CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Equações Algébricas e Transcendentes.

Profª. Juliana Eyng, Dra.

Parte 2 - AULA 1

Introdução

- Nos modelos matemáticos de problemas em várias áreas (engenharia, economia, etc.) ocorre a necessidade de se resolver uma equação $f(x) = 0$.

- <u>Definição 1</u>: Raiz de $f(x) = 0$ é todo $\alpha \in C$ tal que $f(\alpha)= 0$. Ou seja, um valor qualquer α é raiz de $f(x) = 0$, ou zero da função $f(x)$ se satisfazer a função.

Introdução

- Exemplos:

$x^3 - 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0; \alpha_2 = 1 + i ; \alpha_3 = 1 - i$

$\text{sen}(x) = 1 \Rightarrow \alpha_k = 2k\pi + \pi/2, \text{ com } k \in R$

$4.\cos(x) = e^x \Rightarrow \alpha = ?$

$e^{2x} = -3 \Rightarrow \nexists\, \alpha$

- Nem sempre se consegue isolar a variável em um dos membros da equação para se obter uma raiz α .

Introdução

- Pelas equações, conclui-se que:

1ª) Uma equação $f(x)=0$ pode:

- não ter solução;
- ter uma única solução;
- ter uma quantidade finita de soluções;
- ter uma quantidade infinita de soluções;

2ª) A solução de $f(x) = 0$ pode ser muito difícil, ou até impossível, de ser obtida pela técnica de isolamento da variável;

Introdução

3ª) Resolver equações exige conhecimento de outras metodologias, além da do isolamento da variável. Aqui, usaremos a metodologia iterativa.

- Definição 2: Um método iterativo obedece sempre à duas etapas na sua execução:

1ª) Isolamento da solução desejada (aproximação inicial da solução);

2ª)Refinamento da solução isolada até a precisão requerida.

Localização de Raízes

- Conhecida uma função f(x).
  - Determinar o valor α tal que $f(\alpha)=0$.
  - Denomina-se α de zero da função f(x) ou raiz da equação $f(x) = 0$.
  - Solução analítica:
    - Equações algébricas (polinomiais) do 1º e 2º graus;
    - Certas equações algébricas do 3º e 4º graus;
    - Algumas equações transcendentais (não polinomiais).

Localização de Raízes

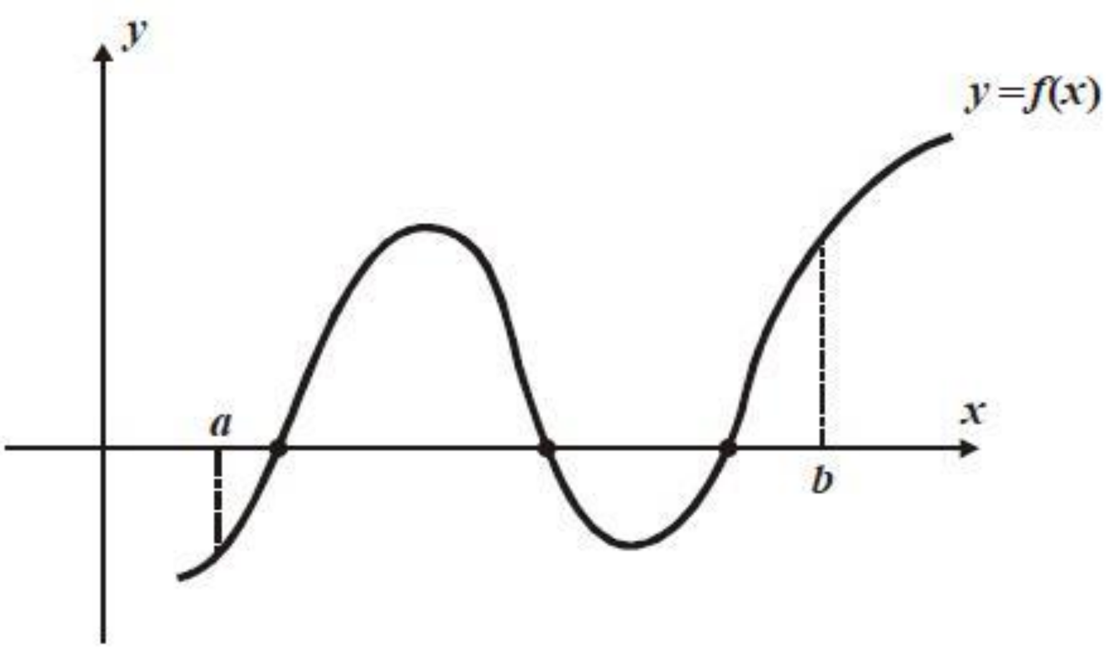
- **Fase I**: Localização ou isolamento das raízes, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz

- **Fase II**: Refinamento, que consiste em, escolhidas aproximações iniciais no intervalo encontrado da fase I, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão prefixada

Localização de Raízes

- **Teorema 1**: Seja *f (x) uma função contínua num intervalo [a, b]. Se f (a).f (b)<0, então existe pelo menos um zero de f (x) entre a e b.*

(Teorema de Bolzano)



Localização de Raízes

- Obs: Sob as hipóteses do teorema anterior, se f'(x) existir e se f'(x) preservar sinal dentro de (a, b), então este intervalo contém um único zero de f(x).
- Uma forma de se isolar as raízes de f(x) usando resultados anteriores é tabelar f(x) para vários valores de x e analisar as mudanças de sinal de f(x) e o sinal da derivada nos intervalos em que f(x) mudou de sinal.

Localização de Raízes

- *Exemplo:* $f(x) = e^{-x} - x$

x	y
0	1
0,5	0,1065
1	-0,6321
1,5	-1,2768

Intervalo inicial:

$$x_0 = 0{,}5 \;\; e \;\; x_1 = 1$$

Método de Partição: Bisseção

- Esse método trata de aperfeiçoar a aproximação obtida a partir, por exemplo, do método gráfico ou do uso da tabela (referida acima)
- Tendo dois valores entre os quais se situa a raiz, isto é, dois pontos em que a função troca de sinal, sendo a função contínua, haverá entre esses pontos, necessariamente, uma raiz (no mínimo uma, pois pode haver mais de uma).

Método de Partição: Bisseção

- Determinar o intervalo [a,b] onde há raízes;

- Para cada intervalo [a,b], verificar se $f(a).f(b)<0$, então uma raiz $\alpha \in [a,b]$ pode ser obtida como segue:

1) $x_m=(a+b)/2$
2) Se $f(x_m) = 0$, logo x é raiz

   Senão, devemos verificar em qual subintervalo de [a,b] , x_m está

Método de Partição: Bisseção

3) Se $f(a).f(x_m) < 0$, então $x_m \in [a, x_m]$ e $b = x_m$

Se $f(a).f(x_m) > 0$, então $x_m \in [x_m, b]$ e $a = x_m$

- Repete-se sucessivamente até que a diferença entre os dois valores de raiz seja menor que o valor pré-estabelecido de erro.
- Cálculo do erro:

$$|f(raiz)| < erro \qquad |b - a| < erro$$

Método de Partição: Bisseção

- Exemplo: Obtenha um raiz α de e^x *sen*x = 1 situada em [0,1] por bisseção com 4 partições.
  - Temos f(x) = e^x *sen*(x) - 1 que é uma função contínua em [a,b] e
  - f(0) = -1 e f(1) = 1,287
  - f(0).f(1) < 0 $\exists$ x $\in$ [0,1]
  - Então partimos para o processo de refinamento.

Método de Partição: Bisseção

- Algoritmo:

K	a	xm	b	F(a)	F(xm)	F(b)
0	0	0,5	1	-1	-0,21	1,287
1	0,5	0,75	1	-0,21	0,443	1,287
2	0,5	0,625	0,75	-0,21	0,093	0,443
3	0,5	0,5625	0,625	-0,21	-0,064	0,093
4	0,5625	0,594	0,625	-0,064	0,014	0,093

- Logo a raiz é $x_m \cong 0{,}594$ com $| a - b | = 0{,}062$

Método de Partição: Falsa Posição

- O método da bisseção é lento, pois reduz o intervalo de busca da raiz x_m em apenas 50 % a cada bipartição.

- Como particionar o intervalo [a , b] de forma a obter uma convergência mais rápida?

Método de Partição: Falsa Posição

- O método da falsa posição consiste nas seguintes etapas:

i) Toma-se [a , b] com $\alpha \in$ [a , b];

ii) Obtém-se os pontos (a, f(a)) e (b,f(b));

iii) Define-se a reta r(x) que passa por estes pontos:

$$r(x) = f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)(x - a)$$

Método de Partição: Falsa Posição

iv) O valor de x_k é obtido para $r(x_k)=0$:

$$r(x_k) = 0 \Rightarrow \quad x_K = a - \frac{f(a).(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

v) Pelo teorema decide-se onde ficou a raiz x, em $[a\ ,\ x_k]$, ou em $[x_k\ ,\ b]$.

vi) Redefine-se o intervalo e retorna-se ao item (ii) até se atingir a precisão desejada.

Método de Partição

- Exercícios: Implemente o algoritmo do método da Bisseção e da Falsa Posição e encontre uma raiz para as seguintes equações:

a) $f(x) = e^{X} + x$ intervalo inicial [-1 ; 0]

Critério de parada: $|fxm| < 10^{-2}$ (Bisseção com 4 iterações xm = -0,5625)

Critério de parada: $|fxm| < 10^{-2}$ (Falsa Posição com 2 iterações xm= -0,5722)

b) $f(x) = e^{X} – 2\cos(x)$ intervalo inicial [0 ; 2]

Critério de parada: $|fxm| < 10^{-2}$ (Bisseção com 8 iterações xm = 0,5391)

Critério de parada: $|fxm| < 10^{-2}$ (Falsa Posição com 8 iterações xm= 0,5362)

Método de Partição

c) $f(x) = e^x \, sen(x) - 1$ intervalo inicial [0 ; 1]

Critério de parada: $|fxm| < 10^{-2}$ (Bisseção com 7 iterações xm = 0,5859)

Critério de parada: $|fxm| < 10^{-2}$ (Falsa Posição com 4 iterações xm= 0,5872)