ГЕОДЕЗИСТ

Дано: $N+1$ координат X_n, Y_n в исходной системе

и $N+1$ соответствующих им координат x_n, y_n в целевой системе

$(n = 0 \ldots N)$

выбираем каким либо образом «центры» X_m; Y_m и соответствующие им x_m; y_m.

Вычисляем:

$$U_n = scale_b\left(X_n - X_m\right); \quad V_n = scale_b\left(Y_n - Y_m\right);$$

$$u_n = scale_s\left(x_n - x_m\right); \quad v_n = scale_s\left(y_n - y_m\right);$$

Здесь scale — масштаб, который для наборов $\{X_n, Y_n\}$ и $\{x_n, y_n\}$ может быть разным.

От выбора величин масштабов во многом зависит успех численного решения.

Диапазон изменения $\{U_n; V_n\}$ и $\{u_n; v_n\}$ желательно привести к $[-1; +1]$

С помощью аналитической функции F можно отобразить поверхность,

в которой заданы $\{U_n; V_n\}$ на поверхность $\{u_n; v_n\}$:

$$(u + iv) = F(U + iV); \quad i^2 = -1$$

Разлагая F в ряд, для конформного отображения можно записать:

$$(u + iv) = (A_1 + iA_2)\cdot(U + iV) + (A_3 + iA_4)\cdot(U + iV)^2 + (A_5 + iA_6)\cdot(U + iV)^3 + (A_7 + iA_8)\cdot(U + iV)^4 + \cdots$$

Разделяя действительную и мнимую часть получим :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & -V & U^2 - V^2 & -2UV & U^3 - 3UV^2 & -(3VU^2 - V^3) & U^4 - 6U^2V^2 + V^4 & -(4U^3V - 4UV^3) \\ V & U & 2UV & U^2 - V^2 & (3VU^2 - V^3) & U^3 - 3UV^2 & (4U^3V - 4UV^3) & U^4 - 6U^2V^2 + V^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что столбец коэффициентов $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_L \end{pmatrix}^T$ *умножается слева на матрицу, элементами которой являются гармонические полиномы* P_k *и* Q_k *:*

$P_o = 1; \quad Q_0 = 0;$

$P_1 = U; \quad Q_1 = V;$

$P_k = P_1 P_{k-1} - Q_1 Q_{k-1} = UP_{k-1} - VQ_{k-1}$

$Q_k = P_1 Q_{k-1} + Q_1 P_{k-1} = UQ_{k-1} + VP_{k-1}$

Тогда имеем:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & -Q_1 & P_2 & -Q_2 & P_3 & -Q_3 & P_4 & -Q_4 \\ Q_1 & +P_1 & Q_2 & +P_2 & Q_3 & +P_3 & Q_4 & +P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{pmatrix}$$

Найдя коэффициенты $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_L \end{pmatrix}^T$, *координаты для любой точки можно рассчитать по формулам:*

$$x = x_m + \frac{1}{scale_s} \sum_{n=1}^{M} \left(A_{2n} P_n - A_{2n+1} Q_n \right)$$

$$y = y_m + \frac{1}{scale_s} \sum_{n=1}^{M} \left(A_{2n} Q_n + A_{2n+1} P_n \right)$$

...