Mathematique Q2

Benoit Legat

February 12, 2012

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
(1-x^2|1-x^2) &= \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)dx \\
&= \int_0^1 1-2x^2+x^4dx \\
&= \left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\
&= 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Des lors

$$\begin{aligned}
||1-x^2|| &= \sqrt{(1-x^2|1-x^2)} \\
&= \sqrt{\frac{8}{15}} \\
&= \frac{2\sqrt{30}}{15}
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\middle|\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= \int_0^1 \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 \exp(x)dx \\
&= [\exp(x)]_0^1 \\
&= e-1
\end{aligned}$$

Des lors

$$\begin{aligned}
\left|\left|\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right| &= \sqrt{\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\middle|\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \\
&= \sqrt{e-1}
\end{aligned}$$

2.

3. Posons $x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Il y a 3 manieres de resoudre ce probleme, les voici

Geometrique Profitons du fait qu'on travaille dans $\mathbb{R}^3$ et que le produit scalaire choisi est le produit scalaire canonique. Soit n la normale a Π passant par x. On a alors que $P_V(x) \in \Pi \cap n$. Calculons n

$$\begin{aligned} n &\equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& k+1 \\ y &=& k+2 \\ z &=& k+3 \end{array} \right. \\ &\equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x-y &=& -1 \\ x-z &=& -2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On peut a present calculer $\Pi \cap n$

$$\begin{aligned} \Pi \cap n &\equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x-y &=& -1 \\ x-z &=& -2 \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

D'ou

$$P_V(x) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Definition On doit respecter

$$\begin{aligned} P_V(x) &\in \Pi && (1) \\ x - P_V(x) &\in \Pi^\perp && (2) \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \Pi &= < \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} > \\ \Pi^\perp &= < \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} > \end{aligned}$$

On sait des lors par (1) que $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_V(x) = a \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(2) nous dit alors que $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

C'est a dire

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

D'ou $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ ce qui nous donne

$$P_V(x) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

4.

5.

6. $\Rightarrow$ On a successivement

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 &= ||x||^2 + ||x||^2\\
(x+y|x+y) &= (x|x) + (y|y)\\
(x|x+y) + (y|x+y) &= (x|x) + (y|y)\\
(x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) &= (x|x) + (y|y)\\
2(x|y) &= 0
\end{aligned}$$

D'ou $(x|y) = 0$.

$\Leftarrow$ On calcule

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 &= (x+y|x+y)\\
&= (x|x+y) + (y|x+y)\\
&= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y)\\
&= (x|x) + 2(x|y) + (y|y)
\end{aligned}$$

Comme $(x|y) = 0$

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y)\\
&= (x|x) + (y|y)
\end{aligned}$$