CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Sistemas de Equações Lineares

Profª. Juliana Eyng, Drª.

PARTE 3 - AULA 4

Métodos Iterativos

- Quando o sistema de equações lineares A x = b possuir algumas características especiais, tais como:
  - Ordem n elevada (n é o número de equações);
  - A matriz dos coeficientes possuir grande quantidade de elementos nulos (matriz esparsa);
  - Os coeficientes puderem ser gerados através de alguma lei de formação;
- em geral, será mais eficiente resolvê-lo através de um método iterativo, desde que a convergência seja possível.

Métodos Iterativos

- Se baseiam na construção de sequências de aproximações. A cada passo, os valores calculados anteriormente são utilizados para reforçar a aproximação
- Geralmente são utilizados os seguintes critérios de parada para as iterações:
  - *Limitação no número de iterações*
  - *Determinação de uma tolerância para a exatidão da solução;*

Métodos Iterativos

- Podem não convergir para a solução exata;
- Podem ser inviáveis quando o sistema é muito grande ou mal-condicionado;
- Exemplos de Métodos Iterativos:
  - *Método de Gauss-Jacobi*
  - *Método de Gauss-Seidel*
- Geram uma sequência de vetores $\{x\}^k$, a partir de uma aproximação inicial $\{x\}^0$. Sob certas condições essa sequência converge para a solução, caso ela exista

Métodos Iterativos

- Critérios de parada para os métodos iterativos:
  - x^k seja suficientemente próximo de x^{k-1}

    $(x^k - x^{k-1}) <$ que uma dada tolerância

  repetir este processo até que a norma do erro entre 2 vetores solução seja suficientemente pequena.

  - Nota: a norma de um vetor *e* com *n* componentes é dada por: $||e||_1 = |e_1| + |e_2| + |e_3| + ... + |e_n|$
  - Número de iterações

Método Iterativo: Gauss-Jacobi

- Exemplo: Resolver o seguinte sistema pelo método de Jacobi.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{k+1} = (1 + x_2^k + x_3^k)/3 \\ x_2^{k+1} = (5 - x_1^k - x_3^k)/3 \\ x_3^{k+1} = (4 - 2x_1^k + 2x_2^k)/4 \end{cases}$$

- Valor Inicial: $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0,0,0)$
- Solução do sistema S = {1,1,1}.

Método Iterativo: Gauss-Jacobi

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0
1	0,333	1,667	1
2	1,222	1,222	0,667
3	1,296	0,704	1
4	0,901	0,901	0,704
5	0,868	1,132	1
6	1,044	1,044	1,132

- Note que, neste exemplo, o processo iterativo é do tipo oscilatório, onde as variáveis aumentam e diminuem alternativamente. Este efeito prejudica a convergência, tornando o processo lento.

Método Iterativo: Gauss-Jacobi

- Cada coordenada do vetor correspondente à nova aproximação é calculada a partir da respectiva equação do sistema, utilizando-se as demais coordenadas do vetor aproximação da iteração anterior.

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^k) / a_{ii}$$

Método Iterativo: Gauss-Jacobi

- Critérios de parada:
  - máxima diferença absoluta entre valores novos e antigos de todas as variáveis.

$$\text{Max}\left\{\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right|\right\} \leq \varepsilon$$

  - máxima diferença relativa entre valores novos e antigos de todas as variáveis.

$$\text{Max}\left\{\left|\frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}}\right|\right\} \leq \varepsilon$$

Método Iterativo: Gauss-Jacobi

- Critérios de parada:
  - maior resíduo dentre todas as equações

$$\mathrm{Max}\left\{\left|R_i^{k+1}\right|\right\} \leq \varepsilon$$

onde

$$R_i^{k+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{k+1}$$

Método Iterativo: Gauss-Seidel

- Exemplo: Resolver o seguinte sistema pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{k+1} = (1 + x_2^k + x_3^k) / 3 \\ x_2^{k+1} = (5 - x_1^{k+1} - x_3^k) / 3 \\ x_3^{k+1} = (4 - 2x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1}) / 4 \end{cases}$$

- Valor inicial $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0,0,0)$

Método Iterativo: Gauss-Seidel

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0
1	0,333	1,555	1,611
2	1,388	0,666	0,638
3	0,768	1,197	1,214
4	1,137	0,882	0,872
5	0,918	1,069	1,075

Método Iterativo: Gauss-Seidel

- Cada coordenada do vetor correspondente à nova aproximação é calculada a partir da respectiva equação do sistema, utilizando-se as coordenadas do vetor aproximação da iteração anterior, quando essas ainda não foram calculadas na iteração corrente, e as coordenadas do vetor aproximação da iteração corrente, no caso contrário.

$$x^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j<i}}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{\substack{j=i+1\\ j>i}}^{n} a_{ij} x_j^{k}) / a_{ii}$$

Método Iterativo: Gauss-Seidel

- Note que, no mesmo exemplo, o processo iterativo correspondente a aplicação do Método de Gauss-Seidel também é um processo oscilatório, porém neste caso tem-se um processo de convergência um pouco mais rápido, por que no método de Gauss-Seidel são tomados os valores disponíveis mais atualizados.

Método Iterativo: Gauss-Seidel

- Para definir um critério de convergência para este método, precisamos de 2 conceitos novos:
  - No sistema Ax = b, sejam

$$S_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad \text{para } i=1, 2, \ldots, n.$$

  - Daí, diz-se que ele é diagonal dominante se ocorrer:

i) $|a_{ii}| \geq S_i$ para todo i , e:

ii) $|a_{ii}| > S_i$ para, pelo menos, um i.

Método Iterativo: Gauss-Seidel

- Um sistema é diagonal dominante se as equações podem ser ordenadas de tal forma que cada elemento da diagonal principal é maior em módulo do que a soma dos módulos dos outros coeficientes na mesma linha.

- Um sistema é irredutível se as sua equações não puderem ser reordenadas de modo a se obter a solução para algumas variáveis sem resolver o sistema todo

Método Iterativo: Gauss-Seidel

- Critério (teorema da convergência para GS)
  - Se um sistema Ax=b for diagonal dominante e irredutível, então o método de Gauss-Seidel tem convergência garantida.