Capítulo 8 - Resolução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Introdução

Se uma equação diferencial tem apenas uma variável independente, então ela é uma equação diferencial ordinária.
EXEMPLO:

$$\frac{dx}{dy} = x + y \qquad y' = x^2 + y^2 \qquad y'' + (1 - y^2)y' + y = 0$$

Se uma equação diferencial envolve mais que uma variável independente, então ela é equação diferencial parcial.
EXEMPLO:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad u \equiv u\,(\,x\,,\,y\,).$$

Dos exemplos citados, o grau (ou ordem) de uma equação diferencial pode variar. O grau de uma equação diferencial é definido pelo termo da equação que contém a derivada de maior ordem. Por exemplo:

- a seguinte equação diferencial $y' + x - 2 = 0$ é uma equação diferencial de 1º grau porque a derivada y' é de 1ª ordem.
- Já a equação diferencial $y''' - 2xy'' + 5y' + y - x + 8 = 0$ é uma equação diferencial de 3º grau porque o termo de derivada de maior ordem é de 3ª ordem.

Se a solução de uma equação diferencial y for uma função de uma única variável x, isto é, se $y = y(x)$, então a equação diferencial é chamada de *equação diferencial ordinária*.

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação que pode ser descrita na forma geral como:

$$y^{(n)} = f\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Onde $y^n = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Condições suplementares: Em geral, uma equação diferencial de ordem *n* requer *n* condições suplementares para ter uma única solução. Com isso, temos dois tipos de problemas:

- problema de valor inicial (PVI)
- problema de valor de contorno (PVC)

Problema de valor inicial (PVI)

Equação diferencial de ordem n (n ≥ 1) e mais *n* condições dadas pela função e suas derivadas até ordem *n-1*, especificadas em um mesmo ponto, que corresponde ao valor inicial da variável independente.

EXEMPLO: $y'' = (1-x)y' + y^2\cos(x)$ y(0)=2 y'(0)=1 com x Є [0, 1]
Observe que a função e sua 1ª derivada estão especificadas para o **ponto inicial** do intervalo da variável independente.

Problema de valor de contorno (PVC)

Equação diferencial de ordem n (n ≥ 2) e mais *n* condições dadas pela função e/ou suas derivadas até ordem *n-1*

EXEMPLO: $y' = \cos(x)$ y(0)=1 y(1)=3 com x Є [0, 1]
Observe que, em geral, as condições são especificadas no **contorno** do domínio da variável independente.

Equações Diferenciais Ordinárias

Problema: $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad x_0 \leq x \leq x_f \quad y(x) = ?$

Em princípio, pode ser resolvido diretamente por Série de Taylor.
O Teorema de Taylor determina que:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h'y(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i)$$

O que, no contexto do problema acima, leva a:
$y'(x) = f(x, y(x))$
$y''(x) = f'(x, y(x))$
$y'''(x) = f''(x, y(x))$

O problema com o método da Série de Taylor é obter as derivadas sucessivas da função que podem ser difíceis.

1) Método de Euler

Seja uma equação diferencial de 1ª ordem: y' = f(x, y), com uma condição inicial $y(x_0) = y_0$.

Problema: $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad x_0 \leq x \leq x_f \quad y(x) = ?$

Seja $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \ldots$). Pelo teorema de Taylor podemos escrever:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi) \quad \text{com } \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

Portanto, como *y'*(x_i) = *f*(x_i, *y*(x_i)), podemos escrever:

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + hf\left(x_i, y(x_i)\right)$$

Portanto, com esta expressão do método de Euler, conhecido o valor y(x_0) (condição inicial) é possível determinar outros valores y(x_i) (i = 1,2, ...) e assim construir uma tabela para a função y(x).

Exemplo: Use o método de Euler para obter uma solução aproximada para o seguinte problema:

y'= -2x-y;   y(0) = -1;   x Є[0,0.5];   h = 0.1

$$y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i)$$

$$y_1 = y_0 + h \times f(x_0, y_0) = -1 + 0.1 \times \left(-2 \times 0 - (-1)\right) = -0.9$$

$$y_2 = y_1 + h \times f(x_1, y_1) = -0.9 + 0.1 \times \left(-2 \times .01 - (-0.9)\right)$$
$$= -0.9 + 0.1 \times 0.7 = -0.83$$

$$y_3 = y_2 + h \times f(x_2, y_2) = -0.789$$

$$y_4 = y_3 + h \times f(x_3, y_3) = -0.7683$$

Exemplo: Resolver o PVI:
y' = 2x+3;   y(1) = 1;   x Є[1.0,1.5];   h = 0.1

y1 = y0 + h.f(x0, y0) = 1.00 + (0.1)f(1.0, 1.00) = 1.00 + (0.1)(2.(1.0)+3) = 1.50

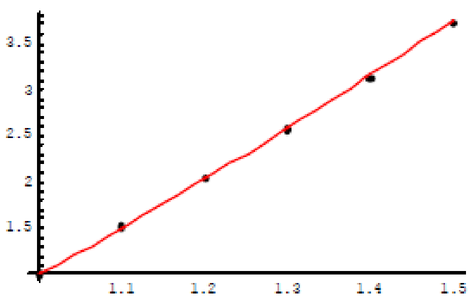
y2 = y1 + h.f(x1, y1) = 1.50 + (0.1)f(1.1, 1.50) = 1.50 + (0.1)(2.(1.1)+3) = 2.02

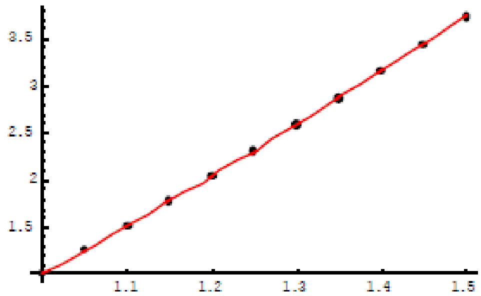
y3 = y2 + h.f(x2, y2) = 2.02 + (0.1)f(1.2, 2.02) = 2.02 + (0.1)(2.(1.2)+3) = 2.56

y4 = y3 + h.f(x3, y3) = 2.56 + (0.1)f(1.3, 2.56) = 2.56 + (0.1)(2.(1.3)+3) = 3.12

y5 = y4 + h.f(x4, y4) = 3.12 + (0.1)f(1.4, 3.12) = 3.12 + (0.1)(2.(1.4)+3) = 3.70

x	y(x)
1.0	1.00
1.1	1.50
1.2	2.02
1.3	2.56
1.4	3.12
1.5	3.70





Solução analítica: $y(x) = x^2+3x-3$ (curva vermelha). À medida que a solução avança, os erros vão se tornando maiores (pois um ponto da solução depende do ponto anterior). Com um passo menor, o erro será menor.

Exercício: Determine o valor de y em x = 1, com erro estimado inferior a 10^{-6}, considerando que y’ = x – y + 2 e y(0) = 2.

Vamos adotar n = 8: número de subdivisões iniciais.

a = 0 $\rightarrow$ x(0) = 0   y(0) = 2   e   f (x,y) = x – y + 2

b = 1 $\rightarrow$ x(8) = 1

h = (1 – 0)/8 = 0,125

2) Método de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são obtidos tomando mais termos nas séries de Taylor para aproximar as soluções das EDO´s. Nesses métodos, se cancelarmos os termos que contém potências de ordens maiores que *p*, então esse método é de ordem *p*. O método de Euler Simples estudado anteriormente é de primeira ordem (*p=1*), por que despreza os termos de ordem 2 e superiores.

Podemos dizer que os métodos de Runge-Kutta de ordem p se caracterizam pelas três propriedades:

i) são de passo simples (cada passo é completo, não necessita de correções ou iterações internas);
ii) não exigem o cálculo de qualquer derivada de f(x,y); mas precisam calcular f(x,y) em vários pontos;
iii) após expandir f(x,y) por Taylor para função de duas variáveis em torno de (x_k,y_k) e agrupar os termos semelhantes, sua expressão coincide com a do método de série de Taylor de mesma ordem.

Os Métodos de Runge-Kutta consistem em métodos de aproximação de 2ª e 4ª ordem.

Métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem

Problema: $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad\quad y(x_0) = y_0 \quad x_0 \leq x \leq x_f \quad y(x) = ?$

No caso do Método de Runge-Kutta de 2ª ordem, a expressão para o cálculo aproximado de y_{i+1} é equivalente à do Método de Euler Modificado, incluindo mais um termo da série:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h'y(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i)$$

que pode ser reescrito na forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k1 + k2)$$

$$k1 = h \times f(x_i, y_i)$$

$$k2 = h \times f(x_i + h, y_i + k1)$$

Exemplo: Use o método de R-K de 2ª ordem para obter uma solução aproximada para o seguinte problema:

`y' = -2x-y;   y(0) = -1;  x ∈[0,0.5];   h = 0.1`

$$k1 = h\times f(x_0, y_0) = 0.1 \times \left(-2\times 0 - (-1)\right) = 0.1\times 1 = 0.1$$

$$k2 = h \times f(x_0 + h, y_0 + k1) = 0.1\times f(0 + 0.1, -1 + 0.1)$$
$$= 0.1\times f(0.1, -0.9) = 0.07$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k1 + k2) = -1 + \frac{1}{2}(0.1 + 0.07) = -0.9150$$

Continuando, temos:

xi	yi	k1	yi+k1	k2
0	-1	0.1	-0.9	0.07
0.1	-0.9150	0.0715	-0.8435	0.0444
0.2	-0.8571	0.0457	-0.8114	0.0211
0.3	-0.8237	0.0224	-0.8013	0.0001
0.4	-0.8124	0.0012	-0.8112	-0.0189
0.5	-0.8212			

Métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem

Problema: $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0 \quad x_0 \leq x \leq x_f \quad y(x) = ?$

Mas agora utilizaremos a Série de Taylor até a 4ª ordem:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h'y(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y''''(x_i)$$

A fórmula do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k1 + 2 \times k2 + 2 \times k3 + k4)$$

$$k1 = h \times f(x_i, y_i)$$

$$k2 = h \times f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}\right)$$

$$k3 = h \times f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2}\right)$$

$$k4 = h \times f(x_i + h, y_i + k3)$$

Exemplo: Use o método de R-K de 4ª ordem para obter uma solução aproximada para o seguinte problema:

`y' = -2x-y;   y(0) = -1;  x ∈[0,0.5];   h = 0.1`

$k1 = h \times f(x_0, y_0) = 0.1 \times [-2 \times 0 - (-1)] = 0.1$

$$k2 = h\ \times f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}\right) = 0.1 \times f(0.05, -0.95)$$
$$= 0.1 \times (-2 \times 0.05 - (-0.95)) = 0.085$$

$$k3 = h\ \times f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2}\right) = 0.1 \times f(0.05, -0.9575)$$
$$= 0.1 \times \left(-2 \times 0.05 - (-0.9575)\right) = 0.1 \times 0.8575$$
$$= 0.08575$$

$$k4 = h\ \times f(x_i + h, y_i + k3) = 0.1 \times f(0.1, -0.91425)$$
$$= 0.1 \times \left(-2 \times 0.1 - (-0.91425)\right) = 0.1 \times 0.71425$$
$$= 0.071425$$

$$y_1 = \ y_0 + \frac{1}{6}(k1 + 2 \times k2 + 2 \times k3 + k4)$$

$$y_1 = \ -1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2 \times 0.085 + 2 \times 0.08575 + 0.071425)$$
$$= -0.9145125$$

Continuando, temos:

xi	yi	k1	k2	k3	k4
0	-1	0.1	0.0850	0.0858	0.0714
0.1	-0.9150	0.0715	0.0579	0.0586	0.0456
0.2	-0.8562	0.0456	0.0333	0.0340	0.0222
0.3	-0.8225	0.0222	0.0111	0.0117	0.0011
0.4	-0.8110	0.0011	-0.0090	-0.0085	-0.0181
0.5	-0.81959				