CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Introdução

Profª Drª. Juliana Eyng,

Parte 1

Introdução

- ***Definição***

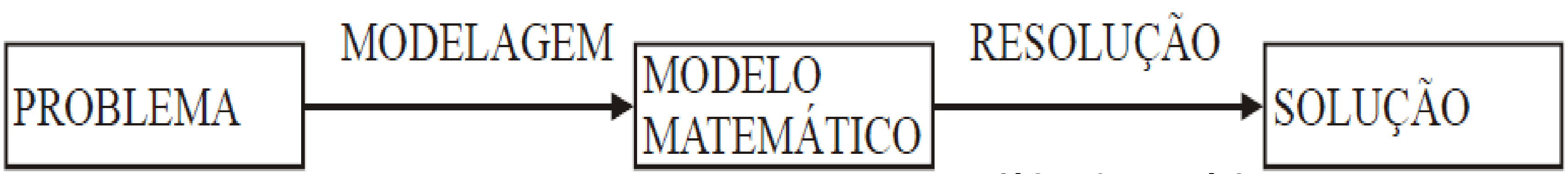
Cálculo Numérico é uma metodologia de resolução construtiva de modelos matemáticos, obtendo-se soluções numéricas aproximadas via operações básicas (+ , - , * , /).

Introdução

- A natureza é extremamente complexa. Para tentar entendê-la, criam-se modelos que seguem leis mais simples do que a rica realidade, dando resultados aproximados. Essas leis, são, em geral, expressas matematicamente.

Introdução

- As formulações matemáticas, embora simplificações do que se passa na realidade, ainda assim, com frequência, são muito complexas para serem resolvidas analiticamente.



Analítica/Numérica

Introdução

- Os métodos numéricos buscam soluções aproximadas para essas formulações.

- Além disso, nos problemas reais, os dados com que se trabalha são medidas e, como tais, não são exatos.

- Dessa forma trabalha-se, sempre, com a figura do erro, inerente à própria medição.

Introdução

- Exemplo:

Calcular o valor de e^x com 5 termos da série:

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Para x=2

Valor exato: $e^2 = 7,389056098930650$

Valor aproximado: $e^2 \cong 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} = 7$

Erros

- A noção de erro está presente em todos os campos do Cálculo Numérico:
  - nos dados, que já não são exatos;
  - nas operações sobre valores não exatos, que propagam esses erros a seus resultados;
  - os próprios métodos numéricos, frequentemente métodos aproximados, que buscam a minimização dos erros;

Erros

- **MODELAGEM**: é a fase de obtenção de um modelo matemático que descreve o comportamento do problema que se quer estudar.

- **RESOLUÇÃO**: é a fase de obtenção da solução do modelo matemático através da aplicação de métodos numéricos.

Erros

Exemplo :

Você está em cima de um edifício que não sabe a altura, mas precisa determiná-la. Tudo que tem em mãos é uma bola de metal e um cronômetro. O que fazer?

Fontes de Erros

- **Erros de modelagem**:
  - Resistência do ar,
  - Velocidade do vento,
  - Forma do objeto, etc.
- *Estes erros estão associados, em geral, à simplificação do modelo matemático.*

Fontes de Erros

- **Erros de resolução**:

  – Precisão dos dados de entrada;

(Precisão na leitura do cronômetro. p/ t = 2,3 segundos, gravidade)

  – Forma como os dados são armazenados;

  – Operações numéricas efetuadas;

  – Erro de truncamento (troca de uma série infinita por uma série finita).

Representação Numérica

- **Exemplo 1**:

  Calcular a área de uma circunferência de raio 100m. ($a = \pi .r^2$)

  a) $\pi = 3{,}14$ área = 31400 m

  b) $\pi = 3{,}1416$ área = 31416 m

  c) $\pi = 3{,}141592654$ área = 31415,92654 m

- Aproximação escolhida para π

Representação Numérica

- **Exemplo 2**:

Calcular $s = \sum_{i=1}^{3000} x_i$ para $x_i = 0,5$ e $x_i = 0,11$

	$x_i = 0,5$	$x_i = 0,11$
CALCULADORA	S = 1500	S = 330
COMPUTADOR	S = 1500	S = 329,999145

Representação Numérica

- No exemplo 2 a diferença pode ter ocorrido em função da base utilizada;

- Da forma como os números são armazenados;

- Ou em virtude dos erros cometidos nas operações aritméticas.

Representação Numérica

- O conjunto dos números representáveis em qualquer máquina é finito, e portanto, *discreto.*

- Não é possível representar em uma máquina todos os números de um dado intervalo [a,b].

- A representação de um número depende da BASE escolhida e do número máximo de dígitos usados na sua representação.

Sistemas de Numeração

- Qual a base utilizada no nosso dia-a-dia?

  Base decimal (algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9).

- Existem outras bases:
  - 8 (base octal),
  - 16 (base hexadecimal)
  - 2 (base binária) onde se utiliza os algarismos 0 e 1, utilizada pela maioria dos computadores

Sistemas de Numeração

- Os computadores recebem a informação numérica na base decimal, fazem a conversão para sua base (a base binária) e fazem nova conversão para exibir os resultados na base decimal para o usuário.

- Exemplos:

$(100110)_2 = (38)_{10}$

$(11001)_2 = (25)_{10}$

Sistemas de Numeração

- **Número** é a representação simbólica de determinada quantidade matemática;

- **Base** de um sistema de numeração é a quantidade de símbolos distintos utilizados nesta representação

Sistemas de Numeração

- **Representação**:

  $X_\beta = (a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_k\ ,\ a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ a_{k+n})_\beta$

  - β é a base
  - $a_i \in \{0,1,2,....,\beta\text{-}1\}$, $i = 1,2,...,k+n$
  - k é o comprimento da parte inteira
  - n é o comprimento da parte fracionária do número, com $k,n \in I$.

Sistemas de Numeração

- SISTEMA DECIMAL (β = 10)

  Exemplo :

  $(574)_{10} = 5x10^2 + 7x10^1 + 4x10^0$

  $(348)_{10} = 3x10^2 + 4x10^1 + 8x10^0$

  $(432,5)_{10} = 4x10^2 + 3x10^1 + 2x10^0 + 5x10^{-1}$

Sistemas de Numeração

- SISTEMA BINÁRIO (β = 2)

  Exemplo :

  $(10011)_2 = (1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0)_{10}$

  $(10011)_2 = (19)_{10}$

- A forma fatorada do número binário está representada na base 10.

Sistemas de Numeração

- **Vantagens do Sistema Binário em Relação ao Sistema Decimal**

  - Simplicidade de representação física, bastam 2 estados distintos de uma máquina digital para representar os dígitos da base: 0 = + , *off*
    1 = - , *on*
  - Simplicidade na definição de operações aritméticas fundamentais

Sistemas de Numeração

- **Desvantagens do Sistema Binário**
  - Necessidade de registros longos para armazenamento de números,

    EX: $(597)_{10} = (1001010101)_2$

CONVERSÕES ENTRE SISTEMAS

- **Conversão Binário para Decimal**

  Exemplos:

a) $(110101)_2 = 1x2^5 + 1x2^4 + 1x2^2 + 1x2^0$

$(110101)_2 = (53)_{10}$

b) $(1101)_2 =$

c) $(11001)_2 =$

CONVERSÕES ENTRE SISTEMAS

- **Conversão Binário para Decimal**

a) $(101,1)_2 =$

b) $(10,1011)_2 =$

c) $(101,101)_2 =$

CONVERSÕES ENTRE SISTEMAS

- **Conversão Decimal para Binário**

- **Parte inteira:**
  - Divide-se o número (inteiro) por 2;
  - Divide-se por 2, o quociente da divisão anterior;
  - Repete-se o processo até o último quociente ser igual a 1.

$$(19)_{10} = (10011)_2 \Rightarrow$$

```
19 |_2
 1   9 |_2
     1   4 |_2
         0   2 |_2
             0   1
```

CONVERSÕES ENTRE SISTEMAS

- **Conversão Decimal para Binário**
  Exemplos:

a) $(14)_{10} = (\qquad\qquad)_2$

b) $(25)_{10} = (\qquad\qquad)_2$

c) $(32)_{10} = (\qquad\qquad)_2$

(Método das divisões sucessivas)

CONVERSÕES ENTRE SISTEMAS

- **Conversão Decimal para Binário**

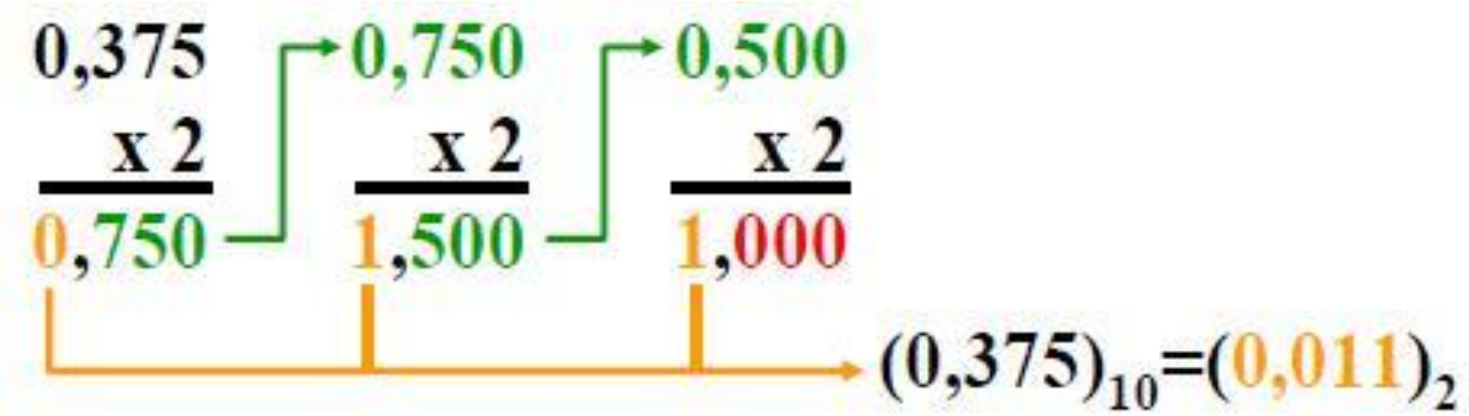
- **Parte fracionária:**
  - Multiplica-se o número (fracionário) por 2;
  - Do resultado, a parte inteira será o primeiro dígito do número na base binária e a parte fracionária é novamente multiplicada por 2;
  - O processo é repetido até que a parte fracionária do último produto seja igual a zero

CONVERSÕES ENTRE SISTEMAS

- **Conversão Decimal para Binário**

  Exemplos:

a) $(0{,}375)_{10} = (\ 0{,}011)_2$



CONVERSÕES ENTRE SISTEMAS

- **Conversão Decimal para Binário**

  Exemplos:

a) $(0{,}625)_{10} = (\qquad)_2$

b) $(0{,}03125)_{10} = (\qquad)_2$

c) $(13{,}25)_{10} = (\qquad)_2$

d) $(11{,}6)_{10} = (\qquad)_2$