

# Лекции по механике сплошных сред

Набор и вёрстка:

Сарафанов Ф.Г., Есюнин М.В.,  
Платонова М.В.

**Disclaimer.** В данном документе нами набраны лекции по механике сплошных сред, прочитанные на 3 курсе радиофизического факультета ННГУ **Сергеем Николаевичем Гурбатовым**. Документ призван облегчить подготовку к зачетам и экзаменам и восполнить пробелы в знаниях читателя по механике сплошных сред. Разрешено копирование и распространение данного документа с обязательным указанием первоисточника.

При обнаружении ошибок, опечаток и прочих вещей, требующих исправления, можно либо создать issues в [репозитории на github.com](https://github.com), либо написать по электронной почте [sfg180@yandex.ru](mailto:sfg180@yandex.ru).

2 февраля – 27 апреля 2019 г.  
Нижний Новгород

# Оглавление

<b>1. Введение . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1 Основные допущения МСС . . . . .	5
<b>2. Гидродинамика идеальной жидкости . . . . .</b>	<b>9</b>
2.1 Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости . . . . .	9
2.2 Связь Лагранжева и Эйлера описаний . . . . .	11
2.3 Уравнение непрерывности и закон сохранения массы . . . . .	12
2.4 Уравнение Эйлера . . . . .	13
2.5 Закон сохранения энергии идеальной жидкости . . . . .	15
2.6 Закон сохранения импульса . . . . .	16
2.7 Гидростатика . . . . .	18
2.8 Гидростатическое равновесие. Частота Брента — Вайсяля . . . . .	21
2.9 Уравнение Бернулли . . . . .	22
2.9.1 Случай стационарного движения . . . . .	22
2.9.2 Случай нестационарного вихревого движения . . . . .	24
2.9.3 Энергетический смысл уравнения Бернулли . . . . .	24
2.10 Теорема Томсона. Потенциальные и вихревые движения жидкости . . . . .	27
2.10.1 Нестационарные малые колебания . . . . .	31
2.11 Потенциальные течения несжимаемой жидкости. Парадокс Даламбера. Присоединенная масса. . . . .	32
2.12 Гидродинамика плоских течений . . . . .	33
2.12.1 Аналитические функции . . . . .	33
2.12.2 Конформное отображение . . . . .	34
2.12.3 Вихревые движения в идеальной жидкости . . . . .	42
2.12.4 Точечные вихри . . . . .	48
2.13 Поверхностные гравитационные волны . . . . .	52
2.13.1 Волны на мелкой воде . . . . .	57
2.13.2 Волны на глубокой воде. Волны с сильной дисперсией . . . . .	58
2.14 Гравитационно-капиллярные волны . . . . .	59
2.15 Внутренние волны . . . . .	62
<b>3. Движение вязкой несжимаемой жидкости . . . . .</b>	<b>66</b>
3.1 Уравнения гидродинамики вязкой жидкости . . . . .	66
3.2 Течение Куэтта . . . . .	72
3.3 Течение Пуазейля . . . . .	73
3.4 Нестационарное движение вязкой жидкости. Вязкие волны . . . . .	76
3.5 Принцип подобия. Формула Стокса . . . . .	78
3.5.1 Физический смысл числа Рейнольдса . . . . .	80
3.5.2 Формула Стокса . . . . .	81

3.6	Пограничный слой. Формула Прандтля . . . . .	82
3.7	Элементы теории турбулентности . . . . .	84
<b>Предметный указатель . . . . .</b>		<b>85</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>86</b>

# 1. Введение

Курс **механики сплошных сред** (далее **МСС**) является одним из разделов цикла теоретической физики. Так, в знаменитом курсе теоретической физики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица ему посвящено два достаточно объемных тома (объем свыше 1000 страниц).

Наш курс для радиофизиков – он существенно меньше, чем курсы на специализированных факультетах. Он рассчитан на радиофизиков, несколько больший объем в нем занимают волновые процессы.

Следует отметить, что исходные уравнения механики сплошных сред существенно сложнее чем уравнения электродинамики, где базовыми являются линейные уравнения Максвелла. В тоже время, в этих курсах возникают одинаковые уравнения, это одна из причин почему курсу читаются параллельно. В этих курсах большую роль играют формулы векторного анализа.

История развития **МСС** полностью подтверждает наличие тесной связи между становлением науки и запросами практики. **МСС** – одна из древнейших наук. Ее зарождение идет еще в античной древности.

Фамилии (но не годы жизни) знают все. Это:

- Аристотель (384-322 г.г. до н.э)
- Архимед (287-212 г.г. до н.э) – закон Архимеда

Средние века:

- Галилей (1564-1642)
- Паскаль (1623-1662)
- Леонардо де Винчи (1452-1519) Это и летательные аппараты, закон Паскаля для давления, наблюдение гидродинамической турбулентности.
- Гюйгенс (1629-1695)
- Ньютон (1642-1727). В своих знаменитых *«Началах»* он приводит теоретический вывод квадратичного закона сопротивления. Именно из законов Ньютона было проведено обобщение на сплошные среды и родилась новая наука «гидромеханика».

Это два академика Российской академии наук

- Леонард Эйлер (1707-1789) – уравнение Эйлера
- Даниил Бернулли (1700-1782) - уравнение Бернулли
- Даламбер (1717-1783) – парадокс

Начало 19 века:

- Лагранж (1736-1813)
- Коши (1789-1857)

Вязкая жидкость:

- Анри Навье (1785-1863)
- Стокс (1819-1903) – уравнение Навье-Стокса

Эксперименты с жидкостью:

- Ж. Пуазейль (1799-1869)

Основы теории турбулентности:

- Осборн Рейнольдс (1842-1912)
- Н.Е.Жуковский (1847-1921) Обтекание крыла, присоединённый вихрь, подъемная сила
- С.А.Чаплыгин (1869-1942)
- Морис Мари Альфред Куэтт (1858-1943) – течение Куэтта

Теории турбулентности и теория устойчивости:

- Людвиг Прандтль (1875-1953)
- Теодор Карман (1881-1963)

Практически все эти фамилии будут встречаться в нашем курсе – их именами названы законы **МСС**.

В наше время бурное развитие получила вычислительная **МСС**. Так, не один новый самолет не получит разрешение на эксплуатацию, если не будет построена его математическая модель, включающая процессы самолета обтекания потоком.

Что же включает современная **МСС**? Книга академика Л.Седова «Краткое перечисление современных проблем» включает 21 пункт и занимает 4 страницы. Здесь мы приведем лишь те, которые тесно связаны с предприятиями и НИИ Нижнего Новгорода, и где работают выпускники радиофака.

- 1) Изучение движения жидкости и газа – движение самолетов, вертолетов, подводных лодок. Возникновение турбулентных следов за объектами. Излучение звука винтами и турбулентными струями. ИПФ РАН, ОКБМ.
- 2) Движение жидкости и газа в трубах. Взаимодействие волн в оболочках. ИПФ РАН, ОКБМ.
- 3) Волновые движения в жидкостях и газах
  - Волны в твердых телах. Акустическая диагностика, взаимодействие с электромагнитными волнами – линии задержки на ПАВ (радиоэлектронной комплекс НО)

- Волны на поверхности моря и внутренние волны, их нелинейное взаимодействие. Обнаружение ПЛ по изменению характеристик поверхностного волнения.
  - Волны в каналах, реках. Генерация цунами и набег волн цунами на берег.
  - Сейсмические процессы, нелинейная сейсмодиагностика.
  - Звуковые волны, гидроакустика, акустика океана
- 4) Теория турбулентности – гравитационная неустойчивость
- 5) Биологическая механика, движение крови в сосудах, диагностика на различных типах волн – сдвиговые волны

Пример – **Институт прикладной физики РАН**, один из крупнейших институтов Российской академии наук. Филиалы:

- **Институт физики микроструктур РАН**
- **Институт проблем машиностроения РАН**

**Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПФ РАН)** был создан на базе нескольких отделов Научно-исследовательского радиопизического института (НИРФИ) Минвуза РСФСР в апреле 1977 года. Основатель и директор института на протяжении первых 25 лет его работы — академик А. В. Гапонов-Грехов, с 2003 по 2015 год институт возглавлял академик А. Г. Литвак, с 2015 года до своего избрания президентом РАН в 2017 году директором института был академик А. М. Сергеев. С октября 2017 г. временно исполняющим обязанности директора ИПФ РАН назначен член-корреспондент РАН Г.Г. Денисов.

## 1.1. Основные допущения МСС

Вещество можно рассматривать как непрерывную сплошную среду, пренебрегая его молекулярным строением. И одновременно считаем непрерывным распределение всех характеристик жидкости (плотность, скорость, температура, ...).

Это означает, что всякий малый элемент жидкости или газа содержит большое число молекул(или других частиц ). То есть когда мы говорим о бесконечно малом элементе жидкости, то везде мы подразумеваем, что «*физически*» бесконечно малый объем мал по сравнению с размерами тел, но велик по сравнению с межмолекулярными расстояниями.

Это позволяет применить в МСС хорошо разработанный для непрерывных функций аппарат высшей математики.

Нетривиальный пример – **крупномасштабная структура Вселенной**.

Описание развития крупномасштабной структуры уравнениями гидродинамики газа гравитационно взаимодействующих частиц. «Физически» бесконечно малый объем – объем в котором содержится много галактик.

Существующие на данный момент крупномасштабные образования возникли из-за малых начальных возмущений плотности за счет гравитационной неустойчивости. Обычная материя (атомов различных веществ) (4%), Темная материя неизвестной физической природы (cold dark matter) (23%). Темная энергия (dark energy) (73%), которая играет антигравитационную роль в процессе формирования Вселенной.

Плотность темного вещества в 6–7 раз превосходит плотность барионов, и поэтому рост неоднородностей определяется в основном темным веществом. Именно рост неоднородностей в темном веществе и ответственен за формирование крупномасштабных структур. Барионная компонента просто следовала за эволюцией темного вещества.

В космологии понятие крупномасштабной структуры относится к распределению галактик и массы темного вещества (на масштабах от одного до нескольких сотен мегапарсек). Современная теория объясняет формирование крупномасштабной структуры Вселенной как следствие роста исходных слабых флуктуаций плотности вещества за счет гравитационной неустойчивости. При этом формирование ярко выраженных элементов структуры происходит на нелинейной стадии. Именно поэтому процесс формирования крупномасштабной структуры принято иногда гравитационной турбулентностью.

Наиболее очевидный путь преодоления сложности учета законов нелинейной эволюции гравитационной неустойчивости на поведение поля плотности вещества состоит в численном моделировании трехмерного движения  $N$  гравитационно взаимодействующих частиц. Альтернативой являются приближенные аналитические решения некоторых уравнений в частных производных, адекватно описывающих рост флуктуаций неоднородной плотности вещества в расширяющейся Вселенной. Первый из этих подходов был предложен Зельдовичем в 1970 году.

Второй аналитический подход к проблеме описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной [15] базируется на векторном уравнении Бюргерса. В данном подходе многопотокное движение гравитационно взаимодействующих частиц в особенностях, приводящее к их локализации, моделируется вязким слагаемым в уравнении Бюргерса. В предельном случае исчезающе малой вязкости это эквивалентно слипанию частиц и поэтому данный подход часто называют приближением слипания - adhesion model (см., например, [16, 18, 19, 20]).

Предельная версия модели слипания естественным образом описывает характерную мозаичную структуру распределения вещества во Вселенной. Основные элементы «мозаики» в трехмерном пространстве (вершины, ребра, грани и внутренности ячеек) могут быть ассоциированы с наблюдаемыми структурами трехмерного распределения галактик (компактные скопления галактик, филаменты – цепочки галактик, поверхности со сравнительно высокой плотностью галактик, и темные области между ними, бедные галактиками).

Сама эволюция крупномасштабной структуры Вселенной может трактоваться как непрерывный процесс транспортировки вещества преимущественно из объектов большой размерности к объектам мозаичной структуры, обладающим меньшей размерностью. К примеру, вещество из внутренних ячеек мозаичной структуры (трехмерных объектов) перетекает в ее грани (квазидвумерные объекты), а из них в ребра и вершины мозаичной структуры. В то же время, сами ячейки участвуют в непрерывном движении, деформации и поглощении одних ячеек другими.

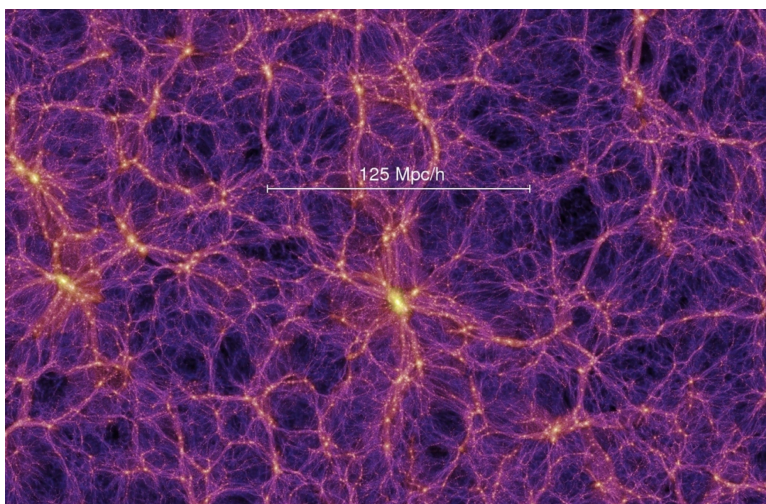


Рис. 1. Крупномасштабная структура Вселенной



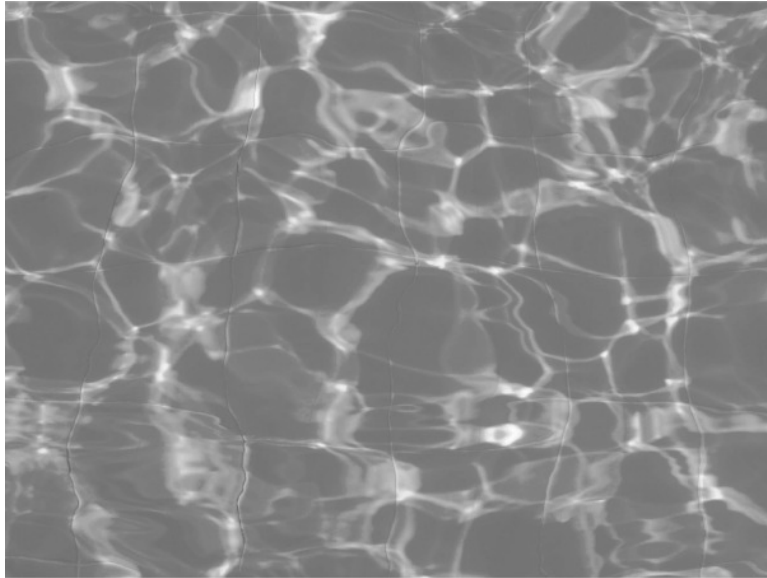


Рис. 2. Система каустик на дне бассейна

В заключение отметим, что результаты динамического моделирования в рамках приближения слипания можно посмотреть на Youtube (**The Sticky Geometry of the Cosmic Web, version 2.01**)

<https://www.youtube.com/watch?v=wI12X2zczqI>

Результаты прямого численного моделирования (N-body simulation) можно также посмотреть на Youtube

Двухмерный случай:

<https://www.youtube.com/watch?v=nHvcqV92oqY>

<https://www.youtube.com/watch?v=74IsySs3RGU>

Трёхмерный случай

<https://www.youtube.com/watch?v=eDGtFRj4xXc>

## 2. Гидродинамика идеальной жидкости

В данном разделе мы рассмотрим законы движения и равновесия идеальной жидкости, то есть жидкости в которой не учитывается внутреннее трение, и следовательно, нет перехода механической энергии в тепловую. Будем также пренебрегать теплообменом между различными объемами жидкости.

Это означает, что все процессы протекают при постоянной энтропии, а состояние жидкости характеризуется одной скалярной величиной – давлением  $P$ . Это, конечно, идеализация, которая приводит к ряду парадоксальных результатов (например, парадокс Даламбера-Эйлера – сила сопротивления при равномерном движении тела в жидкости равна нулю). Тем не менее, без этой идеализации невозможно дальнейшее изучение реальных ситуаций.

### 2.1. Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости

Прежде чем перейти к выводу уравнений, рассмотрим два альтернативных способа описания движения жидкости. Оба они были предложены Леонардом Эйлером, но одно из них носит имя Лагранжа.

**Лагранжево описание.** В основу этого способа положено описание движения отдельных «жидких частиц». При этом все величины, в том числе и координаты частицы жидкости определяются как функции времени  $t$  и некоторых переменных  $\xi_i (i = 1, 2, 3)$ , идентифицирующих определенную частицу («метки» частиц)

$$x_i = x_i(\xi_k, t)$$

$$P = P(\xi_k, t)$$

$$\rho = \rho(\xi_k, t)$$

...

В качестве переменных  $\xi_k$  обычно используют начальные координаты частиц жидкости

$$t = t_0$$

$$\xi_i = x_i(\xi_k, t_0)$$

Таким образом при лагранжевом описании мы следим за определенными частицами жидкости и смотрим как изменяются во времени их координаты, скорости, ускорения, а также давление, температура, плотность в их окрестности.

При этом скорость и ускорение частицы вычисляются как

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

Здесь  $\vec{v}(\xi_k, t)$  - скорость частицы в момент времени  $t$  имела координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

Отметим, что такому описанию соответствует способ исследования океана (реки Волги) с помощью геофизических буюв с нулевой плавучестью.

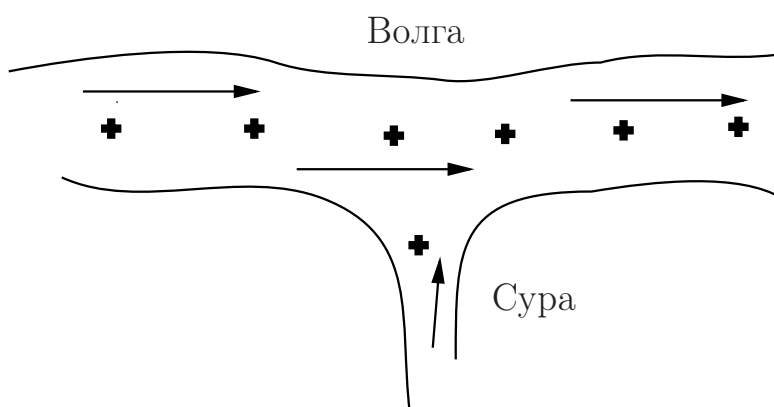


Рис. 3. Схематичная картина Лагранжева и Эйлера описания.  $\oplus$  - якорь.

**Эйлерово описание.** Неподвижное пространство заполнено движущейся жидкостью. Движение жидкости будет определено если все величины характеризующую жидкость (скорость движения, давление, плотность, температура и т.д.) **будут определены**. То есть мы следим, как меняются эти величины от точки к точке

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

$$T = T(\vec{x}, t)$$

Система заякоренных буюв. В Эйлеровом описании мы не знаем что делается с отдельной частицей. При этом частные производные от скорости не являются ускорением. Так если течение стационарно и частная производная по времени равна нулю, частицы в данной точке могут иметь ускорение. Пример – водопад.

Найдем ускорение частицы. За время  $\Delta t$  частица находящаяся в момент времени  $t$  в точке с координатами  $x_k$  переместится в точку  $x_k = x_k + \Delta x_k$ .

Тогда для  $i$ -ой компоненты ускорения имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta t} &= \frac{\partial x_k}{\partial t} = v_k \\ a_i &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(x_k + \Delta x_k, t + \Delta t) - v_i(x_k, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ v_i(x_k, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t - v_i(x_k, t) \right]}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k + \frac{\partial v_i}{\partial t}\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}a_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_i \\ \vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \right) \vec{v}\end{aligned}$$

Аналогично находятся и производные от любой другой величины. Эта производная носит название субстанциональной производной.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla)$$

## 2.2. Связь Лагранжева и Эйлера описаний

Пусть известно Эйлерово поле скорости  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ . Чтобы найти как движутся Лагранжевы частицы  $\vec{x}(t, \vec{\xi})$ , нам нужно решить уравнение

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v}(\vec{x}, t) \\ \vec{x}(t=0, \vec{\xi}) &= \vec{\xi}\end{aligned}$$

Как найти эйлерово поле скорости? Если нам известно поведение лагранжевых частиц  $\vec{x}(t, \vec{\xi})$ , то вначале нам нужно решить уравнение

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{\xi})$$

Решение этого уравнения

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$$

позволяет найти Лагранжеву частицу, которая в момент времени  $t$  попала в точку  $x$ . Тогда эйлерово поле скорости будет равно

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}\left(t, \vec{\xi}(\vec{x}, t)\right)$$

### 2.3. Уравнение непрерывности и закон сохранения массы

Пусть имеется некоторый объем пространства  $V$  заполненный движущейся жидкостью. Количество жидкости (масса) в этом объеме равно:

$$m = \int_V \rho dV$$

где  $\rho$  - плотность жидкости. Жидкость может притекать и вытекать из объема. Введем элемент поверхности  $d\sigma$  и вектор  $d\vec{\sigma} = d\sigma\vec{n}$ , направленный по внешней нормали к поверхности.

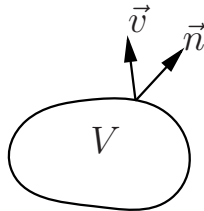


Рис. 4. Объем, скорость и нормаль к поверхности

Поток через элемент поверхности определяется скалярным произведением:

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma} = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV$$

Уравнение баланса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}$$

Это интегральный закон сохранения массы. Если на поверхности скорость равна нулю, то масса сохраняется.

Используя формулу Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma} = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV$$

получим

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

Так как объем произвольный, то мы получаем дифференциальный закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Вектор  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  - плотность потока массы. Используя формулу  $\nabla(a\vec{b}) = \nabla a \vec{b} + a \nabla \vec{b}$ , перепишем закон сохранения массы в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

**Несжимаемая жидкость - плотность вдоль траектории частицы не меняется.**

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

То есть поле скорости соленоидально  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .

## 2.4. Уравнение Эйлера

Уравнение движение идеальной жидкости (аналог **2 закона Ньютона**)  
Второй закон Ньютона для жидкого элемента

$$\begin{aligned} \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}_S + \vec{F} \\ \vec{F} &= \rho \vec{f} \end{aligned}$$

Здесь  $F$  объемная сила действующая на элемент  $dV$  ( $f$  – сила отнесенная к единице массы, для силы тяжести  $f = g$ , где  $g$  ускорение свободного падения).

$F_s$  – сила действующая на элемент объема со стороны окружающей среды. В идеальной среде силы трения нет и единственная сила определяется только силами давления. На элемент поверхности  $d\sigma$  действует сила  $P d\vec{\sigma}$  и результирующая сила равна:

$$\vec{F}_s = - \oint_S p d\vec{\sigma} = - \int_V \nabla p dV \approx - \nabla p dV$$

В результате получаем **уравнение Эйлера**

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}$$

Здесь мы учли что в уравнение Ньютона входит полная производная. У нас 5 неизвестных – 3 компоненты скорости, давление и плотность. И только 4 уравнения: 3 уравнения Эйлера для трех компонент и уравнение непрерывности. Нужно еще одно уравнение – уравнение состояния, связывающее давление, плотность и энтропию  $S$ :  $P = P(\rho, S)$  и уравнение для энтропии. Для изоэнтропической жидкости  $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \nabla S = 0$

Если в начальный момент времени энтропия была одинакова во всем пространстве, то она не будет меняться с течением времени и уравнение состояния принимает вид:  $P = P(\rho)$ . В идеальном газе уравнение адиабаты имеет вид (**уравнение Пуассона**):

$$P = P_0 (\rho/\rho_0)^\gamma$$

$$\gamma = c_p/c_v$$

где для идеального газа  $\gamma = \frac{i+2}{i}$ , ( $i$  – количество степеней свободы). Для жидкостей дело хуже. В разных диапазонах давления имеют разные уравнения состояния. Эмпирическая формула для давления  $P$ , измеряемого в атмосферах:

$$\frac{P+B}{1+B} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

где  $B = 3000$  атм,  $\gamma = 7$ , давление до  $10^5$  атмосфер.

Итак, **система уравнений для идеальной жидкости** принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ P &= P(\rho)\end{aligned}$$

## 2.5. Закон сохранения энергии идеальной жидкости

Энергия единицы объема – кинетическая + внутренняя

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon$$

Закон сохранения энергии в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) dV = - \oint_S \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \vec{v} d\vec{\sigma} - \oint_S p \vec{v} d\vec{\sigma}$$

Изменение энергии в объеме равно притоку (выносу) энергии в объем через границы + работа внешних сил давления. Энтальпия равна  $W = \rho \varepsilon + P$  из курса термодинамики и общей физики. Получаем закон сохранения в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) dV = - \oint_S \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + W \right) \vec{v} d\vec{\sigma}$$

По формуле Стокса переходим в правой части от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему:

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) + \operatorname{div} \left( \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + W \right) \right) \vec{v} \right] dV = 0$$

Поскольку объем произвольный можно перейти к дифференциальной



форме закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{N} &= 0 \\ E &= \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \\ \vec{N} &= \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + P \right] \vec{v}\end{aligned}$$

Здесь  $E$  – плотность энергии,  $N$  – вектор плотности потока энергии – аналог вектора Пойнтинга в электродинамике. Введён в 1874 году Умовым.

## 2.6. Закон сохранения импульса

Для единицы объема жидкости импульс равен  $\vec{p} = \rho \vec{v}$ . Если закон сохранения энергии мы выводили в интегральной форме, то здесь мы будем стартовать с дифференциальных уравнений. Запишем изменения для  $i$ -ой компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Запишем уравнение Эйлера и уравнение непрерывности по компонентам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + f_i \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} &= 0\end{aligned}$$

В результате для изменения компоненты импульса имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(P \delta_{ik} + \rho v_i v_k) + \rho f_i$$

Здесь по индексу  $k$  идет суммирование. Хочется привести это уравнение к дивергентной форме, чтобы получить закон сохранения. Учтем:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k}$$

Внешние силы приводят к изменению импульса. Нужно что-то придумать с

давлением:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial (\delta_{ik} p)}{\partial x_k}$$

Здесь  $\delta_{ik} = 1, i = k; \delta_{ik} = 0, i \neq k$  - символ Кронекера.

В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} (P \delta_{ik} + \rho v_i v_k) + \rho f_i$$

Введем тензор плотности потока импульса:  $\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k$ . Тогда закон сохранения импульса запишется как:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

Проинтегрируем последнее равенство по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \int_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV + \int_V \rho f_i dV$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса для тензора получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \oint_S \Pi_{ik} n_k d\sigma + \int_V \rho f_i dV$$

Таким образом, изменение импульса в объеме  $V$  связано с потоком импульса через поверхность  $S$ . Векторная же форма закона сохранения импульса имеем вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S [P \vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v} \vec{n})] d\sigma$$

Здесь  $\vec{n}$  - внешняя нормаль.

**Следствие.** Как использовать закон сохранения импульса для нахождения силы действия потока на тело? Если движение стационарно:

$$\oint_S [p n_i + \rho v_i v_k n_k] d\sigma = 0$$

Отсюда для силы действия потока на тело имеем:

$$F_i = - \oint_S p n_i d\sigma = \oint_S \rho v_i v_k n_k d\sigma$$

Пример – изогнутая трубка (душ).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S [P \vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v} \vec{n})] d\sigma$$

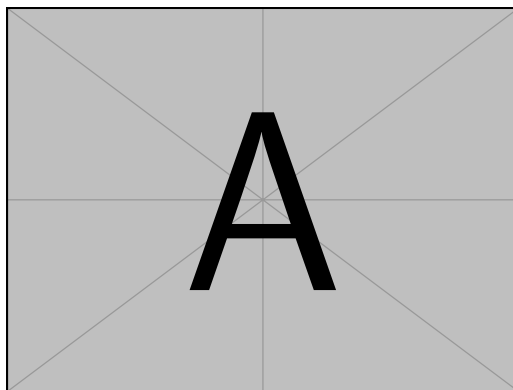


Рис. 5. картинка изогнутой трубки

В одно сечение жидкость втекает, а из другого вытекает.

## 2.7. Гидростатика

Рассмотрим простейший случай когда скорость жидкости равна нулю. Из исходной системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ P &= P(\rho) \end{aligned}$$

следует

$$\begin{aligned} \nabla P &= \rho \vec{f} \\ P &= P(\rho) \end{aligned}$$

Пусть внешняя сила потенциальна

$$\begin{aligned}\vec{f} &= -\nabla u \\ \nabla P &= -\rho \nabla u\end{aligned}$$

то есть градиенты давления и сила параллельны.

При какой зависимости плотности от координаты последнее уравнение имеет решение? Применим к последнему уравнению операцию ротора

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\nabla P) &= 0 \\ \operatorname{rot}(-\rho \nabla u) &= -\rho \operatorname{rot}(\nabla P) - [\nabla P \nabla \rho] \\ [\nabla P \nabla \rho] &= 0\end{aligned}$$

Таким образом вектора градиентов плотности и потенциала должны быть параллельны.

*Распределение давления в поле тяжести.*

$$\begin{aligned}\nabla P &= \rho \vec{g} \\ P &= P(\rho)\end{aligned}$$

то есть в поле тяжести стационарное решение существует, если плотность зависит от высоты.

Рассмотрим некоторые примеры задач гидростатики.

**Жидкость в поле тяжести.** Попросту говоря, простой жизненный пример – вода в земных условиях. Плотность постоянна. Ось  $z$  направлена вниз.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dz} &= \rho_0 g \\ P &= P_A + \rho_0 g z\end{aligned}$$

Давление увеличивается на 1 атмосферу на 10 метрах.

**Изотермическая атмосфера.** Под ней понимается идеальный газ с постоянной температурой  $T$ . Ускорение можно считать постоянным. Ось  $z$  на-

правлена вверх.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dz} &= -\rho(z)g \\ P &= \frac{Rm}{\mu V}T \\ P &= \frac{R}{\mu}\rho T\end{aligned}$$

Здесь  $R$  - универсальная газовая постоянная.  $\mu$  - молярная масса газа.

$$\begin{aligned}\frac{RT}{\mu} \frac{dP}{dz} &= -\rho(z)g \\ \rho &= \rho_0 \exp(-z/h), P = P_0 \exp(-z/h) \\ h &= \frac{RT}{\mu g}\end{aligned}$$

Здесь  $h$  - высота атмосферы, величина порядка 8 км, поэтому изменением силы тяжести можно пренебречь.

**Закон Архимеда.** На тело, погруженное в жидкость, со стороны жидкости действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненную этим телом.

$$\nabla P = \rho \vec{g}$$

Сила со стороны жидкости на элемент поверхности  $d\vec{F} = -p\vec{n}dS$ . Здесь  $\vec{n}$  - внешняя нормаль. Тогда сила Архимеда равна:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= - \oint_S P\vec{n}dS = - \int_V \nabla P dV = - \int_V \rho \vec{g} dV \\ \int_V \rho \vec{g} dV &= \vec{P} \approx \rho V \vec{g}\end{aligned}$$

$$\vec{F}_A = -\vec{P}$$

Здесь  $\vec{P}$  - вес вытесненной жидкости. Причем и плотность, и ускорение **не обязательно постоянны!**

## 2.8. Гидростатическое равновесие. Частота Брента — Вайселя

Выясним условия, при которых состояние равновесия жидкости в поле тяжести будет устойчивым. Будем считать что плотность зависит от глубины. Ось  $z$  направлена вниз. Элементарный объем находится на глубине  $z$ , потом  $z + x$ .

На тело действуют две силы: сила тяжести и сила Архимеда, и в равновесии они равны по величине:

$$\begin{aligned} F_g(z) &= g\rho(z)V_0 \\ F_A(z) &= -F_g(z) = -g\rho(z)V_0 \end{aligned}$$

Пусть данный объем смещается по вертикали на расстояние  $x$ . Масса сохраняется и сила тяжести не меняется. Пусть **жидкость несжимаема**, тогда объем не меняется. А сила Архимеда изменяется, так как плотность вокруг частицы изменилась. Тогда уравнение Ньютона для объема запишется как:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dx^2} &= g\rho(z)V_0 - g\rho(z+x)V_0 \\ m &= \rho(z)V_0 \end{aligned}$$

Разлагая плотность в ряд, и ограничиваясь линейными членами, получаем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} x$$

Это уравнение гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + N^2 x &= 0 \\ N^2 &= \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \propto \frac{g}{L} \end{aligned}$$

Здесь  $N = \left( \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{1/2}$  — частота Брента-Вайселя.

- 1) **Устойчивость жидкости** наблюдается при  $N^2 > 0, \frac{d\rho}{dz} > 0$ . Элемент совершает колебания с частотой  $N$ .
- 2) **Неустойчивость жидкости** наблюдается при  $N^2 < 0$ . Элемент падает вниз или стремится всплыть.

## 2.9. Уравнение Бернулли

Получим альтернативную запись уравнения Эйлера в форме Громэко-Лэмба

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} \\ \vec{g} &= g \nabla z\end{aligned}$$

Ось  $z$  направлена вниз. Учтем два равенства из курсов векторного анализа и термодинамики (для равновесных обратимых изобарических процессов).

$$\begin{aligned}(\vec{v} \nabla) \vec{v} &= \frac{1}{2} \text{grad} (v^2) - [\vec{v}, [\nabla, \vec{v}]] \\ \frac{\nabla P}{\rho} &= \nabla W \\ \frac{\nabla P}{\rho} &= \nabla \frac{P}{\rho}, \quad \rho = \text{const}\end{aligned}$$

Получаем уравнение Эйлера в форме Громэко-Лэмба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) = [\vec{v}, [\nabla, \vec{v}]]$$

Рассмотрим частные случаи, получающиеся из уравнения при некоторых условиях.

### 2.9.1 Случай стационарного движения

В стационарном случае ( $\vec{v} = \text{const}$ ) можно выделить два подслучая. Рассмотрим подробнее.

**Безвихревое движение.** Движение потенциальное,  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Тогда из уравнения Громэко-Лэмба имеем

$$\begin{aligned}\text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + W - gz \right) &= 0 \\ \frac{v^2}{2} + W - gz &= \text{const}\end{aligned}$$

Заметьте, константа в этом случае *сохраняется во всем пространстве*. Если жидкость несжимаема и однородна, то:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - gz = \text{const}$$

Это уравнение Бернулли для стационарного **потенциального** движения однородной несжимаемой жидкости.

**Вихревое движение.** Теперь  $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ .

Введем понятие линии тока. **Линия тока** - это линия, касательные к которой в данный момент времени и в каждой точке совпадают с вектором скорости  $v$ . Линии тока определяются системой дифференциальных уравнений.

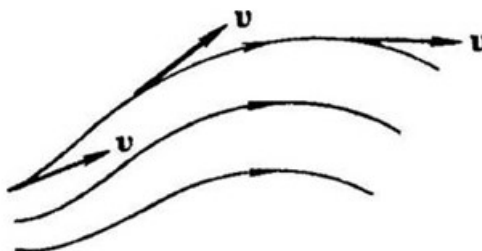


Рис. 6. Линии тока

$$\frac{dx}{dv_x} = \frac{dy}{dv_y} = \frac{dz}{dv_z}$$

Умножим уравнение Эйлера на вектор скорости, то есть спроектируем на линии тока:

$$\begin{aligned} \vec{v}[\vec{v}, [\nabla, \vec{v}]] &= 0 \\ \vec{v} &\perp [\vec{v}, [\nabla, \vec{v}]] \end{aligned}$$

Используя определение линии тока

$$\vec{v} \nabla(\dots) = \frac{d}{dl}(\dots) = 0$$

получаем тот же закон сохранения

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const}$$



Но здесь константа сохраняется только вдоль линии тока, и *для разных линий тока константы разные!*

### 2.9.2 Случай нестационарного вихревого движения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &\neq 0 \\ \text{rot } v &= 0\end{aligned}$$

В силу потенциальности  $\vec{v} = \nabla \varphi$  из уравнения Громэко-Лэмба получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const}$$

Этот интеграл носит название **интеграла Коши**.

Лучевая трубка тока, трубка образованная множеством линий тока, проходящей через некоторый замкнутый контур.

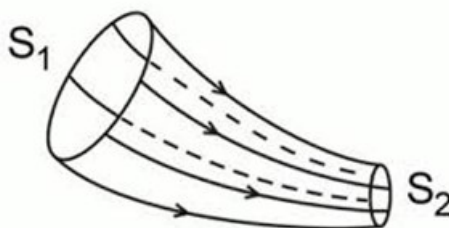


Рис. 7. Лучевая трубка

### 2.9.3 Энергетический смысл уравнения Бернулли

Закон Бернулли это ничто иное как следствие законов сохранения массы и энергии вдоль некоторой лучевой трубки через 2 сечения входящее  $S_1$  и выходящее  $S_2$ .

Закон сохранения массы: **сколько втекает, столько и вытекает**.

$$m_i = \rho_i S_i v_i \Delta t, \quad i = 1, 2$$

Изменение энергии за счет вытекания и работы силы тяжести равно работе

внешних сил:

$$A_i = p_i S_i v_i \Delta t$$

$$E_i = \frac{v_i^2}{2} + u_i + \varepsilon_i$$

$$A_1 - A_2 = \Delta m (E_2 - E_1)$$

Здесь  $u$  и  $\varepsilon$  - потенциальная и внутренняя энергия. Рассмотрим случай несжимаемой жидкости. В этом случае внутренняя энергия не меняется, а  $u = -gz$ . В результате получим уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет множество приложений.

**Трубка Пито.** Знаем сечения, измеряем давления – находим скорости

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

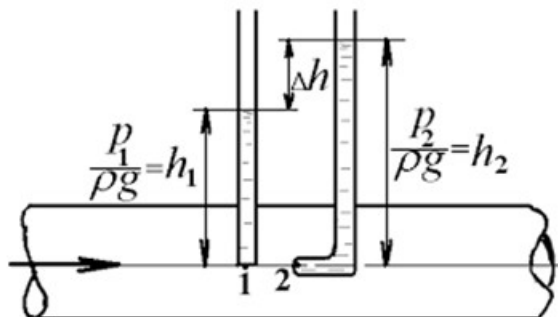


Рис. 8. Трубка Пито

**Обтекание двух цилиндров.** Сближение линий тока, увеличение скорости. Возникает притяжение цилиндров.

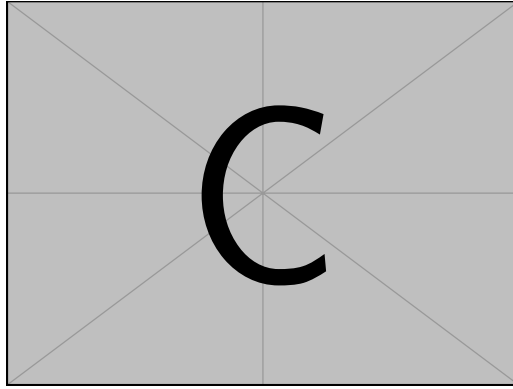


Рис. 9. схематический вид цилиндров

**Вытекание жидкости из сосуда.**

$$\sigma \ll S$$

$$v = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

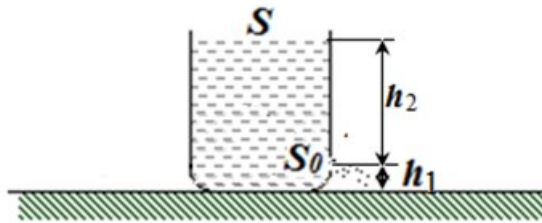


Рис. 10. Схематичный вид вытекающей жидкости

**Задача Прандтля.** Эта задача описывает косое падение плоской струи на поверхность и так называемы кумулятивные снаряды. Наряду с уравнением Бернулли нужно использовать закон сохранения импульса.

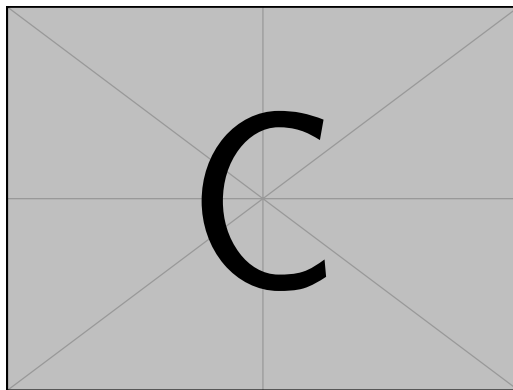


Рис. 11. Наклонное падение струи

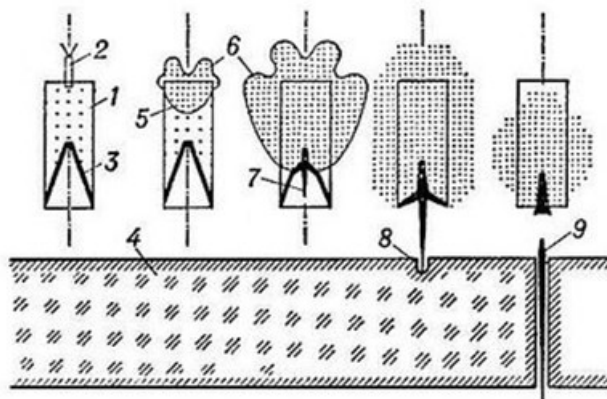


Рис. 12. Кумулятивные снаряды

## 2.10. Теорема Томсона. Потенциальные и вихревые движения жидкости

Введём понятие циркуляции скорости – интеграл, взятый вдоль некоторого замкнутого контура

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} d\vec{r}$$

Докажем теорему о сохранении циркуляции скорости – теорему Томсона (лорда Кельвина): **Циркуляция скорости вдоль замкнутого контура, перемещающегося в идеальной жидкости, остается постоянной.** Вы-

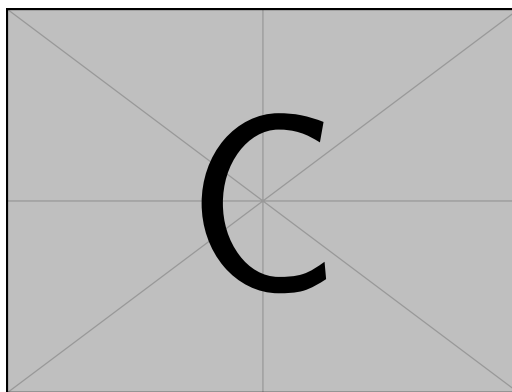


Рис. 13. два контура: начальный и смещенный

берем замкнутый контур, состоящий из фиксированных частиц («жидкий» контур) и перемещающийся вместе с ними. Найдем полную производную по времени от этого контура. Происходит изменение как скорости, так и изме-

нение контура во времени

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} d\vec{r} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \oint_L \vec{v} d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Используем определение скорости и уравнение Эйлера

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \vec{f}$$

Пусть внешняя сила потенциальна, а процесс адиабатический

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -\nabla u \\ \frac{\nabla p}{\rho} &= \nabla W \end{aligned}$$

Здесь  $W$  энтальпия. Учтем, что  $(\nabla\varphi d\vec{r}) = d\varphi$  и окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_L d\left(\frac{v^2}{2} - W - u\right) = 0 \\ \Gamma &= const \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Используем теорему Стокса

$$\oint_L \vec{v} d\vec{r} = \int_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{v} dS$$

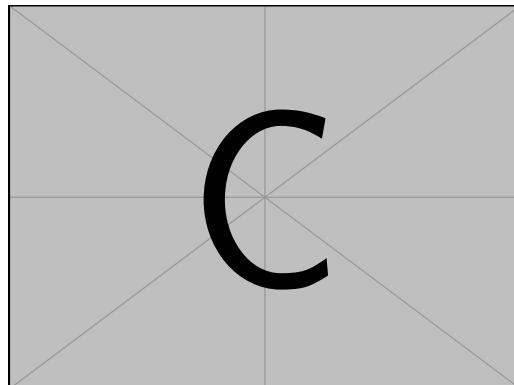


Рис. 14. Контур и поверхность, натянутая на этот контур

Для потенциальных течений  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ ,  $\Gamma = 0$ . Циркуляция скорости по **односвязанному контуру** в потенциальном течении идеальной жидкости

равна нулю.

**Следствие 2.** Поток вихря через поверхность, натянутую на *односвязанный контур* в потенциальном течении идеальной жидкости величина постоянная:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} d\vec{r} = \int_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{v} dS = \text{const}$$

**Следствие 3.** В потенциальном течении не может быть *замкнутых линий тока* (иначе, взяв ее в качестве контура мы получим, что циркуляция вдоль данного контура не равна нулю).

**Следствие 4.** В однородной несжимаемой жидкости можно исключить из рассмотрения уравнений движения давление. Запишем уравнение Эйлера в форме Громэко-Лэмба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v}] = \nabla(W + u)$$

Возьмем от него ротор и учтем, что ротор от градиента равен нулю ( $\operatorname{rot} \nabla \vec{v} = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{v} &= \operatorname{rot}[\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v}] \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

Получили полное описание поля скорости с помощью одного уравнения.

**Основные выводы из теоремы Томсона.** Если в какой-то точке линии тока завихренность отсутствует, то она отсутствует и вдоль этой линии.

На первый взгляд отсюда следует:

**Первый вывод.** Стационарное обтекание любого тела набегающим из бесконечности потоком должно быть потенциальным:  $\vec{v} = \text{const}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$

**Второй вывод.** Если движение жидкости потенциально в некоторый момент времени, то оно будет потенциальным и в дальнейшем. В частности:

Потенциальным должно быть всякое движение, при котором в начальный момент жидкость покоилась. В реальности, однако, это утверждение имеет ограниченную область применимости. Дело в том, что приведенное выше утверждение о

сохранении ротора скорости вдоль линии тока неприменимо для линий проходящих вдоль поверхности твердого тела. Около стенки *нельзя провести односвязный замкнутый контур*.

Уравнения движения идеальной жидкости допускают решения в которых на поверхности твердого тела, обтекаемого жидкостью твердого тела происходит «отрыв» струи: линии тока, следовавшие вдоль поверхности, в некотором месте отрываются от него, уходя в глубь жидкости. Возникает застойная область и на границе течение становится непотенциальным

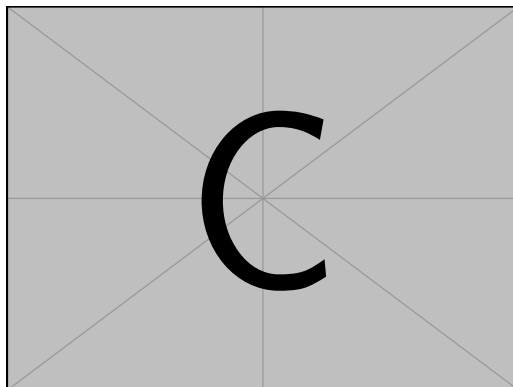


Рис. 15. Обтекание тела с застойными зонами

Возникает поверхность «тангенциального» разрыва. Скорость терпит разрыв непрерывности.

При учете таких разрывных решений решение уравнений идеальной жидкости неоднозначно: наряду с непрерывным решением появляется бесконечное множество разрывных решений. При этом разрывные решения не имеют физического смысла: так как тангенциальные разрывы **абсолютно неустойчивы**, в результате чего движение жидкости становится **турбулентным**.

Реальное течение безусловно однозначно. Всякая жидкость обладает вязкостью. Малая вязкость практически не проявляется во всем пространстве, но она будет играть определяющую роль в пристеночной области (пограничный слой).

Тем не менее, в ряде случаев это достаточно хорошее приближение. Например, *хорошо обтекаемые тела*: самолет автомобиль, корабль – движение жидкости от потенциального отличаются только в области «пограничного» слоя и «следа» позади тела.

Кроме того, это приближение работает и в случае *малых нестационарных колебаний*. Рассмотрим его подробнее.

### 2.10.1 Нестационарные малые колебания

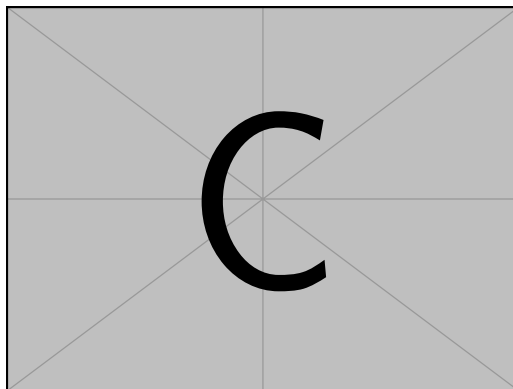


Рис. 16. Сфера размером  $l$  и сфера, смещенная на  $a$ .

$l$  - линейный размер тела,  $a$  - характерная амплитуда колебаний,  $v$  - скорость колеблющегося тела. Если  $l \gg a$ , то движение жидкости вокруг тела потенциально. Оценим порядок величины различных членов в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla W$$

Характерные масштабы изменения скорости  $v$  порядка  $l$ , а изменения скорости во времени определяются частотой колебаний. Оценка членов в уравнении Эйлера

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| / |(\vec{v} \nabla) \vec{v}| \propto \frac{u^2}{a} / \frac{l}{u^2} \propto \frac{l}{a} \gg 1$$

То есть уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla W$$

Взяв ротор, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = 0, \quad \text{rot } \vec{v} = \text{const} = 0$$

Так как при колебательном движении среднее значение по периоду равно нулю.

Таким образом нестационарные **малые колебания потенциальны**.



## 2.11. Потенциальные течения несжимаемой жидкости. Парадокс Даламбера. Присоединенная масса.

В идеальной баротропной жидкости в поле потенциальных сил вихри не исчезают и не возникают. Если в начальный момент течение было потенциально, то оно будет потенциальным всегда. В ряде случаев это достаточно хорошее приближение, а уравнения гидродинамики существенно упрощаются. Уравнение непрерывности несжимаемой жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

Поле скорости несжимаемой жидкости соленоидально. Уравнение Эйлера для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \vec{g}, \quad \vec{g} = -g \nabla z$$

Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot}[\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v}]$$

то есть движение потенциально. Если сначала движение было потенциально, то и в дальнейшем оно будет потенциальным. Поэтому можно ввести потенциал поля скорости

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= 0, \quad \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \Delta \varphi = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, описание потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0, \quad \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

Для решения этого уравнения также необходимы граничные условия.

**Условие на протекание:** нормальная компонента скорости жидкости на поверхности тела должна совпадать с проекцией  $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n$  скорости самого тела на эту нормаль. **Второе условие:** обычно используют значение потенциала на бесконечности.

Возникает вопрос: **как найти давление?** Ответ: из уравнения Бернулли.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u = \text{const}$$

$$p = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + u \right) + \text{const}$$

Константа может зависеть от времени. Для стационарного течения:

$$p = - \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + \text{const}$$

Рассмотрим несколько частных решений уравнения Лапласа (вспомним электростатику)

- Пример 1. Сдвиговый поток (поле плоского конденсатора), все частицы жидкости двигаются с постоянной скоростью

=====Здесь остановился Максим, требуется доделать эту лекцию. Далее Федор, чисто запись лекций в режиме реального времени=====

## 2.12. Гидродинамика плоских течений

### 2.12.1 Аналитические функции

У нас есть некоторое комплексное число

$$z = x + iy \quad \leftrightarrow \quad F(z) = \alpha + i\beta$$

Функция аналитическая, если независимо от направления стремления  $\Delta z$  к нулю существует предел:

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z}$$

Пример:

$$F'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x + \Delta x, y) + i\beta(x + \Delta x, y) - \alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Второй пример:

$$\Delta z = i\Delta y$$

$$F'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, y + \Delta y) + i\beta(x, y + \Delta y) - \alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{i\Delta y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

Итак, отсюда условие аналитичности

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Раньше мы вводили потенциал и функцию тока следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Если взять комплексную функцию  $F(z) = \varphi + i\Psi$  (действительная часть потенциал, мнимая – функция тока), то это и будет т.н. комплексный потенциал.

Мы помним, что

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0, \quad \varphi = \operatorname{Re}\{F\}, \quad \Psi = \operatorname{Im}\{F\}$$

$$v = |F'_z|, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Конкретно можно подставлять одну из двух формул для фи и пси.

### 2.12.2 Конформное отображение

Пусть у нас есть функция

$$z = f(\xi)$$

где  $z, \xi$  – комплексные. Соответственно

$$F(z) = F(f(\xi))$$

Задачу о цилиндре мы будем решать с помощью конформных отображений: крыло самолета в сечении конформными преобразованиями связано с окружностью. Имея решение об обтекании цилиндра, сможем решить задачу об обтекании крыла самолета. А здесь рассмотрим несколько примеров.

**Однородный поступательный поток.**  $F(z) = ax + i \cdot ay, \varphi = ax, \Psi = ay$ .  
Что такое линии тока? Это линии  $\Psi = \text{const}$ . Скорость  $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = a$

Задается вопрос на экзамене: у вас есть плоский поток, и вот такая линия по косинусу:

$$Q = \int_A^B \vec{v} \vec{n} dl = \Psi(B) - \Psi(A) = a(y_b - y_a)$$

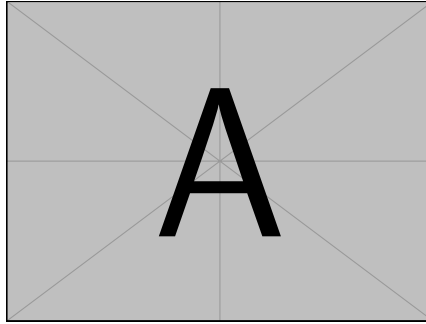


Рис. 17. Однородный поступательный поток

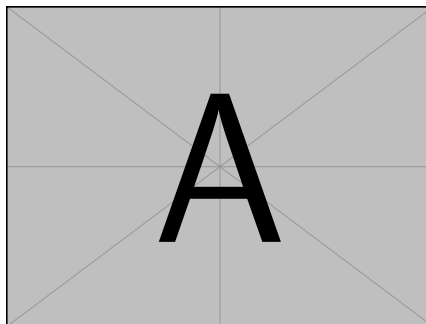


Рис. 18. Косинусоидальный профиль

**Сопряженное течение.**  $F(z) = iF(z) = ia - a$ :

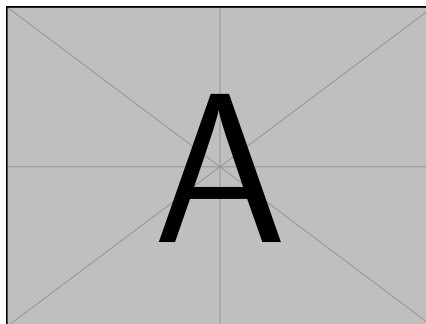


Рис. 19. Сопряженное течение

Дз. Что будут представлять из себя линии тока, если  $\alpha = 1, \beta = 1$ ? Нужно найти угол наклона.

**Сток-исток-вихрь.** У нас в предыдущем разделе было поле конденсатора, поле точечного заряда. В двумерном случае будет потенциал нити.

$$F(z) = m \ln(z)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$F(z) = m \ln(re^{i\theta}) = m \ln(r) + mi\theta$$

$$\varphi = m \ln r, \quad \Psi = m\theta, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{m}{r}$$

Линии тока  $\Psi = \text{const}$  :

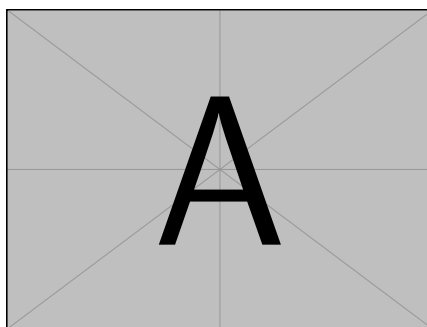


Рис. 20. Линии тока

Посчитаем поток.

$$Q = \int_A^B \vec{v} \vec{n} dl = \Psi(B) - \Psi(A) = m(\theta_b - \theta_a)$$

Давайте честно посчитаем интеграл:

$$Q = \int_A^B \vec{v}_r \vec{r} dl = \dots$$

Делаем следующую вещь:

Проблема была в том, что контур охватывал особую точку  $r = 0$ , И ВСЕ ЭТО НЕ РАБОТАЕТ

**Сопряженное течение.**

$$F(z) = im \ln z = im \ln re^{i\theta} = im \ln r - m\theta$$

$$\varphi = m\theta, \quad \Psi = m \ln r$$

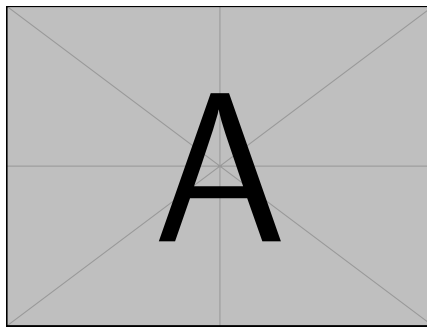
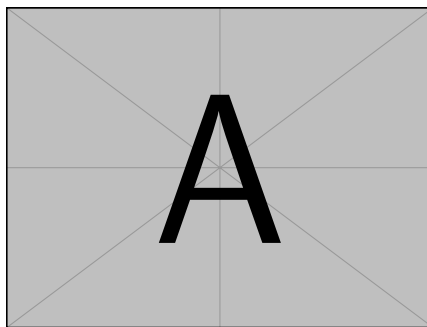


Рис. 21. Контур, охватывающий особую точку 0

Тогда

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{m}{r}$$

Рис. 22. Линии  $\Psi = \text{const}$ 

Циркуляция:

$$\Gamma = \int \vec{v} d\vec{l} = \int \frac{m}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi m = \text{const}.$$

Течение у нас потенциальное. А у потенциального течения циркуляция ноль! Но опять, мы же захватили особую точку в середине, и получили фигню.

Самостоятельно сделать случай  $a = \alpha + i\beta$ .

$m$  мнимое – вихрь, действительное – сток/исток, а нужно сделать для случая  $m$  комплексное.

$\alpha > 0$  исток (и вихрь),  $\alpha < 0$  сток (и вихрь). Вихрь из-за беты.

Подставить и решить, как мы делали ранее:

$$(\alpha + i\beta) \ln r e^{i\theta} = \dots$$

Вообще задача качественно решается в уме. Сходящаяся или расходящаяся спираль.

**Гидродинамический диполь.**

$$F(z) = -\frac{P}{z} = -\frac{P}{x+iy} = \varphi + i\Psi$$

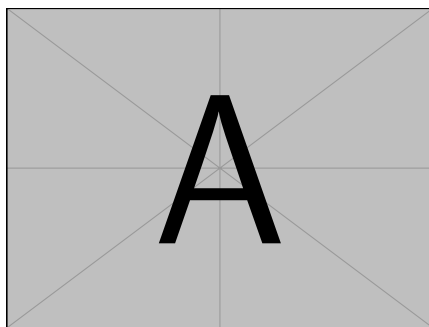


Рис. 23. Картинка диполя

Найдите  $\varphi$  и  $\Psi$ :

$$\varphi = -\frac{Px}{x^2 + y^2}, \quad \Psi = \frac{Py}{x^2 + y^2}$$

Линии тока  $x^2 + y^2 = c \cdot y$  – смещенные окружности.

$$x^2 + y^2 - 2\frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 \quad x^2 + (y - c/2)^2 = r^2$$

Отсюда  $r = \frac{c}{2}$ , центр окружности в  $(0, c/2)$ . Теперь действительно:

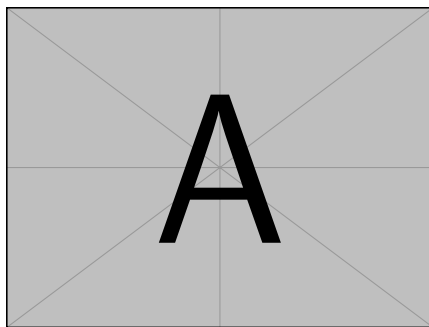


Рис. 24. Еще диполь

Надо вспомнить, что  $\varphi = -\frac{Px}{x^2+y^2}$ , а  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Ну и надо найти скорость, и надо немножко быть ленивым. Чтобы не брать производную от этой функции. Можно взять игрек 0, да и посчитать производную в точке. Ведь линия тока знак везде имеет одинаковый.

**Циркуляционное обтекание кругового цилиндра.** У нас имеется

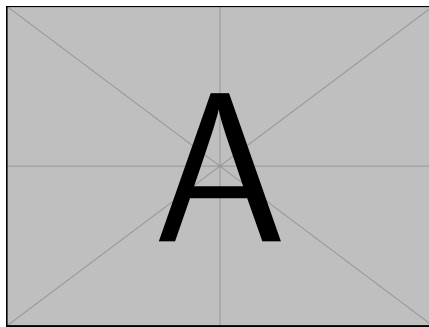


Рис. 25. Поток, набегающий на цилиндр

$$v_r = 0, r = R, \quad v + x = -v_0, r \rightarrow \infty.$$

Все просто?

$$F = F_1 + F_2$$

$$F_1 = -v_0 z - \text{просто набегает поток} \quad F_2 = -\frac{v_0}{z} - \frac{A}{z} = -v_0 r e^{i\theta} - \frac{A}{r} e^{-i\theta}$$

Считаем  $v_r$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\left(v_0 - \frac{A}{r}\right) \cos \theta$$

здесь при  $r = R$   $v_r = 0$ , и мы нашли константу  $A = v_0 R^2$ . Тогда

$$F = -v_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right).$$

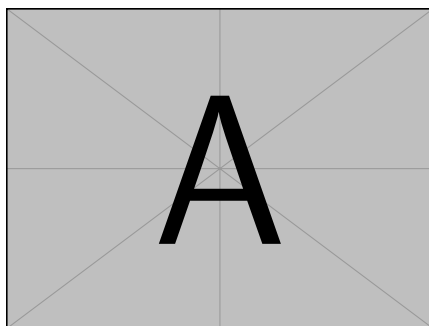


Рис. 26. Обтекание потоком цилиндра

$$F = -v_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z$$

Что такое здесь гамма, во-первых? Посмотрим немножко назад, мы считали циркуляцию по контуру.  $\Gamma = m2\pi$  Вопрос. Граничным условиям удовлетворяет? Мы конструируем решение (в силу линейности уравнения Лапласа), поэтому надо проверять. Проверяем граничные условия. Первые два слага-



емых только что проверили. А добавили еще вот такое круговое течение. Добавили условие, что нормальная компонента не изменилась.

Ну давайте найдем, что у нас получится.

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -v_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$v_\theta \Big|_{r=R} = 2v_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Смотрим на поверхность. Что на ней делается. На ней первое слагаемое: у нас обтекает поток, почему скорость в два раза больше? Понятно почему, понятно почему. А вот знак у меня правильный или неправильный? Но это не суть, важно что должен быть минус, проверьте на экзамене, ответ должен быть правильный, а не то что я написал.

Смотрите, цилиндр:

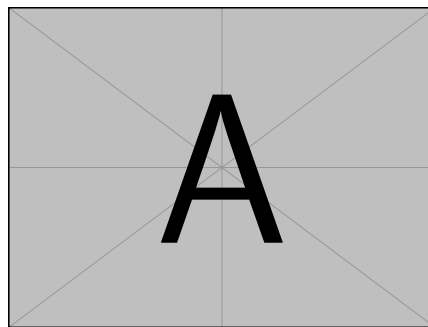


Рис. 27. Скорости при обтекании

Если мы что-то перекрыли, поток на поверхности больше. Плюс еще добавилось круговое течение. Что есть? Есть поток, это вот такая картинка, это одно решение:

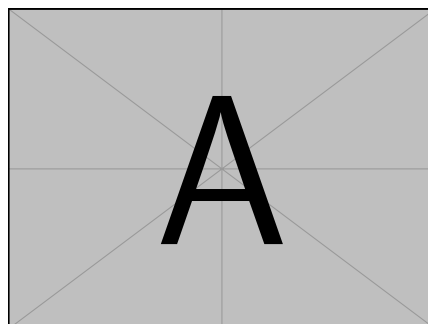


Рис. 28. Обтекание

другое:

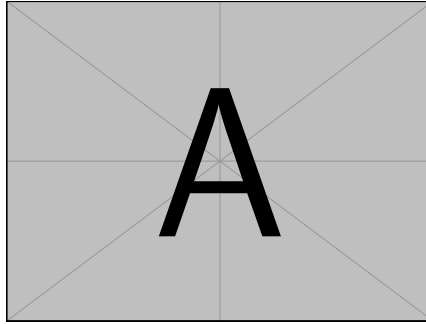


Рис. 29. Вращение вокруг цилиндра по кругу

Следующая картиночка вот какая-то такая

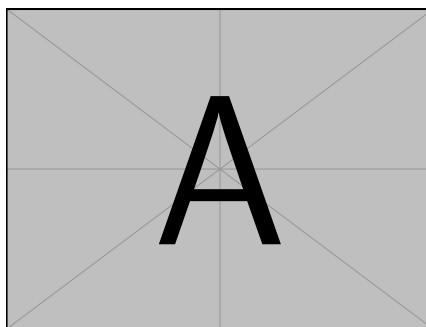


Рис. 30. Критическая траектория

Критическое значение

$$\Gamma^* = 4\Pi v_0 R.$$

Если гамма меньше критического, то критическая точка на поверхности цилиндра, если больше, то вне области цилиндра. Идет какая-то сепаратриса:

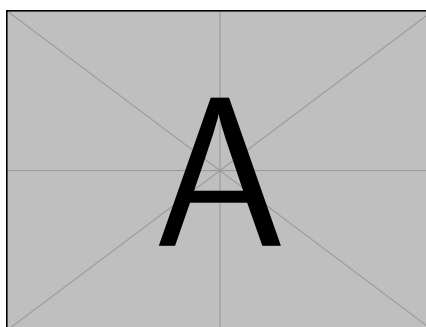


Рис. 31. Сепаратриса

Вопрос. Переходим к формуле Жуковского. Что будет делаться с цилиндром? Появится сила или нет, действующая на цилиндр? Появится какая-нибудь сила или нет? Чем надо воспользоваться:

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_s + \frac{\rho v_\theta^2}{2}$$

Отсюда

$$p_s = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v_\theta^2)$$

Ну и получается

$$p_s = p_0 + \frac{1}{2}\rho\left(v_0^2 - 4v_0^2 \sin^2 \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2 - \frac{2\Gamma v_0 \sin \theta}{\pi R}\right)$$

Тогда

$$F = - \int p \vec{n} d\vec{l}.$$

По горизонтали силы никакой нет. Давление больше где скорость меньше, значит оно больше внизу, значит, возникнет подъемная сила. (скорость больше, сложение скорости набегающего потока и кругового).

Чтобы по вертикали посчитать силу, нужно пять слагаемых интегрировать. Не ноль только последнее слагаемое:

$$F_x = - \int p n_x dl = \rho \Gamma v_0.$$

Это есть формула Жуковского. Интеграл тривиален. Сила пропорциональна плотности, скорости и завихренности.

Для упражнения вам такой вопрос: у меня есть цилиндр, скатывающийся по наклонной плоскости. (картинка). Одна траектория в вакууме, другая в воздухе. Объяснить какая дальше.

Следующий вопрос. ЧМ по футболу, угловой, мячик, мы ударяем по мячику. Объяснить как бить для сухого листа.

### 2.12.3 Вихревые движения в идеальной жидкости

До сих пор мы занимались потенциальными течениями: сток исток, двумерное движение и т.д.

Вот введем такую величину (вихрь, завихренность):

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$$

Ранее мы вводили

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = \int_S \vec{\Omega} \vec{n} dS$$

Циркуляция скорости по замкнутому контуру равна потоку завихренности.

Теорема Томсона: циркуляция скорости по замкнутому контуру, двигаю-

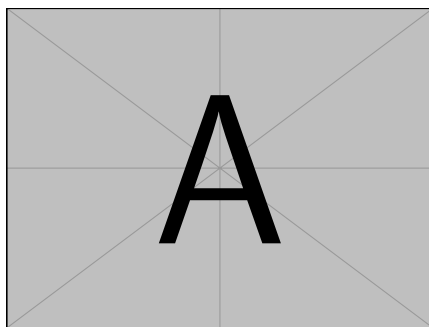


Рис. 32.

щемся в идеальной жидкости, постоянна.

Сохраняется постоянным и поток вихря через поверхность, натянутую на контур,  $\Gamma = \text{const}$ .

Определение: *Вихревая линия - линия, касательная к которой в каждой точке коллинеарна вектору вихря.*

Понятие вихревой трубки. Берем некий первоначальный контур  $S$ , вдоль каждой точки границы проводим вихревую линию - это будет вихревая трубка:

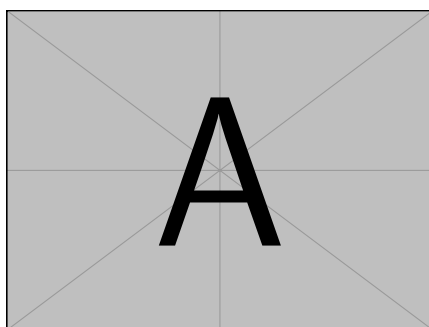


Рис. 33.

Теорема Лагранжа. *Элементы идеальной жидкости, лишенные вихрей в начальный момент времени, будут лишены их в дальнейшем.*

Вихри в идеальной жидкости возникнуть и исчезнуть не могут. Чтобы он появился, необходимо взаимодействие с поверхностью, что приводит к неодносвязности контура (мы к этому вернемся), а также непотенциальность сил. Пример непотенциальной силы: заряженная жидкость в магнитном поле.

Посмотрим теорему Лагранжа более аккуратно.

На поверхности трубки разместим мааленький контур  $S_1$ . Сосчитаем поток через этот маленький контур: очевидно, он равен нулю

$$\Gamma_1 = \int \vec{\Omega} \vec{n} dS_1 = 0$$

Теперь, если он равен нулю в некий начальный момент, то и в любой

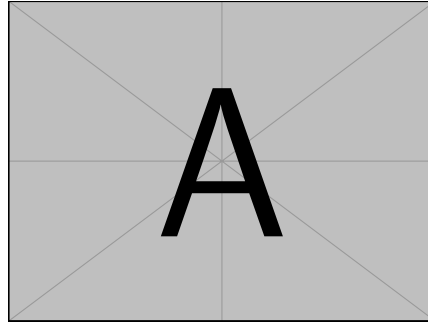


Рис. 34.

момент этот контур будет находится на поверхности этой трубки: так как контур произвольный, представим мысленно трехмерную картинку, что мы берем за кончик контур и немного оттягиваем от трубки. Тогда сразу поток сразу станет не равен нулю. Поскольку контур произвольный, то это означает, что любое малое шевеление с уходом от поверхности приводит к появлению потока. Это доказательство от противного. Это была первая теорема Гельмгольца, о том, что любая линия состоит из одних и тех же элементов жидкости.

Теорема Гельмгольца: *поток вектора вихря через поперечное сечение лучевой трубки остается постоянным.*

Боковая поверхность лучевой трубки  $S_b$

$$\int \vec{\Omega} \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{\Omega} \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \vec{n} dS + \int_{S_b} \vec{\Omega} \vec{n} dS$$

Очевидно, поток через боковую поверхность равен нулю. Используем формулу Остроградского-Гаусса: интеграл от омеги по поверхности равен интегралу дивергенции омеги по дв:

$$\int \vec{\Omega} \vec{n} dS = \iiint \operatorname{div} \vec{\Omega} dV = 0$$

Получится

$$\int_{S_1} \vec{\Omega} \vec{n} dS = \int_{S_2} \vec{\Omega} \vec{n} dS$$

Значит, поток постоянный.

Если  $\Omega$  можно считать константой,  $S$  мало, то  $\Omega S$  – интенсивность вихревой трубки – ?

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}, \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \tau} = \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{\Omega}]$$

**Пример 1: плоское течение.**  $\vec{v} = (v_x(y), 0, 0)$ . Дивергенция очевидно рав-

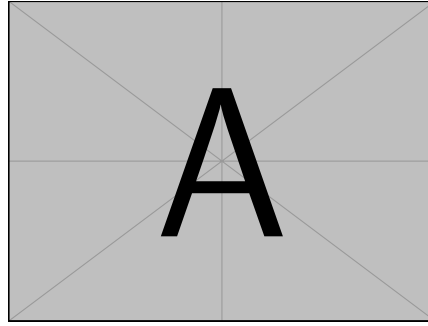


Рис. 35. Плоское течение

на нулю:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Сосчитаем завихренность  $\vec{\Omega}$ .

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Итак, завихренность есть, но она направлена либо на нас, либо от нас по рисунку.

Является ли данное течение стационарным? Когда у нас была гидростатика, мы находили условие равновесия, а потом проверили, будет ли это состояние стационарным. Проверка третьим уравнением, будет.

а)  $v_x = by$      $\vec{\Omega} = -b\vec{k}$  б)

$$v_x(y) = \begin{cases} v_0, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Это ступенчатая функция:

$$\vec{\Omega} = \vec{k} \cdot v_0 \delta(y)$$

Это так называемая вихревая пелена. (рис)

Сосчитаем интеграл тупо по контуру:

$$\Gamma = lv_0 + 0 + 0 + 0$$

С другой стороны,

$$\Gamma = \int \vec{\Omega} \vec{n} dS = lv_0$$

Что здесь немного непривычного? Мы привыкли считать, что завихренность — это когда что-то крутится. А у нас течение плоско-параллельное, но скорости у разных сечений разные: и у нас движение все равно вихревое.

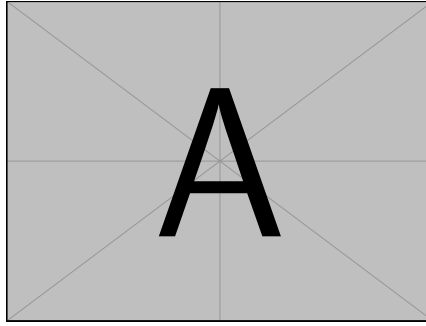


Рис. 36. Иллюстрация

**Пример 1: вращение жидкого цилиндра.**

$$v_{\theta}(r) = \begin{cases} \omega r, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Здесь можно обойтись формулой попроще. Вектор Омеги направлен по оси  $z$ , и получается простая формула:

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\Omega} = \vec{I}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_{\theta} = \vec{I}_z 2\omega.$$

(график линейный в тета от эр)  $r > 0$ , течение потенциально:  $\vec{\Omega} = 0$ . Считаем, что цилиндр крутится, а течение вокруг него потенциальное.

$$\frac{\partial}{\partial r} r v_{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\theta} = \frac{A}{r}$$

Решаем

$$\Gamma = \int_L \vec{v} d\vec{l} = 2\pi R v_{\theta} = 2\pi A$$

С другой стороны, гамма это поток вихря:

$$\Gamma = \iint \text{rot } \vec{v} \vec{n} dS = \iint \Omega_n dS = 2\omega \pi R^2$$

Из этих формул находим

$$v_{\theta} = \frac{\omega R^2}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Ради чего мы все это делали? Надо найти давление:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2}$$

Используем уравнение Бернулли, и ищем ошибку, которая здесь была допу-

щена. По формуле получилось на бесконечности и в центре скорость ноль, и давление в центре нуля и на бесконечности одно и тоже. А из опыта известно, что в центре смерча, например, давление пониженное.

Подсказка: использовали уравнение Бернулли, а оно сформулировано в разных случаях: 1) для стационарного потенциального течения во всем пространстве, 2) вдоль лучевой трубки, 3) нестационарное

При  $r > R$  можно пользоваться, течение потенциальное. А внутри-то там есть вихрь, течение не потенциально, и формулой Бернулли пользоваться нельзя.

Непонятно как получается такая формула:

$$r > R : p = p_0 - \frac{\rho \omega^2 R^4}{2r^2}$$

Внутри пользуемся уравнением Эйлера. Как мы его выводили: масса умножить на ускорение равно силе.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

У нас  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ . Нужно знать  $\vec{v} \nabla \vec{v}$  в сферической системе координат. Есть два способа: первый - посмотреть, второй - смотрим на картиночку: частичка движется по окружности, радиус у неё известен  $R$ , скорость известна  $\omega r$ . Ускорение центростремительное  $a_r = -\frac{v^2}{R} = -\omega^2 r$ . Тогда можем записать:

$$-\omega^2 r = -\frac{dp}{dr} \frac{1}{\rho}?$$

$$p(r) = \begin{cases} p_0 - \frac{\rho \omega^2 R^4}{2r^2} & , \quad r > R \\ p_0 - \frac{\rho \omega^2 R^4}{2r^2} + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}, & r < R \end{cases}$$

Получается, что давление в центре маленькое. Чем больше радиус вихря, тем меньше давление.

Если кто-то хочет подумать. Вихрь имеет такую структуру. Попробуйте показать, что в нем есть подъемная сила.

Займемся следующим приближением.



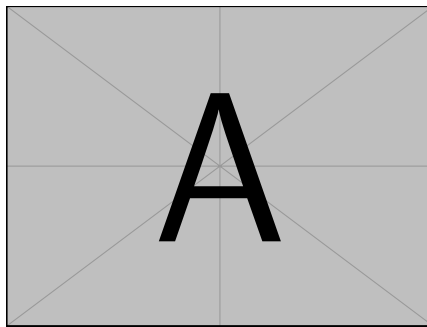


Рис. 37. Иллюстрация

#### 2.12.4 Точечные вихри

Устремляем сечение нашей вихревой трубки к нулю так:

$$R \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad \Gamma = 2\pi\omega R^2 = \omega A, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Пусть у нас есть много вихрей: Как они между собой будут взаимодей-

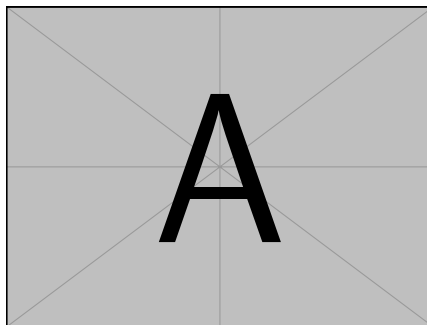


Рис. 38. Много вихрей

ствовать? У нас есть уравнение Лапласа, которое работает всюду, кроме вихревых линий. Скорость в данной точке равняется суперпозиции скорости от всех вихрей. Дальше, по теореме Гельмгольца, завихренность переносится частицами жидкости. То есть, скорость точечного вихря  $\Gamma_i$  равняется скорости жидкости в данной точке, создаваемой всеми остальными вихрями.

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{v}_k(\vec{r}_i)$$

$$r = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}, \quad \sin \theta = \frac{y_i - y_k}{r}, \quad v_\theta = \frac{\Gamma_k}{2\pi r_{ik}}$$

Первое:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq i} \frac{\Gamma_k (y_i - y_k)}{r_{ik}^2}$$

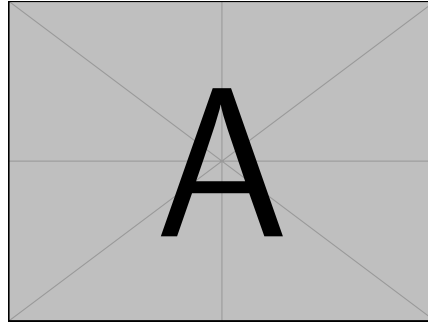


Рис. 39. Координаты вихря

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq i} \frac{\Gamma_k (x_i - x_k)}{r_{ik}^2}$$

Какие интегралы есть у этой системы?

$$\sum \Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = - \sum \sum \frac{\Gamma_k \Gamma_i (y_i - y_k)}{r_{ik}^2} = 0$$

Это значит, что

$$\sum x_i \Gamma_i = \text{const} = \bar{x} \sum \Gamma_i, \quad \text{где} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i \Gamma_i}{\sum \Gamma_i}$$

Тривиально, что то же самое можно записать по координате  $y$ . Если  $n > 2$ , других интегралов нету.

Если есть желающие, попробуйте составить программу, которая бы решала эту систему уравнений. Мышкой ставить точку, какая интенсивность гаммы  $i$  вводится, мышкой вторая точка ставится интенсивность, и т.д. каждая точка своим цветом, старт, картинки крутятся и вертятся.

Если есть два вихря противоположных знаков, то они уходят на бесконечность: нужно динамическое изменение области просмотра.

Рассмотрим более простую задачу. Всего два вихря:  $r_1$  и  $r_2$ .

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\Gamma_2 (y_1 - y_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\Gamma_1 (y_1 - y_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\Gamma_2 (x_1 - x_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{\Gamma_1 (x_1 - x_2)}{2\pi r^2}, \quad r^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Домножаем, складываем:

$$\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 = \text{const}, \quad \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = \text{const}$$

Мы нашли два интеграла: центр тяжести не изменяется. Ну, давайте попробуем еще найти интегралы. Если мы найдем еще два интеграла, то задачу сделаем. Подсказка: из первого уравнения вычесть второе.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1 - x_2) &= -\frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{r}, \\ \frac{d}{dt}(y_1 - y_2) &= \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{r} \end{aligned}$$

Домножаем, складываем:

$$(x_1 - x_2) \frac{dx_1 - x_2}{dt} + (y_1 - y_2) \frac{dy_1 - y_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x_1 - x_2)^2}{dt} + \frac{d(y_1 - y_2)^2}{dt} = 0$$

Отсюда еще один интеграл

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r^2 = \text{const}$$

Вихри вращаются вокруг неподвижного центра тяжести, с сохранением расстояния между ними. Какие при этом траектории движения? Чтобы найти траекторию, из первого уравнения находим  $x_1$ , из второго  $y_2$ , подставляем в это уравнение и получим уравнение окружности.

а) Что же у нас теперь будет? Посмотрим частный случай, когда  $\Gamma_2 = 0$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma$ . (рис) Движение по окружности  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ , центр тяжести в точке ненулевого вихря.

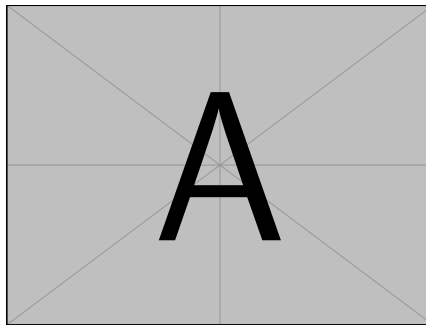


Рис. 40.

б) Два вихря  $\Gamma, \Gamma$  – центр тяжести посередине, расстояние между вихрями  $l$ ,  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi l}$ .

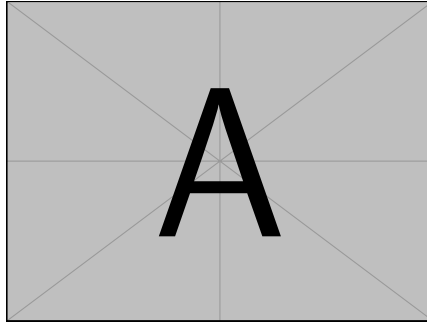


Рис. 41.

в) Два вихря  $\Gamma, -\Gamma$ . Центр тяжести будет находится на бесконечности (нетрудно посчитать).  $v = \frac{\Gamma}{2\pi l}$ . Два таких вихря двигаются с постоянной скоростью.

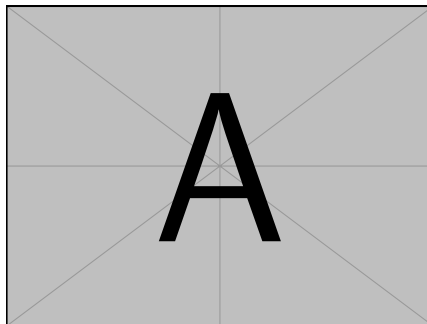


Рис. 42.

г) Гамма над плоскостью. (рис). Метод изображений даст, что вихри будут двигаться параллельно плоскости.

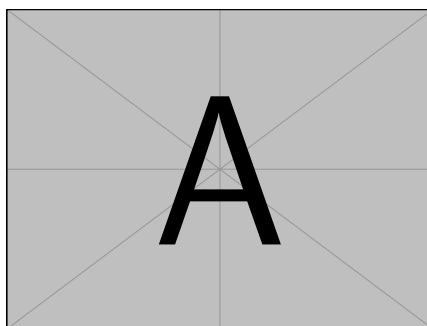


Рис. 43.

д) Вихрь в угле - как-то параллельно?

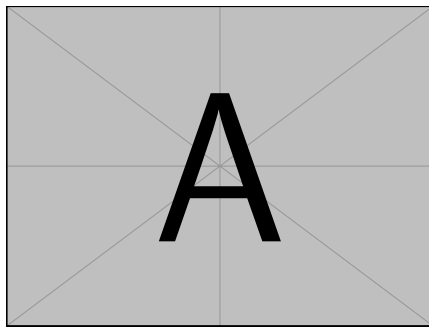


Рис. 44.

На прошлой лекции для совокупности вихрей:

$$\frac{d\vec{\Gamma}_i}{dt} = \sum v_k(\Gamma_i), \quad v_k = \frac{\Gamma_k}{2\pi r_{ik}}$$

### 2.13. Поверхностные гравитационные волны

К таким волнам относятся карабельные волны, цунами, ветровые волны, внутренние волны в неоднородной жидкости. При исследовании мы будем использовать ряд приближений. Во-первых, жидкость должна быть **идеальная и несжимаемая** (нет вязкости, звука). Также она должна быть **однородна** (плотность постоянна). При этом **поверхность жидкости плоская и неограниченная** (земля в данных масштабах плоская). Кроме того, мы будем рассматривать только волны **малой амплитуды**.

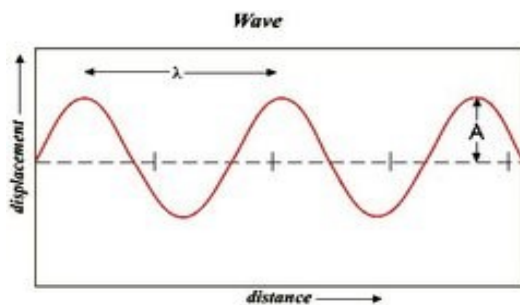


Рис. 45. Характеристики волны

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

Оценка:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{V}{\tau}, \quad a \sim V\tau, \quad \tau \sim \frac{a}{V}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{v^2}{a}, \quad +(\vec{v}, \nabla) \vec{v} \sim \frac{v^2}{l}, \quad l \gg a$$

Значит вторым слагаемым можно пренебречь:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla(gz)$$

Берем от этого уравнения ротор:

$$\text{rot grad} = 0, \quad \text{rot } \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \text{grad } \varphi,$$

Из несжимаемости

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

Тогда

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Волны описываются (нет силы тяжести, плотности воды) уравнением Лапласа. Давайте подумаем, откуда же что делается. Давайте напишем граничные условия.

Начнем с поверхности. На поверхности воздух, есть некое давление  $p_0$ . Можем здесь использовать уравнение Бернулли: вернутся к уравнению Эйлера, вместо скорости вставить градиент  $\varphi$ , получим

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \xi = -\rho p_0$$

Введем смещение волны от плоскости  $\xi(x, y)$ .

Первое приближение: всегда можем ввести  $\varphi' = p_0 \rho t + \varphi$  Второе приближение: возмущения достаточно малы, и получится

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \xi = 0 \quad \Big|_{z=\xi \approx 0}$$

Посмотрим, чему равняется вертикальная скорость:

$$v_z = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \cancel{(v_z \text{ grad}) \xi}$$

Из-за малости колебаний вторым слагаемым пренебрегли:

$$v_z = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

С другой стороны,

$$v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Продифференцируем по времени уравнение для  $\varphi$ :

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \right|_{z=\xi \approx 0}$$

Еще нужно граничное условие на дне – условие непротекания – вертикальная компонента скорости на дне равна нулю:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \right|_{z=-H}$$

Если  $z \rightarrow \infty$ , то  $\varphi \rightarrow 0$ .

Введем замену  $\varphi = \Phi(z) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ . Тогда

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - k^2 \Phi = 0$$

Оно взялось из  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Нам надо найти такое решение, чтобы оно удовлетворяло нулю на дне. Решение:

$$\Phi = A \operatorname{ch} k(z + H)$$

Тогда

$$\varphi = A \operatorname{ch} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

Считаем производные:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = Ak \operatorname{sh} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

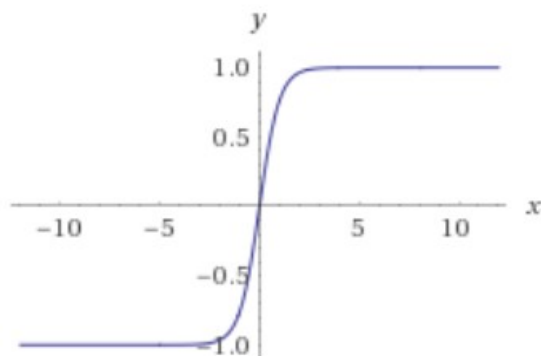
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \operatorname{ch} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

В итоге получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A \operatorname{ch} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)} + gAk \operatorname{sh} k(z + H) \cdot e^{i(kx - \omega t)} &= 0 \Big|_{z=0} \\ \Rightarrow \quad \omega^2 &= gk \operatorname{th} kH \end{aligned}$$

Вспоминаем:

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Рис. 46. График  $\text{th } x$ 

У нас есть два масштаба: длина волны  $\lambda$  и глубина водоема  $H$ .

Волны на мелкой воде:  $\lambda \gg H$  или  $kH \ll 1$ .

Получается для волн на мелкой воде

$$\omega^2 = gk^2 H, \quad \omega = \pm k \sqrt{gH}$$

Волны на мелкой воде – это волны без дисперсии. Пример яркий волн без дисперсии – это цунами в океане. Глубина океана 5-6 км, а цунами длиной волны десятки, сотни километров.

$v_f = v_{gr}$ , если у нас волны на мелкой воде и  $v_f = v_{gr} = \sqrt{gH}$ .

(оставил парочку строчек)

Второе.  $kH \gg 1$ . Это волны на глубокой воде. В этом случае тангенс равен 1, и тогда

$$\omega = \pm \sqrt{gk}$$

Волна не чувствует дно, но появляется дисперсия. Примеры волн на глубокой воде – рябь в луже.

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad v_{gr} = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2}v_f.$$

У нас есть понятие фазовой и групповой скоростей:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH} \cdot \sqrt{\frac{\text{th } kH}{kH}}, \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \dots$$

Если у нас есть некий волновой пакет, и мы смотрим как он распространяется, у нас есть огибающая и есть фаза. Групповая скорость – скорость огибающей, фазовая – скорость постоянной фазы.

Нарисуем графики, как выглядит фазовая скорость.



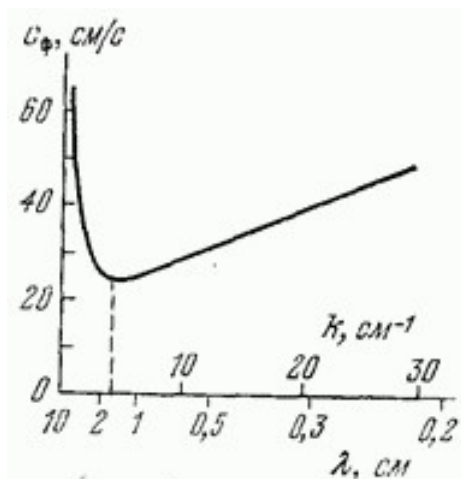


Рис. 47. График фазовой скорости

На мелкой воде пакет волн движется вместе, а на глубокой гребни волн будут убегать вперед. Задание к экзамену: оценить время расплывания пакета (рис. 48) из второй производной

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$$

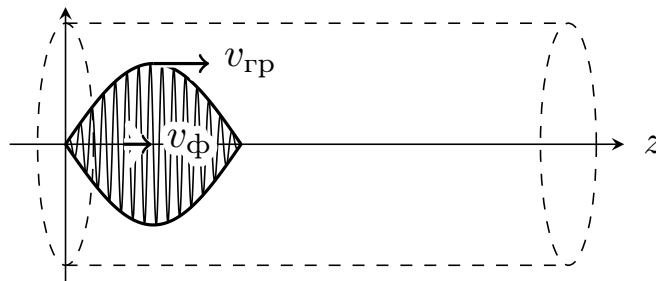


Рис. 48. Распространение волнового пакета

Нас интересует, как движутся частицы. Запишем

$$\varphi = A \operatorname{ch} k(z + H) \cdot \exp(i(kx - \omega t))$$

Мы находимся на некотором горизонте  $z$ :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A \operatorname{ch} k(z + H) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k \operatorname{sh} k(z + H) e^{i(kx - \omega t)}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= v_x, & \xi &= \frac{v_x}{-i\omega} = -\frac{kA}{\omega} \operatorname{ch} k(z+H)e^{(\dots)} \\ \frac{d\eta}{dt} &= v_z, & \eta &= \frac{v_z}{-i\omega} = \frac{ikA}{\omega} \operatorname{sh} k(z+H)e^{(\dots)}\end{aligned}$$

При  $z = 0$  у нас  $\xi = a$  (амплитуда на поверхности равна амплитуде колебаний):

$$a = \xi|_{z=0} = \frac{ikA}{\omega} \operatorname{sh} kH$$

Поскольку величины у нас комплексные, мы должны взять действительную часть и получить такой ответ:

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{a}{\operatorname{sh} kH} \operatorname{ch} k(z+H) \sin(kx - \omega t) \\ \eta &= \frac{a}{\operatorname{sh} kH} \operatorname{sh} k(z+H) \cos(kx - \omega t)\end{aligned}$$

Отсюда видно, что траектории двигаются по эллипсу:

$$\frac{\xi^2}{a_\xi^2} + \frac{\eta^2}{a_\eta^2} = 1, \quad a_\xi = \frac{a \operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}, \quad a_\eta = \frac{a \operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}$$

Надо рассмотреть два случая.

### 2.13.1 Волны на мелкой воде

В этом случае  $kH \ll 1$ . Разложим гиперболические функции в ряд Тейлора при малых аргументах:

$$\operatorname{sh} x \approx x + \dots, \quad \operatorname{ch} x \approx 1 + \dots$$

Учтем ещё, что по картинке  $k(z+H)$  ещё меньше, чем  $kH$ . Тогда

$$a_\xi = \frac{a}{kH}, \quad a_\eta = a \left\{ 1 + \frac{z}{H} \right\}$$

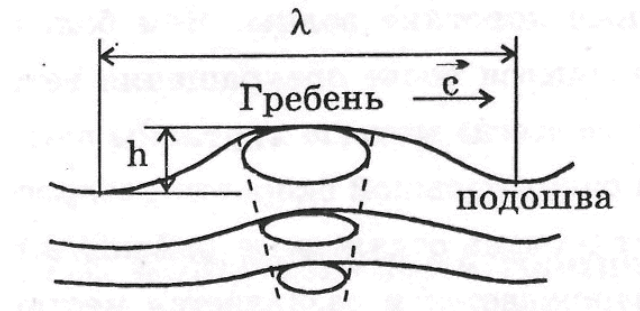


Рис. 49. Движение частиц на разной глубине

Частички двигаются по сильно вытянутым траекториям

### 2.13.2 Волны на глубокой воде. Волны с сильной дисперсией

Теперь  $kH \gg 1$ . Отбросим некоторые слагаемые по порядку малости. По определению,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Тогда

$$\operatorname{sh} kH \approx \operatorname{ch} kH \approx \frac{e^{kH}}{2}$$

В общем, получится

$$a_\xi = a_\eta = ae^{kz}, \quad z < 0$$

Траектории представляют собой окружности, быстро спадающие с глубиной.

Займёмся численным экспериментом. Оценка такая: мы находимся в море, амплитуда волны  $a$  равна пяти метрам. Это очень серьёзные волны. Давайте считать, что длина волны  $\lambda$  тоже десять метров, а мы опустили на глубину 10 метров. Какая будет амплитуда колебания? Если посчитать, то будет один сантиметр. Вот так быстро спадает. Наверху шторм, а на глубине фактически стоит штиль.

**Резюме.** Длинные волны – это волны без дисперсии, траектории продолговатые эллипсы.  $v_f = v_{gr} = \sqrt{gH}$ .

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \xi = \xi_0(x - vt)$$

Выйдем за пределы и будем считать, что

$$v = \sqrt{g(H + \xi)}$$

Попробуйте представить себе, что будет. Волна подходит к берегу, и возникает два эффекта: за счёт малой  $H$ , энергия то никуда не девается, амплитуда становится больше. Второй эффект в возрастании скорости гребня (быстрее чем подошва), и волны опрокидывается.

Короткие волны – это волны с дисперсией, и их траектории – окружности. При этом  $v_f = \frac{\omega}{k} = \dots, v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$

## 2.14. Гравитационно-капиллярные волны

Ранее мы не учитывали поверхностное напряжение. Нарисуем картинку

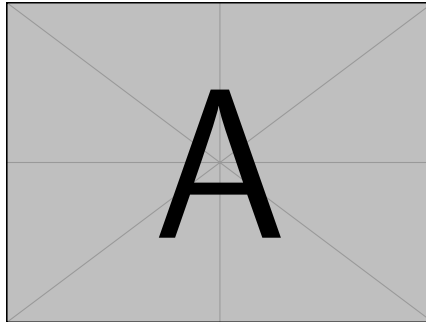


Рис. 50.

Есть два главных радиуса кривизны, и возникает избыточное давление:

$$\delta P = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \alpha \frac{1}{R} = -\alpha \nabla \left( \frac{\nabla \xi}{\sqrt{1 + (\nabla \xi)^2}} \right)$$

Если  $\nabla \xi \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1$ , то  $\delta P_k = -\alpha \Delta \xi$ .

Задача свелась к предыдущей. Граничное условие на дне – не протекание, а на поверхности другое:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_r g \xi + p_0 + \delta P_k = 0, \quad z = 0$$

(градиент выкинули в силу линейности задачи, считаем колебания малыми)

От  $p_0$  мы легко избавляемся, и в итоге получаем уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \xi + \alpha \Delta \xi = 0 \quad \Big|_{z=0}$$

Что дальше с этим делать? То же самое, что и раньше. У нас встретились  $\varphi$  и  $\xi$ , надо от  $\xi$  избавиться. Вспоминаем:

$$\Delta \xi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

В результате получаем граничное условие:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^2 \partial t} = 0$$

Решаем уравнение Лапласа, учитываем граничные условия на дне, и получается следующее решение для потенциала. Теперь подставляем это решение в последнее уравнение, и получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = (gK + \gamma k^3) \operatorname{th} kH, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\rho}.$$

$$kH \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = gK + \gamma k^3.$$

Когда же волны существенно капиллярны? Для ряби на воде, например. Понятно, что для цунами этот эффект незначителен. Давайте найдём фазовую скорость:

$$v_f^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \gamma k$$

Рисуем график

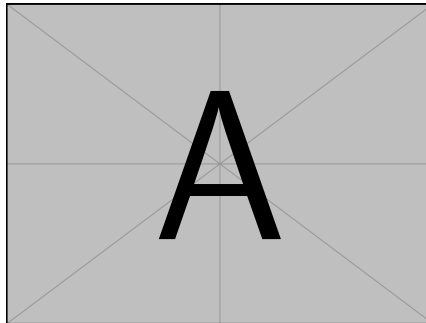


Рис. 51. график с минимумом,  $\lambda_0 = 1.7$  см

Ищем, чему равен минимум: он равен  $k_* = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad \Rightarrow \quad v_{gr} = \frac{v_f}{2} \frac{k_*^2 + 3k^2}{k_*^2 + k^2}$$

При очень маленьких  $k$   $v_{gr} = \frac{v_f}{2}$  (как на мелкой воде). При больших же  $v_{gr} = \frac{3}{2}v_f$ . Итак, у нас есть капиллярные и гравитационные волны. В одном случае групповая меньше фазовой, в другой больше фазовой.

**Резюме: гравитационные и капиллярные волны.** Дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = (gk + \gamma k^3) \operatorname{th} kH$$

Если  $k \gg k_*$ , это капиллярные волны. Если  $\frac{1}{H} \ll k \ll k_*$ , то это гравитационные короткие волны (дно ещё не чувствуется). Если же  $k \ll \frac{1}{H}$ , то это длинные гравитационные волны.

Попробуем обсудить вот такую задачу:

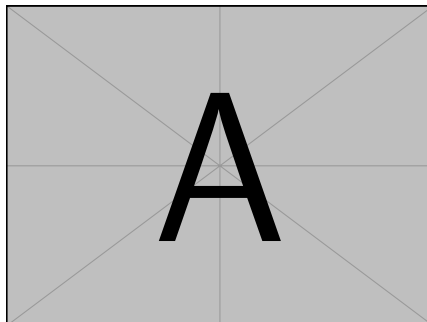


Рис. 52.

$$\rho_0 \gg \rho_1.$$

Здесь мы возвращаемся к гидростатике. Является ли такое состояние решением уравнения гидростатики? (вверху тяжелея, внизу лёгкая). Гравитация параллельна градиенту плотности, это хорошо. А является ли такое состояние устойчивым?

Нужно написать уравнение Лапласа, поставить граничные условия, написать дисперсионное уравнение с учётом капиллярных сил. Считаем, что поверхность достаточно недалеко.

Задача отличается от предыдущей чем? Перевернули вверх ногами. Тогда уравнение дисперсии

$$\omega = \sqrt{-gk + \gamma k^3}$$

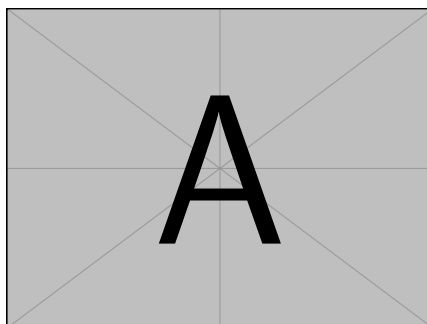


Рис. 53.

Тут возникают проблемы: отрицательные  $\omega^2$ .  $k_* = \sqrt{\frac{g}{k}}$ . Если у вас ка больше ка со звёздочкой (мелкие возмущения), то всё нормально:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma k^3} \quad \Rightarrow \quad \xi = c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{i\omega_2 t}$$

А при мнимых  $\omega$ :

$$\xi = c_1 e^{-|\omega|t} + c_2 e^{|\omega|t}$$

Итак, при малых возмущениях жидкость просто колеблется, а при больших начинает течь.

Значит, решение устойчивое. Жизненный пример: перевёрнутый стакан с водой. Более жизненный – духи. Если духи поставить, то хорошие выливаться не будут. Потому что горлышко узкое, и масштабы маленькие, а как большое (подавлены крупномасштабные возмущения). Надо их потрясти: согласно Эйнштейну, движение с ускорением эквивалентно увеличению силы тяжести:

$$k_{*g} = \sqrt{\frac{g+a}{k}}$$

## 2.15. Внутренние волны

Итак, у нас такая задача:

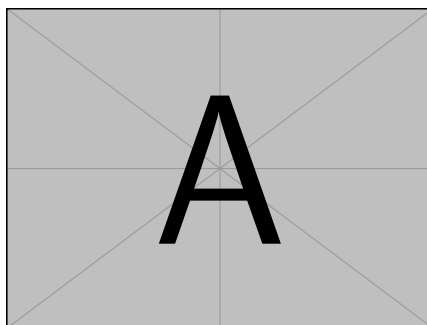


Рис. 54.

Считаем, что до границы достаточно далеко. На границе есть какие-то возмущения

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \Delta\varphi_2 = 0$$

Справа налево начнём писать уравнение. Будем искать решение в виде

$$\varphi_1 = A e^{-kz} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\varphi_2 = B e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\varphi_1 = \Phi(z) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

Наша задача – найти дисперсионное уравнение. Займёмся константами. Мы по-прежнему считаем, что колебания относительно малы, т.е. амплитуда колебаний много меньше длины волны.

Уравнение непрерывности в таком виде (совпадение скоростей на границе):

$$v_z = (\approx) \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

Отсюда сразу следует  $B = -A$ .

Мы должны поставить второе граничное условие. Используем нестационарное уравнение Бернулли:

$$p_1 = -\rho_1 g \xi - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad p_2 = -\rho_2 g \xi - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$$

Здесь мы пренебрегли слагаемым  $v^2$  в силу малости колебаний. Граничные условия – давления на поверхности одинаковы:

$$kg(\rho_2 - \rho_1) = \omega^2(\rho_2 + \rho_1)$$

Мы избавились от  $\xi$  и в итоге получили дисперсионное уравнение:

$$\omega = \sqrt{gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} \approx \sqrt{gK \frac{\Delta \rho}{\rho}}$$

Предельный случай:  $\rho_1 \rightarrow 0$  даёт переход к случаю гравитационных волн на глубокой воде. В океане  $\Delta \frac{\rho}{\rho} \sim 10^{-2}$ .

**Мертвая вода.** В 1893 г. знаменитый норвежский полярник Фритъоф Нансен, совершавший плавание по арктическим водам, столкнулся со странным явлением. Вот что записал он в отчете: «*Мы почти не двигались с места (...) и будто тащили всю воду за собой. Что мы ни делали, – круто поворачивали, лавировали, описывали полный круг и пр., – все напрасно. Лишь только машина переставала работать, судно тотчас же останавливалось, точно схваченное чем-то за корму*».

Явление мертвой воды, обнаруженное Нансеном, заключается в том, что судно на поверхности пресной воды толщиной примерно с судно на соленой воде, тратит всю энергию не на передвижение, а на создание внутренних волн.

Переход к частоте БВ

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$



Уравнение гидростатики:

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0(z)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_0 + \nabla p_1}{\rho_0 + \rho'} + \vec{g}$$

Несжимаемость даст

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Нетривиальность в следующем: не хватает одного уравнения: переменных 5, уравнений скалярных 4.

Вспомним полную производную:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho = 0$$

Это записано для возмущений.  $\rho = \rho_0 + \rho'$ :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho = 0$$

$$(\vec{v} \nabla (\rho_0 + \rho'))$$

Пренебрежём  $\vec{v} \nabla \rho'$ , тогда получим ещё уравнение

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = 0$$

Вспомним и запишем частоту Брента-Вяйсаля:

$$N^2 = -g \frac{d\rho_0}{dz} \frac{1}{\rho_0}$$

Тогда последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - v_z \frac{N^2}{g} p_0 = 0$$

Это уравнение в *приближении Буссинеска*.

Без всякого вывода рассмотрим один частный случай: экспоненциальная

атмосфера, где  $\rho_0(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}}$ , и  $N^2 = gH$ .

$$v_z = A \exp\{-i\omega t + ik_x x + ik_z z\}$$

Здесь  $H$  – эффективная высота атмосферы. Дисперсионное уравнение здесь будет

$$\omega^2 = N^2 \cdot k_x^2$$

Можно записать так:

$$\omega = N \sin \theta, \quad \text{где} \quad \sin \theta = \frac{k_x}{k}$$

1) Волны существуют только с частотой  $\omega < N$ . 2) Зависимость направления от частоты. Если  $\omega \rightarrow N$ , то волновой вектор направлен горизонтально. Если же  $\omega \ll N$ , напротив, вертикально. 3)  $\vec{v}_f \perp \vec{v}_{gr}$ :

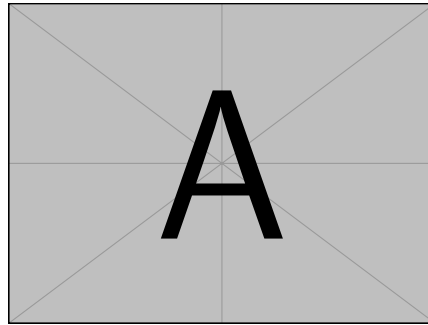


Рис. 55.

Рисунок с профилем звука в волноводном канале. Из закона сохранения нужно найти закон спадаения.

$$p^2 \cdot 2\pi r l \Rightarrow p \sim \frac{1}{r}$$

Попробуем решить такую задачу. В районе Англии произошла катастрофа: взорвались торпеды у подводной лодки. Во сколько раз будет больше акустическое давление в волноводном канале по сравнению с сферической волны?  $H \sim 100$  м, мы на побережье Америки.  $\sqrt{\frac{l=5000}{H=0.1}} \approx 7000$ .

### 3. Движение вязкой несжимаемой жидкости

Мы уже столкнулись с рядом парадоксов: парадокс Даламбера – на тело в потоке идеальной жидкости не действует сила. Из жизненного опыта хорошо известно, что это не так. Второй недостаток теории идеальной жидкости – невозможность образования вихрей.

Наконец, для идеальной жидкости у нас было граничное условие непротекания: отсутствовала нормальная компонента скорости. Но это вступает в противоречие с опытным фактом: на поверхности неподвижного тела равен нулю модуль скорости. Это происходит из-за наличия сил молекулярного сцепления между жидкостью и твердым телом. Следствием этого является следующий «парадокс»: на лопастях крутящегося вентилятора собирается пыль.

#### 3.1. Уравнения гидродинамики вязкой жидкости

Займёмся получением уравнений, которые учитывали бы вязкость и разрешали вышеперечисленные парадоксы. Для этого мы можем использовать закон сохранения массы (уравнение неразрывности), так как мы его получили без дополнительного предположения об отсутствии вязкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Для идеальной жидкости мы смогли получить уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

Для вязкой жидкости его вывести уже не получится. Мы будем конструировать уравнение с помощью экспериментальной задачи.

**Экспериментальная задача.** Пусть у нас есть две пластины. Нижняя бесконечная пластина (плоскость) неподвижна, а верхняя пластина площади  $S$  находится на высоте  $h$  над нижней. К верхней пластине мы прикладываем силу  $F$ , и она движется с постоянной скоростью  $v$ .

Из опытов известно: чтобы пластинка двигалась с постоянной скоростью, нужно выполнение равенства

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{V_0}{h}$$

здесь  $\eta$  – это *динамический коэффициент вязкости*. Для жидкости он убывает с ростом температуры, а для газов медленно растёт. Принято также

вводить вязкость на единицу массы – так называемую *кинематическую вязкость*.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Вещество при 20°	$\eta, \frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}}$	$\nu, \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$
вода	0.010	0.010
воздух	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.15
спирт	0.018	0.022
глицерин	8.5	6.8
ртуть	0.0156	0.0012

Из таблицы видно, что для воздуха вязкость существеннее, чем для воды. Если мы будем разгонять тело, будет сложнее это сделать в воздухе.

**Конструирование уравнений Навье-Стокса.** Попробуем сконструировать (но не вывести!) уравнения движения вязкой жидкости. За основу возьмём закон сохранения импульса. Он фундаментален и верен и для вязкой жидкости, в отличие, например, от закона сохранения энергии, который уже использовать нельзя: вязкость есть внутреннее трение, значит есть диссипация.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad \text{где} \quad \Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k + \sigma_{ik} \quad (1)$$

Добавили одно слагаемое – тензор вязких напряжений  $\sigma_{ik}$ . Попробуем его собрать на основе логичных предположений.

Во-первых, очевидно – если жидкость двигается или вращается как целое, то внутреннего трения нет. Трение возникает только при относительном смещении слоёв жидкости (значит, в тензор войдут производные скоростей по координатам).

Второе – мы не рассматриваем экстремальные движения, и считаем что зависимость ( $\sim \eta$ ) линейна. Вязкие силы возникают на молекулярных масштабах и все величины в гидродинамике медленно меняются на этих масштабах.

Наконец, жидкость будем считать изотропной. В таких предположениях можно записать наиболее общий вид тензора вязких напряжений (это тензор 2-го ранга):

$$\sigma_{ik} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + c \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \quad (2)$$

Рассмотрим случай вращения жидкости как целого:

$$\vec{v} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= \Omega_y z - \Omega_z y, \\ v_y &= \Omega_x z - \Omega_z x, \\ v_z &= \Omega_x y - \Omega_y x \end{aligned} \quad (3)$$

Прямая подстановка (3) в (2) даёт

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0, \quad \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} = 0$$

Так как при вращении жидкости как целого тензор вязких напряжений равен нулю, а мы получили равенство нулю двух из трех слагаемых тензора, то очевидно, третье тоже равно нулю. Так как в общем случае

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \neq 0,$$

единственным вариантом остается положить в (2) константу  $c = 0$ .

Посмотрим внимательнее на последнее слагаемое в (2). Оказывается, это не что иное, как дивергенция:

$$\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div } \vec{v}$$

это слагаемое существенно, только если жидкость сжимаема.

Переобозначим константы  $a = \eta$ ,  $b = \xi$ . Тогда тензор вязких напряжений переписется как

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \xi \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

Воспользуемся уравнением непрерывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k$ , подставив его в закон сохранения импульса (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i &= \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \\ &\quad -v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( p \delta_{ik} + \rho v_i v_k + \sigma_{ik} \right) \end{aligned}$$

Раскроем правую часть уравнения:

$$-\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( p \delta_{ik} + \rho v_i v_k + \sigma_{ik} \right) = -\frac{\partial p_k}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k - v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_i - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

Продифференцируем отдельно тензор вязких напряжений:

$$-\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -\eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \eta \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} - \dots$$

После подстановки тензора, дифференцирования и перегруппировки слагаемых получим

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k}$$

Это и есть уравнение Навье-Стокса<sup>1</sup>. Его можно также записать в векторной форме:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \text{grad div } \vec{v}$$

Часто также употребляется форма записи через кинематическую вязкость  $\nu = \eta/\rho$ :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

Размерность динамического коэффициента вязкости, как нетрудно видеть из уравнения Навье-Стокса,

$$[\eta] = \frac{L^2}{T}$$

**Диссипация в несжимаемой вязкой жидкости.** Для несжимаемой вязкой жидкости  $\text{div } \vec{v} = 0$ , а значит, тензор вязких напряжений упростится:

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

При этом диссипация энергии, по определению

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV$$

---

<sup>1</sup>Уравнения Навье-Стокса – система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости. Уравнения Навье-Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач. Названы по имени французского физика Анри Навье и британского математика Джорджа Стокса. В анализе решений уравнений заключается суть одной из семи «проблем тысячелетия», за решение которых Математический институт Клэя назначил премию в 1 млн. долларов США. Необходимо доказать или опровергнуть существование глобального гладкого решения задачи Коши для трёхмерных уравнений Навье-Стокса. Нахождение общего аналитического решения для пространственно или плоского потока осложняется тем, что оно нелинейное и сильно зависит от начальных и граничных условий.

Из этих формул и уравнения Навье-Стокса можно показать (доказательство можно посмотреть в [Ландау, т.6 «Гидродинамика», стр. 76](#)), что

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{\rho}{2} \int 2 \frac{\partial v_i}{\partial t} v_i dV = -\frac{\eta}{2} \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$$

**Определение коэффициентов в уравнении Навье-Стокса.** Как определять коэффициенты  $\eta$ ,  $\xi$ , которые мы ввели при конструировании тензора вязких напряжений? Мы конструировали уравнения, не выводя их строго, и поэтому потеряли возможность получить аналитические выражения для коэффициентов, и их надо как-то определять экспериментально.

Можно взять круглый диск (касающийся жидкости) на нити, закрутить и определить добротность осциллятора с затуханием. Можно бросить шарик в сосуд. Или прокачивать жидкость через трубу, и скорость вытекания будет как-то зависеть от вязкости.

Рассмотрим такую задачу:

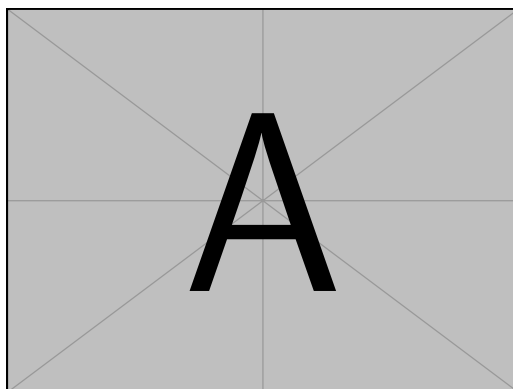


Рис. 56. Caption here

Верхняя поверхность жёсткая... Рассмотрим стационарный случай:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$$

Проинтегрируем это уравнение по внутреннему объёму:

$$\int_S \Pi_{ik} \eta_k dS + \int_{S'} \Pi_{ik} \eta_k dS = 0$$

На внутренней поверхности, если жидкость идеальная, то равна нулю нормальная компонента: для вязкой же жидкости равен нулю модуль скорости.

Тогда

$$F_i = - \int p \eta_i dS - \underbrace{\int \nabla_{ik} \eta_k dS}_{F'_i}$$

У нас есть две силы: первая – обычное давление, и вязкая сила на единицу поверхности:

$$f'_i = \sigma_{ik} n_k$$

Дурацкий вопрос: скорость равна нулю, а откуда возникает сила? А из равенства нулю скорости не следует равенство нулю градиента.

Будем использовать достаточно часто.

В принципе, мы можем найти силу, с которой жидкость действует на тело, измеряя силу  $F'$ .

Если каким-то способом удалось измерить скорости и градиенты вдали от тела, то можно по ним найти, чему равна сила.

Должно быть очевидно, что

$$F_i = F'_i$$

(не успел написать почему)

Замечание о граничных условиях.

Твердое неподвижное тело: скорость на поверхности равна нулю.

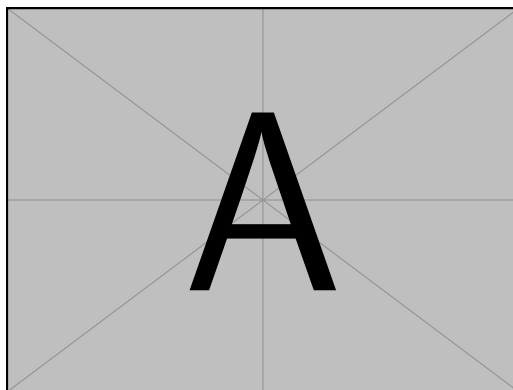


Рис. 57. Caption here

$$\vec{v} = (v_x(y), 0, 0)$$

Наверху жидкости никакой нет, поэтому

$$f_i = \sigma_{ik} n_k = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$



### 3.2. Течение Куэтта

Плоское течение между двумя пластинками

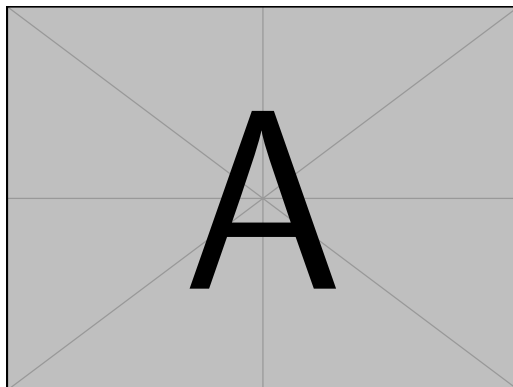


Рис. 58. Caption here

Запишем уравнение Навье-Стокса:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + f_i$$

Начнём упрощать:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{v} = (v_x(y), 0, 0), \quad p = p(y)$$

В этих предположениях

$$- \frac{\partial p}{\partial y} = -g, \quad p = p_0 + \rho_0 g y$$

Запишем уравнение в проекции на ось ..

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

И здесь граничные условия

$$v_x(0) = 0, \quad v_y(H) = V_0$$

Будем искать решение в виде  $v_x(y) = cy$ , тогда

$$cH = V_0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{V_0}{H}$$

Все это было ради силы, мы хотели найти именно её.

$$f_i = \sigma_{ik} n_k$$

В нашем случае  $n_k \equiv n_y = -1$ , в таком случае

$$f_y = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\eta \frac{V_0}{H}$$

Сила, которая действует на площадку. Умножив её на площадь, получим первую экспериментальную формулу, которую мы получили. Если бы выводили строго, вместо  $\eta$  писали бы некую константу, и только в конце узнали бы что из эксперимента это  $\eta$ .

### 3.3. Течение Пуазейля

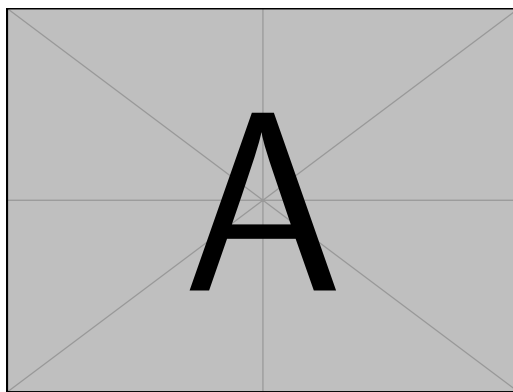


Рис. 59. Caption here

Будем рассматривать стационарное течение. Граничное условие

$$v = v(r), \quad v(R) = 0$$

На поверхности трубы у нас скорость равняется нулю. Дальше, опять же, возвращаемся к уравнению Навье-Стокса в векторной форме:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

В левой части стоит ускорение. У нас частички все двигаются по прямой с постоянной скоростью, значит, скорость и градиент будут со направлены и скалярное произведение ноль. Значит, вся левая часть обращается в ноль. Считаем, что внешних сил никаких нет, тогда получаем уравнение (вспомним,

что  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} \right]$$

Отсюда первое тривиальное заключение

$$\frac{\partial p}{\partial z} = c_1$$

Тогда

$$\begin{aligned} \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} &= a_1 \quad \Rightarrow \quad \eta r \frac{\partial v}{\partial r} = c_1 \frac{r^2}{2} + c_1 \\ v &= \left( \frac{dp}{dz} \right) \frac{r^2}{4\eta} + A \ln(r) + B \end{aligned}$$

Из физической реализуемости  $A = 0$ , а из условия

$$v(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(r) = \left( \frac{dp}{dz} \right) \frac{1}{4\eta} (r^2 - R^2)$$

Если вода бежит вправо, то слева давление больше, и градиент скорости отрицательный. Тогда профиль скорости будет таким:

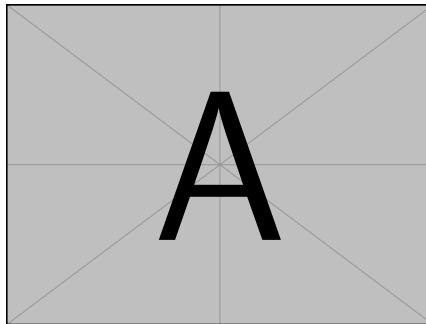


Рис. 60. Caption here

Сосчитаем поток:

$$Q = 2\pi \int_0^R v(r) r \, dr = \frac{\pi}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot R^4$$

Там, где самая большая скорость (в центре), элемент площади при интегрировании очень мал. Поэтому получается такая зависимость.

Что будет, если в трубу вставить ещё одну трубу? Останется константа  $A$ , исчезнет нерегулярность логарифма. Придётся ставить два граничных условия, на обеих трубах.

Ещё может быть, что внутренний диаметр трубы стремится к нулю. Какой будет при этом профиль? Нужно сделать аккуратно предельный переход.

Последний комментарий по этой задаче – найдём силу:

$$f_z = \eta_{ik} n_k = -\sigma_{zr} = -\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{2} \left( \frac{dp}{dz} \right) R$$

### 3.4. Нестационарное движение вязкой жидкости. Вязкие волны

Постановка задачи такая: у нас гармонически колеблется пластинка, сверху имеется жидкость. Как она будет колебаться? Запишем уравнение

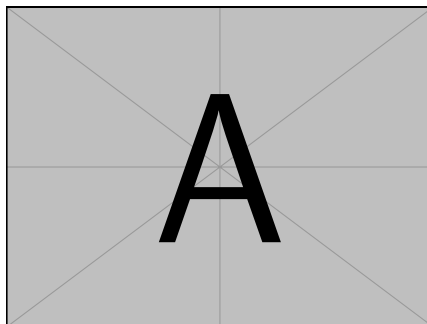


Рис. 61. Caption here

Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (из соображений симметрии  $\vec{v} = (v_x(z), 0, 0)$ , очевидно):

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Будем искать решение в виде

$$v_x = Ae^{i\omega t + ikz}$$

Тогда

$$-i\omega = \nu k^2 \quad \Rightarrow \quad k = (1 + i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Можно ввести величину

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

Это толщина скин-слоя.

Мы занимаемся нестационарными движениями вязкой жидкости. Ища решение в виде (), мы получили дисперсионное уравнение (). При этом можно ввести понятие скин-слоя (). С ним

$$k = \pm(1 + i)\frac{1}{\delta}$$

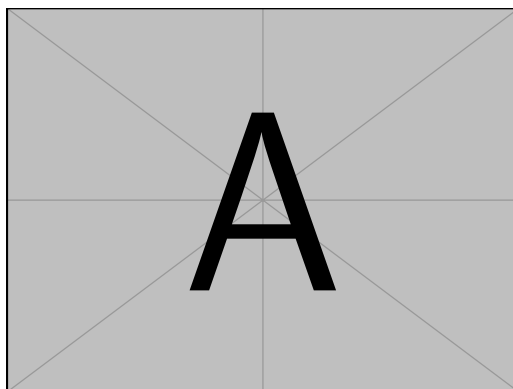


Рис. 62. нарисуйте профиль скорости, когда нижняя пл. неподвижна.

Тогда решение будет в виде

$$v_x = (Ae^{ik_1z} + Be^{ik_2z})e^{i\omega t}$$

Считая, что на бесконечности ничего нет, получим

$$v_x = v_0 e^{\frac{z}{\delta}} \exp\left[-i\frac{z}{d} + i\omega t\right]$$

Поскольку среда вязкая, возмущения передаются вверх, но затухают на характерном масштабе толщины скин-слоя. Второе слагаемое () описывает запаздывание. Возникает вопрос к допуску: пластинка в крайнем правом положении, как выглядит профиль скорости? Следующий вопрос: нарисовать профиль скорости, когда скорость пластинки максимальна (посередине колебательного цикла).

Вернёмся к задаче. Это уравнение () параболическое, диффузионное, теплопроводности. Есть известная задача: на поверхности земли мы выкопали погреб. По мере опускания вниз годовые вариации температуры запаздывают примерно на полгода: зимой доходит летнее тепло, и наоборот.

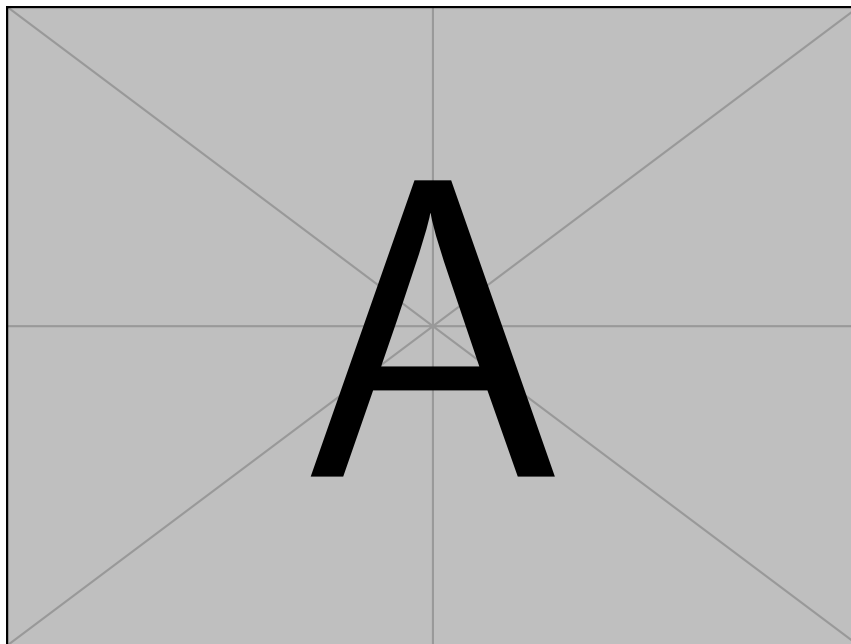
$$I = \int \varphi(t) e^{i\omega t} dt = \int \varphi(t) e^{2\pi f t} dt = - \int \varphi(t) (e^{i2\pi})^{ft} dt = \int \varphi(t) 1^{ft} dt \neq \int \varphi(t) dt$$

Где  $\varphi(t)$  – плавная функция, а  $e^{i\omega t}$  – быстрые осцилляции. Надо обвести в рамочку это отступление.

Вернемся к задаче. Чтобы двигать пластину, нужно приложить силу. Как её найти? Второй закон Ньютона:

$$f = ma, \quad a = v_0 \omega$$

Из качественных соображений, как найти силу? Рассмотрим более сложную

Рис. 63.  $f(H)$ 

задачу: налили слой жидкости толщиной  $H$ , и нас интересует, как сила зависит от толщины. Нужно поставить граничное условие на поверхности: свободная граница —  $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ .

Если бы мы налили очень тонкий слой, то жидкость движется целиком (из жизненного опыта). Если толщина меньше скин-слоя  $\delta$ , то движение происходит без запаздывания, и  $f \sim H$ . Если наливать больше воды, то будет двигаться слой порядка  $\delta$ . Тогда сила выйдет на константу.

Нарисовать самим картинку  $f(\omega)$

Следующая задача: верхний слой неподвижен, а нижний двигаем. Расстояние между слоями  $H$ . Когда  $H \gg \delta$ , сила будет константой. Гораздо интереснее, когда слой становится тоньше.

### 3.5. Принцип подобия. Формула Стокса

Когда мы рассматривали идеальную жидкость, мы рассматривали достаточно сложные движения, по сложным траекториям, там были ускорения и т.д.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \vec{v} + g \vec{n}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Для численного решения необходимо привести к безразмерному виду уравнения. Давайте попытаемся обезразмерить эти уравнения. Введём

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{v_0}, \quad r' = \frac{r}{l}, \quad t' = t \frac{v_0}{r}$$

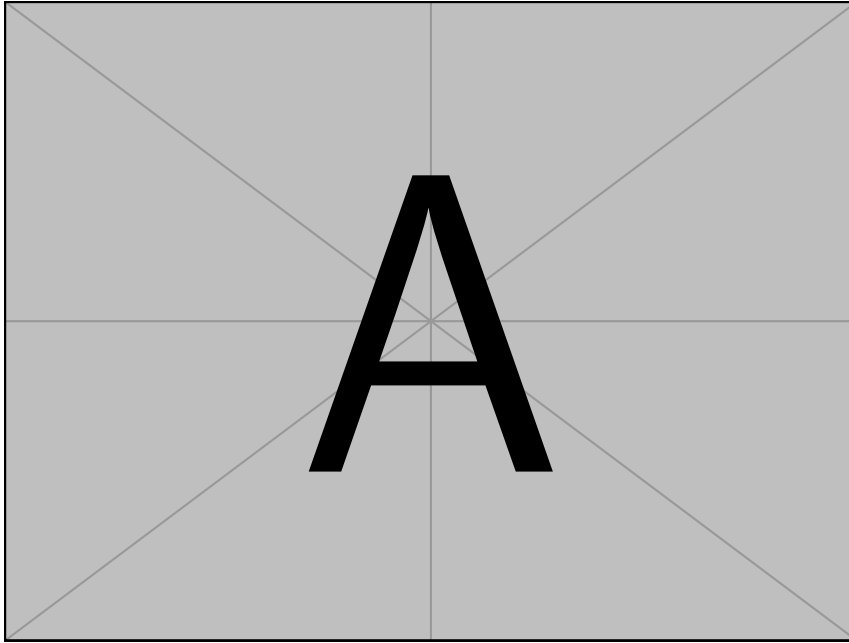


Рис. 64. Caption here

Последняя замена вызвана тем, что в стационарном течении нет выделенного масштаба времени. Из замен получаем

$$\nabla' = \frac{\nabla}{l}, \quad p' = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}', \nabla') \vec{v}' + p' = \frac{1}{\text{Re}} \Delta' \vec{v}' + \frac{1}{\text{Fr}} \vec{n}$$

Здесь появились два числа: Рейнольдса и Фруда

$$\text{Re} = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{v_0^2}{gl}$$

Рассмотрим идеальную жидкость в отсутствие силы тяжести. Правая часть уравнения ( ) для идеальной жидкости равна нулю. Значит, если мы возьмём тела разных размеров (подобные), то получим подобные течения.

В общем случае, течения будут подобны, если у нас одинаковые числа Рейнольдса и Фруда. Смысл числа Фруда прост: отношение кинетической энергии жидкости к потенциальной силы тяжести. Если число велико, то можно не учитывать силу тяжести.

Общее замечание: можем записать поле скоростей в некоем общем виде, для стационарного случая:

$$\vec{v} = \vec{v}_* \left( \frac{r}{l}, \text{Re} \right)$$



При одинаковых числах Рейнольдса, все течения, возникающие при обтекании геометрически подобных тел, будут выглядеть одинаково, и описываться одной и той же безразмерной функцией. Это и есть принцип подобия, полученный Рейнольдсом в 1883 году.

Другая трактовка – при одинаковых числах Рейнольдса уравнения обтекания геометрически подобных тел в безразмерных координатах выглядят одинаково. Кстати, мы рассматривали постоянную плотность, то есть отсутствие звуковых волн. Значит, наша формула не работает для сверхзвуковых движений.

Запишем ещё две формулы (замечание 1):

$$p = \rho v_0^2 p_* \left( \frac{r}{l}, \text{Re} \right)$$

$$\vec{F} = \rho v_0^2 l^2 \vec{F}_*(\text{Re})$$

Давайте теперь рассмотрим нестационарные периодические движения. У них некий период  $T$ . Когда мы обезразмерили переменные, мы не учитывали собственный характерный временной масштаб. Поэтому теперь нужно вводить

$$t' = \frac{t}{T}$$

Тогда, после обезразмеривания получится новое уравнение, куда выйдет число Струхала (1884, Рэлей):

$$\text{Sh} = \frac{v_0 T}{l}$$

$$\frac{1}{\text{Sh}} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}', \nabla') \vec{v}' + p' = \frac{1}{\text{Re}} \Delta' \vec{v}' + \frac{1}{\text{Fr}} \vec{n}$$

Если число Струхала много больше 1, то можем пренебречь нестационарностью.

### 3.5.1 Физический смысл числа Рейнольдса

Число Рейнольдса показывает относительное влияние нелинейных эффектов (обсудим откуда они берутся). Если оно мало, то можно выкинуть все кроме давления (надо подумать). Если же оно велико, можем ли выкидывать вязкое слагаемое? Всегда надо быть осторожным, вспомним быстро-медленные движения из теории колебаний. Там конечно был малый коэффициент при старшей производной, но откидывать его было нельзя. В нашем случае, при больших градиентах откидывать уже нельзя.

### 3.5.2 Формула Стокса

Вернёмся к формуле (1):

$$\vec{F} = \rho v_0^2 l^2 \vec{F}_*(\text{Re}), \quad \text{Re} = \frac{v_0 l}{\nu}$$

Хотим найти силу для маленького тела, которое движется в жидкости. Экспериментальный факт: при малых скоростях сила трения пропорциональна скорости. Хотим подобрать функцию  $F_*(\text{Re})$ . Очевидно, для линейности нужно

$$F = \frac{\rho v_0^2 l^2}{\text{Re}} = \eta v_0 l.$$

Если мы хотим строго решать задачу, об обтекании шара радиуса  $R$ :

$$\nabla p = \eta \Delta \vec{v}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad v|_{r=R} = 0, \quad f_i = \sigma_{ik} n_k = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial n_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) n_k$$

То можно получить формулу Стокса (пропустив три страницы вычислений):

$$F = 6\pi\eta R v_0$$

Что будет, если мы увеличим скорость? Появится поправка:

$$F = 6\pi\eta R v_0 \left( 1 + \frac{3}{16} \text{Re} \right)$$

Значит, формула Стокса справедлива, если  $\text{Re} = \frac{2Rv_0}{\nu} \ll 1$ .

Решим задачу о падении капельки воды в воздухе. На капельку действуют три силы: Стокса, Архимеда и тяжести. Будем считать, что  $\text{Re}_* = \frac{1}{2}$ . Найдём скорость и подставим в число Рейнольдса. (см doc)

Формула Стокса справедлива для капелек дождя, у которых  $R < 0.037$  см,  $v_0 = 18$  см/с. Фактически, это капли тумана. У нас получилась грустная ситуация: мы пытаемся решить задачу, найти силу, с которой среда действует надвигающееся тело. В идеальной жидкости все было блестяще, правда сила оказалась равна нулю, то есть жидкость на тело совсем не действовала. Мы перешли в вязкой жидкости, решали простенькие задачи. Когда начали делать оценки, оказалось, что для тумана у нас формулы работают, а для чего-то более приличного – нет.

### 3.6. Пограничный слой. Формула Прандтля

Как уже говорилось ранее, относительное влияние нелинейных эффектов и диссипации характеризуется числом Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad \frac{[(\vec{v} \nabla) \vec{v}]}{[\nu \Delta \vec{v}]} = \left[ \frac{\frac{v^2}{l}}{\frac{\nu}{l^2}} \right] = \left[ \frac{v_0 l}{\nu} \right] \sim \text{Re}$$

При исследовании обтекания какого-либо тела вязкой жидкостью приходится решать уравнения Навье-Стокса, что в общем случае сложно. Мы рассмотрели случай  $\text{Re} \ll 1$ , когда основную роль играет вязкость. В тоже время оценки показывают, что большинство реальных течений – это течения с большими числами Рейнольдса. Казалось бы, что при

$$v \rightarrow 0, \quad \text{Re} \rightarrow \infty$$

можно пренебречь вязкостью и использовать уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Однако все дело портят граничные условия на поверхности тела, где  $\vec{v} = 0$  («прилипание»). В этой области переход от нулевой скорости к скорости потока приводит к очень большим градиентам.

Чтобы все-таки перейти к значительно более простым уравнениям идеальной жидкости, можно поступить следующим образом: ввести пограничный слой  $h$  – слой, где скорость меняется от нуля до скорости, соответствующей обтеканию тела идеальной жидкостью<sup>2</sup>.

**Модельная задача.** Рассмотрим задачу об обтекании полубесконечной тонкой пластины потоком слабовязкой несжимаемой жидкости ( $\text{Re} \gg 1$ ). В идеальной жидкости пластина бы не вносила искажений в поток, но в нашем случае на пластине выполняется граничное условие  $\vec{v} = 0$ , и пластина неизбежно вносит искажения в поток в некотором слое толщиной  $h(x)$ .

Запишем математическую постановку задачи и граничные условия:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \vec{v}, \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

$$v|_{z=0, x>0} = 0, \quad v_x|_{x<0} = v_0, \quad v_x|_{z \rightarrow \pm\infty, x>0} = v_0$$

Оценим, как должна меняться толщина переходного (пограничного) слоя

---

<sup>2</sup>Понятие пограничного слоя было впервые введено Людвигом Прандтлем в статье, представленной 12 августа 1904 года на третьем Международном конгрессе математиков в Гейдельберге. Введение ПС позволяет существенно упростить моделирующие течение жидкости/газа уравнения путём разделения потока на две области: тонкого вязкого пограничного слоя и области невязкого течения. Уравнения невязкого течения (уравнения Эйлера) существенно проще моделирующих вязкое течение полных уравнений Навье-Стокса. Теплообмен обтекаемого тела с потоком также происходит исключительно в пограничном слое, что опять же позволяет упростить решение уравнений за пределами пограничного слоя.

с помощью теории размерностей.  $h(x)$  должна выражаться через  $\nu, v_0, x$ . Из несложных соображений и жизненного опыта можно представить себе формулу качественно. Во-первых, чем больше вязкость, тем толще пограничный слой. Кроме того, чем дальше по  $x$ , тем слой толще. Тогда

$$h(x) \sim \frac{\nu x}{v_0} = [L^2/T]L \cdot T \cdot L^{-1} \sim L^2$$

Значит,

$$h(x) \sim \left( \frac{\nu x}{v_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{Re}}, \quad \text{где} \quad Re \gg 1.$$

Теперь можно оценить силу, действующую на единицу площади:

$$f_i = \sigma_{ik} n_k, \quad \sigma_{ik} = \eta \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \Rightarrow f = \eta \left| \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right| \approx \eta \left| \frac{\partial v_x}{\partial z} \right| \sim \frac{v_0 \eta}{h(x)}$$

Здесь мы учли, что вертикальная компонента скорости мала по сравнению с горизонтальной. Можем теперь найти силу  $F$ , действующую на пластину шириной  $b$  и длиной  $L$ :

$$f = \rho \frac{\nu v_0}{h(x)} = \rho \left( \frac{\nu v_0^3}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad F = 2b \int_0^L f(x) dx \sim \rho b L^{\frac{1}{2}} v_0^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}$$

Теперь получим эту же формулу более строгим способом. Запишем систему уравнений Навье-Стокса для стационарного течения несжимаемой жидкости в проекциях:

$$\begin{cases} v_y = 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Эти уравнения можно упростить, учтя, что слой вязкого движения достаточно тонок, а градиенты  $\frac{\partial}{\partial x}$  много меньше градиентов  $\frac{\partial}{\partial z}$ , так как

$$h \sim \frac{x}{\sqrt{Re}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{h} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}$$

$$v_x \sim v_0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{x} \sim \frac{v_z}{h} \quad \Rightarrow \quad v_z \ll v_x$$

Так как вязкость мала, то можно оценить и давление, пренебрегая слагаемым с вязкостью:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{v_x^2}{x} \sim \frac{v_0^2}{x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \sim v_x \frac{v_z}{x} \sim \frac{v_0^2 h}{x^2} = \frac{v_0^2}{x \sqrt{\text{Re}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$$

Фактически мы получили, что  $p = p(x)$ , то есть давление постоянно по толщине пограничного слоя и равно давлению на верхней границе пограничного слоя. Эту задачу можно решить, используя приближение идеальной жидкости.

Итак, мы нашли давление и можем перейти от трёх уравнений к двум. При этом лапласиан можно упростить, так как  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}$ , и в итоге получаем систему уравнений Прандтля:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, & \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

### 3.7. Элементы теории турбулентности

# Предметный указатель

- Частота
  - Брента-Вяйсаля, 21
- Число
  - Фруда, 79
  - Рейнольдса, 79
  - Струхаля, 80
- Диполь
  - гидродинамический, 37
- Движение
  - нестационарное вихревое, 24
  - стационарное, 22
    - безвихревое, 22
    - вихревое, 23
  - вихревое, 42
- Формула
  - Прандтля, 81
  - Стокса, 80
- Колебания
  - малые нестационарные, 31
- Мертвая вода, 63
- Обтекание
  - двух цилиндров, 25
  - кругового цилиндра, 38
- Описание
  - Эйлера, 10
  - Лагранжа, 9
- Парадокс Даламбера, 32
- Принцип
  - подобия, 78
- Присоединенная масса, 32
- Равновесие
  - гидростатическое, 21
- Слой
  - пограничный, 81
- Течение
  - Куэтта, 72
  - Пуазейля, 73
  - плоское, 33
  - потенциальное, 32
- Теорема
  - Томсона, 27
- Трубка Пито, 25
- Уравнение
  - Бернулли, 22
  - Эйлера, 13
  - Навье-Стокса, 69
  - Пуассона, 14
  - непрерывности, 12
- Вытекание жидкости, 26
- Вихри
  - точечные, 48
- Волны
  - поверхностные
    - гравитационные, 52
    - гравитационно-капиллярные, 59
  - на глубокой воде, 58
  - на мелкой воде, 57
  - внутренние, 62
  - вязкие, 76
- Задача
  - Прандтля, 26
- Закон
  - Архимеда, 20
  - сохранения энергии, 15
  - сохранения импульса, 16
  - сохранения массы, 12

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. 6. Гидродинамика. М: Физматлит, 2015 – 733 с
- [2] Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. - 335 с
- [3] Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Демин И.Ю., Курин В.В., Прончатов-Рубцов Н.В. Сборник задач по механике сплошных сред: гидромеханика и акустика (учебное пособие) Изд-во ННГУ, Н.Новгород, 2006. - 92 с.
- [4] Акустика в задачах. Учеб. рук-во. / Под ред. С.Н.Гурбатова и О.В.Руденко. М.: Наука, 2009. - 336 с.
- [5] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Т.1, 2. М: Физматлит, 1963.
- [6] Бетчеллор Дж. Введение в механику жидкости. М: Наука, 1970.
- [7] Фейман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Феймановские лекции по физике, т. 7. Физика сплошных сред. М: Мир, 1977.
- [8] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М: Дрофа, 2003. 840 с.
- [9] Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. М: Мир, 1981. 589 с.
- [10] Седов Л.И. Механика сплошных сред. В 2-х т. СПб: Лань, 2004. 528 с. и 560 с.
- [11] Островский Л.А. Вопросы динамики жидкости. Учебное пособие. Горький, ГГУ, 1982. – 145 с.
- [12] Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Демин И.Ю., Курин В.В., Прончатов-Рубцов Н.В. Электронный задачник «Основы механики сплошных сред: гидромеханика и акустика» Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, 2012. – 95 с. [http://www.unn.ru/books/met\\_files/Zadachnic\\_MSS.doc](http://www.unn.ru/books/met_files/Zadachnic_MSS.doc)
- [13] Грязнова И.Ю., Мартьянов А.И. «Экспериментальные исследования закономерностей обтекания цилиндра и крыла воздушным потоком на аэростенде ТМЖ-1М». Электронное учебно-методическое пособие. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, 2012. – 60 с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>

- [14] Курин В.В., Грязнова И.Ю., Клемина А.В., Мартьянов А.И. УМК «Основы механики сплошных сред» Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, 2011. – 88 с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>
- [15] Gurbatov S.N., Saichev A.I., & Shandarin S.F. 1989, Mon. Not. R. astr. Soc., 236, 385
- [16] Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 215 с. Сер. Современные проблемы.
- [17] Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles. — Manchester University Press, 1991. — 308 p.
- [18] Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A. 1994, Astron. Astrophys. 289. 325.
- [19] Гурбатов С. Н., Саичев А. И., & Шандарин С. Ф. «Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания», УФН, 182, 233–261 (2012)
- [20] Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008.
- [21] Gurbatov S.N., Rudenko O.V., & Saichev A.I. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany, 2012. — 472 p . c