CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Equações Algébricas e Transcendentes.

Profª. Juliana Eyng, Dra.

Parte 2 – Aula 2

Método de Newton

- Seja f(x) uma função contínua no intervalo [a,b]
- Seja α um zero em [a,b]
- Derivadas f'(x) e f''(x) contínuas em [a,b]
- $f'(x) \neq 0$.
- Podemos encontrar uma aproximação x_k para a raiz α no intervalo [a,b], utilizando a sua expansão em série de Taylor em torno de um valor x_{k-1} estimado

Método de Newton

- Qualquer função f(x) pode ser representada, de forma exata, por uma série de Taylor e a equação f(x) = 0 pode ser representada como segue:

$$\underbrace{f(x)=0}_{\text{eq. original}} \Rightarrow \underbrace{f(x^*)+f'(x^*).\frac{\Delta x^1}{1!}+f''(x^*).\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots=0}_{\text{eq. original com } f(x) \text{ representado em serie}}$$

- Para resolvermos a equação representada em série de Taylor, teríamos que resolver uma equação polinomial em com grau infinito, o que é inviável

Método de Newton

- Newton assumiu que em uma região próxima da raiz α os valores de Δx são suficientemente pequenos. Assim, pode-se representar a função f(x) apenas pelos seus dois primeiros termos da série de Taylor:

$$f(x) \cong f(x^*) + f'(x^*).\Delta x = 0$$

- a equação não linear f(x) = 0 foi substituída por uma equação linearizada aproximada onde a única variável x está presente em $\Delta x = x - x^*$

Método de Newton

- Assim, isolando o x:

$$f(x^*) + f'(x^*).\Delta x = 0$$

$$\Delta x = \frac{-f(x^*)}{f'(x^*)} \Rightarrow x = x^* + \Delta x$$

$$x = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

Aproximação de Newton para a raiz de f(x)=0

Método de Newton

- o valor x da fórmula de Newton é uma aproximação para a raiz de f(x)=0, e não o seu valor exato, porque houve um erro de truncamento da série de Taylor representativa de f(x).

- Para melhorar a aproximação x da raiz de f(x) = 0, podemos adotá-la como um novo valor estimado x^* ou x_k para uma segunda avaliação, ou seja, uma segunda iteração:

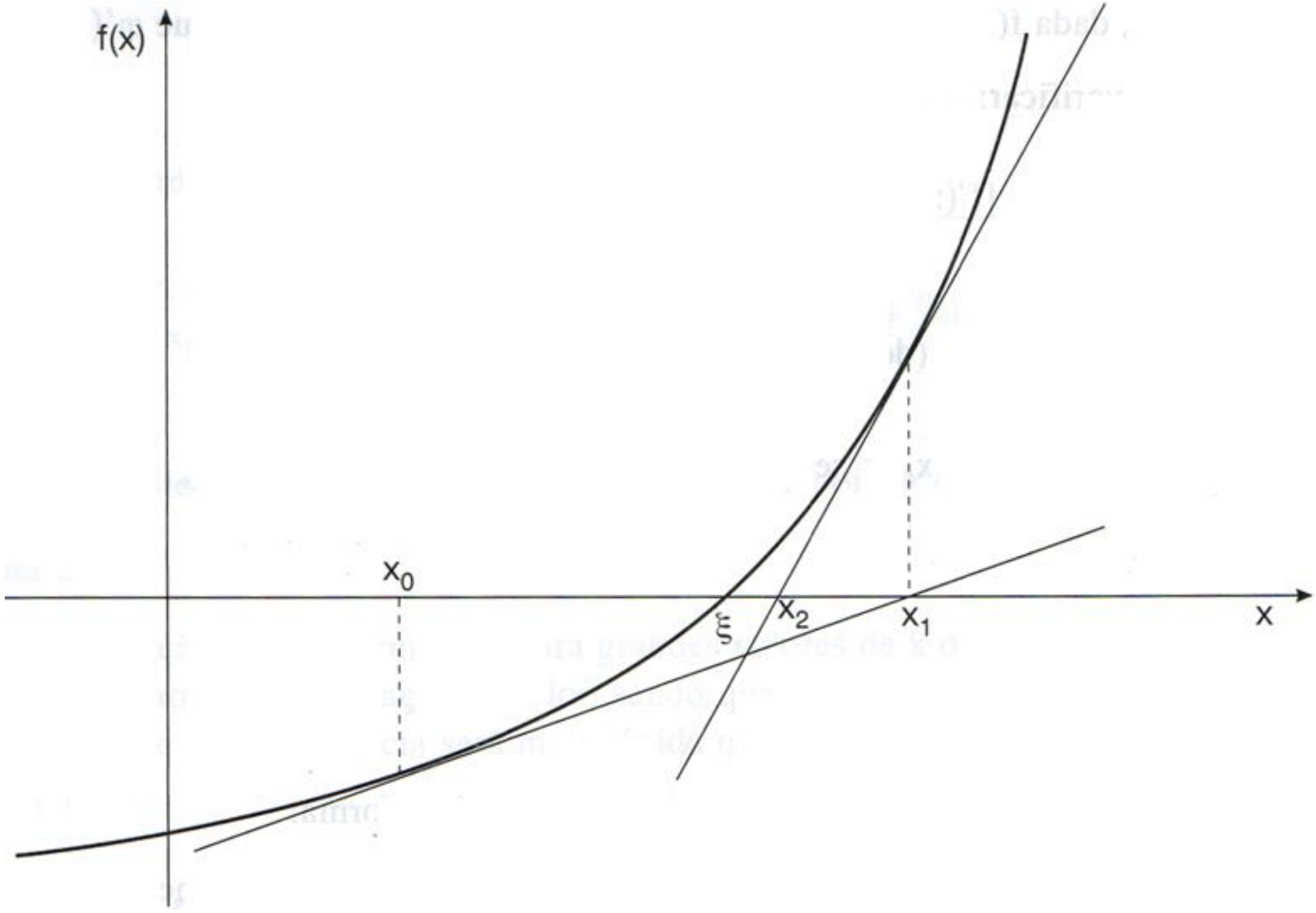
Método de Newton

- Processo iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- O método de Newton tem convergência rápida
- A convergência é quadrática, isto é, o erro da iteração (k+1) é aproximadamente o quadrado do erro da iteração k

Método de Newton



Método de Newton

- Exemplo: Obtenha por Newton uma raiz de:

  $f(x) = e^x - x - 1$ $\quad$ $f'(x) = e^x - 1$

- Aplicando a fórmula do método de Newton vem:

  $x_0 = 1$; $x_1 = 0,58198$; $x_2 = 0,31906$; ...

  $x_4 = 0,08635$; ...

  $x_7 = 0,01107$; $x_8 = 0,005545$; ...

  $x_{13} = 1,7416 \times 10^{-4}$

  $x_{14} = 8,8041 \times 10^{-5}$

Método de Newton

- Newton pode não convergir:
  - se x_0 é inadequado (onde a tangente não corta o eixo tão logo)
  - se pegar um ponto crítico (onde a derivada vale zero)
- Soluções para estes problemas:
  - escolher x_0 o mais próximo possível de α;
  - para se evitar a divisão por zero pode-se utilizar um variante do método de Newton: o método da Secante.

Método da Secante

- Pode ser muito difícil, ou até impossível, para o usuário obter a derivada explícita de f'(x)
- Como refinar a raiz pelo método de Newton sem explicitar a f'(x)?
- Por definição, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Método da Secante

- se *h* for pequeno

$$f'(x) \cong \frac{f(x+) - f(x)}{h}$$

ou

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Método da Secante

- Substituindo $f'(x_k)$ na expressão do método de Newton tem-se:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

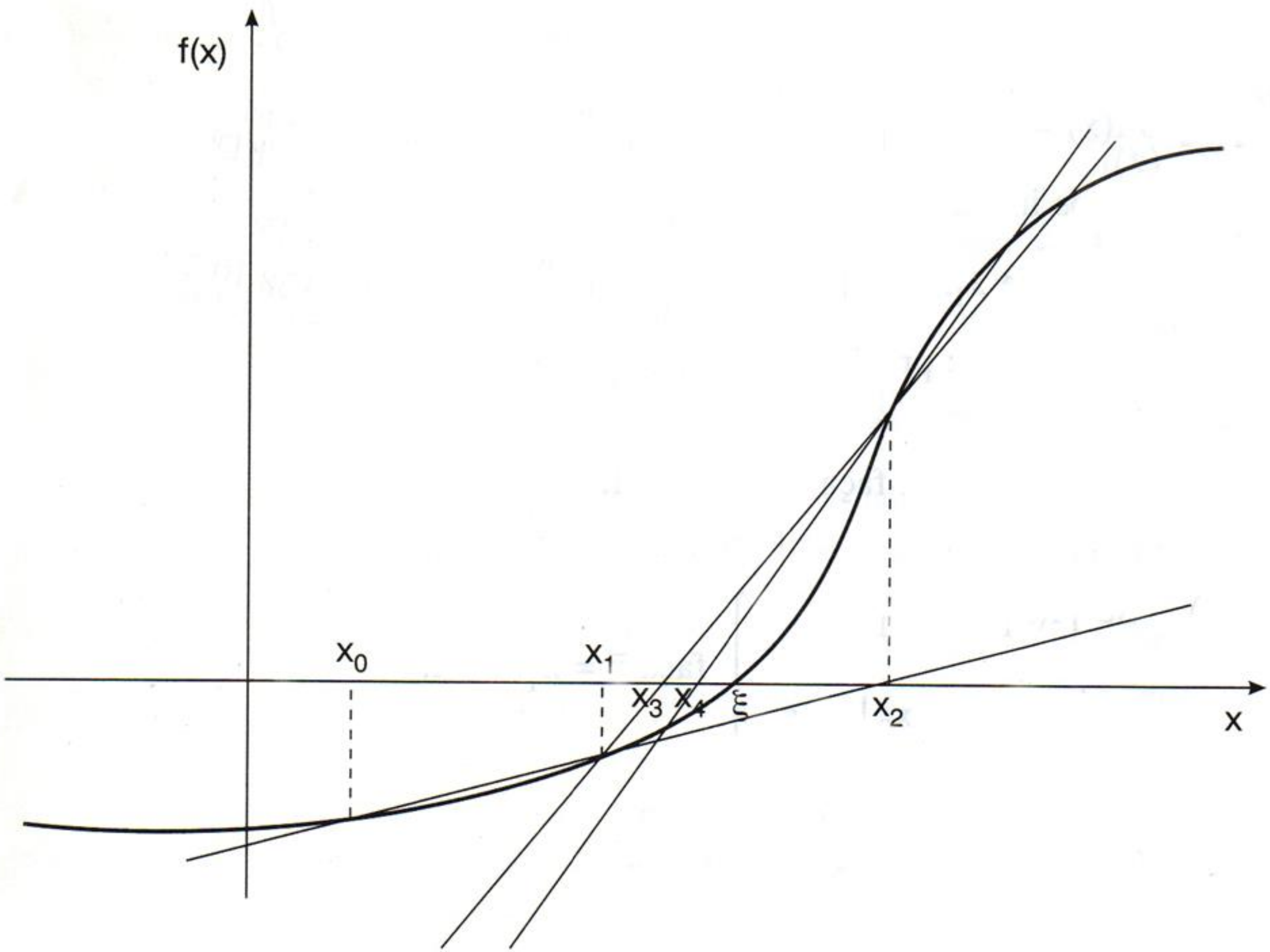
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1}).f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método da Secante

Método da Secante

- As iterações x_k do método das secantes convergem para uma raiz de *f*, se os valores iniciais de x_0 e x_1 estiverem suficientemente próximas da raiz.
- A ordem de convergência do método vale sob certas condições técnicas:
  - *f* deve ser duas vezes contínua e diferenciável
  - a raiz em questão deve ser simples (não deve ser uma raiz múltipla).

Método da Secante



Método da Secante

- Se os valores iniciais não estiverem próximos da raiz, não se pode garantir que o método convirja.

- Exemplo:
- Determine, de forma numérica, o valor da $\sqrt{5}$ pelos métodos de Newton e da Secante ($f(x) = x^2 - 5$) com $x_0 = 2$.

Critério de parada: $|f(x)| < 10^{-3}$ (Newton com 3 iterações xk = 2,2361)

Critério de parada: $|f(x)| < 10^{-3}$ (Newton com 5 iterações xk = 2,2361)

Comparação entre os Métodos

- O método da Bisseção sempre converge para uma solução
- O esforço computacional do método da bisseção cresce demasiadamente quando se aumenta a exatidão da raiz desejada
- Deve ser usado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz para posterior aplicação de outro método, como o método de Newton, por exemplo
- O método da Secante é uma aproximação para o método de Newton
- Ao contrário do método da Bisseção o método da Secante e de Newton podem não convergir

Comparação entre os Métodos

- O método da bisseção é bastante simples por não exigir o conhecimento da derivada da equação em questão, porém possui uma convergência lenta
- O método de Newton é o que apresenta a convergência mais rápida, porém exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão
- O método da Secante é mais lento que o de Newton, porém não exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão