С.Н.Гурбатов

Механика сплошных сред (МСС)

$ 2.9 Поверхностные гравитационные волны в несжимаемой идеальной жидкости

Надо отметить большое разнообразие волновых движений в жидкостях и газах. Это волны на поверхности жидкости, внутренние волны в океане. Звуковые волны в сжимаемой жидкости – звук. Акусто-гравитационные волны в атмосфере.

Мы будем рассматривать гравитационные волны на поверхности несжимаемой жидкости. Если ровная поверхность жидкости выведена из состояния равновесия, то под действием силы тяжести возмущение стремится вернутся в равновесное состояние и в результате возникнет колебательное движение.

Примеры гравитационных волн: корабельные волны, приливные волны, ветровые волны, цунами от землетрясений, внутренние волны в неоднородной по глубине жидкости .

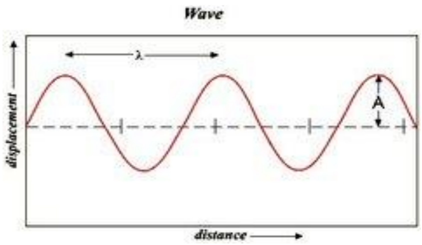
Мы будем рассматривать поверхностные гравитационные волны.

Основные приближения и допущения

1. Жидкость идеальна и несжимаема (нет вязкости и звука) .
2. Жидкость однородна (плотность постоянна)
3. Поверхность жидкости плоская и неограниченная (Земля в данных масштабах плоская)
4. Волны малой амплитуды (уравнения можно линеаризовать)

Волны малой амплитуды – по сравнению с чем?

Рисунок ***a-*** амплитуда колебаний волны, ***l*** – ее период



Уравнения Эйлера можно линеаризовать, то есть считать что:

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| >> \left|(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right|$$

Произведем оценку. Пусть период колебаний, а V амплитуда волны

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| \propto \frac{V}{\tau} \qquad \left|(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right| \propto \frac{V^2}{l} \qquad \tau V \propto a$$

$$\frac{V}{\tau} >> \frac{V^2}{l} \qquad V << \frac{l}{\tau}$$

$$a << l$$

То есть **амплитуда колебаний много меньше длины волны.**

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} - \nabla(gz)$$

$$div\vec{v} = 0 \qquad rot\vec{v} = 0 \qquad \vec{v} = grad\phi$$

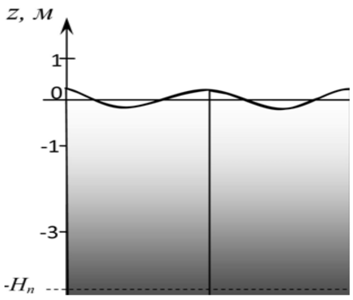
$$\Delta\phi = 0$$

То есть волны описываются уравнением Лапласа.

Нет следа от времени, плотности, силы тяжести!

Все это войдет через граничные условия.

Рисунок –ось z вверх.



$V = V(x, y, t)$

Введем поверхность $V = V(x, y, t)$ возмущения относительно невозмущенной поверхности *z=0.* Колебательная скорость

$$\vec{v} = \nabla \phi = (\vec{u}, W), \qquad \vec{u} = \nabla_{\perp} \phi, \qquad W = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

На свободной поверхности давление.

Используем линеаризованное нестационарное уравнение Бернулли - линеаризованный интеграл Коши

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho_0} + gz \right] = 0$$

На поверхности жидкости

$$r_0 \frac{¶j}{¶t} + r_0 g V = - p_0 |_{z=V}$$

Постоянное давление можно убрать переопределяя потенциал (добавляя к нему независящую от координат величину $p_0 t / r_0$ $p_0 t / r_0$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\varsigma = 0 |_{z=\varsigma}$$

Колебания малы – можно заменить граничные условия к плоскости z=0, кроме того

$$v_z = \frac{d\varsigma}{dt} = \frac{\partial\varsigma}{\partial t} + (v_z\nabla)\varsigma \approx \frac{\partial\varsigma}{\partial t} \qquad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Продифференцировав граничные условия по времени получаем

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0\,|_{z=0}$$

Второе граничное условие – непротекания на дне z=-H

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,|_{z=-H}$$

Итак. Имеем уравнение Лапласа и два граничных условия : на поверхности и дне

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,|_{z=0} \qquad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,|_{z=-H}$$

Если волны идут в однородном полупространстве то в качестве второго граничного условия берем что

$$\varphi\,|_{z\to\infty} = 0$$

Будем искать решение в виде плоской неоднородной волны распространяющейся по оси x

$$\varphi(x,y,z,t) = \Phi(z)\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

где ω циклическая частота, k –волновой вектор, $\lambda = 2\pi/k$ $\lambda = 2\pi/k$ - длина волны.

Подставляя это решение в уравнение Лапласа получаем

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - k^2\Phi = 0$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0\,\Big|_{z=-H}$$

Решение этого уравнения экспоненты либо гиперболические функции

$$\Phi(z) = Ach\left[k(z+H)\right]$$

Учтем граничное условие на поверхности жидкости

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0\,\Big|_{z=0}$$

Найдем соответствующие производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = kAsh\left[k(z+H)\right]\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 Ach\left[k(z+H)\right]\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

В результате получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновой вектор

$$\omega^2 = gkth(kH)$$

Что обозначает дисперсионное уравнение? Если задали если задали возмущение длиной волны $\lambda = 2\pi / k$, то оно будет колебаться с частотой ω.

У нас есть два характерных параметра: глубина бассейна *H* и длина волны $\lambda = 2\pi / k$ Свойства гиперболического тангенса

$$thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \begin{cases} x & x \ll 1 \\ 1 & x \gg 1 \end{cases}$$

1) Волны на мелкой воде – волны без дисперсии (цунами в океане)

$$kH \ll 1 \qquad H/\lambda \ll 1$$

$$\omega^2 = gHk^2 \qquad \omega = \pm\sqrt{gH}\,k$$

2) Волны на глубокой воде – волны с дисперсией (рябь в луже)

$$kH \gg 1 \qquad H/\lambda \gg 1$$

$$\omega^2 = gk \qquad \omega = \pm\sqrt{gk}$$

Фазовая и групповые скорости гравитационной поверхностной волны

Фазовая скорость – скорость распространения поверхности постоянной фазы

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}\sqrt{\frac{thkH}{kH}}$$

Групповая   скорость – скорость распространения огибающей волнового пакета

$$v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{v_{ph}}{2}\left(1 + \frac{kH}{thkH} - kHthkH\right)$$

Предельные случаи

1) Волны на мелкой воде – волны без дисперсии (цунами в океане)

$$kH << 1 \qquad H/\lambda << 1 \qquad \omega = \sqrt{gH}k$$

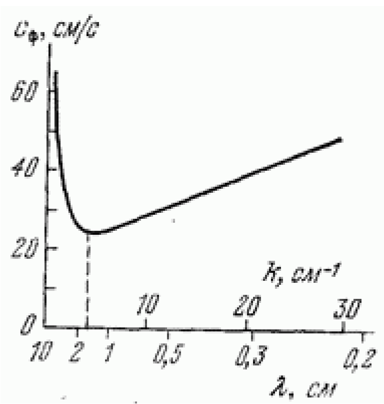
$$v_{ph} = v_{gr} = \sqrt{gH}$$

2) Волны на глубокой воде – волны с дисперсией

$$kH >> 1 \qquad H/\lambda >> 1 \qquad \omega = \sqrt{gk}$$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \qquad v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}v_{ph}$$

График (фазовая и групповая скорость от волнового числа) ПОСТРОЮ ПОТОМ СВОЙ



Движение частиц в жидкости. Потенциал, горизонтальная вертикальная скорости частиц и их смещение на некоторой глубине

$$\phi = Ach[k(z+H)]\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = ikAch[k(z+H)]\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = kAsh[k(z+H)]\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$\frac{d\varsigma}{dt} = v_x \qquad \frac{d\eta}{dt} = v_z$$

$$\varsigma = \frac{v_x}{-i\omega} = -\frac{kA}{\omega} ch[k(z+H)]\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

$$\eta = \frac{v_z}{-i\omega} = \frac{ikA}{\omega} sh[k(z+H)]\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

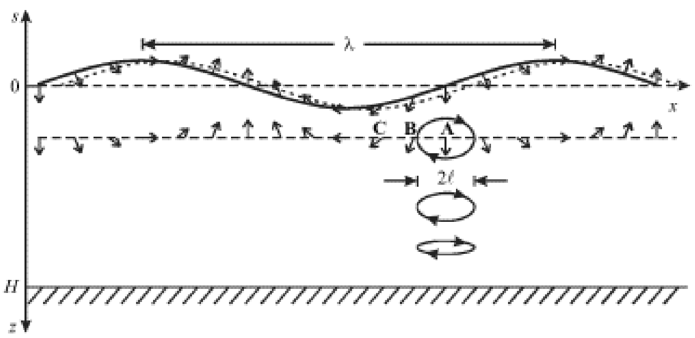
Определим константу *А* из условия равенства амплитуды колебаний частицы амплитуде волны на поверхности. Выделим затем реальную часть

$$a = \eta|_{z=0} = \frac{ikA}{\omega} shkH$$

$$\varsigma = -\frac{a}{shkH} ch[k(z+H)]\sin(kx-\omega t)$$

$$\eta = \frac{a}{shkH} sh[k(z+H)]\cos(kx-\omega t)$$

Траектории частиц эллипсы----



-рисунок эллипс вытянуты по горизонтали

$$\frac{\varsigma^2}{a_\varsigma^2} + \frac{\eta^2}{a_\eta^2} = 1$$

$$a_\varsigma = \frac{ach[k(z+H)]}{shkH}$$

$$a_\eta = \frac{ash[k(z+H)]}{shkH}$$

$$\frac{a_\eta}{a_\varsigma} = th[k(z+H)]$$

1) Волны на мелкой воде – волны без дисперсии (цунами в океане)

$$kH << 1 \qquad H/\lambda << 1$$

$$a_\varsigma = \frac{ach[k(z+H)]}{shkH} \approx \frac{a}{kH}, \qquad a_\varsigma >> a$$

$$a_\eta = \frac{ash[k(z+H)]}{shkH} \approx a(1+\frac{z}{H}) \qquad z=0, \quad a_\eta = a, \quad z=-H, a_\eta = 0$$

$$a_\varsigma >> a_\eta$$

Частицы двигаются по сильно вытянутым траекториям, горизонтальная скорость много больше вертикальной

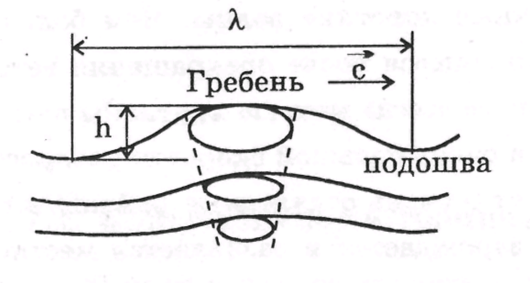


Рис.6.1.1. Траектории движения частиц жидкости в воде.

2) Волны на глубокой воде – волны с дисперсией

$$kH >> 1 \qquad H/\lambda >> 1$$

$$a_\varsigma = \frac{ach^{[k(z+H)]}}{shkH} = a\frac{e^{k(z+H)}+e^{-k(z+H)}}{e^{kH}+e^{-kH}} \approx a\frac{e^{k(z+H)}}{e^{kH}} = ae^{kz}$$

$$a_\varsigma = a_\eta = ae^{kz}, \qquad z<0$$

Траектории окружность и быстро спадает с глубиной

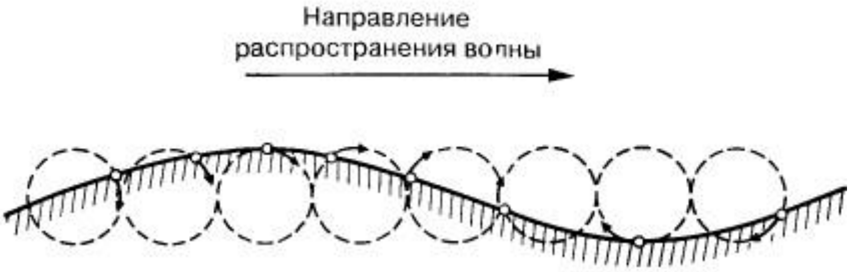
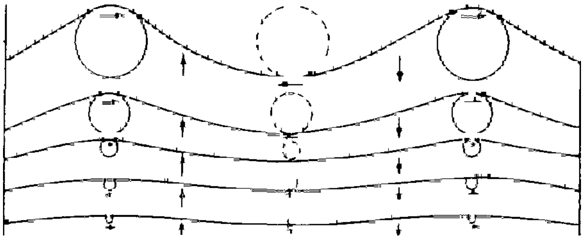


Рис. 44



$$kH >> 1 \qquad \frac{2pH}{l} \approx \frac{6H}{l} >> 1$$

$$z = -l$$

$$a_V = a_h = ae^{-2p} = \frac{a}{e^{2p}} \approx \frac{a}{511}$$

$$a = 5m, \qquad l = 10m, \qquad a(-10m) = 0,01m = 1cm!$$

Краткий вывод

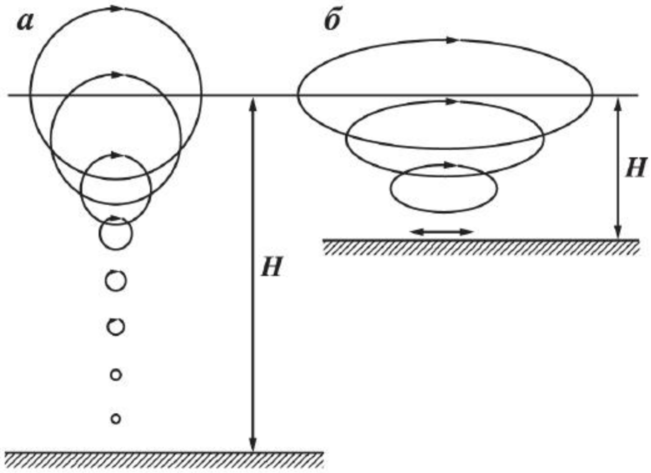
1 Длинные волны - без дисперсии, траектории продолговатые эллипсы

$$v_{ph} = v_{gr} = \sqrt{gH}$$

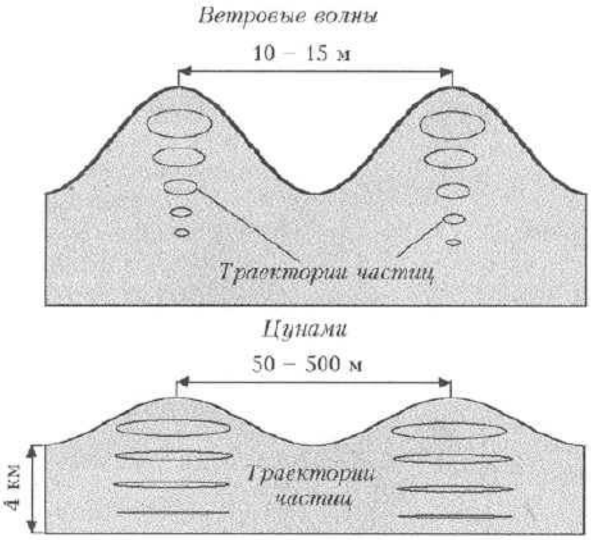
2. Короткие волны – с дисперсией траектории окружности

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \qquad v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}v_{ph}$$

Траектории



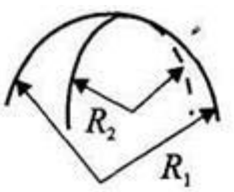
Примеры



Гравитационно-капиллярные волны

Учет поверхностного натяжения – давление под искривленной поверхностью неравно атмосферному. Учитывать нужно для достаточно коротких волн.

Добавочное давление формула Лапласа – **рисунок** (искривленная поверхность, два главных
радиуса кривизны)



$$\delta P_s=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\alpha\frac{1}{R}=-\alpha\nabla\left(\frac{\nabla\varsigma}{\sqrt{1+(\nabla\varsigma)^2}}\right)$$

Оценка градиента и приближенная формула для избыточного давления

$$\nabla\varsigma\propto\frac{a}{\lambda}<<1,\qquad \delta P_s=\alpha\Delta\varsigma$$

С учетом этого дополнительного давления граничное условие на поверхности жидкости из интеграла Коши можно записать как учитывать малость возмущений

$$r_0\frac{\partial j}{\partial t}+r_0 gV+p_0|_{z=V}+dp_s=0$$

$$\frac{\partial j}{\partial t}+gV-\frac{a}{r_0}DV=0|_{z=0}$$

Учитываем что смещения малы, рассмотрим одномерные волны и продифференцируем уравнение по времени

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t}\approx v_z,\qquad v_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}\varsigma-\frac{\alpha}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial z}=0|_{z=0}$$

Далее стандартный путь

Уравнение Лапласа, граничные условия на дне и поверхности

$$\phi(x,y,z,t)=\Phi(z)\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

И получаем дисперсионное уравнение с учетом того что капиллярные эффекты существенны только для кротких волн

$$\omega^2 = \left(gk + \gamma k^3\right) th(kH), \qquad \gamma = \frac{\alpha}{\rho_0}$$
$$\omega^2 = \left(gk + \gamma k^3\right), \qquad kH >> 1$$

Фазовая скорость. Граничная длина волны

$$v_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \gamma k$$
$$\frac{dv_{ph}}{dk} = 0, \qquad \gamma \approx 73 cm^3 / c^2$$
$$k_0 = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}, \qquad \lambda_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{g}} \approx 1{,}7 cm, \qquad f_0 \approx 13{,}5 Hz \qquad v_{ph,\min} \approx 23 cm / c$$

Групповая скорость

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{v_{ph}}{2}\frac{k_0^2 + 3k^2}{k_0^2 + k^2}$$

Резюме

Гравитационные волн и капиллярные волны

$$\omega^2 = \left(gk + \gamma k^3\right) th(kH),$$

1 Капиллярные волны

$$k >> k_0, \qquad v_{ph} = \sqrt{\gamma k}, \qquad v_{gr} = \frac{3}{2} v_{ph}$$

2 Гравитационные короткие волны

$$k_0 >> k >> 1/H \qquad v_{ph} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \qquad v_{gr} = \frac{1}{2} v_{ph}$$

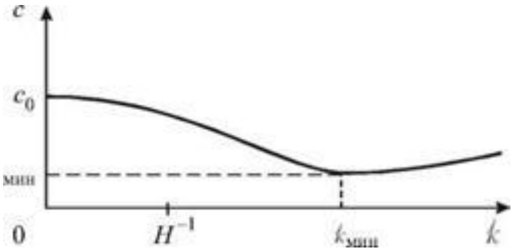
3 Гравитационные длинные волны

$$k << 1/H, \qquad v_{ph} = \sqrt{gH}, \qquad v_{gr} = v_{ph}$$

Графики НАДО РИСОВАТЬ

Дисперсионное уравнение

Фазовая скорость



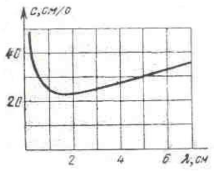


Рис. 1. Зависимость скорости капиллярно-гравитационных волн от длины волны.

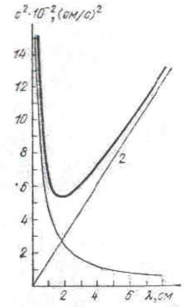


Рис. 2. Зависимость c^2 от λ. 1 — вклад сил поверхностного натяжения, 2 — вклад гравитационных сил.

В заключение – инверсная ситуация, плотная жидкость наверху (g=-g). Выливается ли вода из стакана если к нему приложить лист бумаги. Является ли это состоянием равновесия? Область устойчивости при больших волновых числах (малых длинах волн). Флакон духов и встряхивание с ускорением **a .**

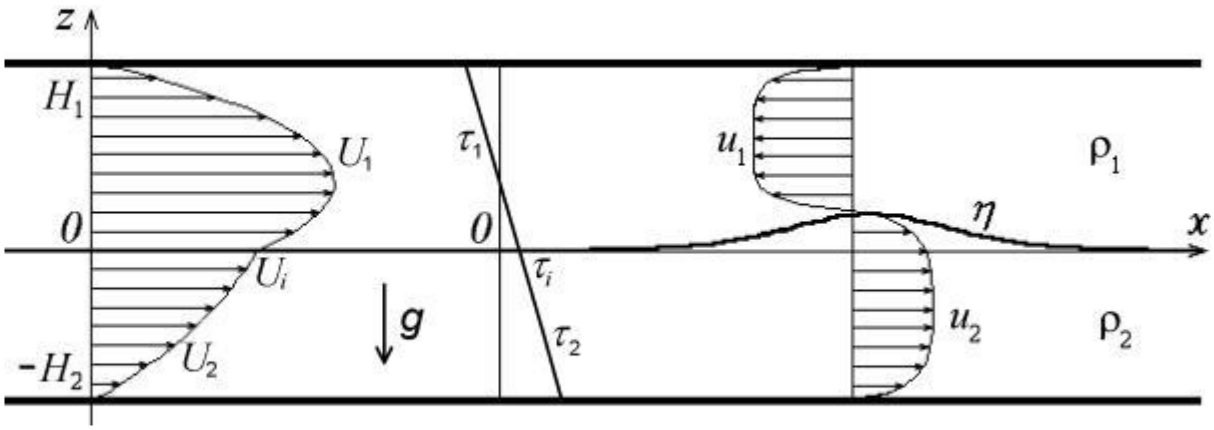
$$w^2 = \left(-gk + gk^3\right) = k\left(-g + gk^2\right), \qquad w = \sqrt{k\left(gk^2 - g\right)}$$

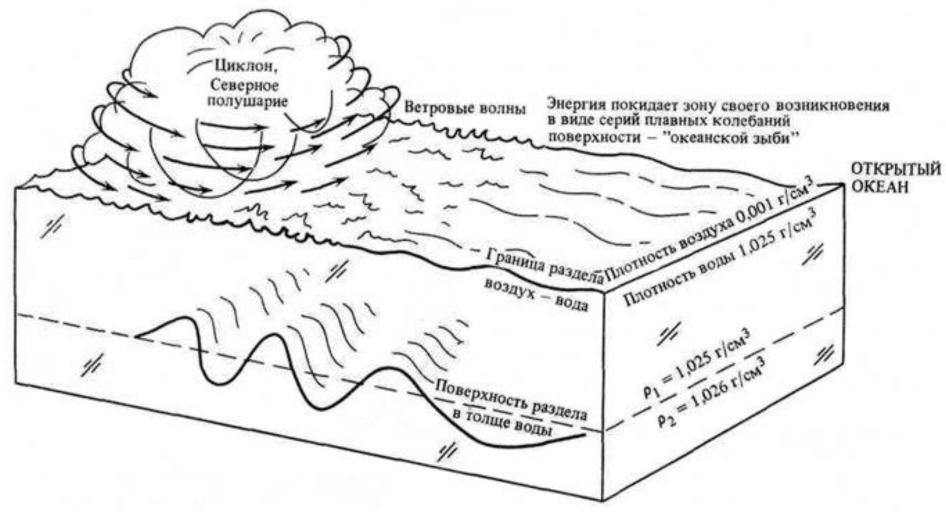
$$k_* = \sqrt{\frac{g}{g}} \qquad k_a = \sqrt{\frac{g+a}{g}} > k_*$$

Внутренние волны

Внутренние волны в двухслойной жидкости. Устойчивая стратификация $r_2 > r_1$ $r_2 > r_1$&

Рисунок – двухслойная модель. Ось z вверх





Смещение границы $V(x,t)$ $V(x,t)$. Вверху и внизу уравнение Лапласа, и на бесконечности потенциал стремится к нулю.

$$\Delta\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_1 = Ae^{-kz}e^{i(kx-\omega t)}, \qquad z>0 \quad \Delta\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_1 = Ae^{-kz}e^{i(kx-\omega t)}, \qquad z>0$$

$$\Delta\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_2 = Ae^{kz}e^{i(kx-\omega t)}, \qquad z<0 \quad \Delta\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_2 = Be^{kz}e^{i(kx-\omega t)}, \qquad z<0$$

Нужно связать A и B. Кинематическое условие нормальная компоненте скорости на границе непрерывна.

$$v_z = \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varsigma}{\partial t}, \qquad B = -A$$

Второе условие – равенство давлений на границею Из нестационарного уравнения Бернулли (интеграла Коши) имеем

$$p_1 = -\rho_1 g\varsigma - \rho_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z}$$

$$p_2 = -\rho_2 g\varsigma - \rho_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z}$$

$$\varsigma = \frac{1}{g(\rho_2-\rho_2)}\left(\rho_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \rho_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)$$

Используем *B=-A* и определение скорости через потенциал

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t} = \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\phi_1}{\partial z}$$

Получаем дисперсионное уравнение для внутренних волн

$$g(\rho_2-\rho_1)k = \omega^2(\rho_2+\rho_1)$$

$$\omega = \sqrt{kg\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\right)}, \qquad g' = g\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\right)$$

В океане

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 << \rho$$

$$\omega = \sqrt{kg\frac{\Delta\rho}{2\rho}}, \qquad \Delta\rho/\rho \approx 10^{-2}$$

Очень медленные волны

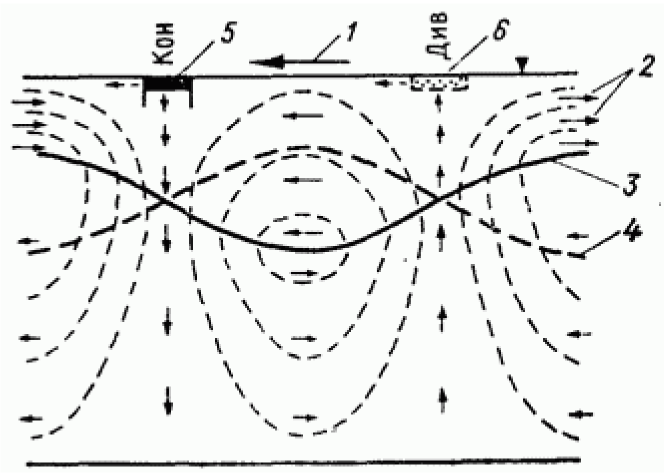
Явление мертвой воды Фрам Нансен

В 1893 г. знаменитый норвежский полярник Фритьоф Нансен, совершавший плавание по арктическим водам, столкнулся со странным явлением. Вот что записал он в отчете: «Мы почти не двигались с места (…) и будто тащили всю воду за собой. Что мы ни делали, — круто поворачивали, лавировали, описыв али полный круг и пр., — все напрасно. Лишь только машина переставала работать, судно тотчас же останавливалось, точно схваченное чем-то за корму».

Это явление исследователь назвал «мертвая вода», и он же дал ему первое объяснение. Приведем еще одну цитату из книги Нансена «"Фрам» в полярном море": «Своеобразное явление — эта мертвая вода. (…) Встречается оно, по-видимому, лишь там, где слой пресной или сильно распресненной воды лежит поверх соленой морской воды. Впрочем, чтобы «попасться», как попался «Фрам», нужно еще одно совпадение: толщина верхнего пресного слоя должна примерно равняться толщине судна. Тогда на малом ходу его винт будет расходовать почти всю свою энергию не на движение вперед, а на создание внутренних волн на границе двух слоев воды — корабль почти замирает на месте, при этом сами волны с корабля незаметны. Вода остается спокойной, просто некая сила не дает двигаться вперед.

Внутренние волны в стратифицированной жидкости.

Стратифицированная несжимаемая жидкость $r = r_0(z)$.Ось z вверх



Внутренняя волна в стратифицированном водоеме. 1 — направление движения волиы; 2 — траектории волновых движений; 3, 4 — профили волны в различные фазы; 5 — вероятное место размещения зоны конвергенции (Кон); 6 — вероятное место размещения зоны дивергенции (Див).

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla(gz)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

Состояние равновесия

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0(z)$$

Линеаризация уравнений

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0 + \nabla p^{'}}{\rho_0 +}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla(gz)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

Состояние равновесия

$$\frac{dp_0}{dz} = - gr_0(z)$$

Нужно еще одно уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div(\vec{v}) = 0$$

Несжимаемая жидкость

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$div(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\rho = 0$$

$$\frac{\partial \rho^{'}}{\partial t} + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = 0$$

Возникает частота Брента-Вяйсаля

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0 \frac{N^2}{g} v_z = 0$$

Замкнутая система уравнений. Приближение Буссинеска – не слишком сильная стратификация. Можно свести к одному уравнению. Частный случай = экспоненциальная
атмосфера

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz} = const \qquad \rho_0(z) = \rho_0 e^{-z/H} \qquad N^2 = gH$$

Дисперсионное уравнение

$$v_z = A\exp\left(-i\omega t + ik_x x + ik_z z\right)$$

$$\omega^2 k^2 = N^2 k_x^2$$

$$\omega = \frac{Nk_x}{k} = N\sin\theta$$

Свойства внутренних волн

а) волны только с частотой $\omega < N$

б) зависимость направления распространения от частоты

$\omega \to N$ вектор направлен горизонтально

$\omega \to N\,(\omega << N)$ вектор направлен вертикально

в) Групповая скорость перпендикулярна фазовой

рисунок