# Capítulo 7 – Integração Numérica

Em muitos modelos matemáticos tem-se que efetuar a operação $I = \int_a^b f(x)dx$

- I = área, com erro < tolerância

Utilizamos integração numérica quando:

- $I = \int_a^b f(x)dx$ é difícil ou até impossível
- A função a ser integrada vem de tabeladas ou dados experimentais

A ideia básica da integração numérica é a substituição da função $f(x)$ por um polinômio que a aproxime no intervalo $[a, b]$. Assim o problema fica resolvido pela integração de polinômios, o que é trivial de se fazer.

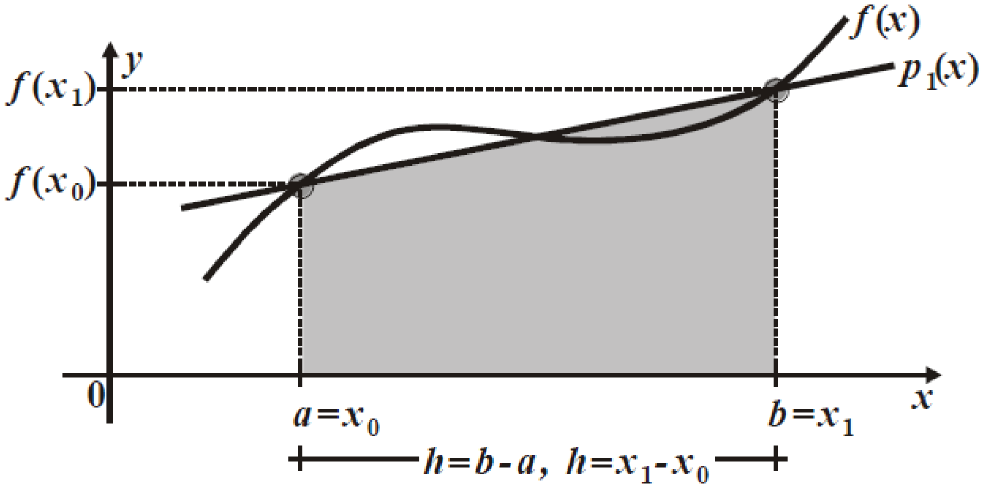
Os métodos de integração numérica podem ser agrupados em duas grandes famílias:

1. Newton-Côtes
2. Tipo Gauss

## 1) Métodos de Newton – Cotês

- Substituição de uma função complicada ou dados tabelados por um polinômio interpolador.
- A integração é feita sobre o polinômio.
- Neste caso, o polinômio que interpola $f(x)$ o faz em pontos igualmente espaçados de $[a, b]$.

## 1.1) Regra dos Trapézios




A integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é aproximada pela área de um trapézio.

O polinômio interpolador é de 1ª ordem (Lagrange): $P_1(x)=y_0L_0(x) + y_1L_1(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Seja $x_0 = a$ e $x_1 = b$, então

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

a integral é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = -\frac{f(a)}{b-a}\int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\frac{f(a)}{(b-a)}\frac{(x-b)^2}{2}\Bigg|_a^b + \frac{f(b)}{(b-a)}\frac{(x-a)^2}{2}\Bigg|_a^b$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right] = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

## 1.1.2) Regra dos Trapézios Composta

O comprimento de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é denotado por h; mas h = (b - a)/n e $x_i = a + ih$ , para i = 0, 1, ..., n. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

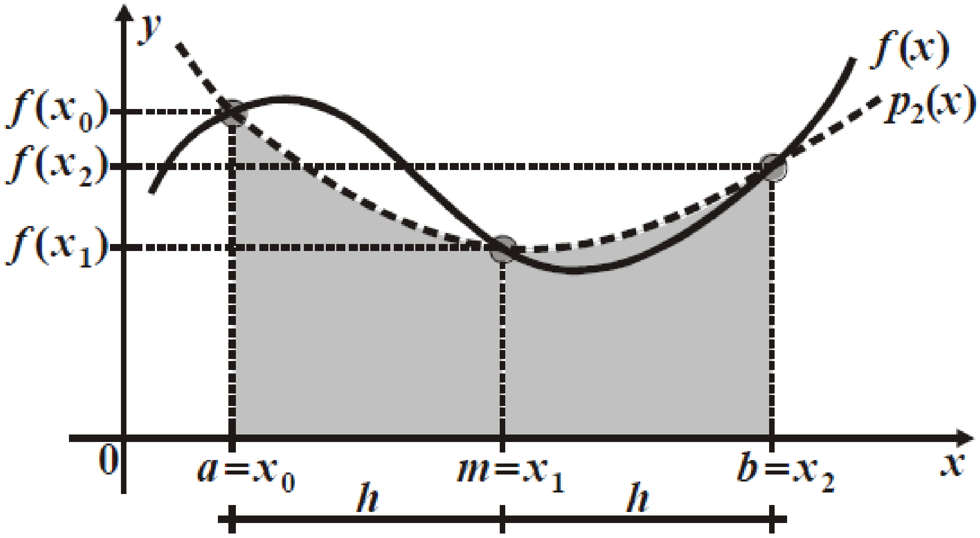
$$= \frac{h}{2}\Big(\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\ldots+\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\Big)$$

Integrando e simplificando, temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right]$$

Erro Máximo: $\left|\text{ErroT}\right| \le \left(\frac{(b-a)}{12}\right)h^2 \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2)}(x)\right|$

## 1.2) Regra de Simpson




Para melhorar a regra dos trapézios, usamos um polinômio quadrático (Lagrange) para aproximar a função f(x).

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Seja h = (b - a) / 2, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h = b$. Então

$x_0 - x_1 = -h$
$x_1 - x_0 = h$
$x_2 - x_0 = 2h$
$x_0 - x_2 = -2h$
$x_1 - x_2 = -h$
$x_2 - x_1 = h$

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} - f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}$$

a integral é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx$$

$$-\frac{f(x_1)}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx$$

$$+\frac{f(x_2)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx$$

Integrando e simplificando, temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+f(b)\right]$$

<u>*Exemplo*</u>: Obtenha numericamente

$$I = \int_0^{0.8}(0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5)dx$$

(valor exato = 1.64053333)

1) Trapézios
   f(0) = 0.2 f(0.8) = 0.232

$$I = \frac{(0.8-0)}{2}\left[0.2+0.232\right] \approx 0.1728$$

2) Simpson
   f(0) = 0.2 f(0.4) = 2.456 f(0.8) = 0.212

$$I = \frac{0.4}{3}\left[0.2+4*2.456+0.232\right] \approx 1.36746666$$

## 1.2.1) Regra de Simpson Composta

Seja *N* um número par de intervalos

h = (b-a) / N  a = $x_0$  e  b = $x_n$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\Big(\big[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big] + \big[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big] + \ldots + \big[f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\big]$$

Integrando e simplificando, temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{(N/2)-1} f(x_{2i}) + f(b)\right]$$

Erro Máximo: $|\text{ErroS}| \leq \left(\dfrac{(b-a)}{180}\right)h^4 \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$

<u>*Exemplo*</u>: Use a regra de Simpson Composta, com N = 4 para estimar

$$I = \int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)dx$$

(valor exato = 1.64053333)

N = 4    h = 0.2

$f(x_0) = f(0) = 0.2$

$f(x_1) = f(0,2) = 1.288$

$f(x_2) = f(0.4) = 2.456$

$f(x_3) = f(0.6) = 3.464$

$f(x_4) = f(0.8) = 0.232$

$$I = \frac{0.2}{3}\left(0.2 + 4\times\left[1.288 + 3.464\right] + 2\times\left[2.456\right] + 0.232\right) = 1.62346666$$

$$\max_{x\in[0,0.8]}\left| f^{(4)}(x)\right| = 21600$$

$$\left|\text{ErroS}\right| \le \left(\frac{0.8}{180}\right)0.2^4 \times 21600$$

$$\left|\text{ErroS}\right| \le 0.1536$$

*__Exemplo__*: No exemplo anterior qual o valor de N para estimar a integral dada com erro ≤ $10^{-5}$ ?

$$\left|\text{ErroS}\right| \le \left(\frac{(b-a)}{180}\right)h^4 \max_{x\in[a,b]}\left| f^{(4)}(x)\right|$$

$$\left(\frac{(b-a)}{180}\right)h^4 \max_{x\in[a,b]}\left| f^{(4)}(x)\right| \le 10^{-5}$$

Substituindo $h = \dfrac{b-a}{N}$

$$\left(\frac{(0.8}{180}\right)\frac{0.8^4}{N} \times 21600 \le 10^{-5} \quad \therefore \quad \text{N} \ge 44.5$$