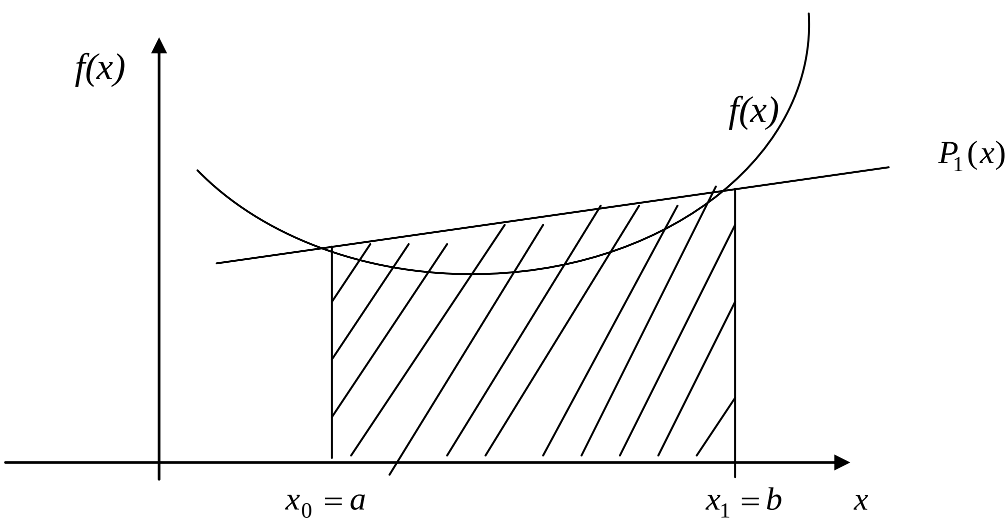
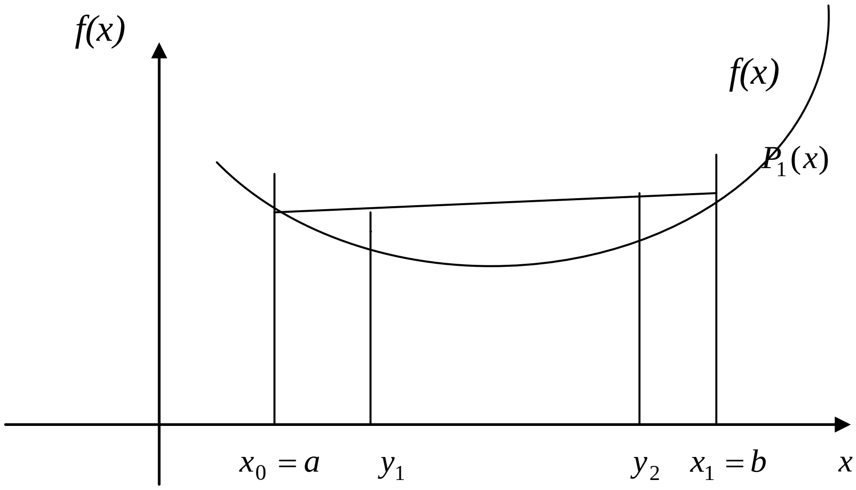
Capítulo 7 – Integração Numérica

Quadratura Gaussiana

A solução numérica da integral $A = \int_a^b f(x)dx$ foi resolvida a partir da integração de um polinômio interpolador, gerado pela forma de Gregory-Newton, que aproxima a função *f(x)*. Os pontos utilizados na determinação do polinômio interpolador foram os limites de integração ou subintervalos com amplitude constante entre esses limites. Para dois pontos, tem-se a Regra do Trapézio, como pode ser visto na figura.



Suponha agora que vamos gerar um polinômio interpolador, mas utilizando outros pontos diferentes dos limites de integração, como mostrado na figura:



A reta interpoladora é determinada a partir dos pontos y_1 e y_2. Observe que se os pontos forem bem escolhidos, o valor de área entre os pontos y_1 e y_2, que se está integrando a mais, poderá compensar as áreas que se está integrando a menos entre os pontos a e y_1 e entre os pontos y_2 e b. A questão é como pode-se definir estes pontos.

Para que esta ideia seja entendida, suponha que a expressão da Regra do Trapézio seja apresentada da seguinte forma:

$$A \approx C_1 f(a) + C_2 f(b)$$

Suponha agora que esta regra dê resultado exato quando a função integrada é uma constante, $f_0(x) = 1$ ou uma linha reta $f_1(x) = x$. A partir destas considerações chega-se as expressões:

$$C_1 f_0(a) + C_2 f_0(b) = \int_a^b 1 \cdot dx \Rightarrow C_1 + C_2 = (b - a)$$

$$C_1 f(a) + C_2 f(b) = \int_a^b x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot a + C_2 \cdot b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Resolvendo o sistema linear acima, chega-se a:

$$C_1 = C_2 = \frac{(b-a)}{2}$$

A expressão resultante é dada por:

$$A \approx \frac{(b-a)}{2} f(a) + \frac{(b-a)}{2} f(b)$$

Observe que se chega a expressão da Regra do Trapézio. Significa que para a integração de polinômios até a ordem um a regra é exata.

O Método da Quadratura Gaussiana tem como objetivo ser exato para polinômios com ordem maior que os métodos que utilizam o polinômio interpolador de Gregory-Newton, para o mesmo número de pontos. Neste caso, as regras são exatas para integração de polinômios até a ordem *(n-1)*, onde *n* é o número de pontos. O Método da Quadratura Gaussiana tem como objetivo ser exato para polinômios até a ordem *(2n-1)*.

Método da Quadratura Gaussiana

Neste método os pontos não são mais escolhidos pelo usuário, mas seguem um critério bem definido, com o objetivo de fornecer resultados exatos para polinômios até a ordem *(2n-1)*, como visto acima.

Seja a solução numérica da integral: $A = \int_a^b f(x)dx$

A solução pelo método é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(x_i) \qquad (7.31)$$

sendo que os coeficientes A_i e os pontos x_i são definidos a partir da premissa de exatidão citada acima.

Etapas do Método

1) Inicialmente o intervalo de integração deve ser mudado de [a,b] para [-1,1] para normalizar a solução e resultar em pontos padronizados. Pode-se conseguir através da troca de variáveis *x* para *t*:

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) \qquad (7.32)$$

$$\begin{cases} x = a & \Rightarrow \quad t = -1 \\ x = b & \Rightarrow \quad t = 1 \end{cases}$$

$$dx = \frac{1}{2}(b-a)dt \qquad (7.33)$$

$$f(x) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)\right] \qquad (7.34)$$

Substituindo as expressões (7.33) e (7.34) na expressão (7.31), chega-se a:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i F(t_i) \qquad (7.35)$$

2) Fixar um número *n* (inteiro positivo), tal que, se *f(x)* for um polinômio de grau até a ordem *(2n-1)*, a solução numérica da integral será exata, ou seja:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i F(t_i) \qquad (7.36)$$

Os valores de A_i e t_i, para *i=0, 1, 2,....., n-1*, são as incógnitas a serem determinadas e são independentes da função escolhida.

3) O erro cometido pela integração numérica é dado por:

$$E = \frac{2^{(2n+1)}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^4} F^{(2n)}(c) \quad -1 \le c \le 1 \qquad (7.37)$$

Determinação das Incógnitas A_i e t_i para o caso particular de *n=2*

O resultado da integração deve ser exato para polinômios de grau até três. A expressão para este caso resulta em:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(t)dt = \sum_{i=0}^{1} A_i F(t_i) = A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) \qquad (7.38)$$

Para a determinação das incógnitas A_0, t_0, A_1 e t_1, independentes da função *F(t)*, necessita-se de quatro equações. Como essas incógnitas independem da função *F(t)*, escolhe-se as funções elementares $F(t) = t^k$, $k = 0,1,2,3$.

Tem-se as seguintes equações:

$$A = \int_{-1}^{1} t^k dt = A_0 (t_0)^k + A_1 (t_1)^k \text{ , } k = 0,1,2,3 \qquad (7.39)$$

Que explicintando, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} t^0 dt &= A_0 t_0^0 + A_1 t_1^0 \\
\int_{-1}^{1} t^1 dt &= A_0 t_0^1 + A_1 t_1^1 \\
\int_{-1}^{1} t^2 dt &= A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 \\
\int_{-1}^{1} t^3 dt &= A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3
\end{aligned} \qquad (7.40)$$

Solucionando as integrais, chega-se ao sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned}
A_0 + A_1 &= 2 \\
A_0 t + A_1 t &= 0 \\
A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 &= 2/3 \\
A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 &= 0
\end{aligned} \qquad (7.41)$$

A solução do sistema de equações não-lineares (7.41) resulta em:

$$A_0 = A_1 = 1$$

$$t_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tem-se como solução aproximada da integral:

$$A \approx F(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + F(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Esta solução é exata para polinômios de grau até três.

Da mesma forma, pode-se encontrar o valor dos parâmetros para um número n de pontos. Na tabela abaixo apresenta-se para n=1,2,3 e 4.

Tabela de Parâmetros para n=1, 2, 3 e 4

N	t_i	A_i
1	$t_0 = 0$	2
2	$t_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$A_0 = 1$ $A_1 = 1$
3	$t_0 = 0{,}77459667$ $t_1 = -0{,}77459667$ $t_2 = 0$	$A_0 = 5/9$ $A_1 = 5/9$ $A_2 = 8/9$
4	$t_0 = 0{,}86113631$ $t_1 = -0{,}86113631$ $t_2 = 0{,}33998104$ $t_2 = -0{,}33998104$	$A_0 = 0{,}34785484$ $A_1 = 0{,}34785484$ $A_2 = 0{,}65214516$ $A_3 = 0{,}65214516$

Exemplo 1: Utilizando o Método da Quadratura Gaussiana, determinar o valor da integral $A = \int_{2}^{6} \frac{x^3}{3} dx$, com n=2.

$$A \approx A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) = F(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + F(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Deve-se normalizar os intervalos de integração de $[2,6] \to [-1,1]$. Para tanto, faz-se a mudança de variáveis:

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(6-4)t + \frac{1}{2}(6+2) = 2t+4$$
$$dx = 2dt$$

Substituindo, tem:

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{(2t+4)^3}{3} 2dt \quad \Rightarrow \quad F(t) = \frac{2}{3}(2t+4)^3$$
$$A \approx F(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + F(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3}[2(\frac{-1}{\sqrt{3}})+4]^3 + \frac{2}{3}[2(\frac{1}{\sqrt{3}})+4]^3 = 106{,}66$$
$$A \approx 106{,}66$$

Exemplo 2: Utilizando o Método da Quadratura Gaussiana, determinar o valor da integral $A = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx$, com n=2.

$$A \approx A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) = F(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + F(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Deve-se normalizar os intervalos de integração de $[3{,}0,\ 3{,}6] \to [-1,1]$. Para tanto, faz-se a mudança de variáveis:

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(3{,}6-3{,}0)t + \frac{1}{2}(3{,}6+3{,}0) = 0{,}3t + 3{,}3$$

$$dx = 0{,}3dt$$

Substituindo, tem:

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(0{,}3t+3{,}3)} 0{,}3dt \quad \Rightarrow \quad F(t) = \frac{0{,}3}{0{,}3t+3{,}3}$$

$$A \approx F(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + F(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{0{,}3}{0{,}3\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+3{,}3} + \frac{0{,}3}{0{,}3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3{,}3} = 0{,}182320$$

$$A \approx 0{,}182320$$

Exemplo 3: Utilizando o Método da Quadratura Gaussiana, determinar o valor da integral $A = \int_{1}^{3} [\ln(2x) + x^2]dx$, com n=3.

$$A \approx A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) = \frac{5}{9} F(0{,}77459667) + \frac{5}{9} F(-0{,}77459667) + \frac{8}{9} F(0)$$

Deve-se normalizar os intervalos de integração de $[1,\ 3] \rightarrow [-1{,}1]$. Para tanto, faz-se a mudança de variáveis:

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(3-1)t + \frac{1}{2}(3+1) = t+2$$

$$dx = dt$$

Substituindo, tem:

$$A = \int_{-1}^{1} [\ln(2t+4) + (t+2)^2]dt \quad \Rightarrow \quad F(t) = \ln(2t+4) + (t+2)^2$$

$$A \approx \frac{5}{9} F(0{,}77459667) + \frac{5}{9} F(-0{,}77459667) + \frac{8}{9} F(0) = 11{,}349$$

$$A \approx 11{,}349$$