Capítulo 4 – Resolução de Sistemas Não Lineares

Exemplo: Sistemas de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_n + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \cong \mathrm{A}x = \mathrm{B}$$

Definição 1- Um sistema de n equações *não lineares* a n incógnitas é toda expressão do tipo:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad \cong F(X) = 0$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2^3 = 3 \\ 3x_1^2 + x_2^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^3 - 3 \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b)\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_1 x_3) = 0{,}5 \\ x_1^3 - x_1 x_2 x_3 = 5 \\ e^{x_1 x_2} - \ln(x_1^2 + x_2 x_3) = 0 \end{cases}$$

Definição 2 - Solução de F(X) = 0 é todo vetor (= matriz linha) X = [x_1, x_2, ..., x_n] tal que F(X) = 0.

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow X = [0{,}604068; 1{,}655442]$$

Método de Newton

No sistema F(X) = 0, tomando X^0 como solução inicial e aplicando Newton vem:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(X^k)}{F'(X^k)} \qquad (1)$$

$$\text{onde } F'(X^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matriz de derivadas parciais (não - singular)

A matriz (n x n) das derivadas parciais de F(X) é denominada de matriz Jacobiana de F(X). Note que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$$

Vamos denotar $F'(X^k) = J(X^k)$. Daí de (1) tem-se que:

$$X^{k+1} = X^k - J^{-1}(X^k).F(X^k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{k} \\ \vdots \\ x_n^{k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_n / \partial x_1 & \cdots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ \vdots \\ \mathrm{x}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^{k} \\ \vdots \\ x_n^{k} \end{bmatrix}} = - \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_n / \partial x_1 & \cdots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{f}_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_n / \partial x_1 & \cdots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{\mathrm{n}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

que é um sistema linear (n x x), cuja solução fornece δ, onde:

$\delta = X^{k+1} - X^k \Rightarrow X^{k+1} = \delta + X^k$

<u>Conclusão</u>: Para resolver F(X) = 0 tem-se que gerar e resolver k sistemas lineares, um para cada iteração requerida.

Exemplo: Resolver $\begin{cases} e^{x_1} + x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases}$ por Newton com $X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e 3 iterações.

Solução:

Temos F(X) = $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = e^{x_1} + x_2 - 1 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \end{cases}$

$$J(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando (2) temos:
1ª iteração:

$$\begin{bmatrix} e^1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e-2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0{,}0758 \\ \delta_2 = -0{,}9241 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1{,}0758 \\ x_2 = -1{,}9241 \end{cases}$$

Desvio total = $\sum |\delta|$ =0,9999

2ª iteração:

$$\begin{bmatrix} 2{,}933 & 1 \\ 2{,}152 & -3{,}848 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0089 \\ -0{,}859 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = -0{,}0598 \\ \delta_2 = 0{,}184 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 1{,}1062 \\ x_2^2 = -1{,}74 \end{cases}$$

Desvio = 0,2438

3ª iteração:

$$\begin{cases} x_1^3 = 1{,}003 \\ x_2^3 = -1{,}728 \end{cases} \qquad \text{Solução Exata} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 - e \end{cases}$$

Considerações:

- Além da necessidade do X^0, o maior problema do Newton em $F(X) = 0$ é a necessidade das n^2 derivadas parciais para uso na Jacobiana $J(X)$.

- A alternativa mais simples para se contornar o problema consiste em se simular as n^2 derivadas parciais através do próprio computador. De que maneira?

$\Rightarrow$ Por definição sabemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\Rightarrow$ Por extensão:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{j+h}, \ldots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cong \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{j+h}, \ldots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x_{1+h}, \ldots) - f_1(x_1, \ldots, x_n)}{h} & \frac{f_1(x_1, x_{2+h}, \ldots) - f_1(x_1, \ldots, x_n)}{h} & \cdots \\ \frac{f_2(x_{1+h}, \ldots) - f_2}{h} & \cdots & \frac{f_2(\ldots x_{n+h}) - f_2}{h} \\ \vdots & & \\ \frac{f_n(x_{1+h}) - f_n}{h} & \cdots & \frac{f_n(\ldots x_{n+h}) - f_n}{h} \end{bmatrix}$$

Custo computacional = $n^2 + n$

Exemplo: Resolver $\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 - e^{x_2} \end{cases}$ por Newton/Simulação

$$X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ h = 0{,}1 \ \text{ e } \ \varepsilon = 10^{-5}$$

Solução:

Temos $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 1 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - e^{x_2} \end{cases}$ e $X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1ª iteração:

$$\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1,718 \end{bmatrix}$$

Achando a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}:

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cong \frac{f_1(x_1^0 + h, x_2^0) - f_1(x_1^0, x_2^0)}{h} = \frac{(1,1 * 1 - 1) - 0}{0,1} = 1$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cong \frac{(1 * 1,1 - 1) - 0}{0,1} = 1$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cong \frac{f_2(x_1 + h, x_2) - f_2(x_1, x_2)}{h} = \frac{(1,1 - e^1) - (1 - e^1)}{0,1} = 1$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cong \frac{f_2(x_1, x_2 + h) - f_2(x_1, x_2)}{h} = \frac{(1 - e^{1,1}) - (1 - e^1)}{0,1} = -2,859$$

Assim teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2,859 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1,718 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0,445 \\ \sigma_2 = -0,445 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^1 = 1,445 \\ x_2^1 = 0,555 \end{cases}$$

2ª iteração:

$$\begin{bmatrix} 0,555 & 0,151 \\ 1 & -1,931 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,198 \\ 0,287 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0,348 \\ \sigma_2 = 0,0316 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 1,793 \\ x_2^2 = 0,587 \end{cases}$$

Repetimos isto até que na sexta iteração teremos:

$$\begin{cases} x_1^6 = 1,76322 \\ x_2^6 = 0,56714 \end{cases}$$