CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Equações Algébricas e Transcendentes.

Profª. Juliana Eyng, *Dra*.

Parte 2 - AULA 3

Equações Polinomiais

- Polinômio é um caso particular de equação não-linear, portanto o que foi visto para raízes de equações não-lineares pode ser estendido para polinômios.

- Será visto algumas características específicas de polinômios, e como já vimos, para encontrar as raízes de uma equação, o processo é: localização de raízes e determinação de raízes.

Equações Polinomiais

- **Localização de raízes**

- *Teorema Fundamental da Álgebra*

  - Se $p(x)$ for um polinômio de grau $n \geq 1$, ou seja, a_0, a_1, a_2, ..., a_n reais ou complexos, com $a_0 \neq 0$, então $p(x)$ tem pelo menos um zero, ou seja, existe um $\alpha \in C$ tal que $p(\alpha)=0$.

Equações Polinomiais

- *Regras dos Sinais de Descartes*
  - Uma regra descoberta por Descartes em que o número de raízes positivas de equações polinomiais é igual ao número de variação de sinais apresentado pelo conjunto de coeficientes ou menor em um número par;
  - O número de raízes negativas é similarmente relacionado ao polinômio com a substituição de x por –x. Zeros nos coeficientes são ignorados.

Equações Polinomiais

- *Exemplo:*

$$p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$$

  - *p(x)* tem 2 raízes positivas ou nenhuma
  - substituindo *p(x)* por *p(–x)*:

$$p(x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x + 1$$

  - *p(x)* tem 3 raízes ou 1 raiz negativa

Equações Polinomiais

- *Exemplo:*

$$p(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 7x - 14$$

  - *p(x)* tem 5 raízes ou 3 ou 1 raíz positiva
  - substituindo *p(x)* por *p(–x)*:

$$p(x) = -x^5 - x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 7x - 14$$

  - Sem variação -> nenhuma raiz negativa

Equações Polinomiais

- **Teorema de Bolzano**
  - Seja p(x) um polinômio com coeficientes reais

    $x \in [a, b]$

  - Se $p(a) \cdot p(b) < 0$, existe um número ímpar de raízes reais em [a, b]
  - Se $p(a) \cdot p(b) > 0$, existe um número par ou não existe raízes reais em [a, b]

Equações Polinomiais

- **Propriedades**

- Um polinômio $p_n(x)$ é uma função $p : C \rightarrow R$, representada da seguinte forma:

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + a_{n-1x} + a_n$$

  - onde cada $a_i \in R$ e $a_0 \neq 0$
  - o inteiro positivo n é chamado de grau do polinômio

Equações Polinomiais

- **Propriedades**

- *Teorema (Decomposição)*
  - Para todo $\alpha \in R$, existe um único polinômio q(x) tal que:

$$p_n(x) = (x - \alpha).q(x) + p(\alpha)$$

  - se $n \geq 1$, então o grau de q é $n - 1$
  - caso contrário, $q(x) \equiv 0$

Equações Polinomiais

- **Propriedades**

- *Corolário (O Polinômio Reduzido)*:
  - Se $n \geq 1$, e $p_n(x) = 0$ para algum $x = \alpha$, existe um único polinômio $q(x)$ de grau $n - 1$ tal que:

$$p_n(x) = (x - \alpha).q(x)$$

Equações Polinomiais

- **Propriedades**

- *Definição (Multiplicidade):*
  - Seja x = α um zero de $p_n(x)$. Dizemos que x = α tem multiplicidade μ se e somente se:

$$p_n(\alpha) = p'(\alpha) = ... = p^{\mu-1}(\alpha) = 0 \text{ e } p^{\mu}(\alpha) \neq 0$$

Equações Polinomiais

- **Propriedades**
- *Definição (Multiplicidade):*
- **Exemplo:**
- multiplicidade de $\alpha = 2$ em $x^4-5x^3+6x^2+4x-8=0$:
- $p_4(2) = 0$
- $p'_4(x) = 4x^3-15x^2+12x+4 \Rightarrow p'(2) = 0$
- $p''_4(x) = 12x^2-30x+12 \Rightarrow p''(2) = 0$
- $p'''_4(x) = 24x-30 \Rightarrow p'''(2) \neq 0 \Rightarrow \mu = 3$

Equações Polinomiais

- **Determinação de Raízes**

  Como polinômios são casos particulares de equações não-lineares, todos os métodos já estudados (Bissecção, Falsa Posição, Newton, Secante) também podem ser utilizados na determinação de raízes.

Equações Polinomiais

- **Método de Birge-Vieta**
  - O método de Birge-Vieta é uma variante do método de Newton-Raphson e é utilizado associado ao Método de Horner para o cálculo de valores de polinômios (se torna computacionalmente mais eficiente)
  - Se *p(x)* for um polinômio, o processo iterativo do Método de Newton-Raphson passa a ser:

Equações Polinomiais

- **Método de Birge-Vieta**

Método de Newton $$x_{k+1} = x_k - \frac{p_n(x_k)}{p'_n(x_k)}$$

Objetivo do Birge-Vieta:

avaliar $p_n(x_k)$ e $p'_n(x_k)$ de modo mais eficiente do que no caso em que a função não é polinomial

$$x_{k+1} = x_k - \frac{R}{R_1}$$

Equações Polinomiais

- **Método de Birge-Vieta**
- R é o resto da primeira divisão de $p_n(x)$ por $(x - \alpha)$
- R_1 é o resto da segunda divisão sucessiva de $p_n(x)$ por $(x - \alpha)$

Equações Polinomiais

- **Método de Horner**

  Se expressarmos $p_n(x)$ na forma padrão:

  $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$

  Expressando $p_n(x)$ na forma de Horner:

  $p_n(x) = ((((a_0x + a_1)x + a_2)x + ... + a_{n-1})x + a_n$

Exemplos:

- $p(x) = x^3 + 2x – 1$

  $p(x) = ((x+0)x+2)x –1$

- $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x – 1$

Equações Polinomiais

- **Método de Horner**

  Agora imagine que queremos estimar o polinômio em um específico valor de x, como x_0. Para isso, vamos definir uma nova sequência de constantes da seguinte forma:

  $b_0 = a_0$

  $b_1 = a_1 + b_0\, x_0$

  $b_2 = a_2 + b_1\, x_0$

  $b_n = a_n + b_{n-1}\, x_0 \quad \rightarrow b_n = \text{valor de } p(x_0)$

Equações Polinomiais: Birge-Vieta

- Exemplo: Obter uma raiz de $p(x) = x^3 + 2x - 1$ utilizando o Método de Birge-Vieta, com $x_0 = 1$ e 3 iterações.

1ª iteração

$$p_3(x) \begin{cases} b_0 = a_0 = 1 \\ b_1 = a_1 + b_0 x_0 = 0 + 1 \times 1 = 1 \\ b_2 = a_2 + b_1 x_0 = 2 + 1 \times 1 = 3 \\ b_3 = a_3 + b_2 x_0 = -1 + 3 \times 1 = 2 \end{cases}$$

$R = b_3 = 2$

Equações Polinomiais: Birge-Vieta

1ª iteração

$$p'_3(x)\begin{cases} c_0 = b_0 = 1 \\ c_1 = b_1 + c_0 x_0 = 1 + 1 \times 1 = 2 \\ c_2 = b_2 + c_1 x_0 = 3 + 2 \times 1 = 5 \end{cases}$$

$$R_1 = c_2 = 5$$

$$x_1 = x_o - \frac{R}{R_1} = 1 - \frac{2}{5} = 0,6$$

Equações Polinomiais: Birge-Vieta

2ª iteração

$$p_3(x)\begin{cases} b_0 = a_0 = 1 \\ b_1 = a_1 + b_0 x_1 = 0 + 1 \times 0{,}6 = 0{,}6 \\ b_2 = a_2 + b_1 x_1 = 2 + 0{,}6 \times 0{,}6 = 2{,}36 \\ b_3 = a_3 + b_2 x_1 = -1 + 2{,}36 \times 0{,}6 = 0{,}416 \end{cases}$$

$$p'_3(x)\begin{cases} c_0 = b_0 = 1 \\ c_1 = b_1 + c_0 x_1 = 0{,}6 + 1 \times 0{,}6 = 1{,}2 \\ c_2 = b_2 + c_1 x_1 = 2{,}36 + 1{,}2 \times 0{,}6 = 3{,}08 \end{cases}$$

Equações Polinomiais: Birge-Vieta

2ª iteração

$$x_2 = x_1 - \frac{R}{R_1} = 0,6 - \frac{0,416}{3,08} = 0,465$$

3ª iteração (exercício)

$x_3 = 0,454$