CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Sistemas de Equações Lineares

Profª. Juliana Eyng, *Drª.*

PARTE 3 – AULA 3

Método de Decomposição LU

- Nesta família de métodos diretos para a solução de um sistema linear faz-se uso do fato de que, sob certas condições, uma matriz quadrada pode ser decomposta no produto de duas matrizes triangulares.
- Uma destas variações do procedimento geral de eliminação é conhecida como método de Crout (ou Cholesky para o caso particular de matrizes simétricas positivas definidas).

Método de Decomposição LU

- A matriz A pode ser decomposta no produto A=LU, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior (matriz não singular Det (A) $\neq$ 0);
- Se atribuirmos valores fixos aos elementos da diagonal, esta decomposição será única:
  - A matriz triangular L (l_{ii} = 1) no Método de Doolitle

  ou

  - A matriz triangular U (u_{ii} = 1 no Método de Crout),

Método de Decomposição LU

- A matriz A pode ser decomposta no produto A=LU, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior (matriz não singular Det (A) $\neq$ 0);
- Se atribuirmos valores fixos aos elementos da diagonal, esta decomposição será única:
  - A matriz triangular L (l_{ii} = 1) no Método de Doolitle

ou

  - A matriz triangular U (u_{ii} = 1 no Método de Crout),

Método de Decomposição LU

- Para a solução de A x = b, pode-se decompor A segundo o Método de Crout, conforme segue:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2n} \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Decomposição LU

- Então, A = LU
- O sistema torna-se LUx = b fazendo Ux = y,
- resolve-se primeiro Ly = b e depois Ux = y.
- Para um sistema 3x3 podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Decomposição LU

- A multiplicação de matrizes LU pode ser usada para definir os valores de l_{ij}, u_{ij} e y_{ij} em termos de a_{ij} e b_{ij} :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11}.1 + 0.0 + 0.0 & l_{11}.u_{12} + 0.1 + 0.0 & l_{11}.u_{13} + 0.u_{23} + 0.1 \\ l_{21}.1 + l_{22}.0 + 0.0 & l_{21}.u_{12} + l_{22}.1 + 0.0 & l_{21}.u_{13} + l_{22}.u_{23} + 0.1 \\ l_{31}.1 + l_{32}.0 + l_{33}.0 & l_{31}.u_{12} + l_{32}.1 + l_{33}.0 & l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + l_{33}.1 \end{bmatrix}$$

Método de Decomposição LU

- Como o produto LU gera a matriz A original, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} l_{11}.1 + 0.0 + 0.0 = a_{11} & l_{11}.u_{12} + 0.1 + 0.0 = a_{12} & l_{11}.u_{13} + 0.u_{23} + 0.1 = a_{13} \\ l_{21}.1 + l_{22}.0 + 0.0 = a_{21} & l_{21}.u_{12} + l_{22}.1 + 0.0 = a_{22} & l_{21}.u_{13} + l_{22}.u_{23} + 0.1 = a_{23} \\ l_{31}.1 + l_{32}.0 + l_{33}.0 = a_{31} & l_{31}.u_{12} + l_{32}.1 + l_{33}.0 = a_{32} & l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + l_{33}.1 = a_{33} \end{cases}$$

- Cuja solução pode ser obtida de forma direta tratando pivôs sequencialmente:

Método de Decomposição LU

- Para a primeira coluna e primeira linha (k=1):

$$l_{11}.1 + 0.0 + 0.0 = a_{11} \qquad l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21}.1 + l_{22}.0 + 0.0 = a_{21} \qquad l_{21} = a_{21}$$

$$l_{31}.1 + l_{32}.0 + l_{33}.0 = a_{31} \qquad l_{31} = a_{31}$$

$$l_{11}.u_{12} + 0.1 + 0.0 = a_{12} \qquad u_{12} = a_{12} / l_{11}$$

$$l_{11}.u_{13} + 0.u_{23} + 0.1 = a_{13} \qquad u_{13} = a_{13} / l_{11}$$

Método de Decomposição LU

- Para a segunda coluna e segunda linha (k=2):

$$l_{21}.u_{12} + l_{22}.1 + 0.0 = a_{22}$$
$$l_{31}.u_{12} + l_{32}.1 + l_{33}.0 = a_{32}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}.u_{12}$$
$$l_{32} = a_{32} - l_{31}.u_{12}$$

$$l_{21}.u_{12} + l_{22}.1 + 0.0 = a_{22}$$
$$l_{31}.u_{12} + l_{32}.1 + l_{33}.0 = a_{32}$$

$$u_{23} = (a_{23} - l_{21}.u_{13}) / l_{22}$$

Método de Decomposição LU

- Para a terceira coluna (k=3):

$$l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + l_{33}.1 = a_{33}$$

$$l_{33} = (a_{33} - (l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23}))$$

Método de Decomposição LU

- Resumindo:

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21} = a_{21} \qquad u_{12} = a_{12} / l_{11}$$

$$l_{31} = a_{31} \qquad u_{13} = a_{13} / l_{11} \qquad y_1 = b_1 / l_{11}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \qquad u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13}) / l_{22}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} \qquad y_2 = (b_2 - l_{21}y_1) / l_{22}$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \qquad y_3 = (b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2) / l_{33}$$

Método de Decomposição LU

- O cálculo de y, do sistema Ly = b pode ser feito da mesma forma que o cálculo de U.

1) Calcular a primeira coluna de L, calcular a primeira linha de U e y_1;

2) Calcular a segunda coluna de L, calcular a segunda linha de U e y_2; e assim sucessivamente.

- Os valores de x são obtidos por substituição sucessiva a partir de y (Ux = y)

$$x_3 = y_3 \qquad x_2 = y_2 - u_{23}x_3 \qquad x_1 = y_1 - u_{13}x_3 - u_{12}x_2$$

Método de Decomposição LU

- De uma forma geral, para sistemas de ordem n:
  - Operações com o primeiro pivô: k = 1

$$\mathrm{l}_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mathrm{u}_{1j} = \mathrm{a}_{1j} / \mathrm{l}_{11} \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1$$

- Com pivô genérico: k = 2,3,...,n

$$\mathrm{l}_{ik} = \mathrm{a}_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \mathrm{l}_{ir} \mathrm{u}_{rk} \qquad \mathrm{u}_{kj} = \frac{1}{\mathrm{l}_{kk}} \left(\mathrm{a}_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} \mathrm{l}_{kr} \mathrm{u}_{rj} \right)$$

$i \geq k \;\; (i = k, k+1, \ldots, n) \qquad j > k \;\; (j = k+1, \ldots, n+1)$

Método de Decomposição LU

- Exemplo: Usando o método de Crout resolva:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

- Determine as matrizes L e U
- Resolva Ax=b $\rightarrow$ L(Ux)=b $\rightarrow$ Ly=b $\rightarrow$ Ux=y
- Solução: $x_1 = 2$ $x_2 = 1$ $x_3 = -1$