CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Sistemas de Equações Lineares

Profª. Juliana Eyng, Drª.

PARTE 3 – AULA 2

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

- Ex.: Resolver o seguinte sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss com **pivotamento parcial** utilizando operações aritméticas com 4 (quatro) dígitos significativos

$$\begin{cases} -0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 = 0 \\ 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

1º) Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

2º) Pivotação parcial, correspondente ao primeiro pivô (k=1):

(i) Busca do maior elemento em módulo da coluna j = 1:

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

$$\begin{array}{cc} & j = 1 \\ i = 2 & \left[\begin{array}{cccc} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots\; 0 \\ (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots\; 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots\; 0 \end{array}\right] \end{array} \quad o = [1\ 2\ 3\ ]\ \text{vetor}$$

o maior módulo da coluna j=1 está na linha i=2.

(ii) troca de linhas:

$$\left[\begin{array}{cccc} -0,421 & 0.784 & 0.279 & \vdots\; 0 \\ (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots\; 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots\; 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ \\ \end{array}$$

o = [2 1 3] vetor

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

(iii) Matriz pivotada:

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots 1 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots 0 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots 0 \end{bmatrix}$$

3º) Processo de triangularização, correspondente ao primeiro pivô (k=1):

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots 1 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots 0 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - (-0.421/0.448)L_1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 + 0.9397L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (0.421/0.448)L_1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 0.9397L_1 \end{array}$$

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (0.448) & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0 & 1.566 & 0.4604 & 0.9397 \\ 0 & 0.0022 & -0.3884 & -0.9397 \end{array}\right]$$

- A operação de eliminação acontece sempre que subtrai-se de cada linha, a linha do pivô multiplicada pelo elemento a ser eliminado divida pelo elemento pivô.

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

4º) Pivotação Parcial, correspondente ao segundo pivô (k=2):

(i) Busca parcial do maior módulo da coluna j = 2 (busca a partir da segunda linha e da segunda coluna, pois a primeira coluna já foi anulada)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & j=2 & & & \end{array} \\
i=2 & \left[\begin{array}{ccccc} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & (1.566) & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \\ 0 & 0.0022 & -0.3884 & \vdots & -0.9397 \end{array}\right]
\end{array} \quad o = [2\ 1\ 3\ ]$$

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

(ii) Não é necessário a troca de linhas, pois a matriz já está pivotada.

5º) Processo de triangularização, correspondente ao segundo pivô (k=2):

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & (1.566) & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \\ 0 & 0.0022 & -0.3884 & \vdots & -0.9397 \end{bmatrix} \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow L_3 - (0.0022/1.566)L_2$$

$$L_3 - 0.001405 L_2$$

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & 1.566 & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \\ 0 & 0 & -0.3890 & \vdots & -0.9410 \end{bmatrix} \quad o = [2\ 1\ 3\ ]$$

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

6º) Processo de retrosubstituição sucessiva:

$$\begin{cases} 0.448x_1 + 0.832x_2 + \quad 0.193x_3 = 1 \\ 0x_1 + 1.566x_2 + 0.4604x_3 = 0.9397 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0.3890x_3 = -0.9410 \end{cases}$$

$x_3 = -0.9410 / (-0.3890)$ $\qquad$ $x_3 = 2.4190$

$x_2 = (0.9397 – 0.4606x_3) / 1.566$ $\qquad$ $x_2 = -0.1114$

$x_1 = (1 – 0.832\ x_2 – 0.193\ x_3) / 0.448$ $\qquad$ $x_1 = 1.3969$

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

- Com o processo de pivotamento parcial:
  - Eliminam-se os possíveis pivôs nulos, caso a matriz de coeficientes seja não singular (determinante diferente de zero);
  - Também consegue-se uma redução nos efeitos de erros de arredondamento.
  - Vamos guardar a ordem em que as equações são tratadas em um *vetor índice* pois, computacionalmente não será realizada a troca física das linhas.

Método de Eliminação de Gauss: Pivotamento Parcial

- Exercício: usando a eliminação de Gauss com **pivotamento parcial** resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

- Solução:

$x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$