Capítulo 6 – Interpolação

- Por que aproximar y = f(x)?

Dois são os motivos básicos para a abordagem deste problema:

1º) A y = f(x) pode estar apresentada apenas na forma discreta, isto é, uma tabela de pontos do tipo que ocorre em experimentos e observações de maneira geral.

2º) A y = f(x) possui expressão conhecida, porém ineficiente ou impossível de ser utilizada.

- Quem pode ser a função aproximadora z = g(x)?

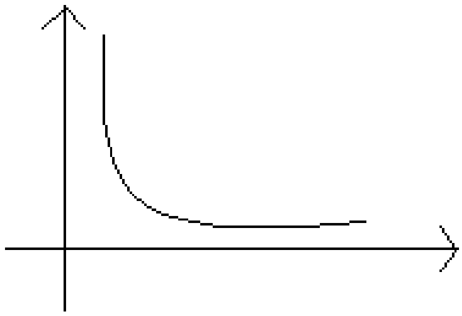
Em princípio a g(x) deve ser facilmente utilizável. Ela pode ser encontrada nas seguintes famílias:

1º) Polinomiais: $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = Pn(x)$

Vantagens:
- Só envolvem operações elementares;
- Facilmente deriváveis, integráveis, etc,...
- Formam um anel, ou seja, todas as transformações algébricas aplicadas resultam em um outro polinômio.

2º) Racionais: $g(x) = \dfrac{Pn(x)}{Qm(x)}$

Permite a representação de curvas do tipo



3º) Trigonométricas: $g(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \operatorname{sen}(ix)$

Interpolação Polinomial

Objetivo

Obter um polinômio interpolador $P_n(x)$ tal que $P_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$.

- Encontrar um número ideal de pontos para achar y da melhor forma.
- Pontos com precisão.
- Achar uma curva que passe pelos pontos e ache, com menor erro, o valor de y.

Técnicas

- Lagrange
- Newton

Em virtude de suas características (simplicidade, continuidade, diferenciabilidade, etc,...) as funções polinomiais são as mais utilizadas como aproximadoras. Contudo, tais vantagens óbvias dos polinômios teriam pouca valia se não existisse prova teórica de que os mesmos podem realmente aproximar funções.

TEOREMA DA APROXIMAÇÃO (Weisstrass)
"Seja f: [a, b] $\rightarrow$ R contínua e dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, então existe um polinômio P: [a, b] $\rightarrow$ R tal que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall$ x $\in$ [a, b]."

- Como estimar o erro de interpolação se não conhecemos f(x)?

TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DO POLINÔMIO INTERPOLADOR

"Sejam $(x_i)_{i=0}^{n}$ números reais distintos e $(y_i)_{i=0}^{n}$ números reais quaisquer. Então, existe precisamente um polinômio P de grau $\leq$ n tal que $P_n(x_i) = y_i$ (passa por todos os pontos) , $0 \leq i \leq n$."

$$\left.\begin{array}{c} p(x_0) = y_0 \\ p(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{array}\right\} \quad \mathrm{n} + 1 \quad \text{equações}$$

$$\begin{cases} Pn(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ Pn(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \\ Pn(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Gera um sistema de equações lineares com n+1 incógnitas a_i e n+1 equações

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Matriz de Vandermonde

cuja solução fornece os coeficientes a_i do polinômio que passa por todos os pontos (x_i, $y_i = f(x_i)$). Este polinômio é denominado de INTERPOLADOR da função y = f(x).

det (A) = $(x_1 - x_0)(x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})$

$$\det(A) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

- O Det(A) é não nulo, sempre que os pontos x_i forem diferentes entre si, ou seja, $(x_i - x_j)$ será sempre diferente de zero para pontos x_i não repetidos e desta forma a solução do sistema terá solução única. Assim, o polinômio gerado será único para valores de x_i não repetidos, independentemente do método utilizado para a sua determinação.

- A é inversível (não singular);

Exemplo:
Aproxime por interpolação y = ln(x), $x \in [2\ ;\ 2{,}15]$ dividindo este intervalo em três partes iguais e estime ln(2.14).

Solução:

Tabela gerada:

x	2	2,05	2,10	2,15
y = ln(x)	0,693	0,718	0,742	0,765

n+1 = 4 $\Rightarrow$ n = 3

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2{,}05 & (2{,}05)^2 & (2{,}05)^3 \\ 1 & 2{,}10 & (2{,}10)^2 & (2{,}10)^3 \\ 1 & 2{,}15 & (2{,}15)^2 & (2{,}15)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}693 \\ 0{,}718 \\ 0{,}742 \\ 0{,}765 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima por um método direto, temos:

a_0 = -1,1234
a_1 = 1,3048
a_2 = -0,1975
a_3 = -0,0004112

$$P_3(x) = -1{,}1234 + 1{,}3048x - 0{,}1975x^2 - 0{,}0004112x^3 \cong \ln(x)$$

$$P_3(2{,}14) = 0{,}760\underline{48} \cong \ln(2{,}14)$$

Valor Exato: ln(2,14) = 0,760<u>805</u>

1) INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

$$P_n(x) = y_0 L_{n,0}(x) + y_1 L_{n,1}(x) + \ldots + y_n L_{n,n}(x)$$

$$L_{n,0}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x = x_j \quad j \neq 0 \end{cases}$$

$$L_{n,1}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ 0 & x = x_j \quad j \neq 1 \end{cases}$$

$$L_{n,2}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_2 \\ 0 & x = x_j \quad j \neq 2 \end{cases}$$

Em Geral:

$$L_{n,j}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_j \\ 0 & x = x_k \quad \forall\ k \neq j \end{cases}$$

Para n = 2 temos:

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum f(x_j) L_{n,j}(x) \qquad \text{onde} \qquad L_{n,j}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}}$$

Exemplo: Calcular f(1.2) = ?

$\mathbf{x_i}$	1	1.3	1.6
$\mathbf{y_i}$	0.7652	0.6200	0.4540

$$L_{2,0}(1.2) = \frac{(1.2 - 1.3)(1.2 - 1.6)}{(1 - 1.3)(1 - 1.6)} =$$

$$\frac{(-0.1)(-0.4)}{(-0.3)(-0.6)} = \frac{0.04}{0.18} = 0.2222$$

$$L_{2,1}(1.2) = \frac{(1.2 - 1)(1.2 - 1.6)}{(1.3 - 1)(1.3 - 1.6)} =$$

$$\frac{(0.2)(-0.4)}{(0.3)(-0.3)} = \frac{-0.08}{-0.09} = 0.8889$$

$$L_{2,2}(1.2) = \frac{(1.2-1)(1.2-1.3)}{(1.6-1)(1.6-1.3)} =$$

$$\frac{(0.2)(-0.1)}{(0.6)(0.3)} = \frac{-0.02}{0.18} = -0.1111$$

$P_2(1.2) = 0.7652\ L_{2,0}(1.2)+0.62\ L_{2,1}(1.2)+0.4540\ L_{2,2}(1.2)$

$P_2(1.2) = 0.6707$