трёхмерных уравнений Навье–Стокса. Нахождение общего аналитического решения для пространственного или плоского потока осложняется тем, что оно нелинейное и сильно зависит от начальных и граничных условий.

Это уравнение записано для несжимаемой жидкости, когда дивергенция скорости равна нулю.

Размерность кинематического коэффициента вязкости, как нетрудно видеть из уравнения Навье-Стокса,

$$[\nu] = \frac{L^2}{T}$$

**Диссипация в несжимаемой вязкой жидкости.** Для несжимаемой вязкой жидкости  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , а значит, тензор вязких напряжений упростится:

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

При этом диссипация энергии, по определению

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV$$

Из этих формул и уравнения Навье-Стокса можно показать (доказательство можно посмотреть в Ландау, т.6 «Гидродинамика», стр. 76), что

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{\rho}{2} \int 2 \frac{\partial v_i}{\partial t} v_i dV = -\frac{\eta}{2} \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$$

**Определение коэффициентов в уравнении Навье-Стокса.** Как определять коэффициенты  $\eta$ ,  $\xi$ , которые мы ввели при конструировании тензора вязких напряжений? Мы конструировали уравнения, не выводя их строго, и поэтому потеряли возможность получить аналитические выражения для коэффициентов, и их надо как-то определять экспериментально.

Можно взять круглый диск (касающийся жидкости) на нити, закрутить и определить добротность осциллятора с затуханием. Можно бросить шарик в сосуд. Или прокачивать жидкость через трубу, и скорость вытекания будет определенным образом зависеть от вязкости.

Рассмотрим задачу, в которой попытаемся найти силу, действующую на тело, поверхность которого задана ( $S$ ). Также пусть есть некая замкнутая вокруг тела поверхность  $S'$ .

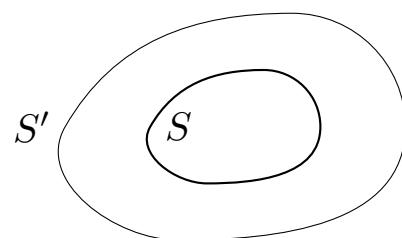


Рис. 51.

Запишем закон сохранения импульса и тензор плотности потока импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad \Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma_{ik}.$$

Рассмотрим стационарный случай, тогда из ЗСИ

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Проинтегрируем выражение для тензора по внутреннему объёму (заключенному между  $S$  и  $S'$ ) и применим теорему Гаусса:

$$\int_S \Pi_{ik} n_k dS + \int_{S'} \Pi_{ik} n_k dS = 0$$

Из полученного выражения следует, что силу, действующую на тело можно найти, измеряя давление и скорости на внешнем контуре. Иногда это проще, если тело имеет сложную форму.

На поверхности тела, если жидкость идеальная, то равна нулю нормальная компонента: для вязкой же жидкости равен нулю модуль скорости, поэтому  $v_k|_S = 0$ , и тогда

$$\Pi_{ik}|_S = p \delta_{ik} - \sigma_{ik}.$$

Тогда

$$F_i = - \int_S \Pi_{ik} n_k dS = - \int_S p n_i dS + \underbrace{\int_S \sigma_{ik} n_k dS}_{F'_i}.$$

У нас есть две силы: первая – обычное давление, вторая – вязкая сила на единицу поверхности:

$$F'_i = \int_S f_i dS, \quad f_i = \sigma_{ik} n_k.$$

Отметим парадокс: скорость на поверхности тела равна нулю, откуда же возникает сила? Дело в том, что из равенства нулю скорости не следует равенство нулю градиента скорости.

**Замечание о граничных условиях.** В случае вязкой жидкости на поверхности твердого неподвижного тела модуль скорости на поверхности равна нулю (в случае идеальной жидкости была равна нулю нормальная компонента скорости).

$$\vec{v} = (v_x(y), 0, 0)$$

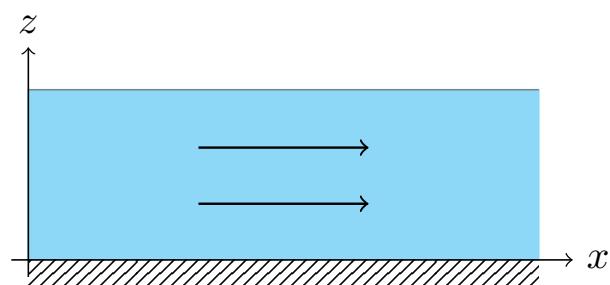


Рис. 52.

При рассмотрении гидродинамики слоя жидкости на верхней границе жидкости

$$f_i = \sigma_{ik} n_k = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

### 3.2. Течение Куэтта

Плоское течение между двумя пластиинками

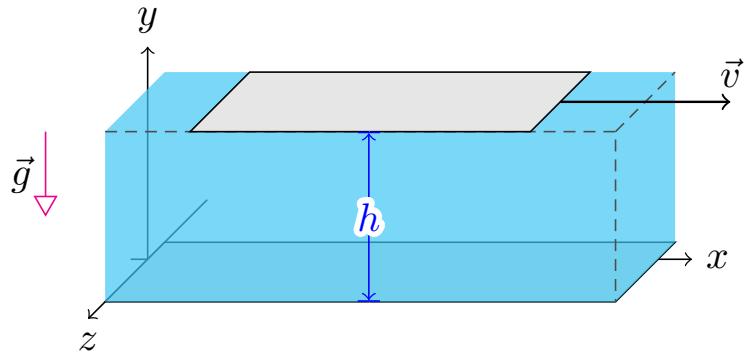


Рис. 53.

Запишем уравнение Навье-Стокса:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + f_i$$

Начнём упрощать:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{v} = (v_x(y), 0, 0), \quad p = p(y)$$

В этих предположениях

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = -g, \quad p = p_0 + \rho_0 gy.$$

Здесь мы считали что внешняя сила это сила тяжести, и соответственно, здесь \$g\$ – ускорение свободного падения. Запишем уравнение в проекции на ось \$y\$:

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

И здесь граничные условия

$$v_x(0) = 0, \quad v_y(H) = V_0$$

Будем искать решение в виде \$v\_x(y) = cy\$, тогда

$$cH = V_0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{V_0}{H}$$

В конечном итоге, важно знать силу, действующую на площадку. Мы хотели найти именно её.

$$f_i = \sigma_{ik} n_k$$

В нашем случае  $n_k \equiv n_y = -1$ , в таком случае

$$f_y = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\eta \frac{V_0}{H}$$

Умножив её на площадь, получим первую экспериментальную формулу, которую мы получили в разделе 3.1  $\frac{F}{S} = \eta \frac{V_0}{h}$ . Вывод был нестрогим, и мы сразу ввели константу  $\eta$ . Более строго следовало ввести произвольную константу и определить из эксперимента, что она совпадает с  $\eta$ .

### 3.3. Течение Пуазейля

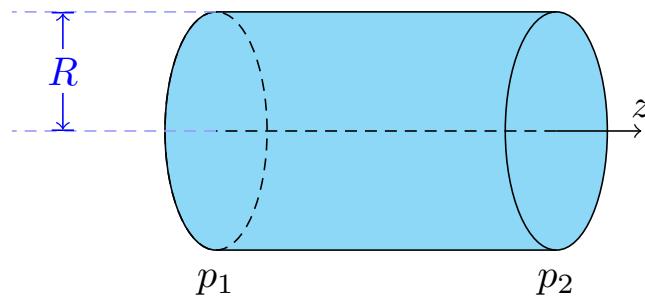


Рис. 54. Постановка задачи

Будем рассматривать стационарное течение  $v = v(r)$  с граничным условием  $v(R) = 0$  – на поверхности трубы у нас скорость равняется нулю.

Запишем уравнение Навье-Стокса в векторной форме:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

В левой части стоит ускорение. У нас частички все двигаются по прямой с постоянной скоростью, значит, скорость и градиент будут сонаправлены и скалярное произведение  $(\vec{v} \nabla) = 0$ . Значит, вся левая часть обращается в нуль.

Считаем, что внешних сил никаких нет, тогда получаем уравнение (при этом подставим  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ ):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} \right]$$

Отсюда первое тривиальное заключение

$$\frac{\partial p}{\partial z} = c_1$$

Тогда

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} = 1 \Rightarrow \eta r \frac{\partial v}{\partial r} = c_1 \frac{r^2}{2} + c_1$$

$$v = \left( \frac{dp}{dz} \right) \frac{r^2}{4\eta} + A \ln(r) + B$$

Из физической реализуемости (скорость в центре трубы должна )  $A = 0$ , а из условия

$$v(R) = 0 \Rightarrow v(r) = \left( \frac{dp}{dz} \right) \frac{1}{4\eta} (r^2 - R^2)$$

Если вода бежит вправо, то слева давление больше, и градиент скорости отрицательный. Тогда профиль скорости будет таким:

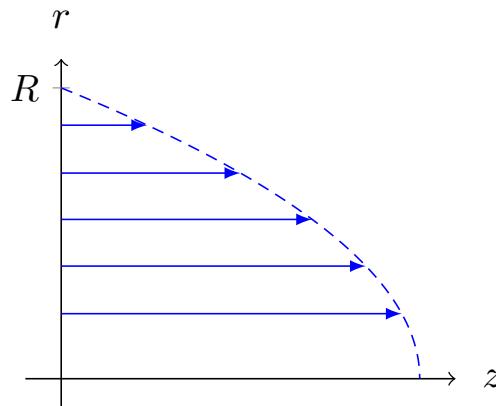


Рис. 55. Профиль скорости в задаче Пуазейля

Сосчитаем поток:

$$Q = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = \frac{\pi}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot R^4$$

Там, где самая большая скорость (в центре), элемент площади при интегрировании очень мал. Поэтому получается такая зависимость.

Что будет, если в трубу вложить еще одну трубу таким образом, чтобы поток бежал между трубами по цилиндрическому слою? Тогда исчезает нерегулярность логарифма, и константа  $A$  не исчезает. Придется ставить два граничных условия, на обеих трубах.

Интересно сделать предельных переход от такой задачи о вложенных трубах к случаю, когда радиус внутренней трубы стремится к нулю. Это нужно проделать очень аккуратно.

Последний комментарий по этой задаче – найдём силу:

$$f_z = \eta_{ik} n_k = -\sigma_{zr} = -\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{2} \left( \frac{dp}{dz} \right) R$$

### 3.4. Нестационарное движение вязкой жидкости. Вязкие волны

Постановка задачи такая: у нас гармонически колеблется пластина, над пластинкой размещена жидкость. Как она будет колебаться? Запишем уравнение

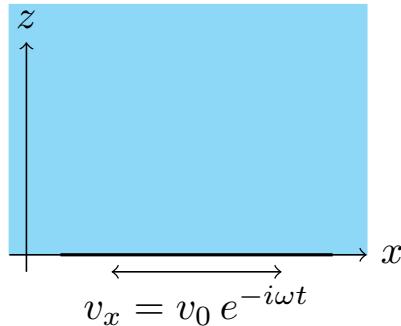


Рис. 56. Задача

нение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (из соображений симметрии  $\vec{v} = (v_x(z), 0, 0)$ , очевидно):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad &\end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения диффузии в виде

$$v_x = A e^{i\omega t + i k z}$$

Тогда

$$-i\omega = \nu k^2 \quad \Rightarrow \quad k = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Можно ввести величину *скин-слоя*:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

При этом корни дисперсионного уравнения будут записываться как

$$k = \pm(1+i)\frac{1}{\delta}$$

Тогда решение будет в виде

$$v_x = (A e^{i k_1 z} + B e^{i k_2 z}) e^{i \omega t}$$

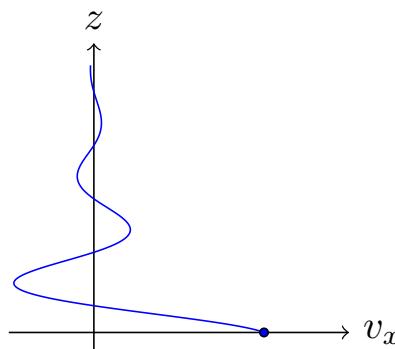


Рис. 57. Профиль скорости при крайнем положении пластиинки (когда пластиинка неподвижна)

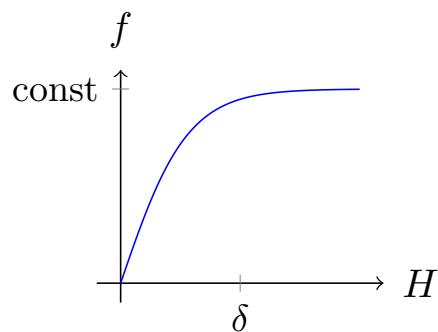


Рис. 58.  $f(H)$

Считая, что на бесконечности ничего нет, получим

$$v_x = v_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \exp\left[-i\frac{z}{d} + i\omega t\right]$$

Поскольку среда вязкая, возмущения передаются наверх, но затухают на характерном масштабе толщины скин-слоя. Второй сомножитель описывает запаздывание.

Можно подумать о поведении профиля скорости при разных положениях пластиинки. Например, скорость пластиинки максимальна – профиль скорости приведен на рис. 57. Подумайте над случаем, когда пластиинка в крайнем правом положении скорость пластиинки равна нулю.

Чтобы двигать пластиину, нужно приложить силу:

$$f = ma, \quad a = v_0 \omega$$

Качественно представим себе, как зависит сила от толщины слоя жидкости  $H$ . Нужно поставить граничное условие на поверхности: свободная граница –  $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ .

Если мы наливаем очень тонкий слой, то жидкость движется целиком (из жизненного опыта). Если толщина меньше скин-слоя  $\delta$ , то движение происходит без запаздывания, и  $f \sim H$ . Если наливать еще больше воды, то будет двигаться слой порядка  $\delta$ . Тогда сила выйдет на константу.

Также можно представить себе аналогичную задачу, когда верхняя граница не свободна, а неподвижна. По-прежнему, когда  $H \gg \delta$ , сила будет константой. Гораздо интереснее, когда слой становится тоньше.

Также подумайте, как будет выглядеть зависимость силы от частоты  $f(\omega)$ .

### 3.5. Принцип подобия. Формула Стокса

При изучении идеальной жидкости рассматривались достаточно сложные движения по сложным траекториям. Запишем еще раз уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \vec{v} + g \vec{n}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (4)$$

Для численного решения необходимо привести к безразмерному виду уравнения. Давайте попытаемся обезразмерить эти уравнения. Введём

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{v_0}, \quad r' = \frac{r}{l}, \quad t' = t \frac{v_0}{r}$$

Последняя замена вызвана тем, что в стационарном течении нет выделенного масштаба времени. Из замен получаем

$$\nabla' = \frac{\nabla}{l}, \quad p' = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}', \nabla') \vec{v}' + p' = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta' \vec{v}' + \frac{1}{\operatorname{Fr}} \vec{n}$$

Здесь появились два числа: Рейнольдса и Фруда

$$\operatorname{Re} = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad \operatorname{Fr} = \frac{v_0^2}{g l}$$

Рассмотрим идеальную жидкость в отсутствие силы тяжести. Правая часть уравнения (4) для идеальной жидкости равна нулю. Значит, если мы возьмём тела разных размеров (подобные), то получим подобные течения.

В общем случае, течения будут подобны, если у нас одинаковые числа Рейнольдса и Фруда. Смысл числа Фруда прост: отношение кинетической энергии жидкости к потенциальной (энергии гравитационных сил). Если число Фруда велико, то можно не учитывать силу тяжести.

*При одинаковых числах Рейнольдса, все течения, возникающие при обтекании геометрически подобных тел, будут выглядеть одинаково, и описываются одной и той же безразмерной функцией.* Это и есть принцип подобия, полученный Рейнольдсом в 1883 году.

Другая трактовка – при одинаковых числах Рейнольдса уравнения обтекания геометрически подобных тел в безразмерных координатах выглядят одинаково. Кстати, ранее мы нигде не учли возможность того, что плотность будет не постоянна, что соответствует отсутствию звуковых волн. Значит, наша формула не работает для сверхзвуковых движений.

**Стационарные движения.** В случае стационарных движений

$$\vec{v} = \vec{v}_* \left( \frac{r}{l}, \text{Re} \right), \quad p = \rho v_0^2 p_* \left( \frac{r}{l}, \text{Re} \right), \quad \vec{F} = \rho v_0^2 l^2 \vec{F}_*(\text{Re}) \quad (5)$$

**Нестационарные движения.** Давайте теперь рассмотрим нестационарные периодические движения с периодом  $T$ . При приведении к безразмерному виду ранее не учитывался собственный характерный временной масштаб. Поэтому теперь нужно ввести безразмерное время как

$$t' = \frac{t}{T}$$

Тогда после обезразмеривания получится новое уравнение, куда выйдет так называемое число Струхала (1884, Рэлей):

$$\begin{aligned} \text{Sh} &= \frac{v_0 T}{l} \\ \frac{1}{\text{Sh}} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}', \nabla') \vec{v}' + p' &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta' \vec{v}' + \frac{1}{\text{Fr}} \vec{n} \end{aligned}$$

Если число Струхала много больше 1, то можно пренебречь нестационарностью.

**Физический смысл числа Рейнольдса.** Число Рейнольдса показывает относительное влияние нелинейных эффектов. Если  $\text{Re}$  мало, то можно пренебречь в уравнении движения вязкой жидкости всем, кроме давления. Если же  $\text{Re}$  велико, можно ли пренебречь вязким слагаемое при  $1/\text{Re}$ ? Оказывается, не всегда<sup>6</sup>: в нашем случае при больших градиентах в общем случае пренебречь слагаемым при  $1/\text{Re}$  уже нельзя, но в ряде случаев можно пренебречь вдали от тела.

### 3.5.1 Формула Стокса

Вернёмся к формуле (5):

$$\vec{F} = \rho v_0^2 l^2 \vec{F}_*(\text{Re}), \quad \text{Re} = \frac{v_0 l}{\nu}$$

---

<sup>6</sup>Например, можно вспомнить динамику быстро-медленных движений из теории колебаний. Там, конечно, был малый коэффициент при старшей производной, но откидывать его было нельзя.

Попробуем найти силу, действующую на маленькое тело, двигающееся в жидкости. При этом учтем экспериментальный факт, что при малых скоростях сила трения пропорциональна скорости.

Хотим подобрать функцию  $F_*(\text{Re})$ . Очевидно, для линейности нужно

$$F \sim \frac{\rho v_0^2 l^2}{\text{Re}} = \eta v_0 l.$$

Если более строго решать задачу об обтекании шара радиуса  $R$

$$\nabla p = \eta \Delta \vec{v}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad v|_{r=R} = 0, \quad f_i = \sigma_{xk} n_k = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial n_k} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) n_k,$$

то можно получить формулу Стокса<sup>7</sup>

$$F = 6\pi\eta R v_0.$$

Что будет, если увеличить скорость? Оказывается, появится поправка

$$F = 6\pi\eta R v_0 \left( 1 + \frac{3}{16} \text{Re} \right).$$

Значит, формула Стокса справедлива, если  $\text{Re} = \frac{2Rv_0}{\nu} \ll 1$ .

**Задача об установившемся движении капли в воздухе.** На каплю действуют три силы: Стокса, Архимеда и тяжести:  $F_v = F_g - F_A$ . Применив второй закон Ньютона, найдем установившуюся скорость:

$$\frac{4\pi R^3}{3}(\rho_b - \rho_a) = 6\pi\eta R v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{2R^2 g}{9\nu} \left( \frac{\rho_a}{\rho_b} - 1 \right).$$

Соответствующее число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{2v_0 R}{\nu} = \frac{4R^3 g}{9\nu^2} \left( \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} 1 \right), \quad \text{Re}_* = \frac{1}{2}.$$

Для капли воды в воздухе

$$\frac{\rho_b}{\rho_a} = 770, \quad \nu = 0.133 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}.$$

Формула Стокса справедлива для капелек дождя, у которых  $R < 0.037$  см,  $v_0 < 18$  см/с. Фактически, это капли тумана.

Получилась грустная ситуация: пытаемся решить задачу и найти силу, с которой среда действует на двигающееся тело. В идеальной жидкости все было

---

<sup>7</sup>Расчеты достаточно велики и здесь не приводятся.

блестяще, правда, сила оказалась равна нулю, то есть жидкость на тело совсем не действовала. Когда же начали делать оценки для вязкой жидкости, оказалось, что для тумана формулы работают, а для чего-то более сложного – нет.

### 3.6. Пограничный слой. Формула Прандтля

Как уже говорилось ранее, относительное влияние нелинейных эффектов и диссипации характеризуется числом Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad \frac{[(\vec{v} \nabla) \vec{v}]}{[\nu \Delta \vec{v}]} = \left[ \frac{\frac{v^2}{l}}{\frac{\nu}{l^2}} \right] = \left[ \frac{v_0 l}{\nu} \right] \sim \text{Re}$$

При исследовании обтекания какого-либо тела вязкой жидкостью приходится решать решения для уравнений Навье-Стокса, что в общем случае сложно. Мы рассмотрели случай  $\text{Re} \ll 1$ , когда основную роль играет вязкость. В тоже время оценки показывают, что большинство реальных течений – это течения с большими числами Рейнольдса. Казалось бы, что при

$$\nu \rightarrow 0, \quad \text{Re} \rightarrow \infty$$

можно пренебречь вязкостью и использовать уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Однако все дело портят граничные условия на поверхности тела, где  $\vec{v} = 0$  («прилипание»). В этой области переход от нулевой скорости к скорости потока приводит к очень большим градиентам.

Чтобы все-таки перейти к значительно более простым уравнениям идеальной жидкости, можно поступить следующим образом: ввести пограничный слой  $h$  – слой, где скорость меняется от нуля до скорости, соответствующей обтеканию тела идеальной жидкостью<sup>8</sup>.

**Модельная задача.** Рассмотрим задачу об обтекании полубесконечной тонкой пластины потоком слабовязкой несжимаемой жидкости ( $\text{Re} \gg 1$ ). В идеальной жидкости пластина бы не вносила искажений в поток, но в нашем случае на пластине выполняется граничное условие  $\vec{v} = 0$ , и пластина неизбежно вносит искажения в поток в некотором слое толщиной  $h(x)$ .

---

<sup>8</sup>Понятие пограничного слоя было впервые введено Людвигом Прандтлем в статье, представленной 12 августа 1904 года на третьем Международном конгрессе математиков в Гейдельберге. Введение ПС позволяет существенно упростить моделирующие течение жидкости/газа уравнения путём разделения потока на две области: тонкого вязкого пограничного слоя и области невязкого течения. Уравнения невязкого течения (уравнения Эйлера) существенно проще моделирующих вязкое течение полных уравнений Навье-Стокса. Теплообмен обтекаемого тела с потоком также происходит исключительно в пограничном слое, что опять же позволяет упростить решение уравнений за пределами пограничного слоя.

Запишем математическую постановку задачи и граничные условия:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$v|_{z=0, x>0} = 0, \quad v_x|_{x<0} = v_0, \quad v_x|_{z \rightarrow \pm\infty, x>0} = v_0$$

Оценим, как должна меняться толщина переходного (пограничного) слоя с помощью теории размерностей.  $h(x)$  должна выражаться через  $\nu, v_0, x$ . Из несложных соображений и жизненного опыта можно представить себе формулу качественно. Во-первых, чем больше вязкость, тем толще пограничный слой. Кроме того, чем дальше по  $x$ , тем слой толще. Тогда

$$h(x) \stackrel{?}{\sim} \frac{\nu x}{v_0} = \frac{L^2}{T} \cdot L \cdot L^{-1} T \sim L^2$$

Значит, чтобы размерности совпали, нужно извлечь корень: тогда

$$h(x) \sim \left( \frac{\nu x}{v_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{\operatorname{Re}}}, \quad \text{где} \quad \operatorname{Re} = \frac{v_0 x}{\nu} \gg 1.$$

Теперь можно оценить силу, действующую на единицу площади (плотность силы):

$$f_i = \sigma_{ik} n_k, \quad \sigma_{ik} = \eta \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]$$

Выберем нормаль по  $z$ , и сосчитаем её:

$$f_x = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

Мы решаем задачу в таких условиях, что  $h \ll x$ . Тогда несложно оценить, что вторым слагаемым можно пренебречь, и тогда

$$f_x \approx \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \approx \frac{v_0}{h(x)} \approx \rho \left( \frac{\nu v_0^3}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Теперь можем сделать то, для чего был нужен весь наш вывод: найдем полную силу, действующую на достаточно большую пластину<sup>9</sup>, длина которой  $l$ , а ширина  $b$ :

$$f = \rho \frac{\nu v_0}{h(x)} = \rho \left( \frac{\nu v_0^3}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad F = 2b \int_0^L f(x) dx \sim \rho b L^{\frac{1}{2}} v_0^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}$$

Теперь получим эту же формулу более строгим способом. Запишем систему

<sup>9</sup>Чтобы можно было применить решение для бесконечной пластины

уравнений Навье-Стокса для стационарного течения несжимаемой жидкости в векторном виде и в проекциях:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\begin{cases} v_y = 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Эти уравнения можно упростить, учитя, что слой вязкого движения достаточно тонок. На основе этого можно сделать ряд предположений.

**Во-первых**, градиенты  $\frac{\partial}{\partial x}$  много меньше градиентов  $\frac{\partial}{\partial z}$ , так как

$$h \sim \frac{x}{\sqrt{\operatorname{Re}}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{h} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}$$

**Во-вторых**, вертикальная компонента скорости мала по сравнению с горизонтальной:

$$v_x \sim v_0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{v_0}{x} \sim \frac{v_z}{h} \Rightarrow v_z \ll v_x$$

**В-третьих**, так как вязкость мала, то можно оценить и давление, пренебрегая слагаемым с вязкостью:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{v_x^2}{x} \sim \frac{v_0^2}{x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \sim v_x \frac{v_z}{x} \sim \frac{v_0^2 h}{x^2} = \frac{v_0^2}{x \sqrt{\operatorname{Re}}} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$$

Фактически мы получили, что  $p = p(x)$ , то есть давление постоянно по толщине пограничного слоя и равно давлению на верхней границе пограничного слоя. Эту задачу можно решить, используя приближение идеальной жидкости.

Итак, мы нашли давление и можем перейти от трёх уравнений к двум. При этом лапласиан можно упростить, так как  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}$ , и в итоге получаем систему уравнений Прандля:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, & \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Следующим важным предположением, необходимым для решения задачи, яв-

ляется *автомодельность профиля скорости*, т.е.

$$v_x(x, z) = v_0 \Phi\left(\frac{z}{h(x)}\right)$$

Эта формула отражает тот факт, что профиль в разных местах одинаковый, но меняется его ширина.

Чтобы избавиться ещё от одного уравнения, введём функцию тока:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Следующая нетривиальная вещь. Чему должна быть равна функция тока?

$$\Psi = v_0 h(x) f(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = \frac{z}{h(x)}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} = v_0 f(\xi), \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \\ &= -v_0 \frac{\partial h}{\partial x} f - v_0 h \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -v_0 \left( h'(x) f - h f' \frac{zh'}{h^2} \right) \end{aligned}$$

Подставив  $v_x$  и  $v_z$  в уравнения (6), получим нелинейное уравнение в обычных производных третьего порядка, при этом граничные условия – зануление скоростей на границах:

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0, \quad f(\xi = 0) = f'(\xi = 0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (7)$$

Последнее граничное условие следует из  $v_z = v_0$  на бесконечности.

Такое дифференциальное уравнение аналитически решить нельзя, но можно воспользоваться численным решением (см. рис. (59)), которое дает

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \alpha \xi^2 + \dots, \quad \text{где} \quad \alpha \approx 0.332 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0.332$$

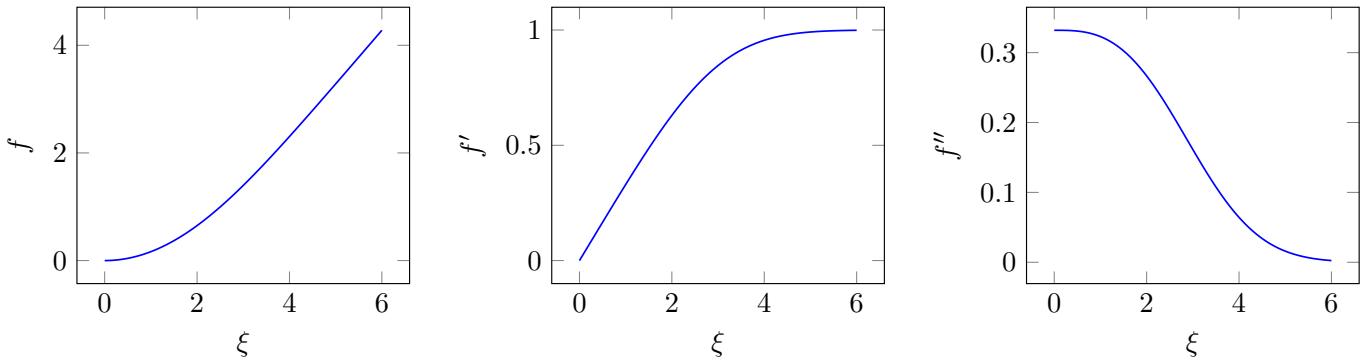


Рис. 59. Численное решение уравнения (7)

Теперь можем найти силу, учтя, что мы взяли  $v_x = v_0 f'(\xi)$ :

$$f_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

если все сосчитать, то получается следующая формула<sup>10</sup>

$$F = 1.33 \rho b L^{\frac{1}{2}} \cdot v_0^{\frac{3}{2}} \cdot \nu^{\frac{1}{2}}$$

Таким образом, отличие от качественной формулы лишь в численном коэффициенте, который к тому же близок к единице.

**Обтекание реального тела.** Пусть на некоторое тело набегает поток. Можем ввести криволинейную систему координат таким образом, что  $x$  идёт вдоль поверхности тела, а  $z$  по нормали к ней. Тогда уравнения будут похожи:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

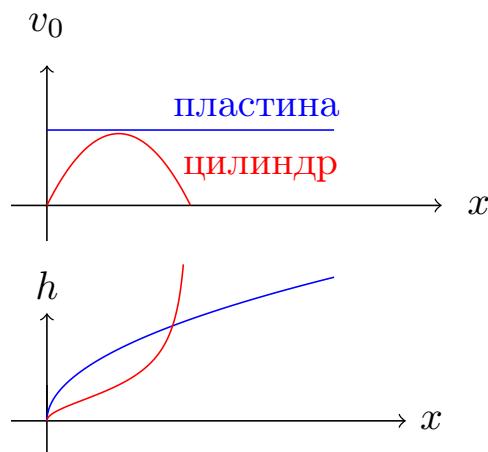
Метод решения следующий: сначала решаем задачу для идеальной жидкости, и считаем решение вдали от тела верным. Далее решаем задачу о пограничном слое, при этом в уравнении появляется производная давления, которую можно найти, например, из уравнения Бернулли.

Попробуем нарисовать качественную картинку (рис. (60)): у нас было  $h(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}}$ , теперь будет

$$h^*(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{v_0(x)}}$$

Когда скорость начинает убывать, то толщина пограничного слоя начинает

<sup>10</sup>Формула получена Блазиусом в 1908 году. Пауль Рихард Генрих Блазиус (нем. Paul Richard Heinrich Blasius; 9 августа 1883, Берлин — 24 апреля 1970, Гамбург) — немецкий физик, работавший в области гидромеханики, а также выдающийся педагог[1]. С 1902 по 1906 год учился в Марбурге и в Гётtingене. Он был одним из первых учеников Людвига Прандтля, проработав в Гётtingенском университете 6 лет. В 1912 году он сменил место работы на Инженерную школу в Гамбурге (сейчас — Университет прикладных наук), там получил профессорское звание и преподавал до конца своей жизни.

Рис. 60.  $v_0(x)$  для пластины и для цилиндра

возрастать. В точке, где  $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ , происходит отрыв пограничного слоя. В этой области возникает некая турбулентность. Если нарисовать картинку, то это будет выглядеть так:

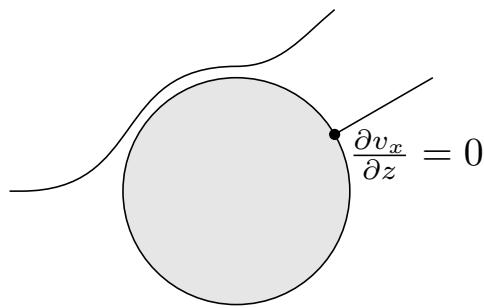


Рис. 61. Появление турбулентности

### 3.7. Элементы теории турбулентности

#### 3.7.1 Устойчивость стационарного течения жидкости

Вернемся к задаче об обтекании цилиндра медленным потоком. Для качественного описания потока реальной жидкости нам необходимо знать множество вещей: например, какая увлекающая сила действует на цилиндр?

Такая сила показана на рис. 62 как функция величины числа Рейнольдса  $Re$ , которая пропорциональна скорости  $v$ , если все остальное фиксировано. Фактически, на рисунке отложен коэффициент увлечения  $C_d$ , который вводится как

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 d l},$$

где  $d$  – диаметр,  $l$  – длина цилиндра,  $\rho$  – плотность жидкости.  $C_d$  – коэффициент увлечения.

При малых числах Рейнольдса сила пропорциональна скорости:

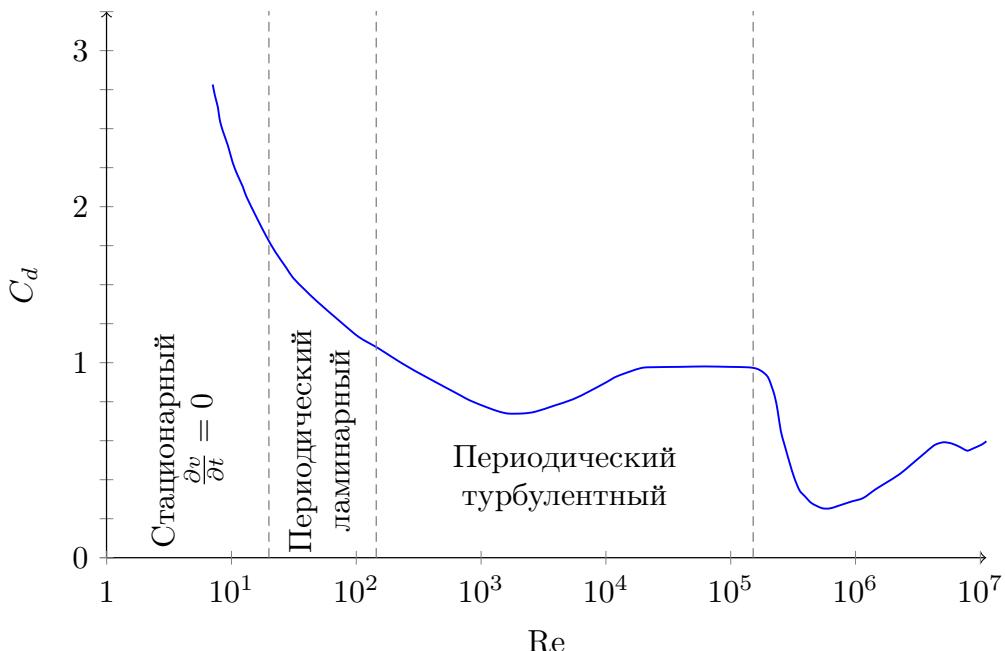


Рис. 62. Режимы увлечения в зависимости от  $Re$

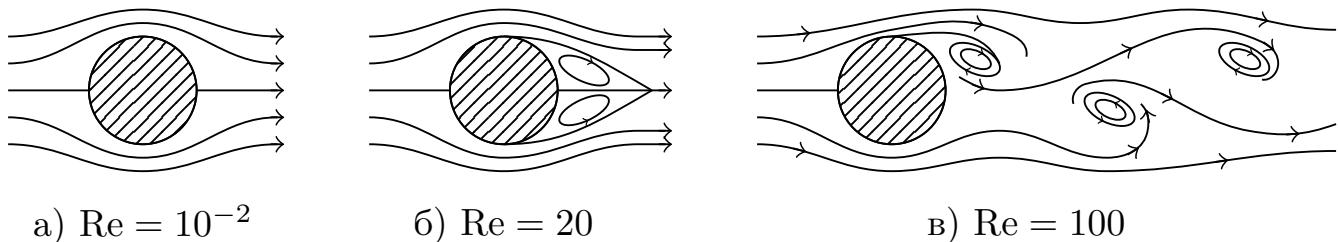
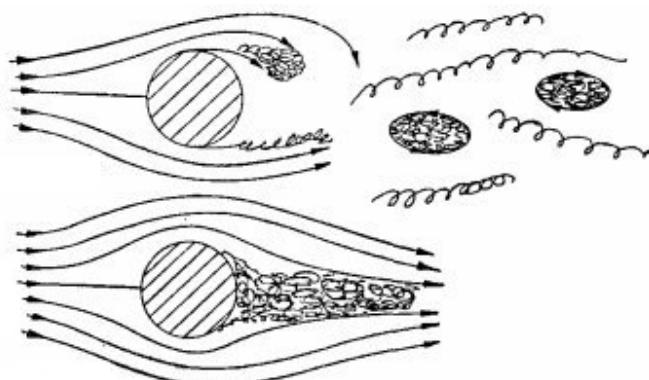


Рис. 63. Обтекание цилиндра

Приведем картину обтекания цилиндра при различных числах Рейнольдса (см. рис. 64). Разница в режиме между потоками, изображенными на рис. 64а, рис. 64б и рис. 64в очень велика. На рис. 64а и рис. 64б скорость постоянна, тогда как на рис. 64в в скорость в любой точке изменяется со временем. При значениях числа Рейнольдса больше 40 стационарное решение отсутствует; граница перехода отмечена на рис. 62 пунктирной линией.

Для таких более высоких чисел поток изменяется со временем некоторым регулярным периодическим образом: создаются вихри. Можно представить себе физическую причину возникновения этих вихрей. Мы знаем, что на поверхности цилиндра скорость жидкости должна быть равна нулю, но при удалении от поверхности скорость быстро возрастает. Это большое местное изменение скорости жидкости и создает вихри.

Когда скорость основного потока достаточно мала, у вихрей хватает времени, чтобы проникнуть из тонкого слоя вблизи поверхности твердого тела, где они создаются, и «расплыться» на большую область. Эта физическая картина должна подготовить нас к следующему изменению природы потока, когда скорость основного потока или число  $Re$  увеличивается еще больше:

Рис. 64. Обтекание цилиндра:  $Re = 10^4$ ,  $Re = 10^6$

**Постановка задачи об устойчивости течения.** Будем решать уравнение Навье-Стокса для сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Пусть у нас есть некоторое стационарное решение  $v_0(\vec{r}), p_0(\vec{r})$ . Например, течение Куэтта или Пуазейля. Займёмся исследованием устойчивости такого решения, для малых отклонений линеаризуем

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad p = p_0 + p'$$

Тогда после линеаризации и сокращения некоторых слагаемых получим

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + [(\vec{v}_0 \nabla) \vec{v}' + (\vec{v}' \nabla) \vec{v}_0] + \frac{\nabla p'}{\rho} = \nu \Delta \vec{v}', \quad \operatorname{div} \vec{v}' = 0$$

Будем искать решение в виде

$$\vec{v} = \vec{v} e^{-i\omega t}, \quad p = p e^{-i\omega t},$$

при этом производная по времени равна  $i\omega$  и линеаризованное уравнение сводится к задаче на собственные значения, то есть нужно найти частоты, которые имеют как действительную, так и мнимую часть.

$$\omega = \omega' + i \cdot \omega'' \quad \Rightarrow \quad e^{-i\omega t} = e^{-i\omega' t} \cdot e^{\omega'' t}$$

Если у частоты будет отрицательная мнимая часть, то такие решения будут нарастающими: это и есть неустойчивость.

### 3.7.2 Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Также эту неустойчивость называют «неустойчивость тангенциального разрыва».

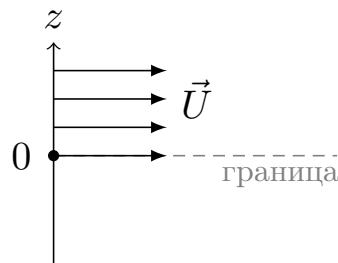


Рис. 65. Постановка задачи с разрывом

Запишем уравнения Эйлера (не будем учитывать вязкость):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0$$

Введём условие разрыва:

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} \vec{U}, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Тогда получится два уравнения (после линеаризации, где мы выкинули второй порядок малости):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad z > 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad z < 0 \end{aligned}$$

Возьмём дивергенцию от этих уравнений и учтём несжимаемость жидкости:

$$\Delta p = 0$$

Будем искать решение в виде бегущей волны  $p = p^*(z)e^{i(kx-\omega t)}$ :

$$p^*(z) = \begin{cases} pe^{-kz}, & z > 0 \\ pe^{kz}, & z < 0 \end{cases}$$

$v_z$  будем искать в таком же виде  $v_z = \hat{v}_z e^{i(kx-\omega t)}$ :

$$\hat{v}_z^*(-i\omega + ikU) = \frac{1}{\rho} kp^*$$

Тогда

$$\hat{p} = \hat{v}_z \rho \frac{i(kU - \omega)}{k}$$

Выразим все через смещение границы  $\xi$ :

$$v_z = \frac{d\xi}{dt} = \xi'_t + U \xi'_x, \quad \xi = \hat{\xi} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\vec{v}_z = i(kU - \omega) \hat{\xi}, \quad \hat{p} = -\hat{\xi} \frac{\rho(kU - \omega)^2}{k}, \quad p = \hat{p} e^{-kz}$$

Аналогично получаем для нижней полуплоскости:

$$\hat{p} = +\hat{\xi} \frac{\rho \omega^2}{k}, \quad p = \hat{p} e^{kz}$$

Приравнивая давления в верхней и нижней полуплоскости, получим

$$(kU - \omega)^2 = -\omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{kU}{2}(1 \pm i)$$

где  $U$  – скорость верхнего потока, а  $k$  задаёт период возмущений. Эта формула и определяет неустойчивость Кельвина-Гельмгольца: в решении присутствует нарастающее слагаемое.

$$\xi = a \exp \left[ ik \left( \frac{U}{2} t - x \right) + \frac{kU}{2} t \right] + b \exp \left[ ik \left( \frac{U}{2} t - x \right) - \frac{kU}{2} t \right]$$



Рис. 66. Явление неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в атмосфере

### 3.7.3 Теория развитой турбулентности



Рис. 67. Рисунок турбулентности Леонардо-да-Винчи

Первым, кто нарисовал турбулентность, был Леонардо-да-Винчи (рис. 67). Термин ввёл в науку Уильям Томсон (lord Кельвин).

Активное изучение турбулентности началось в 19-м веке в связи с анализом режимов течений жидкостей и газов. Позже, в 20-м веке, было обнаружено, что переход от регулярного или ламинарного движения к хаотическому или турбулентному присущ не только гидродинамическим течениям, но и иным средам и полям (акустическим полям в твердых телах и газах, электромагнитным полям в плазме и так далее). Известно и такое явление, как волновая турбулентность.

Турбулентные процессы любой природы попадают под следующее общефизическое определение [Физическая энциклопедия, 1998]: *Турбулентность – сложное, неупорядоченное во времени и пространстве поведение диссипативной среды (или поля), детали которого не могут быть воспроизведены на больших интервалах времени при сколь угодно точном задании начальных и граничных условий.*

Такая невоиспроизводимость есть следствие собственной сложной динамики среды, определяемой неустойчивостью индивидуальных движений, и не связана с неполнотой описания, флюктуациями или действием внешних шумов.

При превышении критического числа  $Re$  возникает турбулентность:

$$Re_0 = \frac{v_0 L_0}{\nu}, \quad Re_0 \gg Re_{crit}$$

Существуют разные модели возникновения турбулентности при возрастании  $Re$ :

- 1) Гипотеза Ландау - возникновение спектра несоизмеримых частот
- 2) Возникновение стохастичности в системе с малым числом степеней свободы – аттрактор Лоренца

Мы далее будем говорить о развитой турбулентности. В развитой турбулентности зарождается цепочка вихрей. Более крупные вихри порождают мелкие. Когда локальное число Рейнольдса становится порядка 1, становится существенна вязкость.

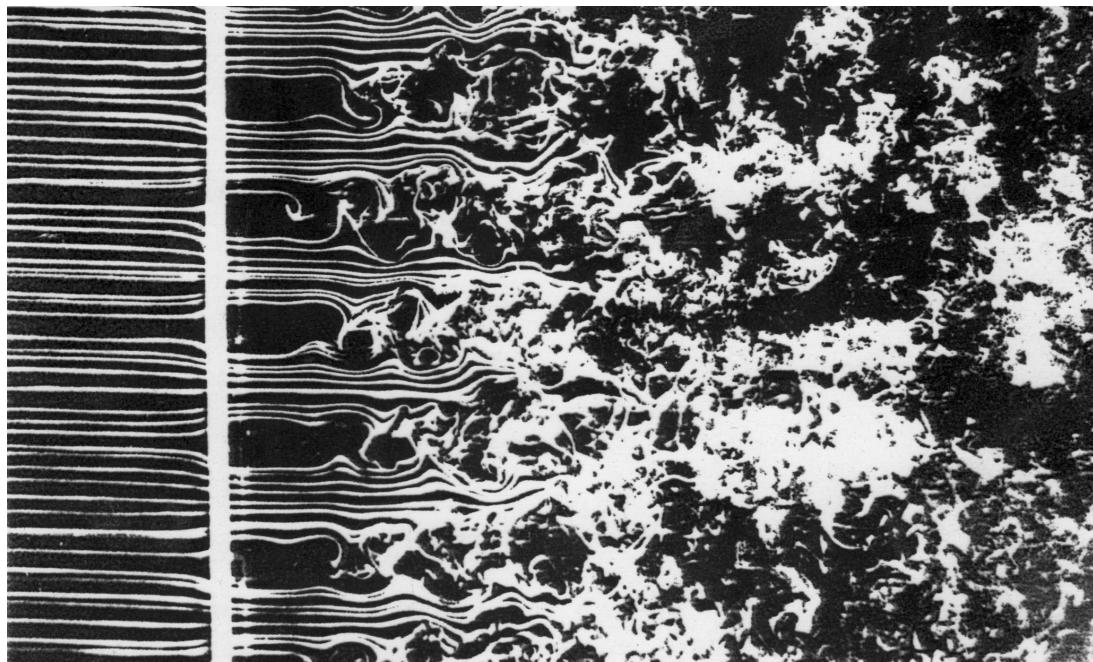


Рис. 68. Протекание потока сквозь решётку сопровождается возникновением турбулентности. Чем выше число Рейнольдса, тем ближе к решётке возникает турбулентность

Внешний масштаб турбулентности  $L_0$ , внутренний  $\lambda_0$ . Вводится понятие *инерционного интервала*:

$$\lambda_0 \ll \lambda \ll L_0$$

В инерционном интервале передача энергии от крупных масштабов к мелким идёт только за счёт нелинейности и не зависит от коэффициента диссипации.

Вводится энергия на единицу массы в единицу времени. Из соображений размерности, считая, что поток энергии связан с крупными масштабами:

$$[\varepsilon] = V^2 \frac{1}{T} = \frac{L^2}{T^2} \frac{1}{T} = \frac{L^2}{T^3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx \frac{v_0^3}{L_0}$$

Считаем, что развитая турбулентность обладает такими свойствами: во первых, она изотропна (не зависит от направления), во-вторых, статистически однородна (не зависит от координаты).

Закон Колмогорова-Обухова: распределение скоростей по масштабам из соображений теории размерностей:

$$v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{\frac{1}{3}}, \quad v_\lambda \approx v_0 \left( \frac{\lambda}{L_0} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Отсюда можно получить поведение числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_\lambda = \frac{v_\lambda \lambda}{v} \approx \frac{(\varepsilon \lambda)^{\frac{1}{3}} \lambda}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \text{Re}_\lambda \approx \text{Re}_0 \left( \frac{\lambda}{L_0} \right)^{\frac{4}{3}}$$

Найдём внутренний масштаб турбулентности:

$$\text{Re}_{\lambda_0} \approx \text{Re}_0 \left( \frac{\lambda_0}{L_0} \right)^{\frac{4}{3}} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{L_0}{\text{Re}_0^{\frac{4}{3}}}$$

Число уравнений, которые надо решать точно, чтобы рассмотреть турбулентное течение в кубе с ребром длиной метр и числом Рейнольдса  $\text{Re}_0 = 10^6$ :

$$N \sim \left( \frac{L_0}{\lambda_0} \right)^3 = \text{Re}_0^{\frac{9}{4}} \approx 10^{13}$$

Это нереально, поэтому в теории турбулентности используются различные приближения.

Гипотеза Колмогорова-Обухова: распределение скоростей по пространственным частотам в инерционном интервале зависит только от  $\varepsilon$  и  $k$ .

Из соображений размерности

$$\frac{1}{L_0} \ll k \ll \frac{1}{\lambda_0}, \quad [E(k)] \sim \frac{L^3}{T^2}, \quad [\varepsilon] \sim \frac{L^2}{T^3}, \quad E(k) \sim \varepsilon^{\frac{3}{2}} k^{5/3}.$$

## 4. Сжимаемая жидкость. Звук

В этом разделе рассмотрим распространение звуковых волн малой амплитуды в жидкостях и газах (но не в твердых телах). Возникновение звуковых волн обусловлено сжимаемостью среды.

Будем рассматривать колебания малой амплитуды (линейная задача, справедлив принцип суперпозиции). Нужно провести линеаризацию уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Для этого запишем систему уравнений для идеальной жидкости

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

и проведем линеаризацию:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad v'.$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{v'}{c} = M,$$

где  $M$  – акустическое число Маха. Начнем с первого уравнения – уравнения Эй-

лера. Разложение в ряд даёт

$$\frac{1+x}{1+y} \approx 1 + x - y$$

Уравнение Эйлера при линеаризации даёт

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}$$

Линеаризация в уравнении непрерывности:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \operatorname{div} (\rho_0 + \rho') \vec{v} = \operatorname{div} \rho' \vec{v} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}'$$

Пренебрегая малыми членами, получим

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Далее

$$p_0 + p' = p(\rho_0 + \rho') = p(\rho_0) + \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho' \Rightarrow p' = \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho'$$

Из соображений размерности легко получить, что производная имеет размерность квадрата скорости:

$$p' = c^2 \rho' \\ \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Ищем потенциальные решения:

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = -\frac{\nabla p'}{\rho}$$

Откуда

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Подставляем в уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0$$

Это волновое уравнение. Получается, звук описывается волновым уравнением.

**Замечание.** Волновому уравнению удовлетворяет потенциал и каждая из трёх компонент скорости, а также возмущения давления и плотности.

Рассмотрим уравнение для плоских волн:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Будем решать автоволновой заменой переменных  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = c^2 \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

Получаем решение

$$\varphi = \varphi_1(x - ct) + \varphi_2(x + ct)$$

Среда у нас без дисперсии: задав возмущение, мы получим, что оно будет бежать. Вернёмся к формулам для скорости:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi \Rightarrow v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi'_1(x - ct), \quad v_y = v_z = 0$$

Получили, что волна *продольная*, в отличие от электромагнитных.

$$p' = \rho_0 c_0 \varphi'(x - ct) = \rho_0 c_0 v'_x$$

Получаем, что возмущение давления повторяет возмущение скорости. У нас осталось уравнение состояния:

$$p' = c^2 \rho'$$

Значит, плотность тоже повторяет форму возмущения скорости. В итоге получаем закон

$$\frac{v}{c} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{p_0} = M$$

Напомним, что число  $M$  – число Маха.

## 4.1. Монокроматические волны

Так как задачу мы решаем в линейном виде, то

$$\varphi = \text{Re} [\Phi_0(x, y, z) e^{-i\omega t}]$$

Получаем уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \Phi_0 + k_0^2 \Phi_0 = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Простейшее решение его – плоские волны:

$$\Phi_0 = e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$$

Рассмотрим случай  $\vec{k} = \vec{k}_1 + i\vec{k}_2$ . Это неоднородная плоская волна.

$$\vec{k}^2 = \vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2 + 2i(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$$

Тогда из условия  $\vec{k}^2 = k_0^2$  получим два уравнения:

$$\vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}, \quad (\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 0$$

Тогда решение можно записать в таком виде:

$$\Phi_0 = e^{i(\vec{k}_1, \vec{r})} e^{-(\vec{k}_2, \vec{r})}$$

Действительная и мнимая части волнового вектора ортогональны.

Монохроматические волны играют существенную роль в связи с тем, что всякую волну можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами частотами. Это ни что иное, как разложение в ряд (или интеграл) Фурье.<sup>11</sup>

## 4.2. Энергия и интенсивность звуковой волны

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho}, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Хотим получить некий закон сохранения из этих формул. Домножим первое уравнение на  $v' \rho$  (далее штрихи опускаем):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c^2} \right) + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Откуда вводим

$$E = \rho \frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c^2}, \quad \vec{J} = \rho \vec{v},$$

где  $E$  – энергия, а  $\vec{J}$  – вектор Умова-Пойнтинга. Структура энергии представляет собой сумму: первое слагаемое – кинетическая энергия, второе слагаемое – потенциальная энергия (энергия упругой деформации).

В введенных обозначениях получаем закон сохранения энергии звуковой вол-

<sup>11</sup>Жан Батист Жозеф Фурье (фр. Jean Baptiste Joseph Fourier; 21 марта 1768, Осер, Франция – 16 мая 1830, Париж), французский математик и физик.

ны в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

Проинтегрировав по объему и используя теорему Остроградского-Гаусса, получим закон сохранения в интегральной форме: изменение энергии в объеме связано с потоком энергии через поверхность.

Среднее по времени значение энергии переносимое звуковой волной через единицу поверхности называют силой звука или интенсивностью звука.

Рассмотрим плоскую звуковую волну:

$$E = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p^2}{\rho_0 c^2}, \quad v = \frac{p}{\rho_0 c}$$

Для интенсивности звука имеем

$$J = \frac{p^2}{\rho_0 c} = \rho c_0 v^2 = cE.$$

В случае гармонического гармонического сигнала

$$p = p_0 \cos(\omega t - kx), \quad v = v_0 \cos(\omega t - kx).$$

Так как  $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$ , то

$$\bar{J} = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c} = \frac{\rho_0 c v_0^2}{2}.$$

В акустике принято характеризовать уровень интенсивности звука (уровень звукового давления) в децибелах:

$$dB = 10 \ln \frac{J}{\bar{J}} = 20 \ln \frac{\bar{p}}{p_0}$$

**Таблица 1. Уровень громкости типичных звуковых шумов**

Уровень громкости, фоны (дБ)	Звук
0	Порог слышимости
10	Шелест листьев
20	Шепот
30	Тиканье часов
40	Тихая комната
50	Тихая улица
60	Разговор
70	Шумная улица
75	Опасный для здоровья уровень
90	Пневматический молоток
100	Поезд метро
110	Громкая музыка
120	Болевой порог
130	Сирена
150	Старт ракеты
180	Смертельный уровень
200	Шумовое оружие

Таблица 2. Интенсивность, звуковое давление и уровень звука в воздухе при комнатной температуре и нормальном давлении на уровне моря

Интенсивность, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$	Звуковое давление, $\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$	Уровень звука, дБ
100 000 000	200 000	200
10 000 000		190
1 000 000	20 000	180
100 000		170
10 000	2 000	160
1 000		150
100	200	140
10		130
1	20	120
0.1		110
0.01	2	100
0.001		90
0.0001	0.2	80
0.00001		70
0.000001	0.2	60
0.0000001		50
0.00000001	0.002	40
0.000000001		30
0.0000000001	0.0002	20
0.00000000001		10
0.000000000001	0.0002	0

# Предметный указатель

- Частота  
Брента-Вяйсаля, 20
- Число  
Фруда, 79  
Рейнольдса, 79  
Струхала, 80
- Диполь  
гидродинамический, 41
- Движение  
нестационарное невихревое, 23  
стационарное, 21  
безвихревое, 22  
вихревое, 22  
вихревое, 45
- Формула  
Прандтля, 82  
Стокса, 80
- Функция  
аналитическая, 38  
тока, 37
- Гипотеза  
Колмогорова-Обухова, 95
- Колебания  
малые нестационарные, 28
- Мертвая вода, 66
- Неустойчивость  
Кельвина-Гельмгольца, 90
- Обтекание  
двух цилиндров, 24  
кругового цилиндра, 42
- Описание  
Эйлера, 10  
Лагранжа, 9
- Парadox Даламбера, 29
- Потенциал  
комплексный, 39
- Принцип  
подобия, 79
- Присоединенная масса, 29
- Производная
- локальная, 11  
субстанциональная, 11
- Равновесие  
гидростатическое, 19
- Слой  
пограничный, 82
- Течение  
Куэтта, 74  
Пузейля, 75  
плоское, 38  
потенциальное, 29  
сопряжённое, 38  
устойчивость, 88
- Теорема  
Томсона, 26
- Теория  
развитой турбулентности, 92  
турбулентности, 88
- Трубка Вентури, 24
- Уравнение  
Бернулли, 21  
Эйлера, 13  
форма Громэко-Лэмба, 21  
Навье-Стокса, 70  
Пуассона, 14  
непрерывности, 11
- Вытекание жидкости, 25
- Вихри  
точечные, 50
- Волны  
поверхностные  
гравитационные, 55  
гравитационно-капиллярные, 62  
на глубокой воде, 60  
на мелкой воде, 59  
внутренние, 65  
вязкие, 77
- Задача  
Прандтля, 25
- Закон

Архимеда, 19  
Колмогорова-Обухова, 94  
спектральный, 95  
сохранения энергии, 14  
сохранения импульса, 15  
сохранения массы, 11  
Звук, 95  
Жидкость  
сжимаемая, 95

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. 6. Гидродинамика. М: Физматлит, 2015 – 733 с
- [2] Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. - 335 с
- [3] Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Демин И.Ю., Курин В.В., Прончатов-Рубцов Н.В. Сборник задач по механике сплошных сред: гидромеханика и акустика (учебное пособие) Изд-во ННГУ, Н.Новгород, 2006. - 92 с.
- [4] Акустика в задачах. Учеб. рук-во. / Под ред. С.Н.Гурбатова и О.В.Руденко. М.: Наука, 2009. - 336 с.
- [5] Kochin Н.Е., Kibel' I.A., Rose H.B. Теоретическая гидродинамика. Т.1, 2. М: Физматлит, 1963.
- [6] Бетчеллор Дж. Введение в механику жидкости. М: Наука, 1970.
- [7] Feynman R., Leighton R., Sands M. Feynman Lectures on Physics, t. 7. Physics of continuous media. M: Mir, 1977.
- [8] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М: Дрофа, 2003. 840 с.
- [9] Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. М: Мир, 1981. 589 с.
- [10] Седов Л.И. Механика сплошных сред. В 2-х т. СПб: Лань, 2004. 528 с. и 560 с.
- [11] Островский Л.А. Вопросы динамики жидкости. Учебное пособие. Горький, ГГУ, 1982. – 145 с.
- [12] Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Демин И.Ю., Курин В.В., Прончатов-Рубцов Н.В. Электронный задачник «Основы механики сплошных сред: гидромеханика и акустика» Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, 2012. – 95 с. [http://www.unn.ru/books/met\\_files/Zadachnic\\_MSS.doc](http://www.unn.ru/books/met_files/Zadachnic_MSS.doc)
- [13] Грязнова И.Ю., Мартынов А.И. «Экспериментальные исследования закономерностей обтекания цилиндра и крыла воздушным потоком на аэростенде ТМЖ-1М». Электронное учебно-методическое пособие. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, 2012. – 60 с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>
- [14] Курин В.В., Грязнова И.Ю., Клемина А.В., Мартынов А.И. УМК «Основы механики сплошных сред» Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, 2011. – 88 с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>

- [15] Gurbatov S.N., Saichev A.I., & Shandarin S.F. 1989, Mon. Not. R. astr. Soc., 236, 385
- [16] Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 215 с. Сер. Современные проблемы.
- [17] Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles. — Manchester University Press, 1991. — 308 p.
- [18] Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A. 1994, Astron. Astrophys. 289. 325.
- [19] Гурбатов С. Н., Саичев А. И., & Шандарин С. Ф. «Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания», УФН, 182, 233–261 (2012)
- [20] Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008.
- [21] Gurbatov S.N., Rudenko O.V., & Saichev A.I. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersing Media. General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany, 2012. — 472 p.

СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ ГУРБАТОВ

**МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД**

Учебное пособие

Редактор – **InsertFIO**

Корректор – **InsertFIO**

Компьютерная вёрстка – **Ф.Г. Саррафанов**

Заказ № **xxxx**

Подписано к печати **00.00.202x**

Формат  $60 \times 90\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная №1.

Объем 6.2 усл. п.л. Тираж **XXX** экз.

Адрес издательства **ННГУ**:

*Россия, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, д.43к1*

*тел./факс: +79xxxxxxxx*

*e-mail: example@email.com*