Inhoudelijk praten over wiskunde
Hoe doe je dat?

Onderzoeksproject in het kader van het NWO programma Leraar in onderzoek

Drs. Sonia Palha
Oosterlicht College
Freudenthal Institute for
Science and Mathematics Education

Utrecht, juni 2008

Hoofdbegeleider:
Koeno Gravemeijer, FIsme, Universiteit Utrecht

ALGEMENE INLEIDING 4

1 INLEIDING 5

1.1 Aanleiding 5
1.2 Wettenschappelijk belang 5
1.3 Uitvoering 6
1.4 Probleemstelling 6

2 THEORETISCH KADER 7

2.1 Inleiding 7
2.2 Wiskunde als menselijke activiteit 7
2.2 Optreden van niveauverhoging 8
2.4 Aanzetten tot reflectie 11
2.5 Ontwikkeling van 'educated speech' 12
2.6 Ontwikkeling van 'mathematical interest' 14
2.7 Intermezzo 14
2.8 Ontwikkeling van sociale en socio- wiskundige normen 15
2.9 Het creëren van een geschikte klassencultuur 16
2.10 Geschikte opdrachten 17
2.11 Het handelen van de docent 19
2.12 Intermezzo 20

3 ONDERZOEKSOPZET 22

3.1 Inleiding 22
3.2 Literatuuronderzoek 22
3.3 Onderzoeksvragen 22
3.4 Analyses van lessen 22
3.5 Vergelijken lespraktijk met theorie 24

4 OBSERVATIES EN ANALYSES VAN LESSEN 25

4.1 Inleiding 25
4.2 Jan in 6 vwo 26
4.2.1 Scenario 26
4.2.2 Voor- en- nabespreking 26
4.2.3 Werken aan de opgaven 27
4.2.4 Reflectie 30
4.3 Cees in 5 vwo 31
4.3.1 Scenario 31
4.3.2 Voor- en nabespreking 32
4.3.3 Klassikaal groepsgesprek 32
4.3.4 Groepswerk 36
4.3.5 Reflectie 38
4.4 Guus in 5 havo 39
4.4.1 Scenario 39
4.4.2 Voor- en nabespreking 40
4.4.3 Klassikaal gesprek 40
4.4.4 Groepswerk 45
4.4.5 Reflectie 47

5 CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN 48

5.1 Overeenkomsten tussen theorie en praktijk 48
5.2 Aanvullingen vanuit de lespraktijk 51

5.3 Vragen voor verder onderzoek 52
5.4 Slotconclusie en aanbevelingen 53

NAWOORD 56

LITERATUUR 57

Bijlage 1: Protocol lesfragment. Cees, 8 december 2006, 5 vwo B1,2 58
Bijlage 2: Protocol lesfragment. Guus, 12 december 2007, 5 havo B1 62
Bijlage 3: Opdrachten Jan 64
Bijlage 4: Opdrachten Guus 66
Bijlage 5: Beschrijving workshop 68

Algemene inleiding

Inhoudelijk praten over wiskunde is een onderzoeksproject in het kader van het NWO-programma 'Leraar in Onderzoek'. De onderzoeker is op 1 april 2006 officieel begonnen en heeft er gedurende twee jaar één dag per week aan gewerkt. Het onderzoek vond plaats op het Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (FIsme) van de Universiteit Utrecht onder de begeleiding van Koeno Gravemeijer (FIsme), Rijkje Dekker (UvA) en Joke Daemen (IVLOS).
In dit onderzoeksproject wordt het belang van wiskunde inhoudelijk besproken, wordt het leren ervan onderzocht en wordt gekeken naar hoe wiskundedocenten dit soort gesprekken in de lespraktijk kunnen inzetten.

Dit onderzoeksrapport bevat vijf hoofdstukken plus **literatuur** en **bijlagen**.

In **hoofdstuk 1** worden de aanleiding voor dit onderzoek, de context waarbinnen dit onderzoek plaatsvond en de vraagstelling beschreven.

Hoofdstuk 2 bestaat uit het theoretische kader. Vanuit het perspectief van realistisch wiskundeonderwijs wordt beschreven op welke wijze gesprekken over wiskunde belangrijk zijn voor het leren van wiskunde. Hierbij wordt een verband gelegd tussen wiskunde gesprekken, reflectie en niveauverhoging.
Het inzetten van gesprekken over wiskunde in de praktijk is niet gemakkelijk. In dit hoofdstuk wordt vanuit een theoretisch kader gekeken naar aspecten die invloed hebben op het succes ervan en naar de rol van de docent daarbinnen. In het bijzonder wordt gekeken naar de klassencultuur, de selectie van opdrachten en het handelen van de docent.

Hoofdstuk 3 beschrijft de onderzoeksopzet.

Hoofdstuk 4 betreft het experimentele gedeelte van dit onderzoek. In dit hoofdstuk worden lessen van drie ervaren docenten in het voortgezet onderwijs geobserveerd en op video vastgelegd: Jan in 6 vwo, Cees in 5 vwo en Guus in 5 havo. Er wordt een selectie van relevante lesfragmenten gemaakt, die vanuit een theoretisch kader worden geanalyseerd.

In **Hoofdstuk 5** worden resultaten uit het experimentele gedeelte met de theorie vergeleken. We stellen daarbij de volgende vragen
(a) welke aspecten uit de geanalyseerde lessen komen wel en/of niet in de theorie voor?
(b) zijn er relevante aspecten uit de lespraktijk die in de theorie niet genoemd worden?
Vervolgens worden belangrijke resultaten uit de theorie toegelicht met lessenvoorbeelden. Dit leidt tot aanbevelingen die docenten kunnen helpen bij het inzetten van inhoudelijke gesprekken over wiskunde.

Ten slotte wordt in het nawoord aangegeven welke activiteiten in het kader van dit project zijn uitgevoerd en welke producten dit onderzoek heeft opgeleverd.

1 Inleiding

1.1 Aanleiding

Persoonlijke motivatie

Wiskundelessen geven binnen realistisch wiskundeonderwijs is niet gemakkelijk. Naast een goede wiskundige kennis en pedagogische en didactische competenties doet dit soort wiskundeonderwijs een groot beroep op persoonlijke en communicatieve vaardigheden. Het begint bij de leerling: wat zijn zijn verwachtingen en kennis? Hoe kan ik hem betrekken bij het leren van wiskunde? Hoe leer ik ze wiskunde, zodat ze niet alleen de vakkennis beheersen maar ook een wiskundige houding en interesse ontwikkelen? Er bestaan geen eenduidige antwoorden op deze vragen, vermoed ik. Maar mijn leservaring vertelt me wel dat het praten over wiskunde een belangrijke rol speelt bij het leren van wiskunde. Ja, natuurlijk zijn wiskundige gesprekken belangrijk voor de uitwisseling van kennis, interactie en het geven van de juiste feedback, maar er is ook iets anders. Er gebeurt iets als men gedachten in woorden uitdrukt. Worden dingen daardoor meer reëel? Krijgen ze meer betekenis? Ik heb ooit iets gelezen dat diepe indruk op mij heeft gemaakt:

> "Door het praten over de eigen kennis is er sprake van bewuste kennis en daardoor is reflectie op de kennis zelf mogelijk"(Dolk, 1997).

Ik wil meer weten over het belang van gesprekken over wiskunde en op het leren ervan. Ik wil mijn leerlingen stimuleren om over wiskunde te gaan praten. De vraag echter is: hoe doe ik dat?

Een iets bredere motivatie

Afgelopen jaren is het aantal contacturen voor wiskunde in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs drastisch gedaald. Vanaf 2007 werd dit aantal nog kleiner als gevolg van hervorming van het huidige wiskunde B programma. De resultaten van dit onderzoek beogen de kwaliteit van de contacturen te verhogen.
Ook de didactiek van wiskunde is de afgelopen jaren sterk veranderd. Steeds meer wordt de nadruk op zelfstandig leren gelegd. Dit wordt door sommige docenten en leerlingen als individueel werken geïnterpreteerd. Volgens cTWO (visie document, 30 maart 2007) kwam er weinig terecht van niveauverhoging door middel van interactief en activerend onderwijs in de vorm van het studiehuis (geïntroduceerd in 1998). Interactie met en tussen leerlingen, voorwaarde voor het bereiken van hogere leerdoelen waarvoor interactieve reflectie en het expliciteren van concepten en denkmethoden noodzakelijk zijn komt, volgens de commissie, weinig voor.

> "Inhoudelijke interactie met docenten is essentieel voor het leren van wiskunde."
> (cTWO, 30 maart 2007, pag. 31)

In dit onderzoek wordt zelfstandig leren juist onderscheiden van individueel werken. We willen voorbeelden geven van leeractiviteiten waar leerlingen samen met de docent en andere leerlingen zelfstandig leren.
Met dit onderzoek hopen we ook meer inzicht te geven in de rol van wiskundige gesprekken en bij het leren ervan. Ten slotte willen we met de resultaten van dit onderzoek docenten helpen kiezen voor activiteiten die wiskundig inhoudelijke gesprekken stimuleren.

1.2 Wettenschappelijk belang

In dit onderzoek zijn lessen geobserveerd van ervaren wiskundedocenten uit het voortgezet onderwijs die volgens de principes van realistisch wiskundeonderwijs les geven. Deze onderwijstheorie, door Freudenthal ontwikkeld (1973), heeft als uitgangspunt dat wiskunde een menselijke activiteit is. Leerlingen worden dus geacht actief deel te nemen aan hun leerproces. Een ander belangrijk kernmerk van realistisch wiskundeonderwijs is het geleid heruitvinden of *guided reinvention*. In dit leerproces worden de leerlingen geconfronteerd met wiskunde als een niet kant-en-klaar product, maar als een wetenschap die nog in ontwikkeling is. Wiskundige begrippen, conventies en notaties worden niet

opgelegd, maar door leerlingen heruitgevonden in interactie. Dit heruitvindingsproces vindt plaats onder begeleiding van de docent in interactie met de klas.
De '*mathematical discourse*' die dat vraagt, is een onderwerp dat, zowel op nationaal als internationaal niveau, veel aandacht krijgt. In de Verenigde Staten is daar de afgelopen decennia veel onderzoek naar gedaan, zoals door de National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en Paul Cobb.

1.3 Uitvoering

Het FIsme voerde in samenwerking met collega's van de afdeling Pedagogiek en Onderwijskunde van de RUG, het Utrecht Institute of Linguistics (UiL OTS) en AWSB Utrecht het NWO project 'Interaction in the multi-cultural/multi-lingual classroom as a means of inclusion and exclusion' uit. In dit project (1999-2001) werd de verbale interactie benadrukt. Het was een grootschalig kwalitatief onderzoek naar interactieprocessen, naar in- en uitsluitingsmechanismen die in klassen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs plaatsvonden tussen docent en leerlingen en tussen leerlingen onderling. Vanuit het FIsme hebben de wiskundedidactici prof.dr. Koeno Gravemeijer en mw. dr. H.A.A. van Eerde aan dit onderzoek deelgenomen.
Dit LIO- project wordt bij het FIsme (expertise-centrum voor realistisch reken- en wiskundeonderwijs) uitgevoerd in samenwerking met het Interfacultair Instituut voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden (IVLOS) van de Universiteit Utrecht en met het Instituut voor de Lerarenopleiding (ILO) van de Universiteit van Amsterdam. De hoofdbegeleider van dit onderzoek is prof.dr. Koeno Gravemeijer die intensief met Paul Cobb heeft samengewerkt rond dit onderwerp. Mw. drs. J.W.M.J. Daemen is als vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan het IVLOS verbonden. Zij doet onderzoek naar de wiskundedidactiek en interpersoonlijk gedrag van docenten in de klas. Mw.dr. R. Dekker werkt bij het ILO als onderzoeker en vakdidacticus wiskunde. Zij onderzoekt het leren van wiskunde in kleine groepen en de rol van het uitleggen en bekritiseren bij het leren van wiskunde.

1.4 Probleemstelling

Het belang van wiskundig inhoudelijke gesprekken voor het leren van wiskunde wordt benadrukt bij het realistisch wiskundeonderwijs en andere wiskundige onderwijstheorieën. Dit belang wordt ook herkend door de auteur van dit onderzoek, in haar leservaring. Maar wat houdt dat belang in? Er wordt antwoord gezocht op de vraag:

1. Waarom zijn wiskundig *inhoudelijke gesprekken* belangrijk voor het leren van wiskunde?

Als wiskundig *inhoudelijke gesprekken* belangrijk zijn, dan zou een gemotiveerde docent in staat moeten zijn ze in de lespraktijk in te zetten en leerlingen te stimuleren om over wiskunde te gaan praten. Er wordt onderzoek gedaan naar:

2. Wat kan een gemotiveerde docent doen om wiskundig *inhoudelijke gesprekken* in de lespraktijk in te zetten?

Deze twee problemenstellingen vormen het uitgangspunt van dit onderzoek. Er wordt nagegaan hoe docenten in de Tweede Fase een onderwijs-leersituatie kunnen ontwikkelen waarbinnen zij samen met de leerlingen inhoudelijk over wiskunde gaan praten.
In een eerste fase wordt gekeken naar wat hierover in de theorie beschreven wordt. Op deze oriënterende fase volgt een empirisch gedeelte waarin antwoorden op deze problemen in de lespraktijk worden gezocht.

2 Theoretisch kader

2.1 Inleiding

Hoe leren kinderen wiskunde? Freudenthal antwoordt op deze vraag met realistisch wiskundeonderwijs. Kenmerkend voor dit wiskundeonderwijs is de centrale plaats die het kind inneemt in het leerproces en hoe die wordt geleid door het heruitvinden van wiskunde. In dit proces spelen bepaalde gesprekken tussen leerlingen en docenten en tussen leerlingen onderling een belangrijke rol. Hiermee wordt bedoeld gesprekken waarin leerlingen en docenten, onder andere:
- reflecteren op wiskundige problemen,
- redeneren binnen een wiskundig onderwerp,
- keuzes en strategieën verdedigen door geldige wiskundige argumenten te gebruiken.

Dit soort gesprekken vormt de kern van dit onderzoek en worden hierbij wiskundig inhoudelijke gesprekken genoemd. Waarom ze belangrijk zijn en hoe een gemotiveerde docent, binnen een realistisch wiskundig onderwijsperspectief, ze in zijn lespraktijk kan inzetten zijn vragen die in dit hoofdstuk hopelijk worden beantwoord.

2.2 Wiskunde als menselijke activiteit

Wiskunde wordt door Freudenthal gedefinieerd als menselijk activiteit[1]. Dit houdt in dat het uitgangspunt van de wiskundeactiviteit van het kind de 'echte' wereld is. Hierbij moet het woord 'echt' geïnterpreteerd worden in de betekenis van 'ervaren als echt'. Voor een klein kind begint bijvoorbeeld de wiskundeactiviteit bij fysieke percepties, zoals het tellen van appels of het draaien van een kubus. Voor een leerling in de laatste jaren van het voortgezet onderwijs, krijgen deze percepties echter een formelere vorm. Men zou kunnen zeggen dat voor deze leerlingen een tweedegraads vergelijking net zo 'echt' is als een appel voor een klein kind. Kenmerkend voor het realistisch wiskundeonderwijs is dat de wiskundeactiviteit begint in een situatie die betekenisvol is voor de leerling, en dat ook blijft. Hierbij is het belangrijk dat de docent het leerproces van de leerling begeleidt, en er samen met de leerling op reflecteert en er over praat. Dit eist natuurlijk een goede voorbereiding van de docent, vooral in het selecteren en ontwikkelen van geschikte leeractiviteiten. Ook belangrijk bij dit proces is dat de leerling leert om aanknopingspunten te vinden die betekenisvol voor hem zijn (en die onthouden) waar hij naar terug kan gaan als het nodig is. Oftewel, de leerling kan zijn leerproces reconstrueren. Freudenthal noemt dit proces de bronnen van inzicht open houden (Freudenthal, 1991).
Wiskunde als menselijke activiteit, ook mathematiseren genoemd, werd later in termen van horizontaal en verticaal mathematiseren beschreven door Treffers (1978). Horizontaal mathematiseren staat voor de 'echte' wereld van de percepties en maakt een probleemgebied toegankelijk voor een wiskundige aanpak. Verticaal mathematiseren betreft het wiskundig verwerken op een hogere niveau. Het onderscheid tussen verticaal en horizontaal is echter niet statisch, het verschuift in de loop van de tijd en het verschilt per persoon en per situatie. Wat op een bepaald moment van het leerproces bij horizontaal mathematiseren hoort te staan, kan op een ander moment bij verticaal mathematiseren horen, en vice versa.
Mathematiseren wordt ook door Freudenthal als een organiserende activiteit beschreven:

> "It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing subject matter. This can be matter from reality, which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach." (Freudenthal, 1971, 413-414; in Gravemeijer 2005)

[1] De uitspraak 'wiskunde als menselijk activiteit' werd in de loop van de tijd op verschillende manieren opgevat en het wordt ook op verschillende manieren in de literatuur gebruikt. Een voorbeeld hiervan zijn de opvattingen die onder invloed van het constructivisme in de Verenigde Staten opkwamen (Lampert, 1990 in Gravemeijer, 2005). Hierbij werd de wiskundegemeenschap als model en de discourse van zuivere wiskundigen als uitgangspunt genomen. Wiskunde als activiteit bestaat in deze context voornamelijk uit het formuleren van hypothesen en het bekritiseren en/of beargumenteren daarvan. Natuurlijk zijn deze activiteiten een belangrijk onderdeel van wiskundig inhoudelijke gesprekken. Echter, bij dit soort gesprekken (zoals in dit onderzoek bedoeld) wordt de wiskundeactiviteit, waarin de leerling centraal staat, als uitgangspunt genomen en richt de interactie zich op de ontwikkeling om de leerling te stimuleren.

In die zin kan horizontaal en verticaal mathematiseren opgevat worden als mathematiseren van *subject matter from reality,* naar het mathematiseren van *mathematical matter* (Gravemeijer, 2005, pag. 2). Horizontaal mathematiseren houdt in het wiskundig organiseren van een deel van de ervaren werkelijkheid, terwijl verticaal mathematiseren staat voor het (verder) wiskundig organiseren van de eigen wiskundige activiteit. Mathematiseren lijkt dus een organiserende activiteit te zijn waar de 'objecten' die georganiseerd worden zowel experimenteel als formeel van aard kunnen zijn. Het gebruik van reële situaties, ofwel situaties die het individu als reëel ervaart, spelen op deze manier een belangrijke rol bij het leerproces. Deze situaties of contexten vormen de basis voor realistisch wiskundeonderwijs en kunnen wel of niet van wiskundige aard zijn. In de woorden van Freudenthal:

> "I prefer to apply the term 'reality' to what at a certain stage common sense experiences as real." (Freudenthal, 1991, 17; in Gravemeijer, 2005)

Probleemgeoriënteerd onderwijs is echter niet gemakkelijk in de praktijk in te zetten.Uit onderzoek blijkt bijvoorbeeld dat:
- Leerlingen niet zo makkelijk over te halen zijn tot een rol waar er veel aan henzelf werd overgelaten (Desforges & Cockburn, 1987 in Gravemeijer, 1995)
- Het moeilijker is om orde te houden in klassen die met open problemen werkten dan in klassen die rijtjes standaardopgaven moeten afwerken (Desforges & Cockburn, 1987 in Gravemeijer, 1995)
- Leerlingen niet spontaan hun antwoorden gaan uitleggen en rechtvaardigen (Jaworski, 1994 in Gravemeijer, 1995)

Deze problemen hebben voornamelijk te maken met wat de leerlingen denken wat er van hen verwacht word en dat bepaalt in zekere zin wat de leerlingen als normaal en gewoon ervaren. Leerlingen zijn eraan gewend dat interactie in de les tussen docent en leerling volgens een bepaald patroon verloopt. Het meest gebruikte patroon in een meer traditioneel wiskundeonderwijs is het vraag- antwoord evaluatie patroon[2]. Ofwel, de docent stelt een vraag, de leerling beantwoordt die en de docent evalueert dit antwoord.
Een andere voorkomende situatie in de lespraktijk is de neiging van de leerlingen om hun antwoord te veranderen als de docent de vraag herhaalt. Dit komt waarschijnlijk omdat ze uit eerdere ervaringen weten dat de docent de vraag herhaalt als het eerder gegeven antwoord fout was (Gravemeijer, 1995) Uit beide situaties is duidelijk dat voor deze leerlingen het impliciete didactische contract of sociale normen (zie ook paragraaf 2.8) bestaat uit: de docent weet wat het goede antwoord is en daar moeten ze hun antwoord ook op richten. Maar het gevaar hiervan is dat voor deze leerlingen wiskunde een 'gokspel' kan worden, want ze hebben geen wiskundige autoriteit ontwikkeld die nodig is om eigen ideeën te willen en kunnen verdedigen. In zekere zin kunnen we zeggen dat het goed kunnen inzetten van wiskundige gesprekken, waarin leerlingen gestimuleerd worden om te reflecteren, redeneren en keuzen en strategieën verdedigen door geldige wiskundige argumenten te gebruiken, beslist noodzakelijk is voor het kunnen onderwijzen in het kader van realistisch wiskundeonderwijs.

2.2 Optreden van niveauverhoging

Wiskundig inhoudelijke gesprekken zijn dus belangrijk voor het stimuleren van wiskundige activiteiten als reflectie, redenering, argumentatie .... Deze activiteiten zijn typerend voor realistisch wiskundeonderwijs en zijn nauw verbonden met het optreden van niveauverhoging. Dit wordt zo uitgelegd: Freudenthal omvat wiskunde als een proces waarin steeds nieuwe wiskundige objecten worden gevormd, waarmee een nieuwe realiteit ontstaat die weer tot onderwerp van reflectie worden. Aangezien wiskunde een menselijke activiteit is, zou men dan bij het leren van wiskunde vergelijkbare niveaus mogen verwachten. Hierbij legt Freudenthal een parallel tussen mathematiseren en de niveautheorie van Van Hiele.

[2] Mercer (1995) noemt dit vraag - antwoord patroon *educational discourse*. Dit soort interactie houdt in de typische manieren waarop docenten taal gebruiken om leerlingen bij de interactie te betrekken, voornamelijk: IRF uitwisselingen (*Initiation-Response- Feedback*) en technieken als hernieuwde formulering, herhaling, *cued elicitation*s.

Niveautheorie van Van Hiele

Van Hiele (1973) veronderstelde dat er verschillende denkniveaus bestaan bij het leren van wiskunde. Dit betekent dat elk individu ten opzichte van elk wiskundebegrip op een bepaald denkniveau is. Van Hiele illustreert dit met het welbekende voorbeeld van een ruit.
Als iemand zegt 'deze figuur is een ruit' weet men niet wat hiermee wordt bedoeld, want dit hangt van de spreker af. Is men niet deskundig in wiskunde dan bedoelt hij waarschijnlijk "deze figuur heeft de vorm waarvan ik geleerd heb deze aan te geven met de term ruit". Voor deze persoon zou bijvoorbeeld een vierkant geen ruit zijn, omdat hij er niet uitziet als de bekende vorm van een ruit. Is men bekend met wiskunde, dan bedoelt hij nu een verzameling van eigenschappen, die hij onder de naam ruit heeft leren samenvatten. Voor deze persoon bezit het vierkant al die eigenschappen en heeft daarom het recht om het vierkant ook tot de ruiten te rekenen.

Een belangrijk verschil tussen de twee sprekers is volgens Van Hiele dat bij de eerste spreker het oordeel berust op een aanschouwing, en bij de tweede spreker op een relatienet waarover de spreker beschikt. In dit relatienet vormen de termen ruit, zijde, hoek, vierkant, enzovoort symbolen. Elk van deze symbolen vertegenwoordigt een bundel eigenschappen die door verschillende relaties met elkaar zijn verbonden. Voor de tweede spreker blijft een ruit een ruit, zelfs als de figuur waarvan de zijden niet precies gelijk zijn en hij ervan verzekerd is dat dit de bedoeling van de afbeelder was.
Het bijzondere van deze situatie is dat hetzelfde object, de ruit, op verschillende manieren wordt voorgesteld door mensen die verschillende denkniveaus hebben. Dit vormt eigenlijk de kern van de niveautheorie van Van Hiele[3] (1973, 1986). In het gegeven voorbeeld zag de eerste spreker een ruit en dat was voldoende voor zijn oordeel. Er zit geen redenering achter en men zal hem ook niet door middel daarvan van zijn oordeel af kunnen brengen. Deze spreker beschikt nog niet over een relatienet voor dit onderwerp. Hij bevindt zich in dat geval op een *visueel* of *intuïtief niveau* van denken over dat onderwerp. Wie dat relatienet wel bezit, ofwel wie het object kan herkenen aan zijn eigenschappen, bevindt zich op het *beschrijvende niveau.*
Het is ook mogelijk dat de tweede spreker in staat is de eigenschappen van een ruit te ordenen (in logische zin). Hij zou bijvoorbeeld zeggen:

> De eigenschap ruit heeft een diagonaal tot de symmetrieas, hetgeen impliceert dat de twee overstaande hoeken van een ruit gelijk zijn.

Deze redenering is anders van aard dan de redenering op het *beschrijvende niveau.*
In de woorden van Van Hiele (1973, pag. 94):

> "Bij het logisch redeneren, zoals: 'uit A volgt B', gaat het er niet zozeer om aan te tonen dat B waar is, maar wel dat deze waarheid afhangt van het waar zijn van A. Of de diagonaal werkelijk een symmetrieas is of de overstaande hoeken werkelijk gelijk zijn doet er nu niet toe. Het waarnemingsveld is alleen maar storend. Het enige dat belangrijk is voor het volgen van B uit A is dat het waar zijn van A en tegelijkertijd het niet waar van B onmogelijk is"

Deze redeneringen zijn onderdeel van een ander nieuw relatienet. Wat de beweringen A en B inhouden, is in dit nieuwe relatienet niet meer van belang, maar wel de verbinding die er tussen bestaat. Het nieuwe relatienet staat nu los van de vorige twee denkniveaus en dan is er sprake van het *informele deductieve niveau*.
Wanneer het karakter van de verbanden tussen eigenschappen onderwerp van studie worden, dan zit men op het *theoretisch deductief niveau*. De spreker zou zich kunnen afvragen: wat wordt er bedoeld met stellingen als: 'De eigenschap ruit heeft een diagonaal tot symmetrieas, hetgeen impliceert dat de twee overstaande hoeken van een ruit gelijk zijn.' Of 'wat wordt er bedoeld met de omkering van deze stelling?'
Kenmerkend voor de niveautheorie is dat men op elk niveau reflecteert op de structuur, aanwezig van het vorige niveau.

[3] Aanvankelijk onderscheidt de niveautheorie van Van Hiele drie niveaus (1973); in de latere, meest bekende versie werden het er vier (1986).

Ontwikkeling van taal en niveauverhoging

Bij de beschrijvingen van Van Hiele lijkt het dat de vaktaal zich parallel ontwikkelt aan de denkniveaus. Van Hiele (1973):

> "Op het grondniveau is de taal aanwezig, maar het taalgebruik beperkt zich op de aanduiding van concrete waarnemingen: dit is geen ruit want de vier zijden zijn niet gelijk; dit is ook er geen want het is een vierkant." (pag. 93)

Op het *visuele niveau* waarop geen (wiskundige) redenering bestaat, wordt alledaagse taal gebruikt in plaats van vaktaal.
Op het *beschrijvende niveau* is een ruit een symbool voor een verzameling van eigenschappen geworden. Op dit niveau is het al mogelijk wiskundig te redeneren. De tweede spreker zou bijvoorbeeld kunnen zeggen: 'Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden waarvan de diagonalen elkaar loodrecht middendoor delen, waarvan de diagonalen de hoeken middendoor delen en waarvan de overstaande hoeken gelijk zijn en op grond hiervan is het vierkant nu wel een ruit'.
Vanaf het *beschrijvende niveau* is al wel een taal aanwezig en wordt interactie met anderen mogelijk. In de woorden van Van Hiele:

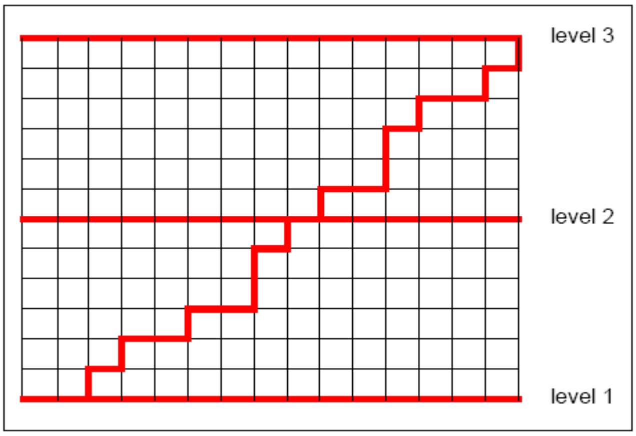
> "Er heeft zich een vaktal ontwikkeld, die de gedachtenuitwisselingen met anderen mogelijk maakt (pag. 93).
>
> (…)
> Wanneer dit eerste relatienet in een zo volkomen vorm aanwezig is dat de structuur ervan als het ware afgelezen kan worden, wanneer men over deze structuur met andere kan spreken, dan zijn de bouwstenen aanwezig voor het net van het tweede denkniveau". (pag. 94)

Mathematiseren en niveauverhoging

Zoals eerder gesteld verwachtte Freudenthal een relatie tussen mathematiseren en niveauverhoging. Deze relatie wordt door Treffers als volgt beschreven:

> "In het algemeen kan men zeggen, dat de horizontale mathematisering bestaat uit het zodanig schematiseren van het gebied, dat het probleemveld met mathematische middelen aangepakt kan worden. De vervolgactiviteiten, die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering, worden met de term verticale mathematisering aangeduid." (Treffers, 1978, pag. 79)

Dit wordt aan de hand van het volgende schema toegelicht:



Figuur 1: progressief mathematiseren (ontleend aan Treffers, 1987, pag.248)

In dit schema hoort bij de horizontale as het horizontale mathematiseren, en bij de verticale as het verticale mathematiseren. De gezamenlijke ontwikkeling van deze twee leeractiviteiten in de positieve richting resulteert in progressief mathematiseren. Reflectie speelt een essentiële rol bij dit proces zowel voor Van Hiele als voor Freudenthal. Dit wordt in het schema verbeeld met de drie horizontale rode streepjes die de drie denkniveaus van Van Hiele (1986) aanduiden en met de kleine rode trapjes die het reflectiewerk op de wiskundige activiteit en op het leerproces zelf, zoals bij Freudenthal wordt opgevat, beschrijven. Volgens Freudenthal (1991, in Gravemeijer, 2005) komt dit doordat het kind binnen een lager niveau op de wiskundige activiteit reflecteert en als hij zich daarvan bewust wordt, hij dit als object van reflectie kan beschouwen. Door dit reflectiewerk kan het kind in de loop van zijn leertraject, (de kleine onregelmatige sprongen in het schema) een hoger denkniveau bereiken (zie ook par. 2.4).

‘Reflectieve discours’ en niveauverhoging

Cobb, McClain, Whitenack (1997) gebruiken de term *reflectieve discours* om de wiskundige activiteit van de leerling tot expliciet onderwerp van discussie maken te beschrijven. *Reflectieve discours* is gericht op de wiskundige inhoud. De (gezamenlijke) activiteit van waaruit een voorafgaande actie, het object van reflectie maken, wordt dan *collective reflection* genoemd. Volgens deze auteurs zijn hoofddoelen van *reflectieve discours* het overbrengen van het proces naar object en het ontwikkelen van een *mathematical interesse*.

2.4 Aanzetten tot reflectie

Zowel Freudenthal als Van Hiele beschouwen reflectie als een essentiële activiteit voor het leren van wiskunde. Wiskundige gesprekken worden hierbij genoemd als een belangrijke aanzet tot reflectie.

Reflectie en niveauverhoging

Door op de objecten en relaties te reflecteren (en erover te praten) worden nieuw relaties gecreëerd die zelf deel van een nieuw object vormen; dit nieuwe object wordt op zijn beurt object van reflectie en ook deel van een nieuwe verzameling van objecten en relaties, enzovoort. Dit ´vertalingsproces´ is eigenlijk de essentie van het optreden van niveauverhoging en wordt mogelijk gemaakt door reflectie. Freudenthal beschrijft reflectie als:

> "Bewustmaking van het onbewuste kennen, weten en handelen. In dit leerproces stellen leerlingen vragen als ‘hoe weet ik dat?’ ‘waarom doe ik dat?’ en ten slotte verwoorden ze de eigen analyse."

Aardig hierbij is dat er ook een expliciete referentie wordt gemaakt naar het belang van wiskundige gesprekken bij het proces van de overgang van 'wiskundige activiteit ervaren' naar 'wiskundige activiteit als object van reflectie'.
Zowel bij progressieve mathematisering als bij de niveautheorie van Van Hiele speelt reflectie dus een belangrijke rol bij de overgang naar een hoger niveau. Dit wordt door Freudenthal op de volgende manier beschreven:

> “The learner’s lower level activity becomes an object of analysis to him at the higher level, or in other words: on the next level this activity is made conscious and can become subject matter of reflection.” (Freudenthal, 1991, 1998 in Gravemeijer, 2005 pag. 6)

Dit proces wordt in het schema in figuur 1 (zie par. 2.3) met de kleine verticale stapjes verbeeld.

Reflectie en het vasthouden van inzicht

Freudenthal betoogt dat er met meer inzicht wordt geleerd dan we geneigd zijn te denken. Het probleem is dat de lerende het leerproces kan vergeten wanneer het doel van dat leerproces eenmaal is bereikt (Gravemeijer, 2005, pag 5). Men zou verwachten dat het goed voor de leerling is, nadat hij een nieuw begrip heeft geleerd, om te gaan oefenen. Maar, volgens Freudenthal, zijn de positieve aspecten hiervan niet vanzelfsprekend. In het oefenen van nieuw geleerde vaardigheden schuilt het gevaar dat de oorspronkelijke bronnen van inzicht onzichtbaar worden en verloren gaan. Het is dus noodzakelijk dat deze bronnen van inzicht open blijven, ofwel dat de leerlingen de heruitgevonden processen onthouden. Dit wordt, volgens Freudenthal, bevorderd door ingebouwde reflectiemomenten, door te verbaliseren en te communiceren, zowel met de leerkracht als met medeleerlingen. (Gravemeijer, 2005, pag. 5).

Reflectie en wiskundige heruitvinding

Reflectie wordt ook door Freudenthal een 'krachtige motor voor wiskundig uitvinden' genoemd (Gravemeijer, 2005, pag.5). Als men ervan uitgaat dat construeren voorafgaat aan bewijzen, dan moet er een tussenstadium bestaan, en dat is reflecteren. Voor het heruitvinden is dus volgens Freudenthal (1979, in Gravemeijer 2005) sprake van een opeenvolging van: construeren, reflecteren, bewijzen. Dit reflectieproces moet door de docent of medeleerlingen gestimuleerd worden. Dit kan door de lerende te stimuleren om nieuwe kennis of procedures uit te leggen. Op deze manier wordt de 'uitvinder' gedwongen te reflecteren op wat hij bewust of onbewust uitgevoerd heeft. Hierbij kan afgeleid worden dat een hoofdtaak van de docent bij *guided reinvention* zou kunnen zijn het aanzetten van de leerling tot reflectie en dit wordt door middel van wiskundige gesprekken bereikt.

2.5 Ontwikkeling van ‘educated speech’

De ontwikkeling van een vaktaal is volgens Van Hiele (1973) nodig voor het bereiken van hogere denkniveaus (zie ook par. 2.3). Deze denkniveaus betreffen voornamelijk de wiskundige redeneringen die plaatsvinden tijdens het leerproces. Het leerproces zelf verloopt volgens een aantal fasen waarin wiskundige gesprekken vooral tussen docent[4] en leerlingen een belangrijke rol spelen.

Ontwikkeling van wiskundetaal tijdens het leerproces volgens van Hiele

In de *eerste fase* (*informatief*) van het leerproces maakt de leerling kennis met het werkterrein door gesprekken met de docent te voeren. In de *tweede fase* (*gebonden oriëntering of exploratie)* krijgt de leerling te maken met opdrachten (of hij stelt ze zelf) waarin verschillende verbindingen van het nog te vormen relatienet aan bod komen. De docent helpt de leerling hierbij om de relaties op te sporen. De gesprekken tussen leerling en docent gaan vooral over die relaties. Hierbij benadrukt Van Hiele het belang van aanbieden van geschikt lesmateriaal. In zijn eigen woorden:

> "Men kan zonder overdrijving zeggen dat *de handelingen* – mits zorgvuldig gekozen – d*e eigenlijke basis* vormen van het denken op een hoger niveau." (pag. 180)

Het expliciet maken van de handelingen wordt de *derde fase (explicitering)* genoemd. Hierbij moet de leerling de handelingen in woorden uitdrukken, zodat hij zich er meer van bewust wordt en ook de bijbehorende vaktaal leert kennen

> "Deze explicitering komt tot stand in het klassengesprek. De leerlingen geven onder leiding van de leraar hun mening over de gevonden regelmatigheden ten beste. De docent zorgt ervoor dat er een juiste vaktaal wordt ontwikkeld." (pag. 180)

In de *vierde fase* (*oriëntatie*) voelen de leerlingen zich al met het werkterrein vertrouwd en kennen ze ook de relevante vaktaal en symbolen. In deze fase gaan ze zelf, door meer algemeen gestelde opdrachten, verschillende wegen zoeken zodat ze daar in alle richtingen mee vertrouwd raken. Ten slotte, in de *vijfde fase (integratie)* zal de leerling een overzicht kunnen geven van wat hij geleerd heeft.
De leerling die tot de vierde fase gekomen is heeft dan een hoger denkniveau bereikt.

Leren deelnemen aan de 'educated discourse'

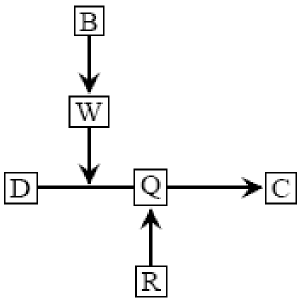
Even belangrijk als het leren van het juiste wiskundige jargon ofwel wiskundetaal is het adequate gebruik ervan. Alleen het wiskundige jargon kennen zal niet genoeg zijn voor leerlingen om met elkaar en met de docent te kunnen communiceren. Ze moeten voornamelijk het gevoel ontwikkelen

[4] Volgens Van Hiele is het ook mogelijk om de verschillende fasen te doorlopen en een hoger niveau te bereiken met zelf- of groepstudie. In deze situatie worden de gesprekken met de docent vervangen door innerlijke gesprekken, als het gaat om zelfstudie of onderlinge gesprekken met klasgenoten als het om een groep mensen gaat,. De vijf fasen zijn ook aanwezig, maar ze kunnen ook tegelijkertijd verlopen.Van Hiele merkt op dat zonder de aanwezigheid van de docent, de derde en vierde fase met meer moeite doorlopen worden, omdat de leerling moeilijk kan overzien wat belangrijk en niet belangrijk is en dat de vaktaal niet zo goed wordt gevormd.

voor wat goede antwoorden, bewijzen en argumenten zijn (zie ook par. 2.8). Essentieel voor deze ontwikkeling is de *educated discourse*[5] (Mercer, 1995). Ofwel discours, waarbij leerlingen nieuwe manieren leren om taal te gebruiken voor het denken en communiceren, zodat ze actieve deelnemers worden van de wiskundegemeenschap.
De docent kan de leerlingen hierbij helpen door hun ideeën te vertalen naar academisch discours, bijvoorbeeld door te vragen naar argumenten en bewijzen of tijdens de gesprekken sommige algemene doelen en beargumenteerde *styles* van leerlingen toe te laten.
Mercer benadrukt dat leerlingen de kans moeten krijgen het gebruik van de *educated discourse* te oefenen. De docent kan dit bevorderen door in de les momenten in te bouwen waar leerlingen kunnen samenwerken. Echter, een groepsgesprek tussen leerlingen zonder docent heeft de neiging om bij het dagelijkse taal gebruik te blijven steken (Northedge, in Mercer, 1995). Het lijkt dus belangrijk voor de niveauontwikkeling van de vaktaal dat de docent wel aanwezig is, maar zonder de gesprekken te domineren. De leerlingen moeten juist aan het woord zijn en dat gebeurt niet als de docent zich te veel in de discussie mengt (zie ook par. 2.11). Bij deze gesprekken is het niet nodig dat de docent de rol van uitlegger inneemt. De docent is de persoon die de *educated discourse* naar de leerlingen toe brengt.

Argumenteren bij wiskunde

Bij wiskundige gesprekken worden leerlingen geacht te kunnen argumenteren. Wanneer de docent een leerling naar argumenten vraagt bestaat er waarschijnlijk een verschil tussen wat de docent bedoelt en wat de leerling begrijpt.
Waarschijnlijk bedoelt de docent hiermee: deductief argument. Zo wordt de term argumenteren meestal bij wiskunde gebruikt. Deze specifieke vorm van argumenteren, die binnen de logica werd ontwikkeld, eist een bepaalde organisatie van gedachten die anders is dan in het dagelijkse leven. Bij deductief argumenteren gaat men uit van bestaande axioma's, preposities en theorema's.
Waarschijnlijk verstaat de leerling onder 'argumenteren' gewoon een toelichting geven op een bewering. Deze vorm van argumenteren is heel anders dan het deductieve argumenteren.
Dit verschil werd door Toulmin (1958, in Hardin, 1959) opgemerkt. Deze auteur stelde voor om ook andere rationele manieren die in het dagelijkse leven en in andere velden als ethica, kritische kunst en wetenschap worden gebruikt, als wiskundig argumenteren te accepteren. Toulmin stelt de volgende algemene indeling van argumenteren voor: ten eerste is er een conclusie of bewering (*claim*) die steunt op bepaalde gegevens of bewijzen (*data*). Wanneer men moet uitleggen hoe deze bewering vanuit de uivoering van de gegevens komt, wordt men geacht een rechtvaardiging of veronderstelling te produceren (*warrant*). Als deze *warrant* ter discussie wordt gesteld moet hij door feiten (*backing*) onderbouwd worden. De *warrant* kan nog een *qualifier* hebben als 'noodzakelijk' of 'vermoedelijk' die de sterkte van de *warrant* aangeeft. Als de *warrant* niet genoeg gewicht heeft kunnen nog situaties van uitzondering of ontkenning (*rebuttal*) gegeven worden. Dit wordt in het volgende schema weergegeven:



Figuur 2: Toulmin's layout (Toulmin, 1958, p. 104 in Hardin, 1959).

5 In eerste instantie lijken de begrippen socio-wiskundige normen (socio-mathematical norms, Cobb, Boufi, McClain & Whitenack, 1997, Gravemeijer, 1995) en 'educated speech' (Mercer, 1995) veel op elkaar. Echter, ze betekenen niet hetzelfde. De 'educated speech' bevat verschillende vormen van taalgebruik die de leerling moet kennen om te communiceren. De sociale wiskunde normen zijn hier gebonden aan de taal, maar hebben vooral betrekking op wat wiskunde is en hoe men wiskunde bedrijft.

Deze vorm van argumenteren sluit beter aan bij de belevingswereld van de leerling. De docent zou bijvoorbeeld de twee vormen van argumenteren met de leerlingen kunnen bespreken, zodat ze zich realiseren dat er een verschil is.

2.6 Ontwikkeling van 'mathematical interest'

Het voortzetten van gesprekken over wiskunde is echter niet gemakkelijk en wordt steeds moeilijker naarmate de wiskunde formeler wordt en de onderwerpen en vaktaal abstracter. Dit probleem wordt ook gesignaleerd bij de ontwikkeling van de wiskundige activiteit van de leerling in het realistisch wiskundeonderwijs. Gravemeijer (2005) noemt als belangrijk factor hierbij dat leerlingen een bepaalde *mathematical interest* ontwikkelen. Een karakteristiek van een contextprobleem in het realistisch wiskundeonderwijs is dat de leerling de behoefte voelt om het probleem op te lossen of op z'n minst zich voor te kunnen stellen dat het antwoord voor iemand interessant is. Zonder *mathematical interest* is het voor de leerling moeilijk oplossingsstrategieën en de wiskunde die erachter zit onderwerp van onderzoek te maken, en vragen die geen praktische betekenis hebben, te willen beantwoorden. Hier ontbreekt de motivatie om verder te willen gaan. De ontwikkeling van een *mathematical interest* is dus een voorwaarde voor *progressief mathematiseren* met als doel het voortzetten van goede wiskundig inhoudelijke gesprekken.
Maar, het omgekeerde gebeurt waarschijnlijk ook. Men kan verwachten dat leerlingen die een *mathematical interest* hebben ontwikkeld meer gemotiveerd zijn om deel te nemen aan klassengesprekken; ze stellen meer vragen en willen graag uitleg geven.
Uit onderzoek[6] blijkt dat de docent deze *mathematical interest* kan stimuleren. Bijvoorbeeld door de leerling te laten merken dat hij daadwerkelijk geïnteresseerd is in zijn denken. Dit heeft een positief effect op de leerling; die voelt zich serieus genomen en ervaart dat wat hij denk echt belangrijk is. De docent kan er ook voor zorgen dat de bijdragen van de leerlingen een rol spelen bij hun wiskundige activiteit, tijdens individuele en klassengesprekken, enzovoort.

2.7 Intermezzo

In grote lijnen kunnen we stellen dat inhoudelijke gesprekken over wiskunde belangrijk zijn omdat ze:
(a) leerlingen aanzetten tot reflectie;
(b) het optreden van niveauverhoging bevorderen;
(c) het leren van wiskundetaal en begrippen faciliteren;
(d) helpen bij de ontwikkeling van *mathematical interest*.

Deze relatie is echter tweeledig:
(a) de activiteit van reflecteren is nodig voor wiskundig inhoudelijke gesprekken;
(b) doordat niveauverhoging optreedt wordt er de nodige inhoudelijke input aan de wiskundige gesprekken gegeven;
(c) doordat de leerling genoeg vakkennis heeft neemt hij makkelijker deel aan de wiskundige gesprekken;
(d) doordat de leerling gemotiveerd en geïnteresseerd is wil hij daar graag over praten.

[6] Brondie, Shahan en Boaler (2004) beschrijven een breed onderzoek waarin rond 1000 leerlingen in 4 jaar in drie middelbare scholen in California, US zijn gevolgd. Dit onderzoek focust op interacties tussen curriculum, onderwijzen en leren en het probeert te begrijpen hoe bepaalde '*teaching approaches*' het leerproces beïnvloeden. Railside was een school die betere resultaten had dan de andere twee. In die school hadden leerlingen een productieve attitude (*disposition*) tegenover wiskunde en elkaar ontwikkeld. Ze volhardden meer wanneer ze uitdagende problemen moesten oplossen en zij toonden meer plezier in de wiskundeles. Bovendien ontwikkelden leerlingen het idee dat wiskunde gaat over communiceren, uitleggen en verantwoorden van ideeën. In de interactie werden drie sleutelactiviteiten van de docent geobserveerd: (a) *asking significant mathematical questions*; (b) *enabling collaboration*; (c) *keeping demand high*

2.8 Ontwikkeling van sociale en socio- wiskundige normen

In het realistisch wiskundeonderwijs is de inbreng van de leerling van groot belang en daarvoor is het nodig dat leerlingen actief participeren in de les. Echter, dit gebeurt niet vanzelf. Persoonlijke verwachtingen en sociale omstandigheden kunnen dit bevorderen of juist verhinderen. Dit heeft vooral te maken met wat leerlingen denken wat van hen verwacht wordt in lessituaties. Deze aspecten vormen eigenlijk de essentie van het didactische contract ofwel van de sociale normen.

Didactisch contract of sociale-normen

Wanneer de wiskunde opgevat wordt als menselijke activiteit, dan hebben ook de rollen van de leerling en docent een andere inhoud dan in het traditionele wiskundeonderwijs. In meer traditioneel wiskundeonderwijs wordt de inhoud van de lessen vooral door het leerboek gedicteerd. In deze setting wordt van de docent verwacht dat hij vanuit het leerboek de lesstof goed kan uitleggen. De leerlingen worden geacht er goed naar te luisteren en er zo nodig op te reageren. Deze verwachtingen van docent en leerlingen vormen eigenlijk de essentie van het didactische contract (Brousseau, 1990; Elbers, 1988, in Gravemeijer 1995) .
De sociale normen, min of meer impliciet of expliciet, bestaan altijd in lessituaties en ze beïnvloeden gedrag, interactie, houding, enzovoort.
Dit betekent dat een docent die volgens een bepaalde onderwijsvisie les wil geven, bijvoorbeeld volgens realistisch wiskundeonderwijs, moet beseffen dat nieuwe sociale normen gerealiseerd moeten worden, zodat de leerlingen weten wat van hen verwacht wordt. Voorbeelden van sociale normen, van belang voor realistisch wiskundeonderwijs, zijn:

- leerlingen moeten zich verplicht voelen hun oplossingsstrategieën en uitleg te verantwoorden. Als zij niet door hebben dat dit van hen verwacht wordt, dan kan voor hen ‘het antwoord geven’ hetzelfde betekenen als ‘het resultaat van de opdracht noemen’;
- naar anderen te luisteren;
- oplossingsstrategieën van andere leerlingen proberen te begrijpen, opheldering te vragen en zonodig in discussie te gaan.

Voor het ontstaan van goede wiskundig inhoudelijke gesprekken is dus een randvoorwaarde dat in de klas dergelijke normen ontstaan. En niet alleen sociale normen, maar ook socio-wiskundige normen.

Socio-wiskundige normen

De socio-wiskundige normen (Yackel & Cobb, 1994) hebben betrekking op het vak zelf; ze bepalen wat de spelregels zijn binnen het vak. Yackel & Cobb (1994) en Gravemeijer (1995) noemen als voorbeelden van socio-wiskundige normen:

- gemeenschappelijke opvattingen over wat wiskunde is;
- herkennen van wat elegantere of efficiëntere oplossingen zijn;
- hoe moeten de opgaven geïnterpreteerd worden;
- aan welke criteria moet een (wiskundig) goed antwoord voldoen;
- wat is een goed bewijs.

Net als de sociale normen, zijn de socio-wiskundige normen verbonden aan persoonlijke verwachtingen. Leerlingen hebben eigen verwachtingen over wat wiskunde is of wat een goed antwoord betekent. De vraag is of hun verwachtingen kloppen met wat de docent van ze verwacht. Bijvoorbeeld, als het gaat om uit te leggen dat

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

De socio-wiskundige norm is dat het gewenste uitleg resultaat is van een wiskundige redenering en niet van een empirisch experiment. Als de leerling zich niet bewust is van dit verschil is hij geneigd te redeneren buiten de wiskunde. In deze situatie zou het mogelijk zijn dat de leerling denkt:
‘Als ik 1 reep chocola in tweeën deel en 1 stuk aan iemand geef is iets heel anders dan 1 reep in zessen delen en drie stukjes aan iemand geven’, dus de leerling zou ook geneigd te zijn om te denken:

$$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}$$

hoewel 3 gedeeld door 6 precies dezelfde uitkomst heeft als 1 gedeeld door 2. Dergelijk situaties vormen mooie aanleidingen voor klassengesprekken waarin de wiskundige normen besproken worden en de docent de leerlingen helpt te kiezen voor een wiskundige redenering. Bijvoorbeeld: ‘In beide situaties geef je de helft van de reep chocola, dat is een gelijke hoeveelheid, en dus driezesde is gelijk aan ééntweede.’
Een hoofdtaak van de docent is dus helpen te bepalen welke sociale normen en sociale wiskundige normen van belang zijn. Deze normen kunnen echter niet opgelegd worden. Zelfs als ze door de docent aan de klas expliciet worden gemaakt, worden ze pas door de leerlingen overgenomen als ze ervaren dat ze echt zijn. In die zin is het belangrijk dat, aan de hand van concrete voorvallen zoals in het voorbeeld hierboven, de gewenste en niet gewenste wiskundige normen besproken worden.

Belangrijk voorwaarde voor het inzetten van inhoudelijke gesprekken over wiskunde is dus een geschikte klassencultuur. Hiervoor zijn de sociale normen en de socio-wiskundige normen belangrijk. Maar het omgekeerde gebeurt ook. De sociale en de socio-wiskundige normen worden door leerlingen en docent via interactie besproken ofwel bij de ontwikkeling en het hanteren van deze normen zijn gesprekken over wiskunde belangrijk. Bijvoorbeeld: de gedachten van leerlingen over definities, begrippen of notaties worden zichtbaar en (daardoor) bespreekbaar gemaakt; het overleggen met anderen over eigen interpretaties wordt mogelijk gemaakt en dat is nodig voor het ontstaan van een gezamenlijke betekenis binnen de klas (Gravemeijer, 1995, Mercer, 1995).

2.9 Het creëren van een geschikte klassencultuur

Een docent die een klassencultuur gericht op wiskundig inhoudelijke gesprekken wil creëren, zou vanaf het eerste contact met de klas passende normen moeten ontwikkelen. Een klassencultuur bijvoorbeeld waarbinnen de leerlingen gewend zijn vragen te stellen, uitleg te geven, naar anderen te luisteren en bereid zijn te reflecteren (Gravemeijer, 2004).
Deze normen worden door de docent ingebracht, maar moeten nog door de leerlingen worden overgenomen. Essentieel voor dit proces is dat de nieuwe normen in ervaringen in de lessenpraktijk ingebed worden (Gravemeijer, 1995). De auteur noemt twee manieren waarmee de docent de nieuwe normen kan inzetten:
- interacties met leerlingen in concrete lessituaties gebruiken als aanleiding om over de normen te praten
- het op een consequente manier belonen van gedrag dat bij de gewenste normen past.

Interacties met leerlingen

Vooral voor de hantering van de sociale normen is het handig om interventies van leerlingen in concrete lessituaties te gebruiken. Bijvoorbeeld, de situatie waarin ‘leerlingen door elkaar praten’ kan de docent gebruiken om de leerlingen eraan herinneren dat van ze verwacht wordt samen te werken, naar elkaar te luisteren, uitleg en oplossingen van anderen proberen te begrijpen. De docent kan de leerlingen er ook op aanspreken als ze dit niet doen.

Belangrijk voor de ontwikkeling van de wiskundige normen is, volgens Gravemeijer, de activiteit van *framing*[7] *topics of discussion*. Hierbij worden de achterliggende ideeën van leerlingen die op verschillende denkniveaus zitten tot onderwerp van discussie gemaakt. Een voorbeeld hiervan is de

[7] Hierbij wordt het concept van *'framing'* gebruikt, zoals bij Mercer (1995) wordt beschreven. Er is een verschil tussen het door Mercer (1995) gehanteerde concept van *'framing'* en zoals dit door Cobb, Boufi, McClain & Whitenack (1995) wordt gebruik. Bij deze laatsten houdt *'framing'* een nog subtielere leeractiviteit in: er worden achterliggende ideeën van leerlingen die op verschillende denkniveaus zitten tot onderwerp van discussie gemaakt. Deze soort van *'framing'* is een belangrijke leeractiviteit voor het optreden van niveauverhoging bij wiskunde (zie par. 2.2)

ontwikkeling van de wiskundige norm: 'bij argumenteren in wiskunde gebruikt men wiskundige rederneringen' (zie par. 2.8).
Volgens Gravemeijer (1995) is het belangrijk dat de leerlingen verschillende denkniveaus hebben, zodat er discussie ontstaat. Dit is belangrijk in die zin dat reflectie en discussie progressief mathematiseren kunnen bevorderen. Als alle leerlingen met gelijksoortige oplossingen van eenzelfde niveau komen valt er namelijk weinig te discussiëren.

Belonen

Essentieel voor het hanteren van goede normen is dat het gebruik ervan beloond wordt. Belonen is een efficiënte manier om leerlingen te laten ervaren welke normen in de klas geldig zijn. Gravemeijer merkt op dat de beloning hiervoor primair van de docent moet komen. Hij noemt als voorbeelden van beloningsvormen:
- laten merken daadwerkelijk geïnteresseerd te zijn in het denken van de leerlingen;
- zorgen dat bijdragen van leerlingen aan de discussie een rol spelen in het vervolg van de discussie;
- de beoordeling moet consistent zijn aan de gestelde doelen;
- de docent honoreert een leerling die met een alternatieve oplossing komt en deze uitlegt;
- luisteren naar anderen wordt positief gewaardeerd;
- goede antwoorden zonder uitleg worden niet geaccepteerd;
- docent schort het eigen oordeel over de juistheid van een antwoord op.

De sociale normen kunnen echter pas functioneren als de opvattingen van de leerlingen er globaal mee overeenstemmen. Er bestaat een reflexieve relatie tussen de groepsnormen en de individuele opvattingen: enerzijds hebben de groepsnormen invloed op de opvattingen van de individuele leerling, anderzijds zijn het opvattingen van de docent en individuele leerlingen die de groepsnormen bepalen (Cobb, Boufi, McClain &Whitenack, 1995 in Gravemeijer, 1995).

Naast het creëren van een geschikte klassencultuur zijn er nog twee aspecten die belangrijk zijn voor het goed inzetten van realistisch wiskundeonderwijs en dus ook voor wiskundige gesprekken: selectie van opdrachten en het handelen in de les. Deze twee aspecten worden in de volgende paragrafen besproken.

2.10 Geschikte opdrachten

Het hypothetisch leertraject

Als er een geschikte klassencultuur is, dan is het belangrijk dat de docent zich goed voorbereidt op het inzetten van wiskundige gesprekken in de les. Bij realistisch wiskundeonderwijs, waarin het gebruik van reële contexten uitgangspunt van de wiskundige activiteit is, moet de docent rekening houden met de persoonlijke interpretatie van deze activiteiten. Eigenlijk heeft de ontwerper van de opdracht een eigen beeld van wat de context betekent. Dit maakt de context van het probleem alleen volledig zichtbaar voor hemzelf. In die zin is het belangrijk dat de docent ook 'door de bril van de leerlingen kijkt en zich afvraagt wat de leerlingen vanuit hun perspectief met de opgave zouden kunnen doen' (Gravemeijer, 2004). De docent kan dit doen door te proberen op reacties en gedachten van leerlingen te anticiperen. Bijvoorbeeld: kennen de leerlingen dit concept? Welke associaties roept het op bij de leerlingen? Hoe zullen ze redeneren? Dit werk vooraf steunt de selectie of ontwikkeling van geschikte leeractiviteiten. In deze fase kan de docent bijvoorbeeld beslissen een bepaalde paragraaf uit het boek te vervangen door eigen materiaal of een les te besteden aan het discussiëren over een belangrijk wiskundig begrip.
Als voorbereiding hierop zou de docent van tevoren kunnen bedenken welke vragen hij in de les wil stellen. Bij de voorbereiding is het ook handig dat de docent nadenkt over welke werkvorm adequaat is voor het bereiken van het doel van de les, beslist hoe die les te organiseren, zoals of ze alleen of in groepjes gaan werken en of ze zelfstandig of meer gestuurd gaan werken.

Deze fase van de planning van lessen wordt door Simon (1995) beschreven als het hypothetisch leertraject van de docent.

Selectie en ontwikkeling van lesactiviteiten

Onderdeel van het hypothetisch leertraject is de selectie of ontwikkeling van geschikte leeractiviteiten. Hierbij moet de docent over goede criteria beschikken van wat goede opdrachten zijn. Enkele kenmerken van goede opgaven worden genoemd door Dekker en Elshout-Mohr (1996, 1998) en Silver en Smith (1996) en ze komen overeen met die van goede opgaven binnen het perspectief van realistisch wiskundeonderwijs:

(a) de opgaven zijn uitdagend voor leerlingen;
Hierbij kan de context een motiverende factor zijn. Sommige contexten zijn meer of minder motiverend dan andere. Dit is persoonlijk, maar ook leeftijdgebonden. De Lange (1987) noemt twee belangrijke kenmerken van contexten:

- jonge kinderen vinden gekunstelde contexten acceptabel en - onder bepaalde omstandigheden - motiverend. Voor oudere kinderen moeten de contexten meer realistisch zijn om geaccepteerd te worden;
- er moeten diverse verschillende contexten aangeboden worden.

(b) de opgaven geven aanleiding tot verschillende oplossingen en benaderingswijzen;
Activiteiten met meervoudige oplossingen hebben vaak meervoudige representaties en geven dus ook aanleiding tot een variëteit aan oplossingsstrategieën. Deze activiteiten bieden dus een goede kans voor wiskundige gesprekken. Door oplossingsstrategieën met elkaar te vergelijken kunnen de leerlingen ontdekkingen doen en van elkaar leren. Wanneer alle leerlingen komen met gelijksoortige oplossingen van eenzelfde niveau valt er weinig te discussiëren (Gravemeijer 1995).

(c) de opgaven zijn reëel en betekenisvol voor leerlingen.
Het gebruik van situaties die als *experientially real* door leerlingen worden ervaren geeft ze de mogelijkheid om binnen die context op een zinvolle manier te handelen en te redeneren (Freudenthal, in Gravemeijer, 2005). In die zin zijn contexten ook belangrijke voor het leren van wiskunde, omdat ze als aanknopingspunten voor de leerling kunnen dienen. Reële contexten in de realistische benadering kunnen ook wiskundig van aard zijn.

Dekker en Elshout-Mohr (1998) noemen nog twee kenmerken:
(d) constructief
De eigen productie door de leerlingen van grafieken, tabellen, tekeningen en verhalen maakt verschillen tussen leerlingen zichtbaar en op die manier onderwerp van discussie.

(e) zicht op niveauverhoging.
Opdrachten met zicht op niveauverhoging houden in dat door het oplossen van de opdracht bij de leerling deze niveauverhoging ook optreedt (zie ook 2.3). De beginkennis van de leerling, als de opdracht gegeven wordt, is niet voldoende om de opdracht op te lossen. Om dit te bereiken, moet de leerling nieuwe kennis opbouwen. Tijdens het oplossen van de opdracht ontwikkelt de leerling een beter begrip over de wiskundige inhoud.

Goede opdrachten in de zin van realistisch wiskundeonderwijs zijn ook geschikt om leerlingen te stimuleren deel te nemen aan inhoudelijke gesprekken over wiskunde. Er zijn ook andere soorten opdrachten, taalspecifieke opgaven of activiteiten met als doel leerlingen te stimuleren tot praten. Bij deze opgaven hebben de leerlingen weinig wiskundige kennis nodig. Enkele voorbelden hiervan worden in House (1996), Pimm (1998) en Shield en Swinson (1996) gegeven. Deze opdrachten richten zich voornamelijk op het ontwikkelen en stimuleren van communicatievaardigheden bij wiskunde en niet zozeer op het leren van wiskundige inhoud.

2.11 Het handelen van de docent

We hebben gezien hoe belangrijk een geschikte klassencultuur en goede opdrachten zijn voor het inzetten van wiskundige gesprekken. Een derde aspect is de uitvoering van wiskundige gesprekken in de les. De meest gebruikelijke vormen van deze gesprekken in lessensituaties bestaan uit klassengesprekken, dialoog tussen leerlingen en tussen docent en leerlingen. Al deze vormen van interactie hebben hun meerwaarde voor het leren van wiskunde. Nelissen (2002) benadrukt dat een optimaal wiskundeonderwijs bestaat uit zowel verticale interactie (tussen docent en leerling) als horizontale interactie (tussen leerlingen). Ongeacht de vorm van interactie wordt in het realistisch wiskundeonderwijs de wiskundige activiteit van de leerling als uitgangspunt van het gesprek genomen.
In realistisch wiskundeonderwijs is de docent vooral iemand die het proces van ‘heruitvinding’ van de leerling begeleidt. De achterliggende gedachte hierbij steunt op de constructivistische onderwijstheorieën[8] waarin de leerling een actieve rol speelt. Dit houdt in dat de inbreng van de leerlingen nodig is en dat de leerlingen werkelijk in de les actief participeren. De kwaliteit van deze participatie wordt grotendeels bepaald door de sociale normen en sociale wiskundige normen die in de klas ontstaan (zie ook par. 2.8), te weten: leerlingen weten dat van ze wordt verwacht dat ze hun oplossingsstrategieën moeten verantwoorden, naar anderen moeten luisteren, oplossingsstrategieën van andere leerlingen proberen te begrijpen, opheldering vragen en bereid zijn om in discussie te gaan. Even belangrijk is dat de docent in staat is om adequaat op de inbreng van de leerlingen te reageren en ook inhoudelijke input kan geven, bijvoorbeeld door betekenisvolle vragen te stellen (*asking significant mathematical questions*) en hoge eisen te blijven stellen (*keeping demand high*) (Brondie, Shahan & Boaler , 2004).

Docentengesprekken

In een klassengesprek selecteert de docent de informatie die door de leerlingen wordt gegeven. Hij zorgt dat wat ze zeggen ook direct door andere leerlingen gehoord wordt. Hij beslist wie, wanneer en op welke wijze men in het klassengesprek participeert[9].
Het belang van wiskundige gesprekken tussen docent en leerlingen of klassengesprekken werd al in paragraaf 2.2 - 2.7 aangegeven. In het bijzonder in paragraaf 2.5 geeft Van Hiele ook aan dat de 'fase van explicitering' door klassengesprekken tot stand komt. In deze fase wordt onder andere de vaktaal van de leerling ontwikkeld. Andere leeractiviteiten waarvoor klassengesprekken belangrijk zijn worden gevormd door *’framing’* van antwoorden of interventies van leerlingen (zie ook par. 2.8). Echter, dit soort gesprekken zijn niet altijd even efficiënt. Interventies van docenten kunnen ook storen in plaats van helpen (Dekker & Elshout-Mohr, 2003). Uit onderzoek blijkt dat:
- de docent bij het antwoorden van een vraag van een leerling meestal niet weet wat de aanleiding voor die vraag is. In die situatie wordt het moeilijk om een adequaat antwoord aan de leerling te geven.
- het voor de docent moeilijk blijkt te zijn om het alleen bij het geven van een hint te laten; in plaats daarvan wordt de docent ‘volledig deelnemer’ en voert hij zelf de leeractiviteit uit die eigenlijk door de leerling gedaan moest worden.

[8] Het idee van kennis als individuele en sociale manier van denken wordt voor het eerst door Vygotsky genoemd (Mercer, 1995). Vygotsky's perspectief over ontwikkeling verschilt van die van Piaget in twee essentiële opzichten: (a) taal heeft invloed op de structuur van denken: voor Piaget wordt individuele ontwikkeling en begrippencapaciteit op cognitief niveau, als individu, besloten; volgens Vygotsky worden individuele ontwikkeling en begrippencapaciteit ook gedeeltelijke bepaald door omstandigheden waarin het leren plaatsvond en door andere mensen; (b) cognitieve ontwikkeling is een sociaal en communicatief proces: voor Piaget leren kinderen het beste als ze opdrachten krijgen die bij hun eigen niveau aansluiten en die ze zonder de hulp van de docent kunnen uitvoeren. Vygotsky vond juist dat instructie alleen goed is wanneer die vooraf gaat aan de ontwikkeling. Docenten maken het voor de leerlingen mogelijk dat ze niveaus van begrippen bereiken die ze niet alleen kunnen bereiken.

[9] Andere genoemde vormen van leerlingen steunen bij wiskundig inhoudelijke gesprekken tussen leerling en docent zijn *scaffolding* en parafraseren. Bij s*caffolding* wordt betekenisvol gehandeld; de verantwoordelijkheid wordt bij de leerlingen gelegd en leerlingen worden gestimuleerd om controle over hun eigen denken en actie te krijgen; er wordt intrinsiek steunen voor leren geboden (Turner, Cox, DiCintio, Meyer, Logan & Thomas, 1998.). Bij ‘parafraseren’ merken de leerlingen dat wat ze denken en zeggen gewaardeerd wordt en dat kan motiverend werken.

- er de neiging bestaat om steeds dezelfde leerlingen te vragen te participeren, waardoor anderen steeds meer op de achtergrond blijven.

Gesprekken met leerlingen

Een oplossing voor dit probleem kan bijvoorbeeld zijn momenten in de les in te bouwen waarin leerlingen in kleine groepen samenwerken. Dekker (1998) ontwikkelde een werkvorm waar leerlingen met elkaar bepaalde acties uitvoeren die tot niveauverhoging kunnen leiden. Deze acties worden door de leerlingen zelf uitgevoerd en geregeld. Er worden vier kernactiviteiten onderscheiden: (a) eigen werk tonen, (b) uitleggen, (c) argumenteren en (d) reconstrueren. In deze werkvorm worden leerlingen ook door de docent gestimuleerd om elkaar vragen te stellen als: Wat heb je? Wat doe je? Hoe heb je het gedaan? Waarom heb je het zo gedaan? Waarom heb ik het anders gedaan? De docenten kunnen zelf het proces van uitleggen stimuleren door kritisch te reageren: "ik denk dat dit fout is" of: "ik begrijp het niet, leg het eens uit". Bij de kernactiviteit ‘reconstrueren’ wordt het optreden van niveauverhoging dan zichtbaar gemaakt. Het gereconstrueerde werk kan opnieuw getoond worden en de cyclus van de kernactiviteiten worden herhaald. Als gevolg van dit, door de leerling uitgevoerde, verbeteringsproces kan niveauverhoging optreden.

De vier genoemde kernactiviteiten komen overeen met andere onderzoeksresultaten bij het leren van wiskunde in kleine groepen (Dekker, 1998). Ze vormen de basis voor wiskundige niveauverhoging, stimuleren interactie tussen leerlingen en, doordat leerlingen eigen werk vergelijken, stimuleren ze het leerproces.

'Pedagogical content knowledge'

In tegenstelling tot de fase van selectie van lesactiviteiten heeft de docent, bij het handelingproces, weinig voorbereidingsmogelijkheden. De docent weet niet hoe leerlingen gaan reageren, welke vragen ze gaan stellen en welke antwoorden ze gaan geven. De voorbereidingsfase van de lessen (hypothetisch leertraject) is eigenlijk de fase waar de docent nog de meeste invloed kan uitoefenen op de gang van zaken, en daarom is het ook belangrijk. Tijdens de les heeft de docent het namelijk te druk om rustige beslissingen te nemen. In lessensituaties is de docent voornamelijk bezig met het reageren op vragen van leerlingen. De handelingsfase doet in dat opzicht een groot beroep op capaciteiten als intuïtie, improvisatie, zelfvertrouwen, kennis van het vak en het *pedagogisch handelen* van de docent. *Pedagogical content knowledge* is de kennis en opvattingen van een docent die betrekking hebben op het toegankelijk maken van vakinhoudelijk kennis voor leerlingen (Meijer, 1999). Specifiek voor wiskunde worden door Simon (1995) de volgende punten genoemd:
(a) vakinhoudelijk kennis van de docent;
(b) kennis van docenten betreffende wiskundige activiteiten;
(c) vormen van representeren en theorieën van de docent over het leren van wiskunde en het onderwijzen.

Behalve deze drie aspecten, is voor het goed kunnen handelen in de les nodig dat de docent de eigen sociale en wiskundige normen zich eigen heeft gemaakt, zodat hij die in de lessensituaties consequent kan gebruiken en, zichzelf zonodig, kan corrigeren.

2.12 Intermezzo

Bij het inzetten van wiskundig inhoudelijke gesprekken in lessituaties moet, kortom, rekening gehouden worden met de aanwezigheid van randvoorwaarden, met de voorbereiding van de lessen en het uitvoeren van de gesprekken. Hoofdtaken van de docent hierbij zijn:

(a) het creëren van randvoorwaarden ofwel, een geschikte klassencultuur.
Als de docent wil dat leerlingen meer over wiskunde gaan praten, dan moet hij een klassencultuur weten te creëren waarbinnen dit mogelijk is. Dit houdt in dat er een andere docent- en leerlingrol verhouding moet zijn dan in het meer traditionele onderwijs. Essentieel hiervoor is dat de leerlingen

zich bewust worden van deze verandering, ofwel dat er nieuwe sociale normen en sociale wiskundige normen aanwezig zijn. De gewenste normen worden, in eerste instantie, door de docent ingebracht en moeten door de leerlingen nog worden overgenomen. Dit proces vindt pas plaats als zij die normen ook als hun eigen normen ervaren. Hiervoor is het belangrijk dat de docent interacties en interventies van leerlingen als uitgangspunt gebruikt om deze normen aan de orde te stellen en het gebruik ervan consequent beloont.

(b) door de bril van de leerling kijken en goede opdrachten selecteren.
Goede opdrachten zijn de basis voor wiskundig inhoudelijke gesprekken. Binnen een klassencultuur vormen goede opdrachten aanleiding voor waardevolle wiskundige gesprekken. Kenmerken van goede opdrachten zijn: uitdagend voor leerlingen; complex (ze geven aanleiding tot verschillende oplossingen en benaderingswijzen); reëel (in de zien van als reëel ervaren) en betekenisvol voor leerlingen; constructief (er wordt een product gemaakt dat verschillen tussen leerlingen zichtbaar maakt en op die manier onderwerp van discussie wordt); zicht op niveauverhoging.
Essentieel bij deze voorbereiding is dat de docent de wiskundige activiteit en kennis van de leerling als uitgangspunt neemt voor zijn keuzen. De docent moet door de bril van de leerlingen kijken en proberen te voorspellen hoe zij op bepaalde lesactiviteiten reageren.

(c) consequent handelen vanuit de normen.
Bij het uitvoeren van wiskundige gesprekken is het vooral belangrijk dat de docent consequent ten aanzien van de afgesproken normen handelt en de leerlingen beloont die zich hieraan houden. Dit betekent in de praktijk dat de docent voor een goed verloop van interactie zorgt en dat hij de inbreng van de leerlingen gebruikt om relevante wiskunde te bespreken. Ook is het van belang dat de docent de leerlingen helpt hun wiskundige activiteit en ideeën onder woorden te brengen, zodat ze ook deelnemen aan de klassengesprekken. Dit kan de docent onder andere doen door leerlingen tijd te geven om na te denken, door te vragen, vragen te herhalen en desnoods te herformuleren, (te laten) samenvatten, enzovoort.
Bij deze gesprekken is ook essentieel dat de docent met de leerlingen de wiskundige conventies bepreekt en ze het nut ervan laat ervaren.
Hoewel bij de gesprekken de docent de wiskundige inhoud bepaalt, hoeft hij niet altijd de rol van uitlegger aan te nemen. Het is zelfs wenselijk dat hij dit aan de leerlingen overlaat, zodat ze de kans krijgen echt te participeren en de vaktaal te oefenen. Een natuurlijke manier om dit te organiseren is de leerlingen, in een deel van de les, in kleine groepjes laten werken.
Tijdens het handelen in de les heeft de docent weinig tijd om zijn reacties voor te bereiden. Hierbij speelt de *pedagogical content knowledge* van de docent een belangrijke rol. Het is ook nodig dat de docent de eigen sociale en wiskundige normen zich al heeft eigen gemaakt. Alleen als dit gebeurd is, kan hij in de onmiddellijke lessensituaties consequent reageren en zonodig zichzelf corrigeren.

3 Onderzoeksopzet

3.1 Inleiding

In dit onderzoek is de probleemstelling: het goed inzetten in de lespraktijk van wiskundig inhoudelijke gesprekken. Belangrijk hiervoor is dat er meer duidelijkheid wordt geschapen over het belang van wiskundig inhoudelijke gesprekken voor het leren van wiskunde en de rol van de docent daarin.
Om dit te bereiken wordt er in grote lijnen voor de volgende onderzoeksopzet gekozen:
(a) bestaande onderzoeken over het onderwerp van dit onderzoek bestuderen en een theoretisch kader opstellen (literatuuronderzoek);
(b) lessen observeren en analyseren op basis van het onder (a) geschetste theoretisch kader;
(c) belangrijke resultaten uit (a) en (b) vergelijken en relevante kennis in een didactische aanpak voor docenten uitwerken.
Deze onderzoeksopzet wordt in de volgende paragrafen nader toegelicht.

3.2 Literatuuronderzoek

Doel van de literatuurstudie is enerzijds een oriëntatie op wat er geschreven is over het thema van dit onderzoek en anderzijds een basis te vormen voor het opstellen van een theoretisch kader dat bij de lessenanalyses kan worden gebruikt.
Er wordt in eerste instantie, in overleg met de begeleiders, een selectie van relevante literatuur gemaakt, die vervolgens door de onderzoeker wordt bestudeerd. De onderzoeker beschrijft welke belangrijke theorieën hij heeft gevonden en bespreekt die met de begeleiders.
In deze fase probeert de onderzoeker de probleemstelling vanuit de bestudeerde literatuur te beantwoorden. Op deze manier wordt die voor de onderzoeker duidelijker en worden de onderzoeksvragen bijgesteld.
De conclusies, of beter gezegd, de resultaten uit deze literatuurstudie bevatten echter voorlopige conclusies. Het is de bedoeling dat er ook naar de lespraktijk wordt gekeken.

3.3 Onderzoeksvragen

Via literatuurstudie hebben we onze probleemstelling verhelderd en de volgende onderzoeksvragen geformuleerd:

1. Waarom zijn wiskundig inhoudelijke gesprekken belangrijk voor het leren van wiskunde?

2. Wat doen ervaren leraren om wiskundig inhoudelijke gesprekken in de lespraktijk in te zetten?

Naar aanleiding van het in hoofdstuk 2 beschreven theoretische kader, willen we weten welke factoren een rol spelen en welke acties een docent moet uitvoeren voor het inzetten van wiskundige gesprekken in de lespraktijk, wat betreft: condities, voorbereiding en uitvoering.
Er worden lessen van ervaren docenten geobserveerd en geanalyseerd. Het theoretische kader helpt ons om te begrijpen wat er in de lespraktijk gebeurt bij het inzetten van wiskundige gesprekken.

3.4 Analyses van lessen

Uitgangspunten

Het observeren en analyseren van op wiskundig inhoudelijke gesprekken gericht wiskundeonderwijs vormt de kern van dit onderzoek. Hierbij hebben we twee belangrijke uitgangspunten genomen: de eerste betreft de selectie van docenten, de tweede het schooltype en het leerjaar van de leerlingen.

Om een maximaal rendement uit de observaties van de lessen te halen wordt gestreefd naar het creëren van zo gunstig mogelijke condities. Het gaat daarbij om:
(a) docenten die dit type onderwijs willen en kunnen geven;
(b) klassen die min of meer interactief onderwijs gewend zijn;
(c) gebruik maken van geschikte opdrachten en materialen.
Er wordt een aantal lessen van drie ervaren docenten geobserveerd die aan deze voorwaarden voldoen.

Dit onderzoek richt zich op leerlingen uit havo/vwo 5 en 6 met wiskunde B1 of B12. Deze keuze werd beïnvloed door het feit dat de onderzoeker zelf les geeft in dit type onderwijs. Er zijn klassen geselecteerd waar het voor de onderzoeker mogelijk was erbij aanwezig te zijn zonder zelf lessen te missen (de onderzoeker geeft drie dagen per week les).
Verder is dit onderzoek voornamelijk kwalitatief en steunt op een uitgebreide dataverzameling die bestaat uit lesobservaties, video- en audioregistratie en individuele besprekingen. Het verzamelde materiaal heeft tot doel belangrijke aspecten van wiskundeonderwijs zichtbaar te maken.

In de volgende paragraaf wordt het scenario waar de lessen plaats gevonden hebben kort beschreven.

School scenario, docenten en leerlingen

De drie docenten bij wie we lessen hebben geobserveerd zijn Jan, Cees en Guus (fictieve namen). Ze hebben ruime ervaring als wiskundedocent en zijn ook actieve deelnemers aan verschillende activiteiten binnen het wiskundeonderwijs.

Jan geeft les op school A aan leerlingen in 5 en 6 vwo met wiskunde B12. We hebben zijn lessen geobserveerd in de zesde klas. School A is geen gewone school. Hier krijgt een selectie van de beste leerlingen uit scholen in de regio twee dagen per week de hele dag les in de bètavakken. Deze leerlingen zijn zeer gemotiveerd (ze hebben zelf gesolliciteerd om aan deze school te mogen studeren) en hebben een goede vakkennis.
De leerlingen uit de zesde klas krijgen één keer per week wiskundeles, drie uur achter elkaar met een pauze van een kwartier. Het is een groep van ruime twintig leerlingen en ze zitten standaard in een groepopstelling die qua groepsgrootte varieert van drie tot zes leerlingen. Er wordt in de les intensief gewerkt, zowel door leerlingen als door de docent. De werksfeer is ontspannen, de leerlingen zijn zeer communicatief, en er is nauwelijks behoefte om orde te houden. Als er groepgesprekken zijn of als Jan iets klassikaal bespreekt, zijn de leerlingen meestal stil en luisteren aandachtig.

Cees geeft les op school B, in Amsterdam. Het is een doorsnee middelbare school. We hebben lessen geobserveerd in 5 vwo met wiskunde B1,2. Deze leerlingen krijgen twee keer per week wiskundeles. Elke les duurt negentig minuten. Het is een groepje van ongeveer elf leerlingen. De werksfeer is ontspannen; de leerlingen werken standaard in groepjes van twee, soms in groepjes van drie of vier. Het is een gemotiveerde groep, ze werken goed met elkaar samen en bijna alle leerlingen doen mee als er iets klassikaal wordt besproken. Cees moet af en toe orde houden en de leerlingen aanzetten tot werk. Het wiskundeniveau van de leerlingen is volgens de docent niet echt hoog.

Guus geeft les op school C, in Utrecht. Deze school is een doorsnee middelbare school. We hebben de lessen (elke les duurt vijftig minuten) van een havo 5 met wiskunde B1 gevolgd. Het is een groep van ongeveer twintig leerlingen. Er is een goede werksfeer in de klas en over het algemeen wordt er redelijk gewerkt. Er is een groot verschil tussen de werkhouding en het leerniveau van de leerlingen. Een klein deel van de leerlingen werkt heel serieus, een ander deel doet heel weinig, de meesten werken echter redelijk.

Observaties en analyse van lessen

Gezien de beperkte omvang van dit onderzoek bleef het aantal geobserveerde lessen beperkt tot:
- twee lessen van drie uur in 6 vwo, wiskunde B12;
- één les van negentig minuten in 5 vwo, wiskunde B12;

- twee lessen van vijftig minuten in 5 havo, wiskunde B1.

Deze lessen (op een na) zijn op video opgenomen en achteraf geanalyseerd. Voor de analyse werden succesvolle en minder succesvolle gebeurtenissen geselecteerd. Vanuit de analyse van deze gebeurtenissen werd geprobeerd te begrijpen welke factoren in de lespraktijk een belangrijke rol spelen bij wiskundig inhoudelijke gesprekken. Voor de observaties en analyses van lessen werden de relevante conclusies van de literatuurstudie als referentiekader gebruikt (hoofdstuk 2).
Hoewel er in een dergelijk kader al belangrijke aanwijzingen gevonden werden, geeft dit nog geen antwoord op de onderzoeksvragen. Het dient als hulpmiddel om de concrete praktijk van op wiskundig inhoudelijke gesprekken gericht wiskundeonderwijs zichtbaar te maken en te analyseren in het feitelijke onderzoek.

Besprekingen met docenten

Er wordt met elke docent voor- en achteraf gesproken over de lessen. Hierbij zijn er semi-gestructureerde interviews om de '*pedagogical content knowledge*' van docenten in kaart te brengen en om goed te kunnen begrijpen wat er op een bepaald lesmoment is gebeurd. (Meijer, 1999).
'*Pedagogical content knowledge*' bevat de kennis en opvattingen van een docent die betrekking hebben op het toegankelijk maken van vakinhoudelijk kennis voor leerlingen (Meijer, 1999).
Specifiek voor wiskunde worden door Simon (1995) de volgende punten genoemd:
(a) teacher's knowledge of mathematics;
(b) teacher knowledge of mathematical activities and representations;
(c) teacher's theories about mathematics learning and teaching.

3.5 Vergelijken lespraktijk met theorie

De didactische aanpak waar we ons op richten betreft verschillende beschrijvingsniveaus, variërend van dichtbij geobserveerde lessen tot meer algemene kenmerken van didactisch handelen. Het meest concrete niveau betreft analyses van wat er in succesvolle en minder succesvolle lessen is gebeurd (hoofdstuk 4). Op meer afstand gaat het om meer algemene kenmerken van het beoogde onderwijs (kenmerken uit hoofdstuk 2). Deze twee niveaus omschrijven ook het product dat als uitkomst van dit onderzoek wordt beoogd: Een beschrijving op metaniveau, toegelicht aan concrete voorbeelden (hoofdstuk 5).

4 Observaties en analyses van lessen

4.1 Inleiding

Om de analyse te vergemakkelijken werden de conclusies uitgewerkt in referentievragen en voorbeelden (zie overzicht hierna).
In de verschillende analyses is het leerproces van de onderzoeker te zien. De eerste lessenanalyse is in november 2006 geschreven en daar is geen protocol van gemaakt. De tweede lessenanalyse is begin 2007 uitgevoerd en de derde één jaar later. Tijdens deze periode van meer dan één jaar zijn kennis en onderzoekscompetenties van de onderzoeker vergroot. Dat is te zien aan de kwaliteit van het reflectiewerk van de latere analyses. Voor dit onderzoeksrapport werd een nieuwe reflectie op de eerste lessenanalyse gemaakt, maar geen protocollen. Dit onderzoeksproject heeft slechts een omvang van twee jaar en het is niet mogelijk om de eerste analyses opnieuw te gaan uitvoeren.

Referentievragen:
- wat zijn de sociale en de wiskundige normen die de docent stelt of die in de les aanwezig zijn?
- hoe zorgt de docent ervoor dat deze normen door de leerlingen worden overgenomen?
- welke normen worden door de leerlingen overgenomen?
- welke activiteiten vormen aanleiding voor het gesprek?
- wat doet de docent om het gesprek in stand te houden?

Referentievoorbeelden van sociale normen:
- leerlingen worden geacht met elkaar te overleggen;
- leerlingen stellen vragen als ze iets niet begrijpen;
- leerlingen durven hun eigen mening te geven en oplossingenstrategieën te verantwoorden;
- leerlingen moeten naar elkaar luisteren en andere oplossingsstrategieën proberen te begrijpen;
- de docent is aanwezig bij de discussie zonder die te domineren.

Referentievoorbeelden van socio- wiskundige normen:
- gemeenschappelijke opvattingen over wat wiskunde is;
- herkenen wat mooiere of efficiëntere oplossingen zijn;
- hoe leerlingen opgaven moeten interpreteren;
- aan welke criteria moet een (wiskundig) goed antwoord voldoen;
- wat is een goed bewijs.

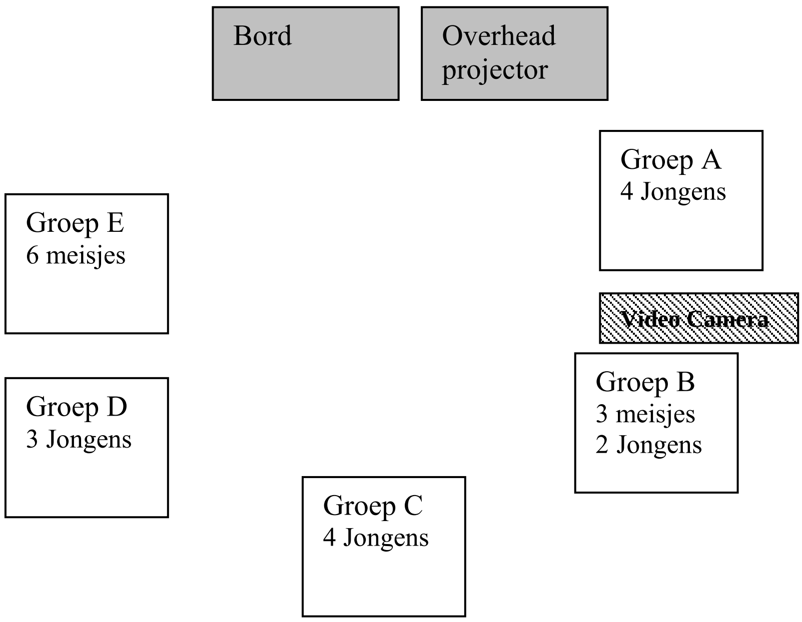
Referentievoorbeelden van expliciet (zichtbare) interventies van de docent:
- selectie en ontwikkeling van opgaven, anticiperen op reacties van leerlingen, vragen bedenken, beslissen in welke mate leerlingen zelfstandig of in groepjes gaan werken (Gravemeijer, 2004);
- het orchestreren van klassengesprekken (Gravemeijer, 1995). Bijvoorbeeld, de docent noteert onder andere de door de leerlingen aangedragen oplossingsmethoden op het bord;
- betekenisvolle vragen stellen (Brondie, Shahan en Boaler, 2004);
- gelegenheid geven tot samenwerking (Brondie, Shahan en Boaler, 2004), met aanwezigheid van de docent maar zonder dat deze het gesprek domineert (Northedge in Mercer, 1995);
- hoge eisen blijven stellen (Brondie, Shahan en Boaler, 2004);
- s*caffolding* (Turner, Cox, DiCintio, Meyer, Logan en Thomas, 1998, Mercer, 1995, Nellissen, 02)
- parafraseren (Nellissen 2002, Mercer, 1995);
- het resultaat van de activiteit van docent en leerlingen wordt expliciet tot onderwerp van discussie gemaakt (Cobb, McClain, Whitenack, 1997, Gravemejer, 2004, Mercer, 1995). Bijvoorbeeld: sommige algemene doelen en argumenten *styles* van de leerlingen tijdens deze gesprekken toelaten; '*real-life*' situaties voor discussie voorstellen; naar argumenten en bewijzen vragen.
- connecties maken met wiskundige conventies en de praktijk van de bredere wiskundige gemeenschap (Mercer, 1995, Gravemeijer 2004). Bijvoorbeeld, leerlingen helpen kiezen voor standaardisatie.

Referentievoorbeelden van belonen:
- laten merken daadwerkelijk geïnteresseerd te zijn in het denken van de leerlingen;
- zorgen dat leerlingen bijdragen aan de discussie en een rol hierin hebben;
- de beoordeling moet ook consistent zijn aan de gestelde doelen. Bijvoorbeeld: de docent honoreert onder andere alternatieve oplossingen van leerlingen; het luisteren naar anderen wordt positief gewaardeerd; goede antwoorden zonder uitleg worden niet geaccepteerd;
- eigen juistheid van een antwoord zonodig opschorten.

4.2 Jan in 6 vwo

4.2.1 Scenario

Het gaat om een wiskundeles, gegeven op 31 oktober 2006 in vwo 6 wiskunde B1,2; de les duurt drie uur (een pauze van een kwartier) op school A.
De sfeer in de groep is ontspannen en als er klassengesprekken zijn of als de docent iets klassikaal bespreekt, wordt er goed geluisterd. Er zijn twee groepen gefilmd (groep A en groep B, zie figuur). Omdat er in groep B vaak wat luid werd gepraat, is de geluidsweergave van groep A niet altijd even duidelijk.
Het behandelde onderwerp is meetkunde, voornamelijk: raaklijnen aan parabolen, introductie van analytische meetkunde en cirkelvergelijking. Jan gebruikt zelfgemaakt lesmateriaal (zie bijlage 3).



Figuur 3: klassenopstelling bij Jan

4.2.2 Voor- en- nabespreking

Bij de voorbespreking werd aan de docent gevraagd wat hij eraan doet om leerlingen te stimuleren tot wiskundige gesprekken. Hij gaf hierop geen eenduidig antwoord: ‘ik leer wiskunde zoals ik denk hoe wiskunde is'. Hij probeert ook zijn persoonlijke wiskundevisie op de leerlingen over te dragen. En volgens hem lukt dit ook wel. In de geanalyseerde lessenfragmenten is dit te zien, bijvoorbeeld aan de manier waarop leerlingen over wiskunde met elkaar praten, elkaar vragen stellen en wiskunde uitleggen.
Hoe bereidt de docent zijn lessen voor? Volgens Jan gaat het bij het voorbereiden van lessen voornamelijk om de juiste opdrachten of lessenactiviteiten te vinden, die de kern van de stof goed

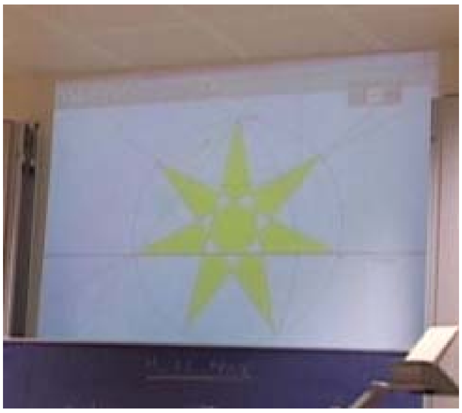
raken. Dit is in strijd met het schaarse aantal contactlessen met de leerlingen (drie uur per week). Hij besteedt veel tijd aan het voorbereiden van het lesmateriaal (opgaven, sheets, presentaties), maar hij bereidt zich niet speciaal voor op het stimuleren van wiskundige gesprekken.
Aan de docent is ook gevraagd waarom hij juist die opgaven (bijlage 3) gekozen heeft. Zijn antwoord hierop luidt: 'vanwege de wiskunde die erin staat, het open karakter dat tot verschillende strategieën leidt, de complexiteit en uitdaging'.

4.2.3 Werken aan de opgaven

Jan introduceert het eerste wiskundige probleem (zevenster) klassikaal. Hij maakt eerst zelf , vóór de klas, een constructie van de zevenster met het computerprogramma Cabri.

Zevenster

De hoekpunten vormen een regelmatige zevenhoek.
De parabool met als brandpunt het bovenste punt en als richtlijn de horizontale lijn lijkt te raken aan twee van de zijden van de ster!
Bewijs dat dit waar is.



Figuur 4: zevenster

Lesfragment 1

1	Jan:	En nou zal je wel iets bijzonders opvallen. Wat valt je visueel op?
2	L1:	Ze snijden.
3		(Jan bevestigt dat en wijst op de figuur dat dat klopt)
4	L2:	Hij raakt die.
5		(Jan bevestigt dit en laat merken dat het snijden niet zo belangrijk was)
6	Jan:	Hier raakt die …. Het lijkt te raken. Weet je het zeker?
7		(Jan wacht niet op antwoord op zijn vraag. Hij legt uit dat dit juist het doel van de opgave is: bewijzen dat die lijnen raaklijnen zijn. Jan suggereert aan de leerlingen die het voorgestelde probleem te moeilijk vinden om eerst opgaven 44 en 45 uit hoofdstuk 2 te bekijken.

Jan stimuleert de leerlingen te praten door de vraag te stellen: 'Wat valt je op?'. Concrete vragen, zoals: beschrijf wat je ziet; vertel verschillen en/of overeenkomsten; vertel wat je opvalt, stimuleren leerlingen te praten en deel te nemen aan het groepsgesprek. Dit komt doordat dit soort vragen een beroep doet op de perceptuele kennis van de leerlingen. Als de link met de denkniveaus van Van Hiele (1973) wordt gelegd, zou gesteld kunnen worden dat dit soort vragen bij het *grondniveau* hoort dat altijd aanwijzig is. Maar in deze context wordt eigenlijk van de leerlingen verwacht dat ze meer dan alleen de visuele aspecten noemen. De docent verwacht waarschijnlijk ook (5) dat met deze vraag bepaalde verbanden tussen de wiskundige objecten worden genoemd (7). De vraag die eigenlijk gesteld wordt is gebaseerd op de kennis die de leerlingen al hebben over raaklijnen en parabolen.

Door te vragen ‘weet je dat zeker?’(6) treedt Jan consequent op met de socio-wiskundige norm 'eigen vermoedens valideren'. Deze vraag bevat in zekere zien de kern van de behoefte aan het leren bewijzen.
Tijdens dit gesprek maakt de docent een selectie van de door de leerlingen gegeven informatie (3, 5, 7). Dit kan ze helpen bij het organiseren van hun wiskundige activiteiten en ze een idee geven waar ze hun aandacht op kunnen richten.

Het probleem van de zevenster is een gemakkelijk voor te stellen probleem, maar vrij complex qua oplossing. Het wiskundeniveau van de lessen van Jan is vrij hoog. Hij is zich hiervan bewust en, om ervoor te zorgen dat elke leerling bij de les betrokken blijft, geeft hij ze de mogelijkheid om aan (iets) makkelijker problemen te werken. Hij begint dus met een lastig probleem (zevenster), vervolgens doet hij een stap terug door leerlingen eerst opgave 44 en 45 te laten maken. Het enerzijds hoge eisen stellen en ze anderzijds iets minder moeilijke opgaven aan te reiken, zorgt ervoor dat leerlingen betrokken blijven.

Opgave 45

Toon aan:

a. De twee raaklijnen door een punt op de richtlijn op de parabool staan loodrecht op elkaar.

b. De verbindingslijn van de twee raakpunten gaat van deze raaklijnen door het brandpunt van de parabool.

Lesfragment 2

Het gaat om een overleg tussen vier leerlingen bij opgave 45a. Één leerling wil weten waarom de hoek tussen de twee raaklijnen negentig graden is. De andere drie proberen deze leerling uit te leggen waarom dat zo is.

Interessant in dit lesfragment zijn de vragen die de leerlingen aan elkaar stellen: waarom? Hoe weet je zeker dat …? Bij deze groep leerlingen zijn duidelijk aanwezig de normen: eigen oplossingsstrategieën uitleggen, vragen stellen, kritisch naar het werk van andere leerlingen kijken.
Het is moeilijk te zeggen of de docent hiervoor verantwoordelijk is. Het verantwoorden van wat je doet en waarom je het doet, zijn echter aspecten waaraan Jan in zijn lessen veel aandacht besteedt.
Een wiskundige norm die in deze klas aanwezig lijkt te zijn is de opvatting dat het bij wiskunde gaat over problemen oplossen. Hiervoor is het belangrijk dat men begrijpt wat men aan het doen is. Dit blijkt uit de houding van de leerlingen ten opzichte van de gegeven opdrachten: het gaat om het begrepen hebben en niet alleen het antwoord weten.
Jan moedigt deze houding aan door de manier waarop hij het vak presenteert, de soort opdrachten die hij voorstelt en door in de les steeds de nadruk te leggen op de verantwoordingen van gedachten, antwoorden of oplossingsstrategieën.

Lesfragment 3 gaat om dezelfde opgave maar nu gaat het om een dialoog tussen een leerling en Jan.

Lesfragment 3

Een leerling stelt een vraag aan Jan. Jan herhaalt de vraag van de leerling en helpt de leerling om de opdracht te visualiseren. De leerling ontdekt zelf de oplossing met de hulp van de aanwijzingen van Jan.

De docent betrekt (beloont) de leerling door de vraag te herhalen. Op deze manier laat Jan merken dat wat de leerling doet belangrijk is. Hij geeft geen rechtstreekse antwoorden op de vragen van de leerling. In plaats daarvan geeft hij aanwijzingen. Op deze manier houdt hij zich eraan dat het bij wiskunde gaat om problemen op te lossen en dat de leerling daarin zich actief moet opstellen.

Lesfragment 4

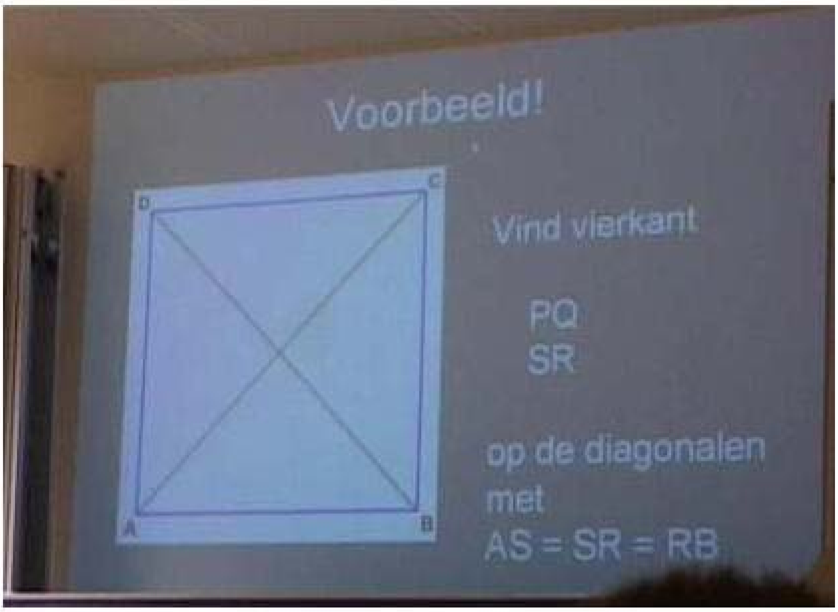
Tijdens de klassikale bespreking van opgave 45b doet Jan geen verwijzingen naar antwoorden van de leerlingen. Hij gaat dan verder met het oorspronkelijke probleem van de zevenster. Jan herhaalt het probleem en hij legt de link tussen opgave 44 en 45 en het zevensterprobleem. Jan geeft de leerlingen vijf minuten de tijd om er nog eens over na te denken. Vervolgens vraagt hij of het probleem duidelijk is en herhaalt hij de probleemstelling nog een keer.

De docent probeert de leerlingen bij het probleem te betrekken door vragen te herhalen en ze bedenktijd te geven. Dit zijn basistechnieken voor het hanteren van klassengesprekken, maar daarom niet minder belangrijk om ze hier even te noemen.
Tijdens het gesprek vertelt Jan over 'wiskundige conventies' en zijn eigen visie op wiskunde. Hij gebruikt zinnen als: 'Je weet eigenlijk nog niet dat …'; 'In wiskunde doe je …vaak'' en hij legt de nadruk op de wiskundige activiteit (en wiskundige houding). Dit kan belangrijk zijn, omdat de leerling dan toegang heeft tot referentiekaders die hem helpt de eigen wiskundige houding en kennis te verantwoorden.

Lesfragment 5

1 Jan introduceert analytische meetkunde door middel van een PowerPoint presentatie en vertelt waar het over gaat. Het begin van het verhaal gaat over Descartes, hoe belangrijk hij was voor de actuele wiskunde en hoe zijn probleemaanpak handig is voor het oplossen van meetkundige problemen. Aan de hand van een voorbeeld laat Jan zien dat een meetkundig probleem op drie verschillende manieren kan wordt aangepakt. Bij de derde en laatste manier hoort de aanpak van de analytische meetkunde (de aanpak van Descartes).

2 Vervolgens legt Jan het volgende probleem aan de leerlingen voor:



Figuur 5: Vindt vierkant PQSR op de diagonalen van vierkant ABCD zo dat AS = SR = RB

3 Bij de analytische aanpak van Descartes, wordt ook uitgegaan van de oplossing van het probleem (je doet alsof) maar Descartes voegt de letters *x* en *y* aan de figuur toe.

4 Jan vertelt dat hij een formule met *x* en *y* kan opstellen en hij vraagt de leerlingen of ze andere vergelijkingen kunnen opstellen. Want, met alleen maar een vergelijking en twee onbekenden komt hij er niet uit. Hij moet nog een vergelijking vinden.

5 Een leerling legt uit hoe zij het ziet.

6	Jan vraagt of zij zeker is van wat zij zei, waarop de leerling met ja antwoordt.
7	Een medeleerling vraag dan waarom, en de eerste leerling legt het uit.
8	Jan reageert heel positief en hij vraagt aan de leerling om haar oplossing aan de rest van de klas te laten zien.
9	Jan herhaalt haar uitleg en probeert wat onduidelijkheden aan te vullen.
10	Jan verwijst ook naar het antwoord van een andere leerling.

Een wiskundige norm die Jan hierbij inbrengt, is: bij het oplossen van meetkundeproblemen kun je beter ‘doen alsof je het antwoord al weet’.
Jan plaatst deze aanpak in een historisch kader (1), aan de hand van een concreet probleem (2). Hij laat zien hoe Descartes dit probleem heeft aangepakt (3), maar hij laat niet zien hoe hij het opgelost heeft. Dit laat hij aan de leerlingen over (4). Die krijgen de gelegenheid hier even over na te denken. Voor een goed verloop van dit gesprek is het belangrijk dat leerlingen in staat zijn hun eigen oplossingen te verdedigen, zich kritisch op te stellen en dit gebeurt hier ook (5,7). Jan gaat consequent met deze normen om (6) en hij beloont de leerlingen die zich volgens deze normen gedragen (8, 9, 10).
Jan treedt in dit gesprek als wiskunde-expert op en zorgt ervoor dat belangrijk informatie ook werkelijk bij de klas terechtkomt (9), maar hij domineert het gesprek niet. Hij gebruikt direct de inbreng van de leerlingen en houdt zich aan hun aanwijzingen (6, 8, 9, 10)

Lesfragment 6

1	Jan schrijft de cirkelvergelijking (resultaat van opgave 46) op het bord. Hij vraag aan de leerlingen om aan die vergelijking betekenis te geven. Hij vraagt of er iemand is die nog nooit een cirkelvergelijking heeft gemaakt en of die het wil proberen. Leerling 1 gaat op de uitnodiging in.
2	Jan vraagt of iemand nog andere dingen inziet.
3	(Geen antwoord. Jan past de vraag aan, maakt die concreter).
4	Leerling 2 geeft antwoord op deze vraag.
5	Jan vraagt hoe hij daaraan komt.
6	Leerling 2 legt het uit.
7	Jan moedigt de leerling aan zich af te vragen wat dingen betekenen in plaats van alleen maar antwoorden op te schrijven.
8	Jan vat samen wat de leerling zei.

Jan stelt hier de wiskundige norm: betekenis geven aan wiskundige objecten en verbanden (1,7). Hij laat de leerlingen zien (belonen) dat hun inbreng belangrijk voor de les is. Hij doet dat door ze te vragen hun antwoord aan de rest van de klas te vertellen (1,2,5); door positieve te reageren op hun inbreng (5,8); de vraag aan te passen (3), toen hij geen antwoord heeft gekregen, in plaats van antwoord geven.

4.2.4 Reflectie

Tijdens de les lijken leerlingen zeer betrokken bij de opdrachten en ze overleggen verdurend met elkaar. Voor deze leerlingen lijkt begrijpen wat je doet het belangrijkst. Dit blijkt uit het (bijna) natuurlijke ontstaan van wiskundige gesprekken tussen leerlingen en het constant aan elkaar vragen stellen: Waarom doe je dit zo? Hoe weet je dat …? Hoe weet je het zeker?
Het is moeilijk te zeggen in welke mate de docent daar verantwoordelijk voor is. Het verantwoorden van wat je doet en waarom je het doet, zijn echter aspecten waaraan Jan in zijn lessen veel aandacht besteedt. Er is dus een goede kans dat leerlingen de wiskundige houding van de docent hebben overgenomen.
De leerlingen van school A zijn - uiteraard - geen afspiegeling van de doorsnee Nederlandse leerling. Wel zijn het gemotiveerde leerlingen.

Welke sociale – en socio- wiskundige normen ontstaan in deze les?

- wiskundige problemen (willen) en kunnen oplossen (dit doe je door het probleem te begrijpen, betekenis te geven, vragen te stellen en te overleggen met andere leerlingen);
- men wordt geacht om eigen vermoedens te valideren;
- men moet eigen oplossingsstrategieën uitleggen, vragen stellen, kritisch naar het werk van andere leerlingen kunnen kijken

Wat doet de docent om deze normen in de les te hanteren?

Jan probeert duidelijk een *mathematical interest* bij de leerlingen te ontwikkelen door:

- als wiskundige op te treden. Hij draagt zijn visie over op de leerlingen;
- geschikte wiskundige opdrachten aan te bieden (uitdagend, gemakkelijk voor te stellen, maar complex qua oplossing);
- goede vragen te stellen;
- nadruk te leggen op de wiskundige aanpak;
- de wiskundige activiteit in een breder kader te plaatsen;
- leerlingenparticipatie te belonen door hun inbreng in de les te gebruiken.

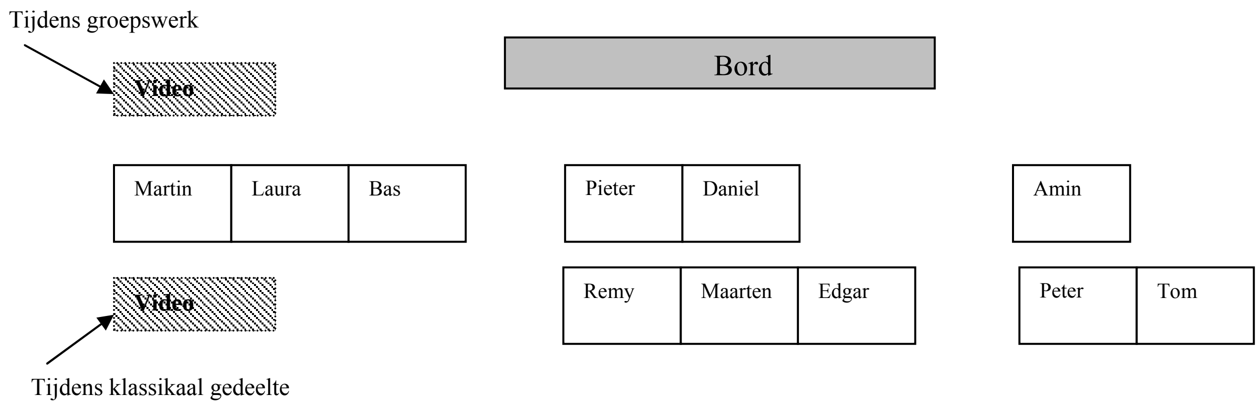
Verder, stimuleert hij zijn leerlingen te gaan praten door concrete vragen te stellen zoals:

- beschrijf wat je ziet;
- vertel verschillende overeenkomsten;
- vertel wat je opvalt.

4.3 Cees in 5 vwo

4.3.1 Scenario

Het gaat om een wiskundeles, gegeven op 8 december 2006, van Cees in vwo 5 wiskunde B12. De les duurt negentig minuten op school B in Amsterdam.
Cees gebruikt de nieuwe editie van 'Moderne Wiskunde'. Het gaat om boek 2 par. 1.5.
Het is een groepje van elf leerlingen, de sfeer is ontspannen en bijna alle leerlingen doen mee als er iets klassikaal wordt besproken.
Het volledige protocol van de opgenomen lessenfragmenten zijn als bijlage 1 toegevoegd.



Figuur 6: klassenopstelling bij Cees

De les gaat over bewijzen in wiskunde. Cees kiest enkele opgaven uit het boek en past ze aan. Hij begint klassikaal en daarna werken de leerlingen in groepjes. Lesfragmenten 1 t/m 7 gaan over het klassikale gedeelte van de les, waarin de definitie van parallellogrammen aan de orde wordt gesteld (opgave 23). Lesfragmenten 8 en 9 betreffen groepswerk. Hier zijn de leerlingen bezig met opgave 25.

4.3.2 Voor- en nabespreking

Eerder vertelde Cees dat de les voor een deel interactief zou zijn: "leerlingen doen suggesties, ik vraag ze die te bewijzen en op elkaar te reageren. Soms werk ik het bewijs met hun aanwijzingen verder uit op het bord".
Dit gebeurt in werkelijkheid ook en is te zien in de geanalyseerde lesfragmenten.
Tijdens de nabespreking van de les vertelde Cees dat hij leerlingen het proces van bewijzen wilde laten ervaren en hoe complex het bewijzen van dingen, die vanzelfsprekend lijken te zijn, is. Het praktische doel van de les is een bewijs goed uit te werken en er kritisch naar te kijken.

4.3.3 Klassikaal groepsgesprek

Opmerkelijk in de les van Cees is de leerlingenparticipatie (bijna iedereen doet actief mee met de klassengesprekken) en de manier waarop hij deze participatie uitlokt en stimuleert.
Cees stelt een aangepaste versie van opgave 23 (zie hieronder) aan de klas voor. De volgende lesfragmenten komen uit dit klassengesprek.

Oorspronkelijke opgave 23

23 Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram. Hiernaast staat de definitie van een parallellogram.

a Teken een parallellogram $ABCD$ met diagonaal AC.
$\angle CAD$ en $\angle BCA$ zijn Z-hoeken.
Welke andere tweetallen hoeken zijn ook Z-hoeken?

b Op grond van welk congruentiegeval kun je concluderen dat $\triangle ACD$ en $\triangle CAB$ congruent zijn?

c Welke conclusie kun je trekken uit opdracht b over de zijden AD en BC? En over AB en CD?

d Bewijs: Als de overstaande zijden van vierhoek $ABCD$ twee aan twee even lang zijn, dan zijn de overstaande zijden evenwijdig.

parallellogram
Een vierhoek waarvan de overstaande zijden evenwijdig zijn is een parallellogram.

Aangepast versie van opgave 23

Bewijs dat de twee definities gelijkwaardig zijn:

Een parallellogram is een vierhoek waarvan de overstaande zijden evenwijdig zijn.

Een vierhoek waarvan de overstaande zijden twee aan twee even lang zijn is een parallellogram.

Lesfragment 1

1	Cees:	…Wat is een parallellogram?
2	Ton:	Een vierhoek met overstaande evenwijdige zijden?
3	Cees:	Een vierhoek met overstaande evenwijdige zijden. Dus een vierhoek ABCD (hij tekent een parallellogram op het bord. Zie figuur 7).
4	Cees:	Ja? Dit is een parallellogram. De overstaande zijden zijn parallel. Is dat een parallellogram?
5	meerdere leerlingen antwoorden: ja!	

6	Cees:	Is dit de definitie?
	(...)	
7	Cees:	Oké, dit zijn drie dingen die een parallellogram definiëren, of niet? Als je dit hebt (docent wijst figuur op het bord aan) is dit per se een parallellogram?
8	Piet:	Ja.
9	Laura:	Nee.
10	Ton:	Ja, als je zo ziet wel.
11	Laura:	Ik denk het niet.
12	Iemand zei:	Het kan een rechthoek zijn.
13	Meerdere leerlingen: een rechthoek is altijd een parallellogram.	
14	Cees:	Laura zei nee, dit hoeft geen parallellogram te zijn. Als de overstaande zijden gelijk zijn kunnen we ook een rechthoek hebben.
15	Ton:	Maar dat is ook een parallellogram.
16	Cees:	Waarom is dat een parallellogram?
17	Ton:	Omdat gewoon, zeg maar. De hoeken zijn al gelijk.
	(...)	
18	Cees:	Oké … dat even van te voren. Een rechthoek is altijd een parallellogram, maar het is wel een bijzonder parallellogram. Oké, als je dit hebt is dit altijd een parallellogram? Dat vroeg ik. Ik hoor mensen ‘ja’ zeggen en ik hoor mensen ‘nee’ zeggen.

In dit lesfragment stelt Cees de definitie van een parallellogram ter discussie. Hij begint het gesprek met een open vraag (1) en vanaf dat moment, op basis van wat de leerlingen antwoorden, geeft hij aanwijzingen en probeert hij samen met de leerlingen tot een gezamenlijke definitie van een parallellogram te komen (6, 7, 18). Opmerkelijk in dit gesprek is de manier waarop Cees zelf deelneemt aan dit klassengesprek. Hij beoordeelt noch de gegeven antwoorden noch vertelt hij of deze juist zijn of niet. Hij houdt zich trouw aan de aanwijzingen van de leerlingen (3, 14, 17), hij herhaalt wat ze zeggen en verzamelt hun inbreng op het bord zodat het gemakkelijk is het gesprek te volgen. Hij zorgt vooral dat de interactie goed verloopt (14). Het lijkt dat iedereen in staat is een definitie van een parallellogram te geven (4, 6, 14).
Op een gegeven moment gaat de discussie over het verschil tussen een rechthoek en een parallellogram (7 - 17). Cees stelt het moment van vertellen wat een parallellogram is uit. Hij kapt het gesprek af (18), maar wel op een moment waar de leerlingen het gevoel (lijken) te hebben dat dat moet (of kan) gebeuren. Dit gevoel moet ook door de groep als zodanig worden ervaren. Als dit niet zo is, dus als de docent opeens de discussie afbreekt, bestaat het risico dat leerlingen denken dat het belang van hun eigen inbreng in het klassengesprek eigenlijk 'nep' is.
Zoals eerder gezegd probeert Cees geen oordeel te geven tijdens het gesprek. Hij laat dit vaak aan de leerlingen zelf over. Hij doet dit door leerlingen vragen te stellen (4, 6, 7, 14).
Door de antwoorden van de leerlingen te herhalen, vervult Cees enerzijds de verwachting van de leerlingen dat hij als docent deelneemt aan het gesprek. Anderzijds laat hij de leerlingen merken dat hun inbreng serieus wordt genomen.

Lesfragment 2

1	Cees:	Laten we eerst hem de kans geven om het even te zeggen.
2	Pieter:	AB is CD.
3	Cees:	AB is CD (docent schrijft tegelijkertijd op het bord).
4	Cees:	Wat hebben we nu?
5	Pieter:	zzz.

Figuur 7

(...)

6	Ton:	De z-hoeken mag je juist toepassen als de lijnen evenwijdig zijn, maar als de hoeken gelijk zijn hoeven niet de lijnen even lang te zijn…
7	Cees:	Ja? Heb je het gevolgd? Eh … ik zou nu willen concluderen dat ze evenwijdig zijn, want het zijn z-hoeken die gelijk zijn en dan zijn deze zijden ook evenwijdig maar ... wat je zegt is wel waar. Mag je het nu omkeren? Mag je nu zeggen, omdat die hoek is gelijk aan die hoek, is dit evenwijdig aan dat?
8	L:	Nee.
9	Ton:	Ja, want dat is het principe van de z-hoeken.
10	Cees:	Het is het principe van de z-hoeken?
11	Ton:	Het moet wel.
12	Cees:	Is iedereen nu overtuigd?

In beide lessenfragmenten is te zien dat leerlingen voor hun opvattingen uit durven te komen (9, 11, 13); ze reageren op elkaars antwoorden ([1]: 7, 8, 9, 10; [2]:8,9); ze leggen hun antwoord uit (6, 9). Belangrijk voor de ontwikkeling van deze normen is dat de docent deze consequent toepast en zorgt dat de leerlingen het ook doen. In dit lessenfragment bijvoorbeeld herinnert Cees de leerlingen eraan dat ze naar elkaar moeten luisteren (1, 7).

Lesfragment 3

1	Cees:	Dus de mensen die ‘nee’ zeggen moeten met een voorbeeld kunnen komen van een vierhoek waarin ... waarin wat?
2	L:	Waarin de overstaande zijden gelijk zijn.
3	Cees:	Waarin de overstaande zijden gelijk zijn. Maar waarin ze niet evenwijdig zijn?
4	Cees:	Dus als je zegt ‘ja’, dan moet je met een bewijs komen. Zeg je ‘nee’ dan moet je met een voorbeeld komen van zo'n soort vierhoek en ook laten zien dat het geen parallellogram is.
5	L:	Dat kan niet.
6	Cees:	Dat kan niet ... dat we denken ...de meeste zeggen dit is wel zo.... Als je dit hebt dan heb je ook dat. Oké, laten we het gewoon proberen te bewijzen.

In dit lesfragmenten komen de volgende sociale wiskunde normen naar voor:
- de activiteit van bewijzen in wiskunde en, in dit concrete geval, het bepalen van gelijkwaardige definities of stellingen
- het herkennen van goede en overtuigende argumenten

Cees wil dat de leerlingen de activiteit van bewijzen ervaren. Hij vraagt inbreng van leerlingen en schrijft die op het bord. Daarop komen dus drie verschillende definities van een parallellogram te

staan. Cees vraagt eerst of deze drie definities een parallellogram definiëren en daarna of deze gelijkwaardig zijn. Leerlingen wordt dus gevraagd hun eigen ideeën in te brengen en die te verantwoorden. Cees laat niet weten of de antwoorden correct zijn, het gaat niet om het goede antwoord, maar om het kunnen verantwoorden van het antwoord dat gegeven wordt (1, 4, 6).
Hij stelt echter duidelijke grenzen aan het klassengesprek. Hij zorgt ervoor dat het gesprek in de gewenste richting gaat en dat de nodige wiskundige kennis aanwezig is (6).

Volgens Gravemeijer (1995) is de selectie en aanpassing van opgaven met een bepaald doel een bekende manier om het leerproces pro-actief te beïnvloeden. Zoals aan het begin van deze lesanalyse werd gezegd, kiest Cees opgaven uit de methode en past ze aan aan zijn lesdoelen. Bij opgave 23 kiest hij ervoor één enkele vraag te stellen in plaats van de leerlingen aan de eerste drie deelvragen te laten werken. De eerste deelvragen a, b en c zijn bedoeld om de leerling op het goede spoor te zetten, het echte bewijs komt pas in vraag d aan de orde. Cees kiest voor een ‘vrijere aanpak' die beter aansluit bij zijn lesdoel: leren bewijzen door zelf het proces van bewijzen te ervaren. Tijdens het klassengesprek worden die deelvragen min of meer behandeld, maar wel op een natuurlijke manier of worden ze door de leerlingen zelf ingebracht.

Lesfragment 4

1	Cees:	... Jammer, ander idee? Pieter?
2	Pieter:	De middellijn AC tekenen.
3	Cees:	Ha, laten we gewoon een extra lijn tekenen. In deze figuur is zo weinig te zien. *(Hij tekent diagonaal AC op figuur 2)*. Laten we de lijn bijtrekken.
4	L1:	Wat leuk,
5	L2:	Dan heb je een Z.
6	Cees:	Ik zie een Z. Ik zie ...
7	Pieter:	zzz.
	(...)	
8	Cees:	Wie zegt dat als de overstaande zijden gelijk zijn dan zijn ze ook evenwijdig? Wie zegt dat dat zo is? Dus dat een parallellogram net zo goed zo zou kunnen ... jij, je zegt dat …
9	L1:	Ik zeg het ook.
10	L2:	Ik ook.
11	Cees:	Heb je argumenten? Je hebt geen argumenten?
12	Laura:	Ik wel.
13	Cees:	Laura, heb je argumenten?
14	L:	Als de zijden even lang zijn dan moeten de andere zijden ook even lang zijn.
15	Cees:	Even om de beurt. Als de zijden even lang zijn moeten de zijden even lang zijn?
16	L:	Nee, als deze, zeg het maar, de bovenste en de onderste (*docent wijst op CB en AB op het bord - zie het middelste parallellogram in figuur 7).*
17	Cees:	Ja?
18	Laura:	Dan moeten de andere twee ook gelijk zijn.
19	Cees:	Ah, maar dan is het nog mooier want je kunt wel zeggen een rechthoek heeft gewoon twee overstaande zijden die gelijk zijn en dan heb je automatische een parallellogram.

Deze lesfragmenten laten zien hoe Cees de leerlingen aanspoort om hun denkwerk te tonen (1, 6, 8, 11, 13, 17). Cees laat leerlingen elkaar bekritiseren (1, 15) en stuurt aan op verantwoording en eventueel verbetering (6, 8, 11, 13, 15, 17). Nadat Laura haar argumenten verteld heeft (7) valt er een stilte. Vervolgens beginnen verschillende leerlingen tegelijkertijd te praten. Cees zorgt er op dat moment voor dat iedereen naar Laura blijft luisteren door te zeggen: ‘even om de beurt' en door te herhalen wat Laura heeft verteld (15), die op deze manier de kans krijgt haar antwoord te verbeteren en aan de groep te verduidelijken. Ten slotte beloont Cees de leerlingen door ze een compliment te geven voor hun inbreng (19).

4.3.4 Groepswerk

In dit gedeelte van de les werken leerlingen in groepjes van twee, drie en vier leerlingen. Cees loopt rond, en heeft aandacht voor vragen van leerlingen. Om zo onopvallend mogelijk te filmen, zijn er slechts van één groep leerlingen in video-opnamen gemaakt, namelijk van de groep van Laura, Martin en Bas.

Na het inleidende klassengesprek geeft Cees instructies aan de leerlingen over hoe ze verder aan het werk moeten gaan: elke groep moet de stelling die bij opdracht 25 staat proberen te bewijzen; het bewijs wordt dan, in overleg met elkaar, opgeschreven; ten slotte wordt het bewijs door een andere groep nagekeken en beoordeeld. Aan het eind van de les neemt Cees het werk van de leerlingen in en kijkt het na.

Opdracht 25

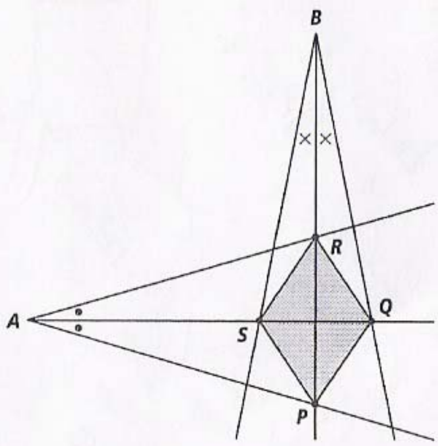
25 In de figuur hiernaast snijden de bissectrices van de hoeken A en B elkaar loodrecht.
Te bewijzen: $PQRS$ is een ruit.

a Verken het probleem en geef een bewijs als je dat direct ziet.

b Analyseren: vooruitdenken
Waarvoor zou het nodig zijn dat de bissectrices loodrecht op elkaar staan?
Bij bissectrices vind je gelijke hoeken. Zitten de gelijke hoeken in congruente driehoeken?

c Analyseren: terugdenken
$PQRS$ is een ruit. Welke definitie van een ruit is hier handig te gebruiken?

d Maak een plan en schrijf vervolgens het bewijs uit.



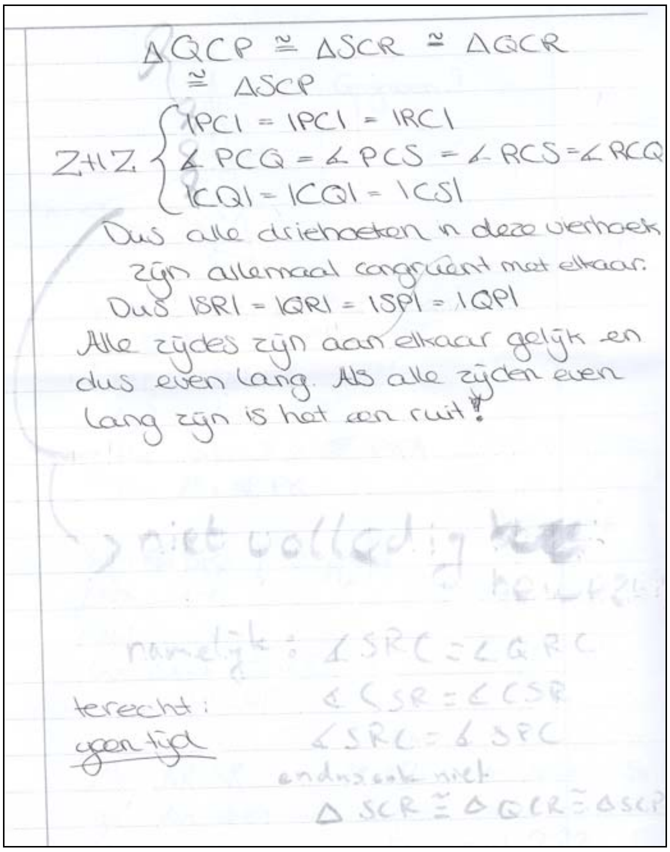
Van dit gedeelte van de les zijn twee voorbeelden geselecteerd waaruit duidelijk wordt op welke manier Cees de leerlingen tijdens groepswerk begeleidt en aanstuurt.

Lesfragment 5

1	Björn:	Ik ga vragen of dit een bissectrice is.
2	Laura:	Maar is dit gegeven?
3	Björn:	Meester ...
4	Cees:	ja?
5	Björn:	Kun je stellen dat als deze lijn de bissectrice is van B en het gaat ook door R en door P dan is automatisch een bissectrice van deze hoeken? Of kan je dit niet stellen?
6	Martin:	Dat moet je juist bewijzen anders heeft het bewijzen geen nut.
7	Cees:	Dus, ik hoef er niks op te zeggen?
8	L:	Nee, het hoeft niet.
9	Cees:	Ik hoef er niks op te zeggen? Ben je overtuigd van wat hij zegt?

In dit lesfragment stelt Bas een vraag aan Cees (3). Voordat deze iets zegt, geeft Martin antwoord op de vraag van Bas (6). De reactie van Cees is heel mooi (7). Hij vraagt dan: ‘Ik hoef er niks op te zeggen?’ Later voegt hij er nog aan toe (9): ‘Ben je overtuigd van wat hij zegt?’
Cees heeft op deze manier de vraag teruggespeeld naar de groep en stimuleert ze op deze manier om met elkaar te overleggen.
Hij stelt de volgende socio-wiskundige normen: elkaar overtuigen door ‘wiskundige’ argumenten te gebruiken.
In het lesfragment hierboven herkent Martin dat er dingen zijn die je kunt zien, maar dat dit niet voldoende bewijs behoeft te zijn (6). Martin schijnt ook de betekenis van bewijzen bij wiskunde te begrijpen, doordat hij zei: ‘Anders heeft bewijzen geen nut’. In dit fragment is ook duidelijk dat Cees aan de discussie deelneemt zonder die te domineren (7, 9).

Hebben de leerlingen de aansporingen van Cees gebruikt? Het bewijs van deze groep leerlingen is niet volledig. Ze trekken de eindconclusie zonder argumenten of een bewijs te geven. Maar, tijdens het onderlinge gesprek gaf Bas er wel argumenten voor (zie protocol, bijlage 4).
De groep die het werk van Bas heeft nagekeken (Erik, Martin en Ricardo) geeft duidelijk aan welke stappen niet verantwoord zijn, het is een mooie analyse, maar hun eigen werk is onvolledig en zwak.
Hieronder is een deel van het werk van Bas, Laura en Martin te zien. De opmerkingen die in grijs weergegeven zijn, zijn door de leerlingen Erik, Martin en Ricardo gemaakt.



$\Delta QCP \cong \Delta SCR \cong \Delta QCR \cong \Delta SCP$

$$ZHZ \begin{cases} |PC| = |PC| = |RC| \\ \angle PCQ = \angle PCS = \angle RCS = \angle RCQ \\ |CQ| = |CQ| = |CS| \end{cases}$$

Dus alle driehoeken in deze vierhoek zijn allemaal congruent met elkaar.
Dus $|SR| = |QR| = |SP| = |QP|$
Alle zijdes zijn aan elkaar gelijk en dus even lang. Als alle zijden even lang zijn is het een ruit!

niet volledig bewijs
namelijk: $\angle SRC = \angle QRC$
terecht: $\angle CSR = \angle CSR$
geen tijd $\angle SRC = \angle SPC$
anders ook niet
$\Delta SCR \cong \Delta QCR \cong \Delta SCP$

Figuur 8: leerling-werk

In het algemeen zijn de leerlingen vergeten (of ze denken dat het vanzelfsprekend is en dus niet bewezen hoeft te worden) dat een punt dat op de bissectrice, op dezelfde afstand van *S* en *Q* ligt. Leerlingen waren vooral gefocust op het vinden van congruente driehoeken. Dat is ook begrijpelijk, gezien het feit dat het een belangrijke rol heeft gespeeld bij het bewijzen aan het begin van de les. Dit hebben ze goed gedaan en opgeschreven.

Het volgende lesfragment beschrijft een situatie aan bijna het einde van de les. Cees zorgt voor het afronden van de opdracht en dat alle leerlingen hun werk bij hem inleveren. Hij wil weten waarom Laura, Martin en Bas de opdracht niet hebben afgemaakt.

Lesfragment 6

1	Cees:	Hebben jullie je werk terug nu?
2	Laura:	Ja.
3	Cees:	Ja? Oké, hebben jullie er aanvullingen aan gedaan?
4	Laura:	Nee, we weten niet hoe.
5	Martin:	Er is geen tijd.
6	Cees:	En eerste over die opdracht … Zijn er nog aanmerkingen. Zijn ze terecht of niet?
7	Martin:	Ze zijn terecht maar er is geen tijd, meester.
8	Cees:	Oké, zet dat er dan even bij.

Cees vindt het belangrijk dat de leerlingen hun werk afmaken en inleveren. Hij blijft doorvragen tot hij een antwoord krijgt (1, 3, 6). Als het ze niet lukt het werk af te maken, wil hij weten waarom en dat ze dat erbij zetten (8). Hij laat de leerlingen op deze manier voelen dat wat ze doen belangrijk is. Cees blijft consequent in zijn optreden, zelfs wanneer de les bijna afgelopen is en een ‘einde-van-de-les’ sfeer ontstaat. Ook als de groep het niet met elkaar eens is (4,6), blijft Cees consequent met het doorvragen. Hij gaat niet op de discussie van de leerlingen in.

4.3.5 Reflectie

Welke sociale – en socio- wiskundige normen ontstaan in deze les?

- leerlingen moeten eerst zelf (of met behulp van andere leerlingen) problemen proberen op te lossen; als dit niet lukt wordt het dan pas aan de docent gevraagd;
- leerlingen moeten naar elkaar luisteren, anderen proberen te begrijpen, opheldering vragen en kritiek kunnen geven;
- leerlingen herkennen wat goede en overtuigende argumenten zijn
- leerlingen beseften dat bewijzen bij wiskunde anders is dan in het dagelijkse leven.

Wat doet de docent om deze normen in de les te hanteren?

- hij kiest voor een bepaalde werkvorm (overleg met eigen groep, werk van een andere groep nakijken en beoordelen);
- hij stimuleert onderling overleg met opmerkingen als ‘overleg eerst met elkaar voordat je het aan mij vraagt’;
- laat de leerlingen met rust (niet te snel en onnodig ingrijpen).

Behalve het consequent met de normen omgaan, is het voor de leerlingen ook belangrijk dat de docent het gebruik ervan beloont. In deze lessenfragmenten doet Cees dit door:

- de leerlingen ruimte te geven voor eigen inbreng en het werkelijk gebruik maken van hun inbreng. In het eerste lessenfragment bijvoorbeeld gebruikt Cees het antwoord van de leerling in plaats van vast te leggen wat een parallellogram is.

- leerlingen te vragen om uitleg en naar argumenten. Hij probeert alle leerlingen bij het klassengesprek te betrekken en stimuleert ze hun eigen ideeën te vertellen. Cees doet dit niet alleen door leerlingen direct aan te spreken, maar ook door steeds te herhalen wat ze zeggen (parafraseren). Op het bord worden de definities die de leerlingen inbrengen genoteerd. Met deze actie schematiseert hij de eigen inbreng van de leerlingen op een (standaard)manier die door iedereen wordt begrepen.

- beoordeling geven te vermijden en het uitstellen van eindconclusies.
  In deze lesfragmenten wordt het leerproces van de leerling duidelijk door de docent gestuurd, maar wel op een manier waarmee leerlingen hun eigen gezag behouden. Cees is de autoriteit in de les, maar hij neemt de inbreng van de leerlingen serieus.

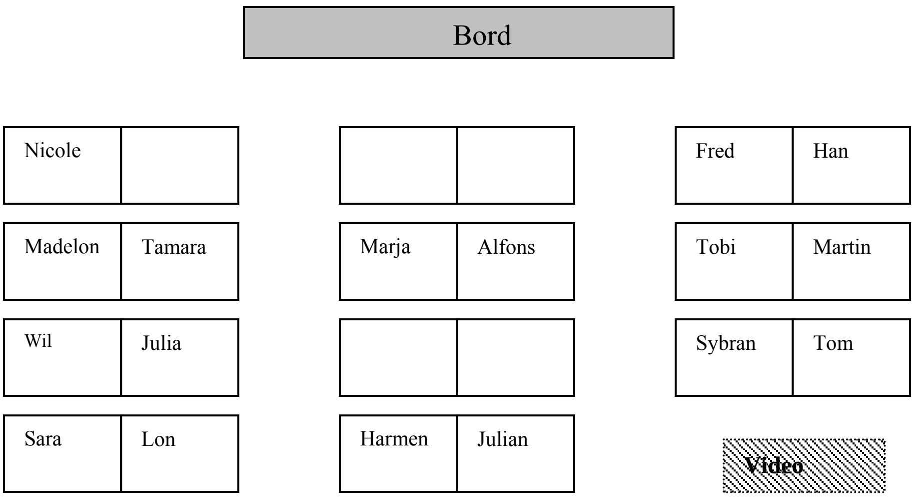
Wat de socio-wiskundige normen betreft: leerlingen ervaren zelf de activiteit van bewijzen.
In deze les zijn de voorgestelde opgaven niet zo belangrijk als de wiskundige activiteit die ze uitlokken. Het doel is de activiteit van bewijzen te ervaren. Een natuurlijk gevolg van deze activiteit is dat leerlingen ook de betekenis van een parallellogram leren kenen.

Een interessant onderwerp voor een vervolgonderzoek kan zijn bestuderen van het effect van de manier van reageren van Cees op redeneringen van leerlingen. Bijvoorbeeld, gebruiken de leerlingen de aanwijzingen die Cees tijdens de gesprekken geeft? En, op welke manier helpen deze aanwijzingen wel of juist niet? Bij eerdere onderzoeken (Brodie, 2001 in Dekker en Elshout-Mohr,2004) betreffende interventies van docenten is het niet altijd zo dat uitleg van de docent nuttig is. Voor een vervolgstudie zou het goed zijn enkele leerlingen gedurende de klassikale inleiding, het groepswerk en de lesafronding te volgen.

4.4 Guus in 5 havo

4.4.1 Scenario

Het gaat om een wiskundeles, gegeven op 12 december 2007, van Guus, havo 5 wiskunde B1. De les duurt vijftig minuten op school C in Utrecht.
Het is een groep van zeventien leerlingen (zie figuur) waarin een ontspannen sfeer heerst en de leerlingen doen meer of minder actief mee. Ze tonen zelf niet zoveel eigen initiatief tot deelname aan de klassengesprekken. In de lesfragmenten die bij de lesanalyse worden gepresenteerd, staan alleen maar de relevante interventies. De volledige dialoog staat wel in het protocol beschreven (bijlage 2).



Figuur 9: klassenopstelling bij Guus

De wiskundige inhoud van deze les betreft algemene kennis over eerste- en tweedegraadsfuncties en differentiëren. Guus gebruikt een zelf gemaakt werkblad (zie bijlage 4) samen met opdrachten 5, 6, 7 en 8 uit het centrale examen Havo B1 2006 2e tijdvak (zie bijlage 4). Aan de hand van dit lesmateriaal

worden voorkennis over de raaklijn opgehaald en in verband gebracht met meer recente kennis over differentiëren; aanpak en oplossen van wiskundige vragen besproken.
In de hiervoor geselecteerde lesfragmenten worden opdrachten 6 en 7 van het werkblad van Guus behandeld.

De les begint klassikaal en daarna werken de leerlingen in groepjes van twee, drie of vier leerlingen. Het klassikale gedeelte van de les neemt de meeste tijd in beslag.

4.4.2 Voor- en nabespreking

Een week of twee voor de les hebben Guus en de onderzoeker met elkaar overlegd over de voorbereiding en het doel van de les. Guus heeft enkele opgaven uit de examenopgaven geselecteerd en aansluitend een werkblad gemaakt. Dit eerste ontwerp is met de onderzoeker besproken en, naar aanleiding van dit gesprek, op enkele punten aangepast.
Om te zorgen dat de leerlingen min of meer dezelfde beginsituatie qua voorkennis hebben voor de les die de onderzoeker gaat observeren, hebben zij de opgaven één les van tevoren gekregen en daaraan gewerkt. Wat ze niet konden afmaken, werd als huiswerk opgegeven. Op deze manier kan Guus bij de voorbereiding van zijn lessen beoordelen welk niveau de leerlingen hebben en daarop aansluiten. Hij wil opdracht 7 (van zijn werkblad) in de les behandelen. Hij doet dit vanwege het belang van het onderwerp differentiëren. Guus wil dit begrip ter discussie stellen en hiervoor wil hij de inbreng van de leerlingen gebruiken, die zich hier op hun beurt kunnen voorbereiden door de opdrachten van tevoren uit te werken.
Achteraf vonden de leerlingen deze activiteit nuttig. Enkele leerlingen vonden het werkblad overbodig, omdat de examenopdrachten ook zonder dit werkblad opgelost kunnen worden (het werkblad wordt als extra werk ervaren).

Er werden twee lessen van Guus op video opgenomen, maar alleen de eerste les werd grondig geanalyseerd. De tweede les is, volgens Guus, niet zo goed verlopen als de eerste. Dat komt waarschijnlijk door de verschillende verwachtingen van leerlingen en docent over het doel van de opdrachten in die les: voor Guus was het belangrijk dat leerlingen leren hoe ze een probleem kunnen aanpakken; voor de leerlingen was het van belang om de goede antwoorden te vinden.Terwijl Guus zich op metacognitieve aspecten richt, richten de leerlingen zich op het oplossen van een specifieke vraag en zien het beoogde doel van de activiteit niet. Dit leidt tot enige frustratie aan beide kanten.

4.4.3 Klassikaal gesprek

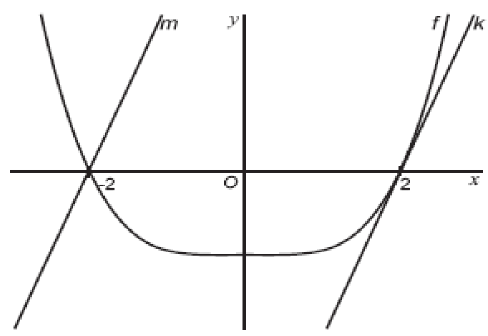
Guus leest opdracht 7 hardop voor. Hij last steeds pauzes in om aanvullende informatie te geven of vragen aan de leerlingen te stellen.

Opdracht 7 (examenopdracht)

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(2, 0)$ is de lijn k.
De lijn m gaat door het punt $(-2, 0)$ en is evenwijdig aan de lijn k (zie figuur 4).

7 ☐ Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de lijn m.

figuur 4



Lesfragment 1

1	Guus:	En, ik heb jullie wel eens geleerd dat als er staat: in de tabel bla, bla
2		(...) Dan moet je gelijk stoppen en eerst kijken.
3		(...) Zien jullie dat in de figuur?
4		(...) Zien jullie dat het de raaklijn is?
5		(...) Hoe zie je het?

Guus wil op deze manier enerzijds de inbreng van de leerlingen gebruiken om zijn uitleg daarop te verklaren (5), en anderzijds om wiskundige begrippen te verduidelijken en voorbeelden te geven van aanpakstrategieën (1, 2). Er zijn waarschijnlijk nog meer (impliciete) doelen naast deze twee: de leerlingen betrekken bij het klassengesprek (3, 4, 5); de leerlingen laten ervaren dat er een probleem is; controleren welke voorkennis de leerlingen hebben en leerlingen die het huiswerk gedaan hebben belonen.
Als een leerling antwoord geeft, reageert Guus daarop, meestal herhaalt hij het antwoord en geeft wat aanvullende informatie.

Guus gaat vervolgens verder met opdracht 7 van het werkblad dat hij zelf ontworpen heeft.

Vragen voorafgaande aan opdracht 7 (werkblad)

1. Vertel precies wat je weet van lijn *k* en wat je te weten kunt komen.
2. Vertel precies wat je weet van lijn *m*.
3. Vertel duidelijk en in stappen hoe je **opdracht 7** gaat aanpakken.

Lesfragment 1

1	Guus:	Sara, wat heb je opgeschreven bij opdracht 7?
2	Sara:	Ik had lineair.
3	Guus:	Lineair *(Guus herhaalt het antwoord van de leerling en schrijft dit op het bord).* Ja, bij de lijn hoort een lineaire functie of vergelijking. Sara, wat heb je nog meer opgeschreven?
4	Sara:	Een constante helling. Het is eigenlijk hetzelfde.
5	Guus:	Constante helling (Guus herhaalt het antwoord van de leerling en schrijft dit op het bord)
6	Sara:	En de formule *y* is gelijk aan *ax* keer *b* ... plus *b*
7	Guus:	*y = ax* … wat heb je precies geschreven?
8	Sara:	Er staat 'keer' maar het is 'plus'.
9	Guus:	Dat vind ik goed. Sara had geschreven *y* is gelijk aan *ax* keer *b*. Ik heb niet gezegd dat het fout was, ik heb geen rode streep gezet, er staat helemaal niks. Ze leest het voor: *y* is *ax* keer *b*, ... oh nee, *y* is *ax* plus *b*. Wat nu gebeurt vind ik heel belangrijk. Blijkbaar weet Sara precies wat het moet zijn *y* is *ax* plus *b*. Maar toch heeft ze opgeschreven, omdat ze met andere dingen bezig was, *y* is *ax* keer *b* . Ik beweer dat als je dit doet, als je volhoudt en alles netjes opschrijft wat je denkt, dan kun je er makkelijker naar kijken. (*Guus schrijft op het bord* $y = a\,x+b$ *en laat met opzet* $y = ax \cdot b$ *ook op het bord staan)*

Guus noteert wat de leerlingen zeggen steeds op het bord. Dit maakt aan de ene kant makkelijker het gesprek te volgen, aan de andere kant is het een vorm om aan de leerlingen te laten merken dat wat ze zeggen belangrijk is.
In dit lesfragment gebruikt Guus het foute antwoord van Sara om te benadrukken hoe belangrijk het is dat men eraan gewend raakt zijn ideeën op te schrijven (9).

Het volgende lesfragment gaat over opdracht 7.2 (werkblad).

Lesfragment 2

1	Guus:	Ik wil nog even kijken of we dit nog korter kunnen opschrijven. Wie kan dit korter opschrijven: de helling van de lijn is dezelfde als de helling van de grafiek in (2,0)? Marja?
2	Marja:	*f(x)* is nul als *x* is 2.
3	Guus:	Wat heeft Marja gedaan? Zij heeft gekeken naar (2,0). Het kan nog korter *f*(2) = 0. Begreep iedereen dit? Het is niet wat ik bedoel maar het is helemaal goed. Het is goed dat je dat gezegd hebt. Ik wil het nog even over de helling hebben. De lijn heeft dezelfde helling als de grafiek in (2,0).

Guus wil dat de leerlingen zelf op het idee komen om $f'(2)$ te schrijven in plaats van te zeggen: ‘De helling van de lijn is dezelfde als de helling van de grafiek in (2,0)’ (1). Marja interpreteert de vraag anders. Guus keurt haar antwoord niet af, hij gaat eerst op het antwoord in (3). Vervolgens vertelt hij dat dit niet is wat hij bedoelt en hij stelt de vraag opnieuw.

Lesfragment 3

1	Guus:	Ik wil nog een woord horen. Het is een woord dat Tom al geschreven had en hij mocht het van mij niet zeggen, omdat ik wilde kijken of jullie er ook op kwamen. Ik vind dat we dit aardig hebben opgeschreven. (*Guus vat samen wat op het bord werd geschreven en hij noemt de naam van de leerlingen erbij).*
2	Guus:	Ik wil nog een dingetje horen, wat zou ik nog willen horen?
3	L:	Een parabool ...?
4	Guus:	Een parabool, dat zegt iets over de grafiek, maar dat verwacht ik eerder bij opdracht 1 waar je iets moet opschrijven over *f(x)* is (....) Oké, ik laat Tom aan het woord. Tom, wat heb je nou opgeschreven waar ik op zit te wachten?
5	Tom:	Het is een eerstegraadsfunctie.
6	Guus:	Dat is deze lijn, ja.
7	Tom:	En dat de helling op punt *x* is twee als de functie *f.*
8	Guus:	De helling, hoor ik, in punt 2. De helling van die lijn, of niet?
9	Tom:	Ja.
10	Guus:	Is hetzelfde als de helling van deze functie in dit punt. Begrijpen jullie wat hij zegt?
11		(Leerlingen knikten instemmend)
12	Guus:	Dat betekent dat de helling van de lijn dezelfde is als de helling van de functie. En hoe kunnen we de helling bepalen als we die willen hebben?
13	Tom:	Differentiëren.
14	Guus:	Ja daar zijn we mee bezig geweest. Hoe krijgen we de helling op dit punt? Met behulp van differentiëren en dat is een belangrijke toevoeging. Sterker nog, een van die dingen zouden we nog kunnen missen, maar deze mag niet missen als ik de opdracht wil oplossen.

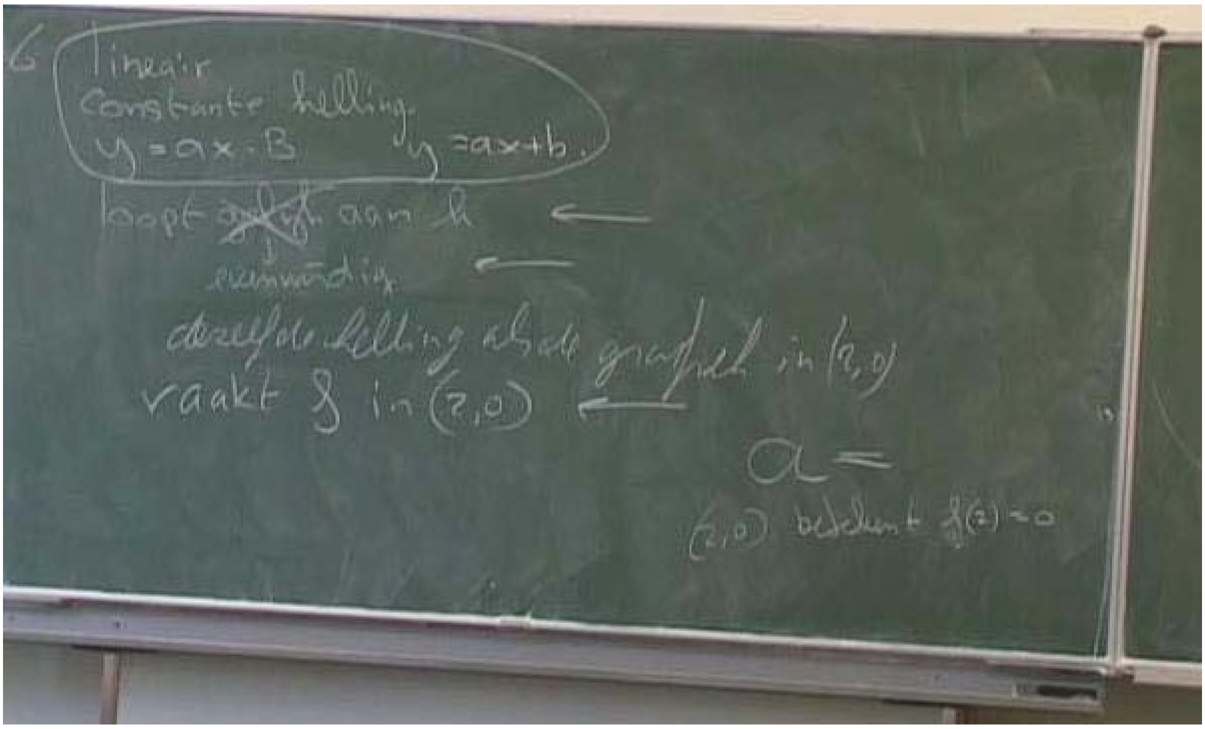
Guus weet dat één leerling het goede antwoord kan geven en hij laat dat de klas weten (1), maar voor hem is dit niet genoeg. Hij wil dat de rest van de leerlingen ook over de vraag nadenkt en de kans krijgt om het goede antwoord te vinden. Maar het lijkt dat deze manier van vragen van Guus (1, 2), leidt tot 'gissen'. Omdat Guus vraagt: 'Wat wil ik horen', gaan de leerlingen proberen te raden wat hij wil horen in plaats van het goede antwoord te zoeken. In deze situaties kunnen leerlingen de meest vreemde dingen zeggen (3). Guus neemt echter de antwoorden van de leerlingen serieus en hij gaat er ook op in (4).
Hij geeft vervolgens het woord aan de leerling die het goede antwoord weet (4), maar die is ook op een ander spoor gezet. Misschien doordat de andere leerling 'parabool' zei. Hij geeft dus als antwoord 'eerstegraadsfunctie'(5). Guus laat merken dat dit juist is, maar dat dit niet het goede antwoord is (6). De leerling gaat verder met zijn uitleg (7). Guus zorgt tegelijkertijd dat de rest van de klas de uitleg van Tom kan volgen (8, 10, 12). En dat gebeurt ook (11). Eigenlijk weet deze leerling ook niet welk 'woord' de docent belangrijk vindt. Hij blijft vertellen wat hij zelf weet. Maar omdat Guus blijft doorvragen, zegt hij uiteindelijk wat Guus wil horen (13).

Dit soort situaties gebeurt vaak tijdens gesprekken tussen docent en leerlingen. De docent vraagt naar iets waarop hij eigenlijk het antwoord al weet. Daar heeft een bepaalde bedoeling mee en de leerlingen merken dat. Op zeker moment gaan leerlingen proberen te raden wat de docent wil horen en dan zijn ze niet echt goed bezig! In dit lesfragment gebeurt dit aan het begin, maar vervolgens verloopt het gesprek goed. Guus stuurt veel bij, (8, 10, 12) maar hij gaat ook op het antwoord van de leerling in. Daardoor heeft hij de aandacht van de klas voor het begrip differentiëren gekregen. Hij laat de leerlingen ervaren en weten hoe belangrijk dit begrip is (14).

Het volgende lesfragment gaat nog steeds over dezelfde opdracht.

Lesfragment 4

1	Guus:	Fred, heb je er nog iets bij geschreven?
2	Fred:	Loopt gelijk aan *k.*
3	Guus:	loopt gelijk aan k *(Guus herhaalt antwoord van leerling en schrijft het op het bord).* In de klaas hoor ik iets, wie zegt nu wat?
4	L:	Evenwijdig.
5	Guus:	Ik hoor evenwijdig (*en schrijft dit op het bord*). Bedoel je dat ook met gelijk, Fred?
		(...)
6	Guus:	Luister even, ik hoor gelijk, er staat evenwijdig, en ik hoor ook dezelfde helling. Als je nu iets opnieuw moet opschrijven bij de opdracht waar kies je dan het liefst voor? Voor gelijk, evenwijdig of dezelfde helling?
7	L:	Evenwijdig.
8	Guus:	Evenwijdig. Dus gelijk is niet goed (*hij streept gelijk door*). En helling, ook wegstrepen?
9	L:	Ja.
10		(Guus streept ook het woord helling door)
		(...)
11	Guus:	Ik vond zelf helling nog niet zo gek. Ik heb het doorgestreept omdat jullie zeiden dat ik dat moest doen (...)



Figuur 10

Guus vraagt aan de leerlingen om nog wat meer te zeggen over lijn *m*. Hij stelt de vraag aan een bepaalde leerling (1), maar heeft tegelijkertijd aandacht voor wat andere leerlingen erover zeggen (5). Fred zegt in zijn eigen woorden wat hij bedoelt (2). Guus accepteert dat (voorlopig) (3) en op deze manier beloont hij de deelname van Fred aan het gesprek. Later, als de correcte wiskundige term door een andere leerling wordt genoemd (4), vraagt Guus aan Fred of hij dat ook bedoelde (5). Op deze manier geeft de docent de leerling de kans om zelf zijn antwoord te verbeteren.
Enkele wiskundige normen die de docent in deze les ter discussie stelt, zijn: wat geldt als een goede beschrijving van een wiskundig object of concept, het herkennen van een efficiëntere beschrijving ervan en het streven naar het gebruik van een juiste wiskundige notatie. Deze normen hebben de leerlingen zich nog niet eigen gemaakt en Guus wil ze die ook niet opleggen. De docent wil dat de leerlingen zelf de behoefte ervaren om preciezer te zijn in hun beschrijvingen en notaties (6, 8). Belangrijk bij dit proces is dat de docent de inbreng van de leerlingen gebruikt (3, 5, 6) om de gewenste normen aan de orde te stellen. Zelfs als hun inbreng niet geheel correct is (2), wordt het door de docent in het gesprek opgenomen. Dit is ook een vorm om de deelname van de leerlingen in het gesprek te belonen.

In het volgende fragment wordt de nadruk gelegd op het streven naar het gebruik van een efficiëntere notatie.

Lesfragment 5

1	Guus:	Heb je een mooie wiskundige term en een korte notatie om het korter op te schrijven?. Wie het weet mag het zeggen. Ik ga het niet zeggen. We moeten hier proberen uit te komen.... Wat heeft de helling met dit te maken? Je mag het hardop zeggen.
2	L:	*f* accent.
3	Guus:	Goed zo, f accent *x*, hoe heet dat ding? De ...?
4	L:	Afgeleide.
		(...)

5	Guus:	Ik stel nu voor dat we samen de hele opgave netjes opschrijven en daarna wil ik dat jullie op dezelfde manier, met elkaar, met z'n tweeën of drieën nog een keer naar de vraag kijken. Wat zullen we opschrijven?

Voor het bespreken van de wiskunde normen zijn ook de sociale normen van belang. Bijvoorbeeld, leerlingen moeten zich verplicht voelen om deel te nemen aan het gesprek en het gevoel hebben dat hun inbreng direct belang heeft voor de voortgang ervan. Guus gaat consequent met deze norm om door te weigeren om zelf het antwoord te geven (1). Hij wacht tot een leerling met een antwoord komt (2). Dit antwoord hoeft nog niet juist te zijn, maar Guus neemt het in het gesprek op en hij beloont de leerling voor zijn inbreng (3). Tegelijkertijd probeert hij, door nog een keer te vragen, de leerlingen ertoe aan te zetten om zelf met de juiste wiskundige term te komen (3) en dat gebeurt dan ook (4). Guus stelt nu aan de leerlingen voor met de hele klas naar de volledige opdracht te kijken en alles goed proberen op te schrijven (5). Op deze manier geeft hij hen (gedeeltelijk) de kans hun werk te reconstrueren.

4.4.4 Groepswerk

In het tweede deel van de les werken de leerlingen in groepjes van twee, drie of vier leerlingen aan de opdrachten van het werkblad. In het volgende lesfragment zijn ze bezig met opdracht 5 van het werkblad.

Opdracht 5 (werkblad)

Vragen vooraf voor opdracht 5

1. Vertel ALLES wat je weet over de functie $f(x) = x^4 - 16$.
2. Wat betekent "de functie snijdt de x-as in (-2, 0)?
3. Geef aan in de figuur wat de oplossing is van vraag 5 zonder het uit te rekenen.
4. Wat betekent bereken exact? Geef een voorbeeld van 'exact bereken' en een voorbeeld van 'niet exact bereken'

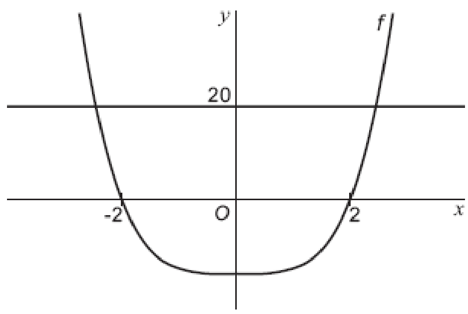
Vertel duidelijk en in stappen hoe je **opdracht 5** gaat aanpakken

Opdracht 5 (examen opgaven)

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.
In figuur 2 zijn de grafiek van f en de lijn $y = 20$ getekend.

5 ☐ Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f tussen de x-as en de lijn $y = 20$ ligt.

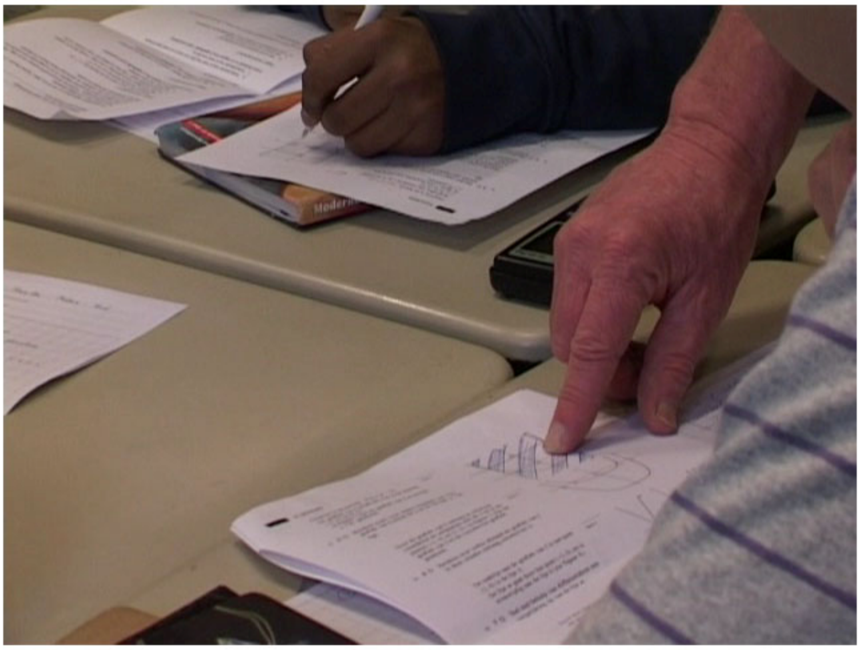
figuur 2



Lesfragment 6

1 Drie leerlingen overleggen met elkaar over opdracht 5 (examenopgave) maar ze komen er niet uit want ze begrijpen de vraag niet.

2 Guus komt langs en hij ziet in de gekleurde grafiek van de leerling (antwoord op vraag 3 van het werkblad, zie figuur hieronder) dat het fout is.



3 Guus zegt niet tegen de leerling dat het fout is. In plaats daarvan probeert hij aanwijzingen aan de leerling te geven zodat die er zelf achter komt dat hij het verkeerde gebied heeft ingekleurd.

4 Guus noemt als voorbeeld van strategie: 'Vul een getal in de formule in en kijk of wat je krijgt een getal tussen 0 en 20 is. Als dat niet zo is, dan heb je niet het juiste gebied.

5 De leerling antwoordt op de vragen van Guus (of probeert dat), maar hij stelt zelf geen vragen.

6 Als Guus weg is wordt duidelijk dat deze leerling de vraagstelling van de opdracht nog steeds niet begrijpt en dat hij niks doet met de uitleg die Guus gaf.

7 Echter, een andere leerling van dezelfde groep, die de uitleg van Guus heeft gevolgd, neemt de strategie van Guus over.

8 Hij probeert deze strategie aan de eerste leerling uit te leggen, maar het lukt hem ook niet. De eerste leerling is zo gefocust op eigen gedachten dat hij niet open lijkt te staan voor een andere uitleg.

Dit lesfragment dient als voorbeeld van een lessituatie waarin een belangrijke norm voor een goed verloop van interactie ontbreekt: vragen stellen als je het niet begrijpt!
In eerste instantie overleggen leerlingen met elkaar, maar dit werkt niet want niemand begrijpt de opdracht echt (1). Dit kan natuurlijk gebeuren, vooral als het leerlingniveau niet zo hoog is en iedereen in de groep ongeveer hetzelfde niveau heeft. De docent merkt dat deze groep te stil is en hij komt kijken wat er aan de hand is (2). Hij ziet dat de gekleurde grafiek fout is (3), maar in plaats van dit te zeggen, probeert hij de leerling op het goede spoor te zetten door hem aanwijzingen te geven (4). Maar de leerling luistert niet goed en de docent heeft dat niet door (5, 6). De aanwijzingen zijn echter nuttig voor een andere leerling die het gesprek heeft gevolgd (7).
Wat er hier mis is gegaan is het ontbreken van essentiële sociale normen die belangrijk voor de interactie zijn: vragen stellen, zeggen als je iets niet begrijpt, proberen de anderen te begrijpen. Zelfs als men in een groep zit waar weinig wordt samengewerkt, moet de leerling (binnen realistisch

wiskundeonderwijs) het initiatief nemen tot vragen stellen aan de docent of aan leerlingen uit andere groepen.

4.4.5 Reflectie

Welke sociale normen zijn aanwezig in deze klas?

- leerlingen durven voor hun opvattingen uit te komen en leggen hun antwoord uit als dat wordt gevraagd.

Wat zijn de socio- wiskundige normen die Guus stelt?

- de inbreng van de leerlingen is belangrijk voor de voortgang van klassengesprekken;
- streven naar wiskundige taal en notaties gebruiken;
- het is niet erg om fouten te maken. Je kunt ervan leren

Hoe zorgt Guus dat die normen door de leerlingen overgenomen worden?

- hij bereidt zijn les goed voor en selecteert en ontwikkelt geschikte opdrachten;
- hij stelt vragen aan de leerlingen en verzamelt hun inbreng op het bord, vraagt naar uitleg en argumenten en hij gebruikt direct hun inbreng in de voortgang van het gesprek;
- wiskundige definities, stellingen en begrippen ter discussie stellen (maakt samen met de leerlingen een selectie van goede informatie);
- hij beloont de leerlingen door zich te houden aan de aanwijzingen van de leerlingen en hun inbreng te gebruiken; hij vermijdt het geven van een oordeel en schort eindconclusies op.

5 Conclusies en aanbevelingen

Inhoudelijke praten over wiskunde, hoe doe je dat, in de theorie en hoe doen de docenten Jan, Cees en Guus dit in de praktijk? Er is dus via twee invalshoeken naar een antwoord gezocht. Het theoretische gedeelte wordt in hoofdstuk 2 beschreven, het empirische gedeelte in hoofdstuk 4. In het laatste hoofdstuk, hoofdstuk 5, worden theorie en praktijk met elkaar vergeleken. Er wordt gekeken naar:
(a) belangrijke aspecten die zowel in de geanalyseerde lessen als in het theoretische kader voorkomen;
(b) relevante aspecten uit de lespraktijk die in de theorie niet genoemd worden (of omgekeerd);
(c) aspecten voor verder onderzoek.
Ten slotte worden belangrijke aspecten uit de theorie en de lespraktijk nader toegelicht met voorbeelden en worden aanbevelingen gedaan. Deze zijn bedoeld om docenten te helpen bij het inzetten (en voortzetten) van wiskundig inhoudelijke gesprekken tijdens de les.

5.1 Overeenkomsten tussen theorie en praktijk

Met dit onderzoek hebben we geconstateerd dat belangrijke aspecten voor het stimuleren van wiskundige gesprekken in de lespraktijk overeenkomen met aspecten die in de bestudeerde literatuur worden genoemd. Daarbij zijn van belang:
- *de pedagogical content knowledge* van de docenten;
- het hypothetische leertraject in het algemeen en de selectie van geschikte opdrachten in het bijzonder;
- een geschikte klassencultuur en de essentiële rol hierbij van de sociale normen en de socio-wiskundige normen;
- het adequaat handelen van de docent die consequent met de beoogde normen omgaat.

Alle deze aspecten worden meer in detail in de volgende paragrafen besproken

Pedagogische content knowledge van docenten

In lessensituaties is de docent voortdurend bezig met het stellen en beantwoorden van vragen, suggesties van leerlingen volgen, denkwerk van leerlingen aansporen, enzovoort. In realistisch wiskundeonderwijs, waarin de docent de wiskundige activiteit van de leerling als uitgangspunt neemt, bestaat een verbale interactie. Tijdens deze interactie is er echter weinig tijd om hier rustig over na te denken. Dit doet een groot beroep op de pedagogische en didactische kwaliteiten van de docent.
In de geanalyseerde lessenfragmenten (hoofdstuk 4) is te zien hoe de drie docenten steeds in interactie zijn met de leerlingen en hoe ze op de suggesties en antwoorden van leerlingen ingaan. Dit bevestigt wat in het theoretisch kader wordt beschreven, voornamelijk het belang van de *pedagogical content knowledge* van de docent voor het onmiddellijke lesgedrag (zie ook par.2.11).
De drie docenten waren wiskundig goed, ze ontwikkelen of passen de wiskundige activiteiten aan de lesdoelen aan, er wordt rekening gehouden met niveauverschillen tussen leerlingen, ze zorgen voor variatie in werkvormen en ze zijn in staat om interactie in de les te stimuleren en voort te zetten. In de lessenfragmenten (zie hoofdstuk 4) is zichtbaar hoe elke docent deze aspecten in de praktijk op hun eigen manier inzetten:

- Jan heeft bijzonder veel kennis over alles wat te maken heeft met wiskunde. Hij gebruikt in de lessen eigen lesmateriaal, dat hij zelf ontwikkelt. De opdrachten zijn vrij complex, maar de leerlingen zijn wel betrokken bij het oplossen ervan (zie ook par.4.2). Hij kan ook een mooi verhaal vertellen over de achtergrond van wiskunde of hoe je bepaalde problemen kunt aanpakken. In zijn lessen praten leerlingen onderling op een betrokken manier over wiskunde. De aanleiding hiervoor lijken de opdrachten en de betekenisvolle vraagstelling te zijn. Deze kenmerken worden ook in Brondie, Shahan en Boaler (2004) genoemd: *asking significant mathematical questions* en *keeping demand high.*

- Cees is heel goed in het organiseren van klassengesprekken. In de lessenfragmenten (zie ook par.4.3) is zichtbaar hoe hij interactie tussen leerlingen weet te stimuleren en ze bij de klassengesprekken te betrekken. Hij gebruikt de inbreng van de leerlingen en houdt zich aan hun aanwijzingen. In het gegeven voorbeeld in paragraaf 4.3.3, over de definitie van een parallellogram, zou men kunnen zeggen: de wiskundige inhoud wordt door de leerlingen ontwikkeld en de rol van de docent is vooral het denken van leerlingen aan te sporen en de kwaliteit van de wiskundige inhoud bewaken. De ruimte en vrijheid die de leerlingen ervaren zorgt ervoor dat ze zich realiseren dat hun inbreng echt van belang is voor de voortgang van het gesprek. Dit motiveert de leerlingen om te willen participeren in de gesprekken, eigen ideeën te vertellen en kritiek te leveren.

- Guus kan goed voorspellen welke voorkennis bij de leerlingen ontbreekt, welke onderwerpen ze moeilijk vinden en welke vragen waarschijnlijk worden gesteld. Bij de lesvoorbereiding probeert hij te anticiperen op het denken en de reacties van de leerlingen. Op basis hiervan heeft hij voor de geobserveerde les een werkblad ontwikkeld dat aansluit op de examenopgave (zie ook par.4.4). Dit werkblad geeft aanleiding tot een klassengesprek en heeft een tweeledig doel: enerzijds om de leerlingen te helpen bij de wiskundige aanpak en anderzijds om hun denkwerk zichtbaar te maken voor de docent en andere leerlingen, waardoor het tot onderwerp van discussie wordt.

Selectie van lesmateriaal en hypothetisch leertraject

Uit de hierboven genoemde voorbeelden wordt duidelijk hoe de docenten goede opdrachten selecteren en/of ontwikkelen, die weer aanleiding geven tot wiskundige gesprekken. Dit aspect wordt in het theoretische kader aangegeven als een fundamentele activiteit van de docent, niet alleen voor het inzetten van wiskundige gesprekken (zie par.2.10), maar ook voor het kunnen onderwijzen binnen realistisch wiskundeonderwijs (zie par.2.2).
Wat de selectie van opdrachten betreft, kan men het volgende concluderen:

(a) Elke docent heeft lesmateriaal ontwikkeld of bestaand lesmateriaal op de lesdoelen aangepast: Jan gebruikt eigen ontwikkeld lesmateriaal; Cees past de opdrachten uit het boek aan aan zijn leerdoelen en hij kiest een bijbehorende werkvorm; Guus gebruikt bestaande examenopdrachten en hij ontwikkelt zelf een werkblad. Geen van de docenten heeft de opgaven uit de methode blind gevolgd.
Kenmerkend bij alle drie docenten is dat de wiskundige activiteit van de leerlingen als uitgangspunt wordt genomen, dat de leerlingen wiskunde als een wiskundige activiteit ervaren. Bij Jan bijvoorbeeld ervaren de leerlingen het probleemoplossen, bij Cees de activiteit van het bewijzen en bij Guus de behoefte aan wiskundetaal en goede notaties.

(b) De kenmerken van de opdrachten die door de docenten in de les ingezet worden, komen overeen met de kenmerken van goede opdrachten, zoals in paragraaf 2.10 beschreven. Bijvoorbeeld:

- De voorgestelde opgaven van Jan zijn complex en geven aanleiding tot verschillende oplossingen en benaderingswijzen; ze nodigen de leerling uit om er hardop over na te denken, ze zijn uitdagend en de leerlingen lijken zeer betrokken. In veel van deze opdrachten moeten de leerlingen een constructie maken en doordat ze voortdurend met elkaar overleggen over wat ze aan het doen en denken zijn, is de verwachting dat er ook niveauverhoging plaatsvindt.

- De opdrachten die Cees gebruikt zijn, tezamen met de gekozen werkvorm, betekenisvol voor de leerling en dat is zichtbaar in hun betrokkenheid bij de gesprekken. De leerlingen worden geacht een bewijs te construeren en men zou verwachten dat er niveauverhoging optreedt.

- Guus gebruikt examenopgaven en een werkblad dat hij zelf heeft ontworpen. De opgaven zijn niet complex en misschien niet voor alle leerlingen uitdagend, maar de meerderheid zag er wel het nut van in. In die zin zou men kunnen zeggen dat de opdrachten betekenisvol waren voor deze leerlingen. Verder heeft de lesactiviteit, die bestaat uit de combinatie van een opdrachtblad en een klassengesprek een niveauverhogend karakter (zie ook par. 2.2 over wiskundige gesprekken en niveauverhoging).

(c) Wat de lesindeling betreft bevatten alle gegeven opdrachten een klassikaal en een individueel gedeelte bij alle docenten. Dit is in overeenstemming met wat in het theoretische kader, in paragraaf 2.11 als optimale vorm van onderwijs wordt genoemd: optimaal wiskundeonderwijs bestaat zowel uit verticale interactie (tussen docent en leerling) als horizontale interactie (tussen leerlingen).

In de geobserveerde lessen waren de wiskundige gesprekken voor de drie docenten geen doel op zich, maar een middel om goed wiskundeonderwijs te geven. Door wiskundige gesprekken worden leerlingen aangezet tot reflectie, wordt het optreden van niveauverhoging bevorderd, leren ze de benodigde wiskundetaal en hoe die te gebruiken en het helpt hen bij de ontwikkeling van *mathematical* interest. Er bestaat een wisselwerking tussen wiskundige gesprekken en de genoemde aspecten in die zin, dat deze aspecten sterk van invloed zijn op het ontstaan, de kwaliteit en het voortzetten van de gesprekken (zie ook par.2.2 t/m 2.7).

Geschikte klassencultuur

In paragraaf 2.8 werd geconstateerd dat alleen goede opdrachten geven niet genoeg is voor het ontstaan van probleem-georiënteerd wiskundeonderwijs en wiskundige gesprekken. Het is bijvoorbeeld niet vanzelfsprekend dat in klassengesprekken leerlingen voor hun eigen mening uitkomen, oplossingsstrategieën uitleggen of kritiek leveren op medeleerlingen, hoewel dit wel belangrijke randvoorwaarden hiervoor zijn. Leerlingen moeten weten dat een dergelijke houding van hen verwacht wordt en dat zij zich die eigen moeten maken. Hiervoor zijn de sociale normen en socio--wiskundige normen van belang. Deze normen bepalen enerzijds de verwachtingen van de leerlingen en anderzijds hoe ze zich in onderwijssituaties gaan gedragen en kunnen niet bindend worden opgelegd. Ze moeten door de leerlingen ervaren worden. Bijvoorbeeld:

- in de les van Cees, waar de definitie van een parallellogram aan de orde komt, zijn de gewenste <u>sociale normen</u> duidelijk: de leerlingen leggen hun eigen oplossingsstrategieën uit, stellen vragen en spreken elkaar erop aan als er iets niet klopt. Deze normen bestaan al in deze klas en Cees hoeft de leerlingen er alleen aan te herinneren dat ze bestaan en hun gebruik te belonen.

- in de les van Cees gaat het om de <u>socio-wiskundige norm</u> bij de activiteit van het bewijzen bij wiskunde. Deze activiteit is fundamenteel anders dan die van het bewijzen in het dagelijkse leven, waarschijnlijk de enige vorm van bewijzen waaraan de leerlingen gewend zijn. Het is dus belangrijk dat de leerlingen dat verschil beseffen en tegelijkertijd het gevoel ontwikkelen voor de wiskundige betekenis van 'bewijzen'.
  De ontwikkeling van deze norm wordt door de docent ondersteund door de gekozen werkvorm: de leerling moet zelf een bewijs leveren en kritisch kijken naar een bewijs dat door een medeleerling is gemaakt. Met deze activiteit als aanleiding probeert Cees, door middel van wiskundige gesprekken, het gevoel bij de leerlingen te ontwikkelen dat het bewijzen van wiskunde anders is dan het bewijzen zoals ze dit kennen en wat het bewijzen bij wiskunde inhoudt.
  Wat Cees in dit voorbeeld doet is vergelijkbaar met wat in het voorbeeld in paragraaf 2.9, over het bewijzen dat 1/2 gelijk is aan 3/6, wordt gegeven.

Handelen in de les

Uit de lessenfragmenten wordt zichtbaar hoe het optreden volgens de gewenste normen min of meer expliciet door de docent wordt aangemoedigd. Bijvoorbeeld in lesfragment 2 in paragraaf 4.3.3 zegt Cees heel expliciet dat ze naar elkaar moeten luisteren. Eigenlijk bestaat deze norm al, maar hij herinnert ze er nog eens aan. Echter, als het gaat om de wiskundige norm: 'het bewijzen in wiskunde' dan is dat een andere situatie, want deze norm bestaat waarschijnlijk nog niet voor de leerlingen; die moet nog worden ontwikkeld.
In beide situaties stemt de activiteit van de docent, betreffende de ontwikkeling of het hanteren van de normen, overeen met wat in het theoretisch kader wordt beschreven (zie ook par.2.11), namelijk het gebruik van concrete lessituaties om de gewenste en/of ongewenste sociale normen voor de leerlingen duidelijk te maken, en bij de wiskundige normen de *framing* van de leerlingantwoorden, zodat zij een

bepaald gevoel gaan ontwikkelen voor wat belangrijk en niet belangrijk is bij een wiskundige redernering.

In paragraaf 2.11 werd al geconstateerd dat het voor de sociale en socio-wiskundige normen belangrijk is dat de docent consequent is in zijn optreden en de leerlingen beloont voor het gebruik van de gewenste normen. In de lesfragmenten, beschreven in hoofdstuk 4, wordt dit door de docenten gedaan. Bijvoorbeeld:

- De wiskundige norm die Guus in de geobserveerde les wil ontwikkelen is ‘het streven naar een correcte wiskundige taal en notatie’. Hij wil dit door middel van wiskundige gesprekken bereiken en gebruikt daarvoor een door hem ontwikkelde lesactiviteit. Guus heeft de opdrachten van tevoren aan de leerlingen gegeven, zodat zij de mogelijkheid hebben hun inbreng in de les voor te bereiden. Tijdens de les zorgt Guus voor een goed verloop van de interactie door leerlingen uit te nodigen te participeren, inbreng van leerlingen op het bord te verzamelen, door te vragen, vragen te herformuleren, enzovoort.
  Als een leerling het antwoord al weet en de rest van de groep nog niet, laat Guus dit aan de klas weten (zie 4.4.3, lesfragment 3) teneinde ze nog de kans te geven het antwoord te vinden. Op deze wijze beloont Guus de leerling die het goede antwoord heeft gevonden en de rest van de groep blijft ook betrokken.
  Guus bewaakt de spelregels. als leerlingen hun inbreng niet geven, geeft hij ook niet het antwoord, maar gaat door met vragen als: ‘Wie weet het antwoord? (...). Ik ga het niet zeggen’.
  Guus beloont de participatie van de leerlingen door die werkelijk te gebruiken en zijn eigen oordeel zonodig op te schorten. In lesfragment 4 bijvoorbeeld beloont hij de inbreng van de leerling door de correctie over de helling uit te stellen. Later vertelt hij aan de klas: ‘Eigenlijk vond ik de helling nog niet zo gek; ik heb dit toen doorgestreept omdat jullie dat wilden’.

Tijdens de uitvoering van wiskundige gesprekken leren de leerlingen ook om hun ideeën naar het academische discours te vertalen. De docent kan hierbij de leerlingen helpen door bijvoorbeeld te vragen naar argumenten en bewijzen of, tijdens de gesprekken, sommige algemene doelen en *styles* van leerlingen toe te laten.

5.2 Aanvullingen vanuit de lespraktijk

De invloed van de visie op wiskunde en lesgeven

Elke docent heeft zijn eigen manier van lesgeven. Hij komt pas geloofwaardig over als hij die geeft op de wijze die bij hem past. Uit dit onderzoek werd duidelijk hoe de drie docenten hun eigen sterke kant weten te gebruiken om wiskundig inhoudelijke gesprekken te stimuleren en voort te zetten. Echter, elk op eigen wijze, passend bij hun eigen visie op wiskundeonderwijs. In dit onderzoek geven de docenten tijdens de voor- en nabesprekingen aan:

- Jan: ‘Ik onderwijs wiskunde zoals ik denk dat wiskunde is’.

- Cees vertelt dat hij leerlingen het proces van bewijzen wilde laten ervaren en hoe complex het bewijzen van dingen is die zo vanzelfsprekend lijken te zijn.

- Voor Guus is het belangrijk dat leerlingen leren hoe ze een probleem moeten aanpakken.

Door hun wiskundige visie zijn deze docenten ook in staat om activiteiten te selecteren en te ontwikkelen, zodat ze daarbij gaan passen. In het geval van Cees bijvoorbeeld, wordt het praktische doel van de les, een bewijs goed uit te werken en er kritisch naar te kijken, met als doel ‘het leren bewijzen bij wiskunde’, zoals dat past in de visie van Cees. In die zin is de methode niet de bron van de wiskunde, maar meer een verzameling van opdrachten.

In dit onderzoek wordt niet expliciet aandacht besteed aan het belang van *teachers' beliefs* en de visie op wiskundeonderwijs. Wel op een impliciete wijze bij de *pedagogische content knowledge* van de docent en ook bij de socio-wiskundige normen. Dit is een belangrijk punt dat in de lespraktijk van de geobserveerde docenten opvalt.

De meerwaarde van klassengesprekken

In de bestudeerde literatuur wordt veel aandacht besteed aan de klassengesprekken. Bij alle docenten wordt het klassikale gedeelte van de les voornamelijk gebruikt om de leerlingen te betrekken bij de voorgestelde opdrachten of om de wiskundige inhoud expliciet te maken. Beide activiteiten zijn belangrijk leeractiviteiten (zie ook par.2.5)
Bijvoorbeeld, Jan gebruikt het 'zevenster-probleem' om de behoefte aan bewijzen bij de leerlingen te laten ervaren en hij doet dit door middel van een klassengesprek (zie par. 4.2).

Interventies van docenten en sociale normen

Uit onderzoek blijkt dat sommige interventies van de docent meer storend dan nuttig zijn en zo geen effect sorteren op het leren van de leerling. Een mogelijke oplossing hiervoor is dit zo min mogelijk te doen en juist het groepswerk te stimuleren. In dit onderzoek vraagt de onderzoeker zich af of de oplossing van dit probleem ook niet bij de normen gezocht moet worden. Dit wordt aan de hand van het volgende voorbeeld toegelicht:

In paragraaf 4.4.3, de les van Guus, wordt in lesfragment 7 een situatie beschreven waarin de docent de leerling probeert te helpen en, achteraf, wordt duidelijk dat dit geen effect op de leerling heeft gehad.
Dit probleem, benaderd vanuit het normenstandpunt, kan als volgt geïnterpreteerd worden: bij een geschikte klassencultuur wordt van de leerlingen verwacht dat ze eigen oplossingen verdedigen en vragen stellen als ze iets niet begrijpen. Dit betekent dat ze zich bewust moeten worden van het feit dit daadwerkelijk ook te doen. In lesfragment 7 gebeurt dit niet. Dus is het niet de interventie van de docent die verkeerd is, maar meer een combinatie van de verwachtingen van de docent en het passieve gedrag van de leerling dat tot miscommunicatie leiden.

5.3 Vragen voor verder onderzoek

Een culturele dimensie van de sociale en socio-wiskundige normen

Binnen de huidige Nederlandse cultuur is het acceptabel om bepaalde verantwoordelijkheden bij de leerlingen te leggen, zoals het zich bewust zijn van het feit vragen te stellen, te laten weten dat ze iets niet begrijpen en tegen de docent te zeggen dat ze zijn uitleg niet konden volgen. Echter, dit mag niet verwacht worden van leerlingen uit andere culturen die in Nederland onderwijs volgen of van leerlingen uit andere landen. Dit betekent dat bijvoorbeeld de normen in de Verenigde Staten waarschijnlijk anders zijn dan die in Nederland, hoewel uit het onderzoek blijkt dat er geen rekening met dit verschil wordt gehouden.
De onderzoeker vraagt zich af hoe relevant deze factor voor de lespraktijk is en vindt het de moeite waard om te spreken over een culturele dimensie in plaats van alleen maar een sociaal perspectief .
Van den Boer (2003) noemt aspecten die taal- en cultureel gebonden zijn. Door een andere taalachtergrond dan het Nederlands handelen deze leerlingen vaak op een andere manier dan wat de docent van hen verwacht. Uit het onderzoek van Van den Boer blijkt bijvoorbeeld dat allochtone leerlingen zich enerzijds passief opstellen, weinig vragen stellen en voor hen het kennen van het juiste antwoord voldoende lijkt te zijn en dat docenten anderzijds verwachten dat leerlingen zelf vragen stellen wanneer iets onduidelijk is.

De rol van de docent

Er is in de bestudeerde literatuur nauwelijks iets te vinden over het belang van de rol van de docent om leerlingen te motiveren wiskunde te leren. Echter, mensen leren ook van nadoen, naar anderen te kijken en in meer of mindere mate dingen daarvan over te nemen. Gebaseerd hierop vraagt de onderzoeker zich af, welke invloed de wiskundige houding van de docent op de leerlingen heeft in zijn opvattingen over wat wiskunde is, in zijn motivatie voor het vak, in zijn houding ten opzicht van wiskundige problemen.
Bijvoorbeeld, Jan vertegenwoordigt de wiskundige mens voor de leerlingen en de manier waarop hij dit doet zal ook van invloed op hen zijn. Hij maakt gebruik van plaatjes op het bord, een overheadprojector en het computerprogramma Cabri om zijn verhaal te vertellen. Hij legt uit wat de wiskunde of de achtergrond van de opgave is, hij betrekt de leerlingen bij het stellen van vragen bij de introductie van het probleem. Deze dingen plaatsen de wiskunde en de mens daar achter in een breder kader dan uitsluitend het leslokaal, hetgeen hopelijk een positief effect op de leerlingen zal hebben.

5.4 Slotconclusie en aanbevelingen

Op basis van dit onderzoek kan geconstateerd worden dat:

- Wat in de theorie beschreven wordt in de lespraktijk daadwerkelijk gebeurt. Dit is zichtbaar in de lesanalyses die in hoofdstuk 2 beschreven zijn en wordt ondersteund door de bevindingen als geschetst in dit hoofdstuk.

- Wat in de lespraktijk gebeurt, gebeurt vaak op een onbewuste manier. Dit wordt duidelijk uit de voor- en nabesprekingen met docenten en wordt ondersteund door de tussenkomst van de docenten in de lesfragmenten.

Gebaseerde op deze bevindingen is de volgende lijst met enkele aanbevelingen opgesteld, die bedoeld is voor:

- docenten die zonder of met moeite (maar wel onbewust) wiskundig inhoudelijke gesprekken in de lessen kunnen voortzetten. Dit onderzoek kan aanleiding zijn om bij dit onderwerp even stil te staan en daarop te reflecteren. Op deze manier worden acties die nog op intuïtief niveau uitgevoerd worden naar een bewust niveau getild, waardoor de kwaliteit van de gesprekken wordt vergroot.

- docenten die het moeilijk vinden om wiskundige gesprekken in de lespraktijk in te voeren. In dit onderzoek worden belangrijk praktische aspecten als het creëren van randvoorwaarden, voorbereiding wijzigen en het uitvoeren van gesprekken toegelicht aan de hand van concrete lesvoorbeelden. Verwacht wordt dat deze wijze van werken het voor de docenten gemakkelijker maakt om aanbevelingen te volgen.

- docenten die zich niet bewust zijn van het belang van dit onderwerp. Voor deze gategorie van docenten kan dit onderzoek een goede aanleiding zijn daarover te gaan nadenken.

De lijst met aanbevelingen is uit het theoretische kader aan de hand van een lijst met voorbeelden van referenties opgesteld (zie ook par.4.1), nu echter toegelicht met concrete voorbeelden uit de lespraktijk.

Reflecteren op de eigen lespraktijk is een essentieel onderdeel van de professionalisering van elke docent. Voor een docent die (meer) bewust wil omgaan met het inzetten van wiskundige gesprekken in de les kan het leerzaam zijn stil te staan bij de eigen lespraktijk en zich daarbij de volgende vragen te stellen.
- wat zijn de sociale en de socio-wiskundige normen die gesteld worden?
- wat zijn de normen die door de leerlingen overgenomen worden?
- hoe zorgt de docent ervoor dat de normen door de leerlingen overgenomen worden?

Selectie en ontwikkeling van goede opgaven en proberen te anticiperen op denkactiviteiten van leerlingen

Aanleiding voor wiskundige gesprekken zijn goede opdrachten: complex, uitdagend, betekenisvol, die leiden tot verschillende oplossingsstrategieën. Een voorbeeld hiervan zijn de opdrachten van Jan, of die van Cees. Belangrijk hierbij is een goede bron van opdrachten en het proberen daarbij voor te stellen hoe de leerlingen erop gaan reageren.

Gelegenheid geven tot samenwerking, met aanwezigheid van de docent maar zonder dat deze het gesprek domineert

De docent kan een gesprek leiden zonder in de rol van uitlegger te kruipen. In het volgende voorbeeld stimuleert Cees dat leerlingen op elkaar reageren en voor hun mening uitkomen:

Björn: Ik ga vragen of dit een bissectrice is.

Björn: Meester … meester ...

Cees: Ja?

Björn: Kun je stellen dat als deze lijn de bissectrice is van *B* en ook door *R* en *P* gaat, dit dan automatisch de bissectrice van deze hoeken is? Of kun je dit zo niet stellen?

Martine: Dat moet je juist bewijzen anders heeft dit bewijzen geen nut.

Cees: Dus, ik hoef er niks op te zeggen?

L: Nee, dat hoeft niet

Consequent optreden met gewenste sociale en socio-wiskundige normen, onder andere:

- ***de docent honoreert alternatieve oplossingen van leerlingen***
  Jan reageerde heel positief toen een leerling met een alternatieve oplossing kwam. Hij vraagt aan de leerling haar oplossing aan de rest van de klas te laten zien.

- ***leerlingen er aan herinneren dat ze naar elkaar moeten luisteren en andere oplossingsstrategieën proberen te begrijpen***
  Tijdens het klassengesprek let Cees goed op dat de leerlingen volgens deze norm blijven optreden door op een bepaald moment te zeggen: ‘Laten we eerst hem de kans geven om het even te zeggen.’

- ***leerlingen aanmoedigen hun eigen mening te geven en oplossingsstrategieën te verantwoorden***
  Om dit gedrag aan te moedigen stelt Jan vaak de vraag aan de leerlingen: ‘Weet je het zeker?.’

- ***aan welke criteria moet een (wiskundig) goed antwoord voldoen***
  Cees probeert deze socio-wiskundige norm bij de leerlingen te ontwikkelen. Iets uitleggen bij wiskunde is vaak heel anders dan een uitleg in het dagelijkse leven. Door wiskundige gesprekken met de leerlingen te houden, probeert Cees er voor te zorgen dat ze dit verschil leren ervaren en hoe ze zelf een goede uitleg kunnen geven. Op een bepaald moment zegt Cees expliciet:

  Cees: Dus als je zegt ja dan moet je met een bewijs komen. Zeg je nee dan moet je met een voorbeeld komen van zo'n soort vierhoek en ook laten zien dat dit geen parallellogram is

- ***Antwoorden van leerlingen framing, oftewel, het resultaat van activiteit van docenten en leerlingen wordt expliciet onderwerp van discussie gemaakt.***
  Guus doet dit door sommige interventies en argumenteren van leerlingen tijdens de gesprekken toe te laten.

  Guus: Fred, heb je nog iets er bijgeschreven?

  Fred: Loopt gelijk aan *k.*

Guus: Loopt gelijk aan k (Guus herhaalt het antwoord van de leerling en schrijft dit op het bord). In de klas hoor ik iets, wie zegt nu wat?

L: Evenwijdig.

Guus: Ik hoor evenwijdig (*en hij schrijft op het bord evenwijdig*). Bedoel je dat ook met gelijk, Fred?

(...)

Guus: Luister even, ik hoor gelijk, er staat evenwijdig en ik hoor ook dezelfde helling. Als je nu iets opnieuw moet opschrijven bij de opdracht wat kies je dan het liefst? Gelijk, evenwijdig of dezelfde helling?

Leerlingen die de gewenste sociale en socio-wiskundige normen gebruiken belonen, onder andere door:

- ***Te laten merken daadwerkelijk geïnteresseerd te zijn in het denken van de leerlingen en ervoor te zorgen dat hun bijdrage aan de discussie een rol speelt in de discussie.***
  In het volgende voorbeeld blijft Cees aanwijzingen van leerlingen gebruiken.

Cees: Laura zei nee, dit hoeft geen parallellogram te zijn: als de overstaande zijden gelijk zijn, kunnen we ook een rechthoek hebben.

Ton: Maar dat is ook een parallellogram.

Cees: Waarom is dat een parallellogram?

- ***Eigen juistheid van een antwoord opschorten***
  Guus stimuleert de leerlingen om deel te nemen aan het klassengesprek en dat positief te waarderen, zelfs als het antwoord fout of niet helemaal correct is. Door zo te handelen, merken de leerlingen dadelijk dat wat ze doen belangrijk is en dat hun inbreng direct gebruikt wordt.

Guus: Ik wil nog even kijken of we dit nog korter kunnen opschrijven. Wie kan dit korter opschrijven: de helling van de lijn is dezelfde als de helling van de grafiek in (2,0)? Marja?

Marja: $f(x)$ is nul als x is 2

Guus: Wat heeft Marja gedaan? Zij heeft gekeken naar (2,0) (...) het kan nog korter $f(2) = 0$. Begrijpt iedereen dit? Het is niet wat ik bedoeld maar het is helemaal goed. Het is goed dat je dat gezegd hebt.
De lijn heeft dezelfde helling als de grafiek in (2,0)

Nawoord

Twee jaar lang heb ik de mogelijkheid gekregen om het belang van wiskundige gesprekken in de lespraktijk te onderzoeken. Officieel zou dat een dag per week kosten, maar zo heb ik niet kunnen doen. Het reflectieproces kost tijd en heeft ook tijd nodig om te 'rijpen'. Vaak heb ik iets willen schrijven op de dag die ik voor het onderzoek bestemd had, maar ik kreeg geen woord op papier. Of het omgekeerde gebeurde, je hebt zoveel ideeën in je hoofd die je wil opschrijven maar dat lukt niet want er moet worden lesgegeven, tussendoor gesprekken met leerlingen en er moet werk worden nagekeken. De oplossing die ik hiervoor heb gevonden was: perioden waar ik intensief aan het onderzoek werkte, afgewisseld met blanco perioden. Uitputtend, maar ook bevredigend!
Lesgeven in het VO en tegelijkertijd didactisch onderzoek doen is ook moeilijk te combineren vanwege de weinige flexibiliteit die de schoolstructuur biedt. In dit onderzoek had bijvoorbeeld mijn beperkte beschikbaarheid vanuit de school tot gevolg:

(a) dat de fase van lessen observeren uitliep: het is niet makkelijke om de roosters van de geselecteerde docenten te matchen met mijn eigen lesrooster; we hebben hoogstens één of twee momenten in de week gevonden waar dat mogelijk was; als een afgesproken les uitviel vanwege ziekte of schoolactiviteiten, moest een nieuw moment afgesproken worden en dat was dan een paar weken later.

(b) om dezelfde reden was het niet mogelijke om een serie lessen achter elkaar te volgen.

Dit onderzoek heeft de volgende data opgeleverd:
- Video-opnamen van lessen van drie verschillende docenten uit het voortgezet onderwijs;
- selectie van videofragmenten en een bijbehorende analyse in het kader van het belang van wiskundig inhoudelijke gesprekken en de rol van de docent daarbinnen;
- analyses van lessen;
- (enkele) lesprotocollen.

Dit onderzoek heeft de volgende publicaties opgeleverd:
- 'Educar para a Autonomia' gepubliceerd in de proceedings van de conferentie XV EIM (1*5th Meeting on research on Mathematics Education*) in Monte Gordo, Portugal.
- artikel over de ontwikkeling van een didactische aanpak toegelicht met voorbeelden uit de lespraktijk. Nog niet gereed

Naar aanleiding van dit onderzoek zijn de volgende presentaties gehouden:
- 17 maart 2006 en 9 maart 2007- presentatie op LIO-bijeenkomst.
- 7, 8 en 9 mei 2006 - deelname aan de XV EIM (1*5th Meeting on research on Mathematics Education*) in Monte Gordo, Portugal. Daar heb ik een presentatie gehouden over de rol en het belang van wiskundige gesprekken voor de ontwikkeling van autonomie bij het leren van wiskunde. De inhoud van deze presentatie wordt beschreven in het artikel '*Educar para a Autonomia*' (Onderwijzen voor Autonomie)

Op de verenigingsdag van de NVvW, november 2008, wordt nog een workshop voor docenten gehouden (samenvatting staat in bijlage 5).

Dit LIO- onderzoek was een goede kennismaking met het doen van onderzoek, een activiteit die heel anders is dan lesgeven, Het was zeker een leerzame ervaring: lezen en praten over en reflecteren op onderwijs-leertheorieën; inspirerende lessen van ervaren docenten bijwonen en analyseren; de inhoudelijke gesprekken over wiskundeonderwijs met mijn hoofdbegeleider Koeno Gravemeijer, de feedback en input van mijn begeleider Rijkje Dekker.
In de loop van dit onderzoek heb ik met meerdere personen gesproken: onderzoekers, docenten, leerlingen en 'gewone' mensen. Ze stimuleerden me om mijn vage ideeën onder woorden te brengen, en dat is de eerste stap voor het proces van bewustzijn.

Literatuur

Boer, C.J.E.M van den (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel*. Utrecht: CD- β press.

Brodie, K., Shahan E., Boaler, J. (2004). *Teaching mathematics and social justice: multidimensionality and responsibility*. International Congress of Mathematics Education (10), Denmark

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., Whitenack (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*: 258-277.

Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics, 36*: 303-314.
In this article we present a process model we have developed for interaction

Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics, 56*: 39-65.

Dolk, M.L.A.M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag. Over denken en handelen in onmiddellijke onderwijssituaties*. Utrecht: IVLOS, Universiteit Utrecht (proefschrift).

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education,China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K.P.E. (1995). Het belang van social norms en socio-math norms voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 14*(2):17-23.

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction theories as means of suport for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2): 105-128.

Gravemeijer, K.P.E. (2004). Creating opportunities for students to reinvent mathematics. *Paper presented in the 10Th International Congress in Mathematics Education* (ICME 10). Copenhagen, Denmark. July 4-11

Gravemeijer, K.P.E. (2005)._*Revisiting mathematics education revisited. Utrecht: Freudenthal Instituut.*

Hiele, P.M. van (1973). Begrip en inzicht: werkboek van de wiskundedidaktiek. Purmerend: Muusses

Hiele, P.M. van (1986). *Structure and Insight.* Academic Press, Inc., Orlando.

Meijer, P.C. (1999). *Teachers's practical knowledge. Teaching reading comprehension in secondary education.* Utrecht: Universiteit Utrecht.

Mercer, N. (1995). *The guided Construction of knowledge: Talk amongst teachers and learners.* Clevedon: Multilingual matters.

Pijls, M., Dekker, R. & Van Hout-Wolters, B. (2003). Mathematical level raising through collaborative investigations with the computer. *International Journal of Computers for Mathematical Learnin,g 8*: 191–213.

NCTM yearbook (1996). *Communication in mathematics k-12 and Beyound.*

Nelissen, J.M.C.(1998). Taal en betekenis in het realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Panama-Post. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 16(2)*, pp. 28-39.

Nelissen, J. M. C. (2002). Interactie: een vakpsychologische analyse (1).. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 20*(4).

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145

Turner, J. C., Cox, K. E., DiCintio, M., Meyer, D. K., LoganC. & Thomas, C. T. (1998). Creating Contexts for Involvement in Mathematics. *Journal of Educational Psychology, 90*(.4): 730-745.

Yackel, E. & Cobb, P. (1994). *Sociomathematical Norms, Argumentation, and Athonomy in Mathematics*. Paper presented at the AERA-conferentie in New Orleans.

Wood, T. (1996). Events in learning Mathematics: insights from research in classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 30*: 85-105.

Bijlage 1: Protocol lesfragment. Cees, 8 december 2006, 5 vwo B1,2

CEES:	We hebben som 22 en 21 de vorige keer gedaan. Als je nog vragen daarover hebt dan kunnen we het de volgende keer wel doen. Ik wil nu bij paragraaf 1.5 beginnen. De eerste som gaat over iets dat we in de vorige les al hebben gehad, namelijk over parallellogrammen. Wat is een parallellogram?
TON:	Een vierhoek met overstaande evenwijdige zijden?
CEES:	Een vierhoek met overstaande evenwijdige zijden. Dus een vierhoek ABCD (Cees tekent figuur 1 op het bord)
CEES:	Ja? Dit is een parallellogram. De overstaande zijden zijn parallel. Is dat een parallellogram?
LEERLING:	Ja!
CEES:	Is dit de definitie?
LEERLING:	Even lang
meerdere	Leerlingen antwoorden: de zijden zijn even lang.
CEES:	Ze zijn even lang.
LEERLING:	Maar het is zo en zo...
CEES:	Overstaande zijden zijn even lang (Cees tekent figuur 2 op het bord.
TON:	Als die en die evenwijdig zijn en die en die ook dan zijn die en die even lang.
LEERLING:	Nee hoor.
LEERLING:	Ja hoor.
CEES	Ik hoor wat discussie. Nee hoor, ja hoor.
CEES:	Oké, of dat zo is kunnen we straks bekijken. We kunnen gewoon bewijzen bijvoorbeeld dat dit het is (Cees wijst eerst figuur 1 aan en daarna figuur 2) of we kunnen ook bewijzen dat dit niet altijd zo is (nogmaals wijst Cees eerst figuur 1 aan en daarna figuur 2). Maar laten we de drie mogelijkheden naast elkaar zetten want er is nog een derde. De overstaande zijden zijn gelijk of ...
	meerdere leerlingen antwoorden: overstaande hoeken zijn gelijk
CEES:	De overstaande zijden zijn gelijk of de overstaande hoeken zijn gelijk (Cees tekent figuur 3 op het bord) dat kan ook.
CEES;	Oké, dit zijn drie dingen die een parallellogram definiëren, of niet? Als je dit hebt (Cees wijst figuur 2 aan) is dit dan per se een parallellogram?
PIET:	Ja.
LAURA:	Nee.
TON:	Ja, als je zo ziet wel.
LAURA:	Ik denk het niet.
LEERLING:	Het kan een rechthoek zijn. (meerdere leerlingen: een rechthoek is altijd een parallellogram).
CEES:	Laura zei nee, dit hoeft geen parallellogram te zijn als de overstaande zijden gelijk zijn kunnen we ook een rechthoek hebben.
TON:	Maar dat is ook een parallellogram.
CEES:	Waarom is dat een parallellogram?
TON:	Omdat gewoon, zeg maar. De hoeken zijn al gelijk.
CEES:	Wat zei jij?
Laura:	Nee.
CEES:	Oké. Dat even van tevoren. Een rechthoek is altijd een parallellogram, maar het is wel een bijzonder parallellogram. **(...)**
CEES:	Oké, als je dit hebt is het altijd een parallellogram? Dat vroeg ik. Ik hoor mensen ‘ja’ zeggen en ik hoor mensen ‘nee’ zeggen.

CEES: Oké, de mensen die ja zeggen.
CEES: Wie zegt dat als de overstaande zijden gelijk zijn, dan zijn ze ook evenwijdig? Wie zegt dat dat zo is? Dus dat een parallellogram net zo goed zou kunnen.... Jij, je zegt dat
LEERLING: Ik zeg het ook.
LEERLING: Ik ook.
CEES: Heb je argumenten? Je hebt geen argumenten?
Laura: Ik wel.
CEES: Laura, heb je argumenten?
LEERLING: Als de zijden even lang zijn dan moeten de andere zijden ook even lang zijn.
CEES: Even om de beurt. Als de zijden even lang zijn moeten de zijden even lang zijn?
LEERLING: Nee, als deze, zeg het maar, de bovenste en de onderste (Cees wijst op het bord op figuur 2 CB en AB)
CEES: Ja
Laura: Dan moeten de andere twee … (rest van de zin is niet te verstaan)
CEES: Ah, maar dan is het nog mooi, want je kunt wel zeggen een parallellogram heeft gewoon twee zijden die overstaand zijn en gelijk en dan heb je automatische een parallellogram. (leerlingen praten tegelijkertijd)
BAS: En parallel.
CEES: Dat is niet zo, want je kunt het ook een beetje scheef zetten (D tekent op het bord een onregelmatige vierhoek)
BAS: Daarom moet het parallel zijn.
CEES: Ja, ze moeten wel parallel zijn. Ah, maar we komen aan een vierde definitie, geloof ik. (Cees tekent figuur 4 op het bord. Dat dit altijd een parallellogram moet zijn (Cees wijst figuur 1 aan) of er is een voorbeeld van zo’n ding (Cees wijst figuur 2 aan) wat geen parallellogram is. Leerlingen zeggen iets, niet te verstaan
CEES: Dus de mensen die zeggen ‘nee’ moeten met een voorbeeld kunnen komen van een vierhoek waarin ... waarin wat?
LEERLING: Waarin de overstaande zijden gelijk zijn.
CEES: Waarin de overstaande zijden gelijk zijn?
Leerlingen zeggen iets, niet te verstaan
CEES: Maar waarin zijn ze niet evenwijdig
CEES: Dus als je zegt ‘ja’, dan moet je met een bewijs komen. Zeg je ‘nee’, dan moet je met een voorbeeld komen van zo'n soort vierhoek en ook dat laten zien dat het geen parallellogram is.
LEERLING: Dat kan niet
CEES: Dat kan niet ... dat we denken ...de meesten zeggen dit is wel zo ... Als je dit heb dan heb je ook dat. Oké, laten we het gewoon proberen te bewijzen
(...)
CEES: Stel je hebt een rechthoek eh... je hebt een vierhoek ABCD, de overstaande zijden zijn even lang. Waarom zijn de overstaande zijden evenwijdig aan elkaar?
TON: Als ze langer worden dan zijn ze niet meer evenwedig z-hoeken...(niet te verstaan)als je een eentje langer maakt dan zijn de andere niet meer evenwijdig. Als je AB langer maakt, CB en DA (niet te verstaan)
LEERLING 2: Jaaa..
Laura: Dan moet AD ook langer worden.
LEERLING: Hoezo?
LAURA: Omdat ze even lang zijn.
LEERLING: Maar dan (niet te begrijpen).
CEES: Martin heb jij een idee hoe je het kunt aanpakken?
MARTIN: Nee.

CEES: Nee? Helemaal niet?...(er valt een stilte) Eh ... nou, jij, je zegt:ik maak het een beetje langer. Wat maak je langer?
TON: Als je AB iets langer maakt, gewoon een stuk.
CEES: Ja, dat heb ik al gedaan (teken op het bord).
TON?: Dan wordt het CB die gaat verschuiven en dus niet meer evenwijdig aan AD.
LAURA: Ja, maar DC moeten ook langer worden want AB is gelijk aan DC.
LEERLING: Hij bedoelt dat dat juist verandert.
LAURA: Maar dan klopt het niet meer.
CEES: Volgens mij, volgens mij begrijpt Ton niet wat jij zei.
CEES: Ja? Als je dit langer maakt en dit moet even lang blijven als dat dan schuift deze ook nog een stukje.
LEERLING: Dat moet wel.
CEES: Ja?
LEERLING: Dat moet dan wel, natuurlijk.
CEES: Oké, Ton, jou idee is gekraakt.
CEES: ... Jammer. Andere idee? Pieter?
PIETER: De middellijn AC tekenen.
CEES: Ha, laten we gewoon een extra lijn tekenen. In deze figuur is zo weinig te zien. (Cees tekent diagonaal AC op figuur 2). Laten we de lijn erbij trekken.
LEERLING: Wat leuk.
L2: Dan heb je een Z.
CEES: Ik zie een Z. Ik zie ...
PIETER: ZZZ
CEES: ZZZ misschien oh …
PIETER: AC is CA.
PIETER: En AB is CB en DC is BA.
CEES: Toby heb je dit gevolgd?
CEES: Kijk, het zou lekker zijn als jullie luisteren naar wat anderen zeggen want hij vertelt nu hoe hij het doet, jullie volgen het niet terwijl interessant ... wil je het nog een keer zeggen
PIETER: AC is CA, (Cees tekent op het bord) AD is CB.
CEES: AD is BC.
PIETER: Nee, CB.
LEERLING: Zeg het nog eens.
PIETER: AD is CB, toch?
LEERLING: Je moet het andersom doen.
Laura: Nee
CEES: Laten we eerst hem de kans om het even te zeggen.
PIETER: AB is CD.
CEES: AB is CD (Cees schrijft tegelijkertijd op het bord).
CEES: Wat hebben we nu?
PIETER: ZZZ.
CEES: Welke driehoeken zijn dus ...?
PIETER: ACD en CAD.
TON: Hoe weten we nu dat ze evenwijdig zijn?
CEES: En dan zetten we zzz ...Ton?
TON: Hoe weten we nu dat ze evenwijdig zijn?
CEES: Hoe weten we nu dat ze evenwijdig zijn?
LEERLING: Dat ze even lang zijn.
CEES: Iemand zei Z-hoeken. Jaaa.
CEES: Er moeten alle hoeken gelijk zijn en welke hoeken in het bijzonder?
PIETER: DCA moet gelijk zijn aan BAC.
CEES: DCA (Cees tekent DAC) die hoek moet gelijk zijn ...
PIETER: Nee, BAC.
PIETER: DAC dan (niet te verstaan).
CEES: Maar nu ...wacht even heb je nu nog meer nodig?

TON: De Z-hoeken mag je juist toepassen als de lijnen evenwijdig zijn maar als de hoeken gelijk zijn hoeven niet de lijnen even lang te zijn.(niet te verstaan)
CEES: Ja? Heb je het gevolgd? Eh ... ik zou nu willen concluderen dat ze evenwijdig zijn, want het zijn Z-hoeken die gelijk zijn en dan zijn deze zijden ook evenwijdig maar ... wat je zegt is wel waar. Mag je het nu omkeren? Mag je nu zeggen, omdat die hoek is gelijk aan die hoek, is dit evenwijdig aan dat… ?
LEERLING: Nee.
TON: Ja, want dat is het principe van de Z-hoeken
CEES: Het is het principe van de Z-hoeken
TON: Het moet wel
CEES: Is iedereen overtuigd nu?
LAURA: Ik was al overtuigd.
CEES: Je was al overtuigd
CEES: Oké, wat is nu de conclusie? Als je dus de overstaande zijden gelijk hebt, dan heb je ook overstaande zijden evenwijdig. Dus je kunt nu als je een parallellogram wilt definiëren zeggen: ik doe het zo, een parallellogram is een vierhoek met overstaande zijden die evenwijdig zijn. Je kunt net zo goed zeggen is een figuur met overstaande zijden die gelijk zijn. In het ene geval als je een parallellogram hebt is dit ook zo, dat is de stelling. In het andere geval, als je dit als definitie hebt (figuur 2) dan is de stelling dat dit zo is (figuur 1). En de stelling hebben we hier bewezen (Cees wijst naar figuur 4).
LEERLING: Die hebben we ook bewezen (leerling wijst naar figuur 3)
CEES: Die hebben we ook bewezen?
LEERLING: Dus DACB is ook een Z-hoek dus dat betekent ...
CEES: DAC (Cees tekent op het bord hoek DAC en ACB).
LEERLING: En dan heb je zo'n Z-hoek. En dan weet je dat hoek DAC en ACB ook gelijk zijn en dat kun je samen met de andere hoeken die je dan ook weet, bewijzen dat de twee hoeken gelijk zijn.
CEES: Ja? Wat? Ik hoor maar misschien weet je niet wat hij wil bewijzen ... wat wil je bewijzen?
LEERLING: Dat dit ook waar is, dat dit ook hetzelfde is dan dat. Dat de rechtse hetzelfde is als de middelste
CEES: Dus als je de overstaande zijden gelijk hebt, dan worden de hoeken gelijk. Maar snap jij wat hij doet?
CEES: Leg het eens uit, Martin.
Martin: De eerste met Z-hoek en dan heb je de hoeken.
EDGAR: Het is precies hetzelfde.
CEES: Dit hoekje en dat hoekje.
LEERLING: Het is precies hetzelfde als wat daar staat.
CEES: Oké, genoeg. Wat ik nu wil is dat jullie som 25 met z’n drieën gaat maken, dat schrijf je op een blaadje een bewijs en dat bewijs wordt weer door anderen nagekeken ...

Bijlage 2: Protocol lesfragment. Guus, 12 december 2007, 5 havo B1

Guus: Vertel precies wat je weet van lijn k en wat je te weten kunt komen Sara, wat heb je opgeschreven bij opdracht 7?
Sara: Ik had lineair.
Guus: Lineair *(Guus herhaalt antwoord van leerling en schrijft het op het bord). Ja,* bij de lijn hoort een lineaire functie of vergelijking. Sara, wat heb je nog meer opgeschreven?
Sara: Een constante helling, het is eigenlijk hetzelfde.
Guus: Constante helling. *(Guus herhaalt antwoord van leerling en schrijft het op het bord.)*
Sara: En de formule y is gelijk aan ax keer b ... plus b.
Guus: y = ax .... wat heb je precies geschreven?
Sara: Er staat hier keer, maar het is plus.
Guus: ... dat vind ik een goede. Sara had geschreven y is gelijk aan ax keer b. Ik heb niet gezegd dat het fout was, ik heb geen rode streep gezet, er staat helemaal niks. Ze leest het voor: y is ax keer b, ... oh nee y is ax plus b. Wat er nu gebeurt vind ik heel belangrijk. Blijkbaar weet Sara precies dat het moet zijn y is ax plus b. Maar toch heeft ze opgeschreven, omdat ze met andere dingen bezig was, y is ax keer b . Ik beweer dat als je dit doet, als je volhoudt en alles netjes opschrijft wat je denkt, dan kun je er makkelijker naar kijken. (Guus maakt vervolgens een vergelijking met een schilder die steeds zijn werk verbetert).
Guus schrijft op het bord y = ax + b en laat met opzet y = axxb ook op het bord staan
Guus: Oké, Lara heb je andere dingen erbij opgeschreven?
Lara: Nee.
Guus: Fred? Heb jij er nog iets bij geschreven?
Fred: Loopt gelijk aan k.
Guus: Loopt gelijk aan k *(Guus herhaalt antwoord van leerling en schrijft het op het bord).* In de klas hoor ik iets, wie zegt nu wat?
Leerling: Evenwijdig.
Guus: Ik hoor evenwijdig(*en schrijft op het bord evenwijdig*). Bedoel je dat ook met gelijk, Fred?
Guus: Luister even, ik hoor gelijk er staat evenwijdig en ik hoor ook dezelfde helling. Als ik nu iets opnieuw moet schrijven bij opdracht 6 wat kies je het liefst voor? Gelijk, evenwijdig of dezelfde helling?
Leerling: Evenwijdig.
Guus: Evenwijdig. Dus gelijk is niet goed (hij streept gelijk door). En de helling ook wegstrepen?
Leerlingen: Ja.
Guus: Dus hij loopt evenwijdig. De twee lijnen lopen evenwijdig aan elkaar. Weet iemand nog iets? Harmen?
Harmen: Hij raakt de functie op (2,0).
(Guus herhaalt het antwoord van de leerling en schrijft het op het bord.)
Guus: En wil je nog iets zeggen, Harmen? Dit is helemaal goed. Het is goed dat je dit opmerkt. Heb je er nog andere gedachten bij?
Harmen: Het gaat er niet doorheen.
(Guus herhaalt en tekent op het bord.)
Guus: Dus als ik hem teken (...) dan loopt die ...
Harmen: Het loopt tegen hem aan.
Guus: Ik wil nog een woord horen. Het is een woord dat Tom al geschreven had en hij mocht van mij het niet zeggen, omdat ik wou kijken of jullie ook daarop kwamen. Ik vind dat we dit

aardig hebben opgeschreven. (*Guus vat samen wat allemaal op het bord werd opgeschreven en hij noemt de naam van de leerlingen erbij.)*

Guus: Ik wil nog een dingetje horen, wat zou ik willen horen?

Leerling: Een parabool ...?

Guus: Een parabool, dat zegt iets over de grafiek maar dat verwacht ik eerder bij opdracht 1 waar je iets moet opschrijven over f(x) is (...)

Oké, ik laat Tom aan het woord. Tom, heb jij nou opgeschreven waar ik op zit te wachten?

Tom: Het is een eerstegraads functie.

Guus: Dat is deze lijn, ja.

Tom: En dat de helling is hetzelfde op punt x is twee als de functie f.

Guus: De helling, hoor ik, in het punt 2. De helling van die lijn, of niet?

Tom: Ja.

Guus: Is hetzelfde als de helling van deze functie in dit punt. Snappen jullie wat hij zegt?

(Leerlingen knikten positief.)

Guus: Dat betekent dat de helling van de lijn dezelfde is als de helling van de functie. En hoe kunnen we de helling bepalen als we die willen hebben?

Tom: Differentiëren.

Guus: Ja daar zijn we mee bezig geweest. Hoe krijgen we de helling op dit punt? Met behulp van differentiëren en dat is een belangrijke toevoeging. Sterker nog, een van die dingen zouden we nog kunnen missen, maar deze niet, die wil ik in deze opdracht oplossen.

(...)

Ik vond zelf dus de helling niet zo gek; ik had het toen doorgestreept, omdat jullie zeiden dat ik dat moest doen (...)

Ik ben nog niet helemaal tevreden Ik wil nog even kijken of we dit nog korter kunnen opschrijven. Wie kan dit korter opschrijven: de helling van de lijn is dezelfde als de helling van de grafiek in (2,0)? Marja?

Marja: f(x) is nul als x is 2.

Guus: Wat heeft Marja gedaan? Zij heeft gekeken naar (2,0) (...) het kan nog korter f(2) = 0. Snapte dit iedereen? Het was niet wat ik bedoelde, maar het is helemaal goed. Het is goed dat je dat gezegd hebt.

Ik wil nog over de helling. De lijn heeft dezelfde helling als de grafiek in (2,0)

(...)

Guus: ... heb je een mooi wiskundig woord en een korte notatie om het korter op te schrijven. Wie het weet mag het zeggen. En ik ga het niet zeggen. We moeten hier proberen uit te komen. Wat heeft de helling met dit te maken? Je mag hardop praten.

Leerling: f accent.

Guus: Goed zo, f accent x, hoe heet dat ding? De...?

Leerling: Afgeleide.

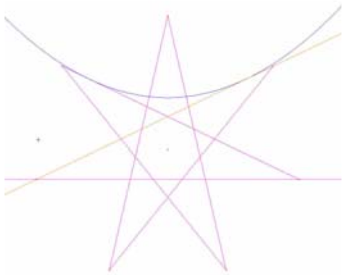
(...)

Guus: Ik stel nu voor dat we samen opgave 6 netjes opschrijven en daarna wil ik dat jullie op dezelfde precieze manier, met elkaar, met z'n tweeën of met z'n drieën nog een keer naar de vraag kijken.

Wat zullen we opschrijven?

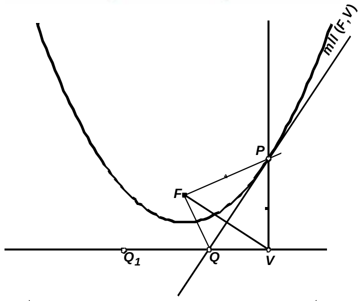
Bijlage 3: Opdrachten Jan

Zevenster



De hoekpunten vormen een regelmatige zevenhoek.
De parabool met als brandpunt het bovenste punt en als richtlijn de horizontale lijn lijkt te raken aan twee van de zijden van de ster!
Bewijs dat dat zo is.

Drie gratis raaklijnen aan de parabool



44 Hier is nogmaals de figuur te zien van de parabool en zijn raaklijn in punt P op de parabool. De raaklijn in P is doorgetrokken en snijdt de richtlijn in Q. Raaklijn PQ is middelloodlijn van FV, dus vierhoek $FQVP$ is een vlieger en QP is deellijn van de hoek die FQ met de richtlijn maakt.

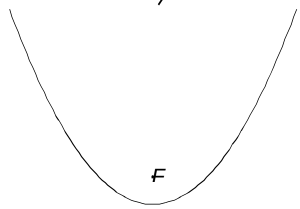
a. Aangegeven is een nieuw punt Q_1. Maak de vlieger $FQ_1V_1P_1$ af. (Waarbij je voor de duidelijkheid V_1 links van Q_1 neemt.)

b .Q_1P_1 is nu weer een raaklijn aan de parabool. Een constructie om te onthouden.

45 Toon aan: (gebruik de figuur hieronder)

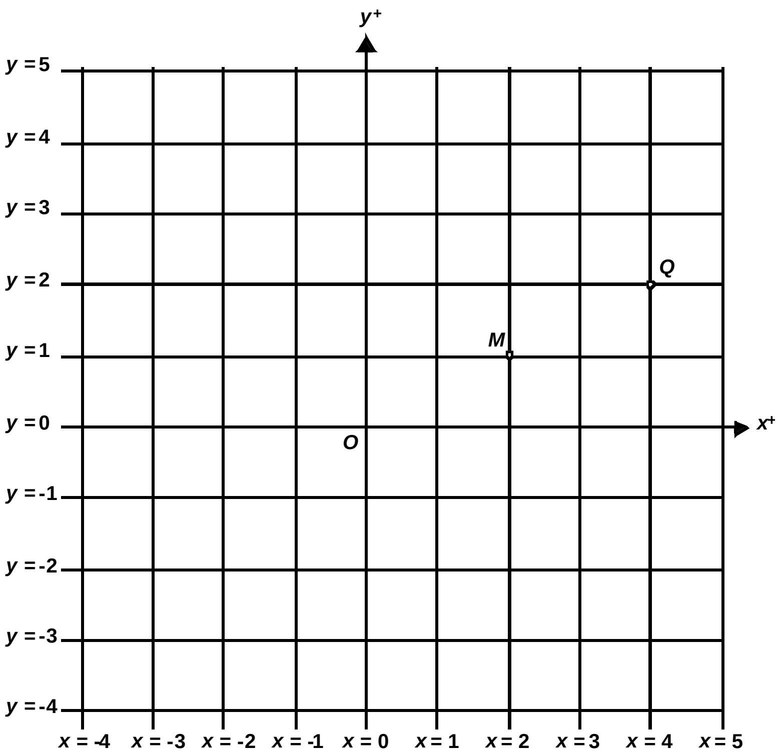
a. De twee raaklijnen door een punt op de richtlijn aan de parabool staan loodrecht op elkaar.

b. De verbindingslijn van de twee raakpunten gaat van deze raaklijnen gaat door het brandpunt van de parabool.



Afstanden, de cirkelvergelijking

In het coördinatenstelsel zijn de zogenaamde *roosterlijnen* getekend. Die zijn een hulp bij het rekenen met *afstanden* in coördinatenstelsel. Descartes geeft aan dat de stelling van *Pythagoras* hier onmisbaar is.



46 a. Verklaar dat in de voorbeeld figuur geldt: . Markeer de rechthoekige driehoek die je voor 'Pythagoras' hebt gebruikt.

b. Laat *P* nu een punt met de nog onbepaalde coördinaten (*x, y*) zijn. Druk de afstand van *P* tot *M* in *x* en *y* uit:

$d(P,M) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Tip: denk aan de zijden van de te gebruiken rechthoekige driehoek.

c. Als we willen dat *P* op de cirkel met middelpunt *M* ligt die door Q gaat, dan weten we dat:

$d(P,M) = \sqrt{5}$

Descartes zegt: de gelijkstelling van die twee afstanden geeft de vergelijking van de cirkel. Stel die vergelijking op.

d. Al die afstanden zijn natuurlijk positief. Door kwadrateren (links en rechts) werk je dus veilig de wortels weg.
Teken de bedoelde cirkel in de figuur en schrijf de vergelijking er in de figuur bij.

Om de afstand van *M* tot *Q* te bepalen gebruikte je de *horizontale* en *verticale* afstand in het rooster; die vormen de rechthoekszijden van een driehoek. Die waren 2 en 1.
Bij de berekening van de afstand van *P*(*x*, *y*) tot *M*(2, 1) waren de *horizontale* en *verticale* afstand de *absolute waarden* van de coördinaatverschillen: | *x* -2 | en | *y* - 1|.
Je afstandsformule was mogelijk dan ook deze:

$d(P,M) = \sqrt{(|x-2|)^2 + (y-1)^2}$

Vanwege de kwadraten zijn de absoluut-strepen niet nodig. De uiteindelijke vergelijking van de cirkel na het kwadrateren kon dus zijn:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

In deze vergelijking zijn de structuur van de stelling van Pythagoras en de horizontale en verticale afstanden nog goed te zien. Uitwerken van de haakjes-uitdrukkingen kán, maar is dus niet zonder meer een verbetering.

Algemene vergelijking van de cirkel

47. Laat nu *M* het punt (*a, b*) zijn en *r* de straal van de cirkel met middelpunt M.
Stel de vergelijking van deze cirkel op.

48. a. Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt *M*(-5,2) en straal 13.
b. Beslis door invullen in de vergelijking of *P*(6, 9) en *Q*(7, 7) op deze cirkel liggen.
c. Beslis zonder tekenen door invullen of I(2, -9) binnen of buiten de cirkel ligt.

49. a. Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt M(-2, 3) die door (1,7) gaat.
b. Hoeveel punten met gehele coördinaten liggen op deze cirkel?

Van vergelijking naar figuur. Een vergelijking stelt een figuur voor!

Je weet wel wat *voorgesteld* wordt door de vergelijking $y = 2x + 1$. Een rechte lijn, en wel die door de punten (0, 1) en (1,3).
Dat betekent dat al de punten (*x, y*) die aan de vergelijking voldoen, samen die lijn vormen.
Ook bij andere vergelijkingen kun je de vraag stellen: wat stelt het voor? Vooral als de vergelijking er anders uit ziet dan je denkt.

50. a. Toon aan dat deze vergelijking een cirkel voorstelt: $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 51$
b. Wat zijn middelpunt en straal?

51. Wat is de cirkel $x^2 + y^2 = 1$?

52. a. Toon aan dat voor elke *a* de cirkel $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ raakt aan de assen.
b. Van deze cirkels zijn er vier die raken aan de cirkel $x^2 + y^2 = 2$. Bepaal de twee positieve waarden van *a* waarbij dit raken plaats heeft. Maak een schetsje om het raakpunt te vinden.

53. Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt (*a*, 0) die raakt aan de lijn *x*=*y*.

Bijlage 4: Opdrachten Guus

Wiskunde doen, maar dan zonder berekeningen. Begrippen, ideeën, strategieën, aanpak	Havo 5 wiB1, December 2008

De onderstaande vragen gaan over HAVO B1 2006 2e tijdvak Functies: 5, 6, 7 en 8.
Deze opdracht staat in de bijlage hierachter.
Geef de antwoorden op papier. Vermeld bij elk antwoord het nummer van de vraag. Werk netjes en overzichtelijk zodat ik het goed kan bekijken. Ik wil er graag achter zien te komen wat jullie zoal weten van deze wiskunde, om daarna mijn lessen daarop af te stemmen.
Doe deze opdracht dus individueel en serieus.

Vragen vooraf opdracht 5

1. Vertel ALLES wat je weet over de functie f(x) = x^4 – 16.
2. Wat betekent "de functie snijdt de x-as in (-2, 0)?
3. Geef aan in de figuur wat de oplossing is van vraag 5 zonder het uit te rekenen.
4. Wat betekent bereken exact? Geef een voorbeeld van 'exact bereken' en een voorbeeld van 'niet exact bereken'

Vertel duidelijk en in stappen hoe je **opdracht 5** gaat aanpakken

Vragen vooraf opdracht 6

5. Wat is er op welke manier verschoven? Geef aan met een lijntje.

Vertel duidelijk en in stappen hoe je **opdracht 6** gaat aanpakken.

Vragen vooraf opdracht 7

6. Vertel precies wat je weet van lijn *k* en wat je te weten kunt komen.
7. Vertel precies wat je weet van lijn *m*.

Vertel duidelijk en in stappen hoe je **opdracht 7** gaat aanpakken.

Vragen vooraf opdracht 8

8. Wat wordt bedoeld met produktfunctie?
9. Wat weet je van een top bij een functie?
10. Vertel duidelijk en in stappen hoe je **opdracht 8** gaat aanpakken.

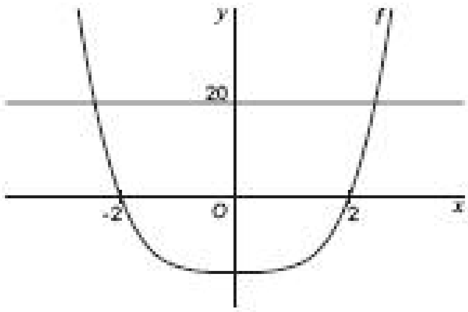
11. Stel je voor dat er ook een opdracht 9 komt in het examen. Het gaat nog steeds over f(x) = x^4 – 16.
Verzin zelf een dergelijke opgave

HAVO B1 2006 2e tijdvak

Functies

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.
In figuur 2 zijn de grafiek van f en de lijn $y = 20$ getekend.

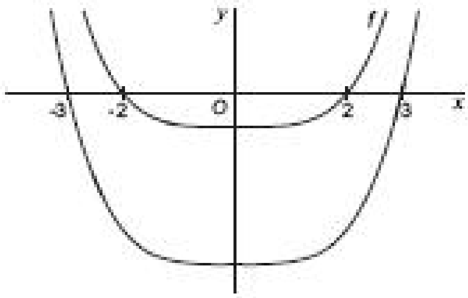
figuur 2



4p **5** ☐ Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f tussen de x-as en de lijn $y = 20$ ligt.

Door de grafiek van f omlaag te schuiven veranderen de snijpunten met de x-as in de punten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$. In figuur 3 zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

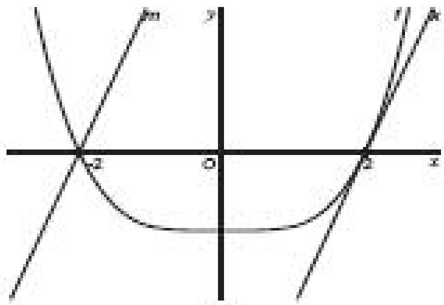
figuur 3



3p **6** ☐ Bereken over welke afstand de grafiek van f in deze situatie omlaag verschoven is.

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(2, 0)$ is de lijn k.
De lijn m gaat door het punt $(-2, 0)$ en is evenwijdig aan de lijn k (zie figuur 4).

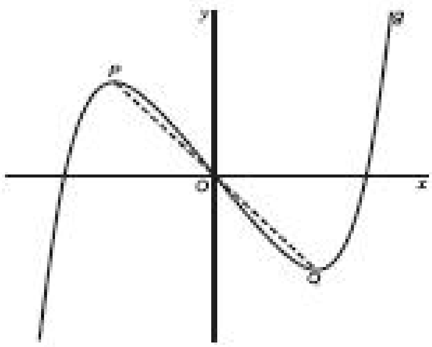
figuur 4



4p **7** ☐ Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de lijn m.

Door $f(x)$ met x te vermenigvuldigen ontstaat de productfunctie $g(x) = x^5 - 16x$.
De grafiek van g heeft twee toppen, P en Q (zie figuur 5). In figuur 5 is ook lijnstuk PQ getekend.

figuur 5



5p **8** ☐ Bereken de lengte van het lijnstuk PQ.
Rond je antwoord af op één decimaal.

Bijlage 5: Beschrijving workshop

Titel: Inhoudelijk praten over wiskunde: Hoe doe je dat?
Koeno Gravemeijer, Universiteit van Eindhoven/ Sonia Palha Oosterlicht College/FIsme

Beschrijving
Met de introductie van het studiehuis, tien jaar geleden, is de didactiek van wiskunde sterk veranderd. Een grote verandering was de nadruk op zelfstandig leren, die door veel docenten, leerlingen, ouders en schoolleiders als individueel werken werd geïnterpreteerd. Echter, kennis en begrip van wiskunde ontstaan niet vanzelf, maar komen tot stand door interactie tussen docent en klas. Interactieve reflectie en het expliciteren van concepten en denkmethoden zijn een noodzakelijke voorwaarde voor het bereiken van hogere leerdoelen (cTWO, visie document 30 maart 2007).
Vanuit een perspectief van realistisch wiskundeonderwijs is inhoudelijke interactie tussen docenten en leerlingen ook onmisbaar voor goed wiskundeonderwijs. Deze context vormt aanleiding voor dit LIO[10] onderzoek.
In deze presentatie wordt, na een korte beschrijving van de onderzoeksopzet, even verteld wat het belang van praten over wiskunde inhoudt. Vervolgens wordt in het beantwoorden van de hoofdonderzoeksvraag er dieper op ingegaan: hoe zet je wiskundige gesprekken in de lespraktijk in? Belangrijke theoretische resultaten worden besproken en toegelicht aan de hand van concrete lessenvoorbeelden van 'good practice'.

[10] Inhoudelijk praten over wiskunde is een onderzoeksproject in het kader van het NWO- programma ‘Leraar in Onderzoek’