CÁLCULO NUMÉRICO EM COMPUTADORES

Sistemas de Equações Lineares

Profª. Juliana Eyng, *Drª.*

PARTE 3 - AULA 1

Sistemas de Equações Lineares

- Quando várias equações lineares são agrupadas, de modo que todas devam ser satisfeitas simultaneamente por uma mesma solução, tem-se um sistema de equações lineares.
- Existem aplicações de sistemas de equações lineares nos mais variados segmentos da ciência e tecnologia.

Sistemas de Equações Lineares

- Def.: Um sistema de ordem n, constituído por n equações lineares a n incógnitas, é toda expressão do tipo:

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- A é a matriz de coeficientes, x é o vetor de incógnitas e b é o vetor de termos independentes.

Sistemas de Equações Lineares

- Exemplos de sistemas de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Representação matricial do sistema

- A resolução de sistemas de equações lineares pode ser obtida através de métodos diretos ou indiretos (iterativos).

Sistemas de Equações Lineares

- **Métodos Diretos:**
- São métodos que permitem obter a solução do sistema realizando-se um número finito de operações aritméticas.
- O esforço computacional necessário para se obter uma solução do sistema é perfeitamente previsível.
- Esta solução seria exata se não fosse a presença de erros de arredondamento.

Sistemas de Equações Lineares

- **Métodos Diretos:**
- São normalmente empregados a sistemas lineares com matrizes de coeficientes densas e de porte médio (até 1000 equações).
- Dentre os métodos diretos mais comuns estão:
  - Eliminação de Gauss
  - Decomposição LU

Método de Eliminação de Gauss

- Consiste na transformação da matriz expandida (matriz de coeficientes acrescida da coluna de termos independentes) em matriz triangular, superior ou inferior, seguida de um processo de substituições sucessivas para explicitar a solução do sistema;
- Esta transformação em matriz triangular (ou escalonamento) é conseguida através da aplicação sucessiva de operações elementares sobre linhas (ou sobre colunas) na matriz expandida;

Método de Eliminação de Gauss

- Transformando o sistema original num sistema equivalente, buscando a eliminação seletiva de elementos não nulos para torna-la uma matriz triangular.
- Podemos associá-lo a um processo de pivotamento, parcial ou total, que promove uma troca seletiva de linhas (ou colunas), visando tomar pivôs (elementos da diagonais principais) com maior módulo possível, e assim procurando evitar a presença de pivôs nulos.

Método de Eliminação de Gauss

- Ex.: Resolver o seguinte sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss **sem pivotamento** adotando operações aritméticas com 4 (quatro) dígitos significativos e arredondamento ponderado.

$$\begin{cases} -0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 = 0 \\ 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

- Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1º) Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

2º) Triangularização correspondente a primeira coluna (k = 1):

$$\left[\begin{array}{ccc:c} (-0.421) & 0.784 & 0.279 & 0 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 0.448/(-0.421)L_1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 + 1.064L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 0.421/(-0.421)L_1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -0.421 & 0.784 & 0.279 & 0 \\ 0 & 1.666 & 0.4899 & 1 \\ 0 & 1.568 & 0.0720 & 0 \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

3º) Triangularização correspondente a segunda coluna (k = 2):

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0 & (1.666) & 0.4899 & \vdots & 1 \\ 0 & 1.568 & 0.0720 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1.568/1.666)L_2 \end{array}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 0.9412 L_2$$

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0 & 1.666 & 0.4899 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -0.3834 & \vdots & -0.9412 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

- Processo de retrosubstituição sucessiva:
  - Após a triangularização analisa-se o sistema de equações equivalente, gerado a partir do processo de eliminação empregado:

$$\begin{cases} -0.421x_1 + 0.784x_2 + \ \ 0.279x_3 = 0 \\ 0x_1 + 1.666x_2 + 0.4899x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0.3834x_3 = -0.9412 \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

- $x_3 = -0.9412/(-0.3834)$
  $x_3 = 2.4548$

- $x_2 = (1 – 0.4899.x_3) / 1.666$
  $x_2 = -0.1216$

- $x_1 = (- 0.784.x_2 – 0.279.x_3) /(-0.421)$
  $x_1 = 1.4005$

Método de Eliminação de Gauss

- Avaliando os resíduos (r = | b - A x |) de cada uma das equações do sistema linear

$$r_1 = |-0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 - 0| = 0.0000$$

$$r_2 = |\ 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 - 1| = 0.0000$$

$$r_3 = |\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 - 0| = 0.0000$$

- Normalmente são obtidos valores residuais não nulos das equações, decorrentes de erros de arredondamento.

Método de Eliminação de Gauss

- Também pode ser calculado o erro exato, dado por erro = $| X_{exato} - X_{aproximado} |$

- A solução exata foi encontrada através do MATLAB, e foi obtida com 16 dígitos significativos :

  - $Xexato_1 = \quad 1.39628656...$
  - $Xexato_2 = -0.11108021803$
  - $Xexato_3 = \quad 2.4190803038$

Método de Eliminação de Gauss

- Exercício: usando a eliminação de Gauss resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

- Solução:

$x_3 = -1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$

Algoritmo

- *1 º passo*) pivô é a primeira equação (a_{11}):
  - usar a 1ª equação para produzir n-1 zeros como coeficientes para cada x_1 em todas as equações exceto a primeira
  - isto é feito subtraindo-se múltiplos apropriados da 1ª equação das demais
  - a 1ª equação é chamada de a 1ª *equação pivô* e permanece inalterada
  - para cada equação restante ($2 \leq i \leq n$), computar:

$$\begin{cases} a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \left(\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{1j} & (1 \leq j \leq n) \\ b_i \leftarrow b_i - \left(\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right) b_1 \end{cases}$$

Algoritmo

- os valores (a_{i1}/a_{11}) são chamados de multiplicadores
- depois deste 1º passo o sistema ficará:

pivô

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Algoritmo

- *2 º passo*) pivô é a segunda equação (a_{22}):
  - A 1º equação não é mais alterada e nem os coeficientes de x_1. Portanto pode-se ignorar a 1ª linha e a 1ª coluna e repetir o processo no sistema menor (n-1 x n-1)
  - Com a 2ª equação como pivô, calcula-se as equações que restam

$$\begin{cases} a_{ij} \leftarrow a_{ij} - (a_{i2}/a_{22})a_{2j} \\ b_i \leftarrow b_i - (a_{i2}/a_{22})b_2 \end{cases} \qquad (2 \le j \le n)$$

Algoritmo

- De forma geral:

$$\begin{cases} a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \left(\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \right) a_{kj} & (k \leq j \leq n) \\ b_i \leftarrow b_i - \left(\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \right) b_k \end{cases}$$

Algoritmo

- Etapa de retrosubstituição

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\[2em] x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right) \quad , \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1 \end{cases}$$