Mécanique Q2

Benoît Legat

April 5, 2012

1 Les vecteurs

Il y a deux types de vecteurs

Lié Noté $\mathbf{u}^{\mathbf{v}}$, vecteur de d'origine $\mathbf{v}$.

Libre Noté $\mathbf{u}$, vecteur sans origine fixe.

La notation $\hat{\mathbf{u}}$ indique que $||\hat{\mathbf{u}}|| = 1$. $\hat{\mathbf{u}}$ est appelé un vecteur unitaire.

1.1 Base orthonormée

La base orthonormée $\{\hat{\mathbf{I}}\}$ est une base composée de 3 vecteurs unitaires orthogonaux $\hat{\mathbf{I}}_1$, $\hat{\mathbf{I}}_2$ et $\hat{\mathbf{I}}_3$ respectivement arrangés dans l'ordre donné par la règle de la main droite.

Tout vecteur $\mathbf{u}$ a des coordonnées unique u_1, u_2, u_3 dans $\{\hat{\mathbf{I}}\}$. On a

$$\mathbf{u} = u_1\hat{\mathbf{I}}_1 + u_2\hat{\mathbf{I}}_2 + u_3\hat{\mathbf{I}}_3 = [\hat{\mathbf{I}}]^T u$$

où $[\hat{\mathbf{I}}] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{I}}_1 \\ \hat{\mathbf{I}}_2 \\ \hat{\mathbf{I}}_3 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$. Il est important de noter que $[\hat{\mathbf{I}}]^T[\hat{\mathbf{I}}] = [\hat{\mathbf{I}}][\hat{\mathbf{I}}]^T = E$, où E est le tenseur unitaire (neutre pour la multiplication).

1.2 Produit scalaire

Soient $\mathbf{u} = u_1\hat{\mathbf{I}}_1 + u_2\hat{\mathbf{I}}_2 + u_3\hat{\mathbf{I}}_3$ et $\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{I}}_1 + v_2\hat{\mathbf{I}}_2 + v_3\hat{\mathbf{I}}_3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\mathbf{v} &\triangleq ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}|| \cos\theta \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= u^T v \end{aligned}$$

où θ est l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Le produit scalaire est *commutatif*, *associatif* et *bilinéaire*.

1.3 Produit vectoriel

Soient $\mathbf{u} = u_1\hat{\mathbf{I}}_1 + u_2\hat{\mathbf{I}}_2 + u_3\hat{\mathbf{I}}_3$ et $\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{I}}_1 + v_2\hat{\mathbf{I}}_2 + v_3\hat{\mathbf{I}}_3$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &\triangleq (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{\mathbf{I}}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\hat{\mathbf{I}}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{\mathbf{I}}_3 \\
&= [\hat{\mathbf{I}}]^T \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \\
&= [\hat{\mathbf{I}}]^T \tilde{u} v \\
&= \tilde{\mathbf{u}}.\mathbf{v}
\end{aligned}$$

où $\tilde{u} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\mathbf{u}} \triangleq [\hat{\mathbf{I}}]^T \tilde{u} [\hat{\mathbf{I}}]$. On voit que $\tilde{u}^T = -\tilde{u}$. Le produit vectoriel est *anticommutatif*, *pas associatif* et *bilinéaire*.

2 Changement de base

Pour tout changement de base de $\{\hat{\mathbf{I}}\}$ à $\{\hat{\mathbf{J}}\}$, il existe une matrice de rotation A tel que

$$[\hat{\mathbf{J}}] = A[\hat{\mathbf{I}}]$$

A est orthogonale, c'est à dire que $AA^T = E$ ou encore $A^{-1} = A^T$. On a donc

$$[\hat{\mathbf{I}}] = A^T[\hat{\mathbf{J}}]$$

Si $\{\hat{\mathbf{J}}\}$ respecte la règle de la main droite, on a aussi $\det A = 1$, on dit alors que A est orthogonale directe.
On peut passer des coordonnées d'un vecteur d'une base à l'autre aisément. Soit $\mathbf{u} = [\hat{\mathbf{J}}]^T\,{}_J u$, on a

$$\mathbf{u} = [\hat{\mathbf{J}}]^T\,{}_J u = (A[\hat{\mathbf{I}}])^T\,{}_J u = [\hat{\mathbf{I}}]^T A^T\,{}_J u$$

3 Dérivées temporelles

3.1 Dérivée première

On peut calculer la dérivée temporelle de $\mathbf{u}$ ainsi

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}} &= [\hat{\mathbf{J}}]^T\,{}_J\dot{u} + [\hat{\mathbf{J}}]^T \tilde{\omega}.\,{}_J u \\
&= \mathring{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}.\mathbf{u} \\
&= \mathring{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}
\end{aligned}$$

où $\tilde{\omega} = A\dot{A}^T$. On voit ici que, comme $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ est multiplié à $\mathbf{u} = [\hat{\mathbf{J}}]^T\,{}_J u$. Il nous faut $\tilde{\omega}$ dans la base $\{\hat{\mathbf{J}}\}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = [\hat{\mathbf{J}}]^T \tilde{\omega} [\hat{\mathbf{J}}]$ et de même donc pour ω, $\boldsymbol{\omega} = [\hat{\mathbf{J}}]^T \omega$.

Quand on a plusieurs changement de base dans un même problème, on précise pour chaque $\boldsymbol{\omega}$ à quel changement de base il correspond. Si le contexte n'avait pas été clair, j'aurais du appeler mon $\boldsymbol{\omega}$ de tout à l'heure $\boldsymbol{\omega}^{JI}$.

Cette notation nous permet d'énoncer une propriété fondamentale !

$$\boldsymbol{\omega}^{KI} = \boldsymbol{\omega}^{KJ} + \boldsymbol{\omega}^{JI}$$

Dans la pratique, il faudra parfois effectuer des changements de base. Souvent, on aime bien exprimer $\boldsymbol{\omega}$ dans la base intermédiaire (ici $\{\hat{\mathbf{J}}\}$) car ça fait moins de changement de base successif.

Exemple Si on a $\boldsymbol{\omega}^{KJ} = [\hat{\mathbf{K}}]^T{}_K\omega^{KJ}$, $\boldsymbol{\omega}^{JI} = [\hat{\mathbf{J}}]^T{}_J\omega^{JI}$ et $[\hat{\mathbf{K}}] = A[\hat{\mathbf{J}}]$, on calcule

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathbf{J}}]^T{}_J\omega^{KI} &= [\hat{\mathbf{K}}]^T{}_K\omega^{KJ} + [\hat{\mathbf{J}}]^T{}_J\omega^{JI} \\
&= [\hat{\mathbf{J}}]^T A^T{}_K\omega^{KJ} + [\hat{\mathbf{J}}]^T{}_J\omega^{JI}
\end{aligned}$$

D'où

$${}_J\omega^{KI} = A^T{}_K\omega^{KJ} + {}_J\omega^{JI}$$

3.2 Dérivée seconde

Il y a deux manière de calculer la dérivée seconde.

- Si on a calculé $\dot{\mathbf{u}}$ précédemment, il suffit de le dériver avec la formule de la dérivée première pour avoir la dérivée seconde.

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathring{\dot{\mathbf{u}}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}$$

- Directement à partir de $\mathbf{u}$ et de la formule de la dérivée seconde

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{u}} &= [\hat{\mathbf{J}}]^T{}_J\ddot{u} + 2[\hat{\mathbf{J}}]^T\tilde{\omega}.{}_J\dot{u} + [\hat{\mathbf{J}}]^T\dot{\tilde{\omega}}.{}_Ju + [\hat{\mathbf{J}}]^T\tilde{\omega}.\tilde{\omega}.{}_Ju \\
&= \overset{\circ\circ}{\mathbf{u}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}.\mathring{\mathbf{u}} + \mathring{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}.\mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}.\tilde{\boldsymbol{\omega}}.\mathbf{u} \\
&= \overset{\circ\circ}{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathring{\mathbf{u}} + \mathring{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})
\end{aligned}$$

4 Roulement sans glissement

Si on a une roue ou une boule se déplaçant sur un sol, on peut lui définir un roulement sans glissement. La condition s'énonce assez simplement. La vitesse d'un point de la roue est nulle lorsqu'elle est en contact avec le sol. Il est important qu'elle soit nulle dans toutes les directions. Il est aussi primordial de considérer la vitesse nulle selon un **repère fixe** !

Dans la pratique, le plus simple est de prendre la position d'un point de la roue par rapport à un point fixe (l'origine est un choix judicieux comme point fixe). Il faut ensuite dériver cette position en fonction du temps. L'expression qu'on obtient pour la vitesse ne doit pas spécialement être nulle pour tout t, il faut identifier les moments pour lesquels le point sera en contact avec le sol et s'assurer qu'à ce moment là la vitesse sera nulle selon toute direction.

Exemple Si on a une roue de rayon R tournant autour de $\hat{\mathbf{I}}_1$ avec une position angulaire $\theta(t)$, le sol ayant l'équation $z = -R$. On définit le repère cure-dent $\{\hat{\mathbf{J}}\}$ à la roue. Comme elle tourne autour de $\hat{\mathbf{I}}_1$ avec un angle $\theta(t)$,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{I}}_1 = \dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{J}}_1 = [\hat{\mathbf{J}}]^T \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prenons, sans perte de généralité, notre point X au bord de la roue sur l'axe formé par $\hat{\mathbf{J}}_2$ et posons C, le centre de la roue

$$\vec{OX} = \vec{OC} + R\hat{\mathbf{J}}_2 = \vec{OC} + [\hat{\mathbf{J}}]^T \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons à présent la dérivée de $\vec{OX}$ en fonction du temps

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{OX}} &= \dot{\vec{OC}} + [\hat{\mathbf{J}}]^T \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{R} \\ 0 \end{pmatrix} + [\hat{\mathbf{J}}]^T \tilde{\omega}. \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \dot{\vec{OC}} + [\hat{\mathbf{J}}]^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{J}}_1) \times (R\hat{\mathbf{J}}_2) \\
&= \dot{\vec{OC}} + \dot{\theta}(t)R(\hat{\mathbf{J}}_1 \times \hat{\mathbf{J}}_2) \\
&= \dot{\vec{OC}} + \dot{\theta}(t)R\hat{\mathbf{J}}_3
\end{aligned}$$

Nous avons ici que la vitesse est tangeantielle à la roue et vaut la vitesse angulaire fois le rayon. Ce qui est une formule évidente du mouvement rectiligne uniforme. Il est important de remarquer ici que le repère $\{\hat{\mathbf{J}}\}$ n'est **pas fixe** ! Il faudra donc d'abord l'exprimer selon $\{\hat{\mathbf{I}}\}$ avant d'imposer que la vitesse soit nulle en contact avec le sol. On a

$$[\hat{\mathbf{J}}] = A^{(1)}[\hat{\mathbf{I}}]$$

D'où ($A^{(1)}$ est dans le formulaire)

$$\hat{\mathbf{J}}_3 = -\sin\theta(t)\hat{\mathbf{I}}_2 + \cos\theta(t)\hat{\mathbf{I}}_3$$

On trouve donc enfin

$$\dot{\vec{OX}} = \dot{\vec{OC}} + \dot{\theta}(t)R(-\sin\theta(t)\hat{\mathbf{I}}_2 + \cos\theta(t)\hat{\mathbf{I}}_3)$$

Vu la position du sol choisie, X sera en contact avec le sol ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. On aura alors

$$\dot{\vec{OX}} = \dot{\vec{OC}} + \dot{\theta}(t)R\hat{\mathbf{I}}_2$$

A ce moment là, la vitesse doit être nulle, on a donc

$$\dot{\vec{OC}} = -\dot{\theta}(t)R\hat{\mathbf{I}}_2$$

Ce qui est intuitivement pas si choquant que ça.

5 Corps rigide

Un corps rigide C est un corps qui ne peut être déformé. C'est à dire que quelles que soient le point P P et la base $\{\hat{\mathbf{J}}\}$ fixé au corps C, pour tout point X du corps, les coordonnées de PX dans $\{\hat{\mathbf{J}}\}$ sont constantes. On a aussi que $\boldsymbol{\omega}^{JI}$ ne dépend pas du choix de $\{\hat{\mathbf{J}}\}$.

Tout corps C a un centre de masse unique G définit comme suit

$$\mathbf{x}^G = \frac{\int_C \mathbf{x} dm}{m(C)}$$

où $\mathbf{x}^G \triangleq \vec{OG}$ et $m(C) \triangleq \int_C dm$.

Il a la particularité que

$$\int_C \mathbf{r} dm = \int_C \dot{\mathbf{r}} dm = 0$$

où $\mathbf{r} \triangleq \vec{GX}$.

5.1 Vitesse et accélération

Soit P et X, deux points fixe sur C, on a

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{OX}} &= \dot{\vec{OP}} + \boldsymbol{\omega} \times \vec{PX} \\
\ddot{\vec{OX}} &= \ddot{\vec{OP}} + \mathring{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{PX} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \vec{PX})
\end{aligned}$$

5.2 Quantité de mouvement linéaire et angulaire

Soit $\mathbf{N}(C)$ la quantité de mouvement linéaire du corps C et $\mathbf{H}^P(C)$ la quantité de mouvement angulaire du corps C par rapport au point P. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(C) &= m(C)\vec{OG} \\
\mathbf{H}^O(C) &= \vec{OG} \times m(C)\vec{OG} + \mathbf{H}^G(C) \\
\mathbf{H}^G(C) &= \mathbf{I}^G.\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{I}^G \triangleq -\int_C \tilde{\mathbf{r}}.\tilde{\mathbf{r}}dm$, on l'appelle le tenseur d'inertie.

- Il est constant lorsqu'il est exprimé dans une base fixe au corps C
- Il est symétrique
- Il est défini semi positif
- Il existe une base $\{\hat{\mathbf{K}}\}$ telle que I_G ($\mathbf{I}^G = [\hat{\mathbf{K}}]^T I^G$) est diagonale. On appelle les $\hat{\mathbf{K}}_i$ les axes principals d'inertie.
- On peut passer d'une matrice d'intertie de G à un point fixe du corps C quelconque avec la formule suivante

  $$\mathbf{I}^P = -m(C)\tilde{\mathbf{d}}.\tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{I}^G$$

  Il est primordial que $\mathbf{I}^G$ soit par rapport au centre de masse du corps en question !
- Si $C = \cup_i \{C_i\}$,

  $$\mathbf{I}^G = \sum_i \mathbf{I}^G_{C^i}$$

  Il faut faire attention néanmoins, toutes les matrices d'inerties doivent être exprimée par rapport au même point, il faut utiliser la formule précédente pour changer de point de référence.

5.3 Forces et moments de force

La somme des moments agissant sur un corps C par rapport à un point Q est noté $\mathbf{L}^Q$. Si la somme des forces est nulle, $\mathbf{L}^Q$ ne dépend pas du choix de Q tant qu'il est solidaire au corps C. Elle est alors appelée $\mathbf{M}$.

5.4 Équation de Newton-Euler

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{N}}(C) &= \mathbf{F} \\
\dot{\mathbf{H}}^G(C) &= \mathbf{L}^G
\end{aligned}$$

La deuxième équation reste vraie si on remplace G par n'importe quel point fixe dans l'espace.