ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Session de Janvier
FSAB11

Guillaume FRANÇOIS

8 janvier 2012

Table des matières

Première partie

Organisation

0.1 Matière

Matière	Théorie	Exercices
`Mathématiques`		
Analyse		
Fondements	1.◯	2.◯
Limite et continuité	3.◯	4.◯
Polynôme de Taylor	5.◯	6.◯
Intégration	7.◯	8.◯
Suites et séries	9.◯	10.◯
Equations différentielles	11.◯	12.◯
Algèbre		
Espaces vectoriels	13.◯	14.◯
Systèmes linéaires	15.◯	16.◯
Calcul matriciel	17.◯	18.◯
Applications linéaires	19.◯	20.◯
Maths discrètes		
Ensembles	21.◯	22.◯
Dénombrement	23.◯	24.◯
Equations de réccurence	25.◯	26.◯
Graphes	27.◯	28.◯
`Physique`		
Mécanique		
Formules	29.◯	30.◯
Lois de Newton	31.◯	32.◯
Conditions d'équilibre	33.◯	34.◯
Mouvements	35.◯	36.◯
Résistance d'un fluide	37.◯	38.◯
Energie potentielle et cinétique	39.◯	40.◯
Momentum, impulsion & collisions	41.◯	42.◯
Electricité		
Electrostatique	43.◯	44.◯
Courant continu	45.◯	46.◯
Courant alternatif	47.◯	48.◯
`Infomatique`		
Révisions		
Exceptions	49.◯	50.◯
Flux	51.◯	52.◯

0.2 Calendrier

Semaine 1 :

	Lundi (19/12)	Mardi (20/12)	Mercredi (21/12)	jeudi (22/12)	Vendredi (23/12)
A.M.					17
P.M.				13 15	19 11

	Samedi (24/12)	Dimanche (25/12)
A.M.	1 3 5	54 58
P.M.	NOËL 7 9	55 56 57

Semaine 2

	Lundi (26/12)	Mardi (27/12)	Mercredi (28/12)	jeudi (29/12)	Vendredi (30/12)
A.M.	21	25	29 31 33	39 41	
P.M.	23	27	35 37	43 45 47	

	Samedi (31/12)	Dimanche (1/01)
A.M.		
P.M.	NEW YEAR	

Semaine 3 :

	Lundi (2/01)	Mardi (3/01)	Mercredi (4/01)	jeudi (5/01)	Vendredi (6/01)	Samedi (7/01)	Dimanche (8/01)
A.M.							
P.M.							

Semaine 4 :

	Lundi (9/01)	Mardi (10/01)	Mercredi (11/01)	jeudi (12/01)	Vendredi (13/01)	Samedi (14/01)	Dimanche (15/01)
A.M.							
P.M.	**PHYSIQUE** (14h-18h)			**INFO** (14h-18h)			

Semaine 5 :

	Lundi (16/01)	Mardi (17/01)	Mercredi (18/01)	jeudi (19/01)	Vendredi (20/01)
A.M.		**MATHS** (8h30-12h30)			
P.M.					**VACANCES**

Deuxième partie

Analyse

1 Fondements

1.1 Démonstrations

- ⋆ Implication
- ⋆ Contraposition
- ⋆ Equivalence
- ⋆ Contradiction (absurde)
- ⋆ Récurrence (induction)

1.2 Relations

- ⋆ Réflexive (xRx)
- ⋆ Symétrique ($xRy \Rightarrow yRx$)
- ⋆ Transitive ($xRy\ et\ yRz \Rightarrow xRz$)
- ⋆ Antisymétrique ($si\ xRy\ et\ yRx \Rightarrow x = y$)

- ⋆ Equivalence ⇒ Symétrique, réflexive, transitive
- ⋆ Ordre partiel ⇒ Antisymétrique, réflexive, transitive
- ⋆ Orde total ⇒ $\forall x, y \in A$on a xRy OU yRx

2 Limite et continuité

2.1 Limite L au point x_0

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \text{ si } |x - x_0| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

2.2 Continuité au point x_0

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \text{ si } |x - x_0| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

2.3 Dérivabilité au point x_0

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ est dérivable si } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Si $f(a) \leq y \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y \leq f(a)$ alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

2.5 Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un intervalle fermé, bornée atteint ses bornes. C'est à dire qu'il existe $q, p \in [a, b]$ tel que
$f(q) = supremum\ f$ sur $[a, b]$
et que $f(p) = infimum\ f$ sur $[a, b]$.

2.6 Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[a, b] \to \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2.7 Théorème des accroissements finis

Soit f continue sur $[a, b] \to \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2.8 Théorème de la valeur constante

Soit f continue sur $[a, b] \to \mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur $]a, b[$ et que $f'(c) = 0 \forall x \in]a, b[$. alors f est constante.

3 Polynôme de Taylor

3.1 Définition

Etant donné une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, un naturel $n \geq 1$ et un point a appartenant à *l' intérieur* de A en lequel f est n fois dérivable, le polynôme de

Taylor d'ordre n de f autour du point a est :

$$T_n^{f.a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

3.2 Théorème de Taylor

Soit une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, un point a appartenant à *l' intérieur* de A, et un naturel $n \geq 1$.
Si f est n fois dérivable en a, alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f.a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

3.3 Réciproque de Taylor

Soit une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, un point a appartenant à *l' intérieur* de A, et un naturel $n \geq 1$.
Si f est n fois dérivable en a, et si
$P_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur où égal à n, vérifiant :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

alors

$$P_n(x) = T_n^{f.a}(x)$$

3.4 Théorème du reste

Soit une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, un point appartenant à *l' intérieur* de A, un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset A$ et un naturel $n \geq 1$.
Si f est $n+1$ fois dérivable sur I, alors pour $\forall x \in I \backslash \{a\}$, il existe un point c compris strictement entre a et x tel que :

$$f(x) = T_n^{f.a}(x) + \frac{f^{n+1}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3.5 Dérivée de Taylor

$$T_n^{f.a\prime}(x) = \frac{f^{n+1}(a)(x-a)^n}{n!}$$

4 Intégration

4.1 implications

- ⋆ Si f est intégrable alors f est bornée.
- ⋆ Si f est continue alors elle est intégrable.

4.2 Théorème de la moyenne

Soit une fonction continue donc intégrable de $a, b] \to \mathbb{R}$. Alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu(f)$ c'est-à-dire :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

4.3 Théorème fondamental (1)

Soit une fonction continue sur$[a, b] \to \mathbb{R}$ et $p \in [a, b]$,
alors la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \to F(x)$
telle que

$$F(x) = \int_p^x f(t)dt$$

est une primitive de f.

4.4 Théorème fondamental (2)

Soit f continue $f : I \to \mathbb{R}$
Si F est une primitive de f sur I, alors

$$\int_p^q f(t)dt = F(q) - F(p) \qquad \text{avec } p, q \in I$$

4.5 Corollaire du théorème fondamental

Soient I et J, 2 interalles, f une fonction continue de $I \to \mathbb{R}$ et 2 fonctions $U : J \to \mathbb{R}$ et $V : J \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que $U(J) \subset I$ et $V(J) \subset I$.
La fonction $H : J \to \mathbb{R} : x \to H(x) = \int_{U(x)}^{V(x) f(t) dt}$ est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$H'(x) = f(V(x)).V'(x) - f(U(x)).U'(x)$$

5 Suites et séries

5.1 Convergence d'une série

On dit que la série $\sum a_n$ converge vers la somme S lorsque

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

Une série numérique est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est convergente.

5.2 Convergence absolue

La série $\sum a_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |a_n|$ converge.

5.3 Suites géométriques

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Où r est appelée la *raison* de la série.
Si $a = 0$,
⋆ La série converge vers 0.

Sinon,

- ⋆ Si $|r| < 1 \rightarrow$ La série converge vers $\frac{a}{1-r}$.
- ⋆ Si $r \geq 1 \rightarrow$ La série converge vers $\pm\infty$ en fonction du signe de a.
- ⋆ Si $r \leq 1 \rightarrow$ La série diverge.

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r}$$

5.4 Séries téléscopantes

Une série est dite *téléscopante* lorsque ses sommes partielles se simplifient entre elles.
On peut donc exprimer la série $\sum a_n$ comme $\sum b_n?b_{n+1}$.
Exemple à retenir :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

5.5 Série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

⋆ La série harmonique diverge.

5.6 P-séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

⋆ La série converge pour $p > 1$.
⋆ La série diverge pour $p < 1$.

5.7 Séries entières (Power series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

⋆ a_n est une suite de réels appelés coefficients de la série entière.
⋆ c est un réel appelé centre de convergence de la série.

L' ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge est un intervalle centré en $x = c$ appelé intervalle de convergence, et est égal à $]c - R, c + R[$, avec :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

5.8 Test de divergence

⋆ si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ où n'existe pas, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

5.9 Test de l'intégrale

Soit (a_n) une suite à termes positifs. On suppose que $(a_n) = f(n)$, où f est une fonction continue, positive, décroissante $\forall x > N_0$.
Alors la série $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ et $\int_{N_0}^{\infty} f(x)dx$ converge ou diverge en même temps.

5.10 Test de comparaison

Si il existe une série convergente $\sum_{n=N_0}^{\infty} b_n$, un $n_0 \in \mathbb{N}$ et un $c > 0$ tel que :
$\forall b_n \geq 0$ et $a_n \leq c.b_n$.
Alors la série $\sum a_n$ converge aussi.

5.11 Test du quotient

Calculer si elle existe,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{(n+1)}|}{|a_n|} = C$$

- ⋆ Si $C > 1$, la série diverge.
- ⋆ Si $C < 1$, la série converge.

5.12 Test de la racine

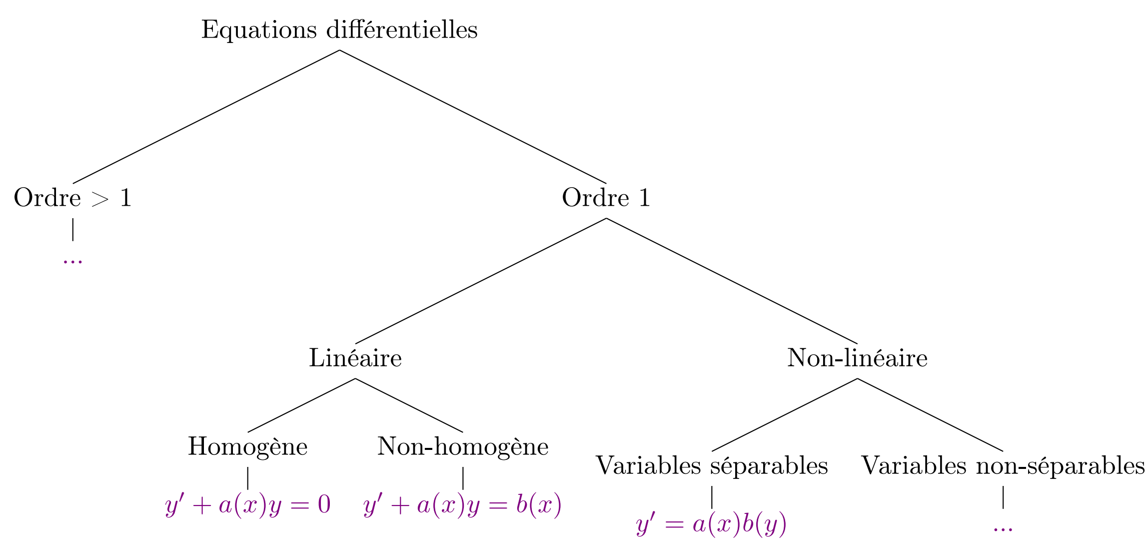
Calculer si elle existe,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = D$$

- ⋆ Si $D > 1$, la série diverge.
- ⋆ Si $D < 1$, la série converge.

6 Equations différentielles

6.1 Classification



6.2 Définition

Une équation différentielle est une équation qui a pour inconnue une *fonction* dont une ou plusieurs *dérivées* apparaissent dans l'équation.

6.3 Equation différentielle linéaire homogène de premier ordre

$$\begin{aligned}
y' + a(x)y &= 0 \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -a(x) \\
\int \frac{1}{y} dy &= -\int a(x)dx \\
\ln|y| &= -\int_k^x a(x)dx + C \\
y(x) &= -ke^{-\int a(x)dx}
\end{aligned}$$

Avec k une valeur réelle.

6.4 Equation différentielle linéaire non-homogène de premier ordre

6.4.1 Première méthode

La solution générale de ce genre d' équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (y_h) et d'une solution particulière de l'équation non-homogène (y_p).

$$y = y_h + y_p$$

Forme de $b(x)$	**Forme de** y_p
Polynôme de degré n	Polynôme de degré n si $a(x) \neq 0$ Polynôme de degré $n+1$ si $a(x) = 0$
$k_1 \cos\theta x + k_2 \sin\theta x$	$l_1 \cos\theta x + l_2 \cos\theta x$
$e^{\lambda x}P(x)$ $P(x)$ un polynôme de degré n et λ un réel ou un complexe.	$e^{\lambda x}Q(x)$ $Q(x)$ un polynôme de degré n ou $n+1$
Constante, de même que $a(x)$	B/A

6.4.2 Deuxième méthode

Résoudre l'équation homogène associée.

$$y_h = ke^{-\int a(x)dx}$$

Supposer que si k est une fonction de x, y_h est une solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$.

$$(k(x)e^{-\int a(x)dx})' + a(x)ke^{-\int a(x)dx} = b(x)$$

L'expression se simplifie alors pour donner une expression de k(x).

6.5 Equation différentielle non-linéaire de premier ordre à variables séparables

Se résous de la même manière que les équations différentielles linéaires homogènes de premier ordre.

$$\begin{aligned} y' &= a(x)b(y) \\ \frac{dy}{dx} &= a(x)b(y) \\ \int \frac{1}{b(y)}dy &= \int a(x)dx \end{aligned}$$

6.6 Problème de Cauchy

Le problème formé par l'équation différentielle et la condition initiale est appelée *Problème de Cauchy*.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Troisième partie

Algèbre

7 Espaces vectoriels

7.1 Définition

E est un espace vectoriel sur K si : $\forall x, y \in E et \forall \alpha, \beta \in K$

- ⋆ $x + y = y + x$
- ⋆ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- ⋆ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- ⋆ $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$
- ⋆ $x.1 = x$

7.2 Sous-espaces vectoriels

La partie V de l'espace vectoriel E sur un corps K est un sous espace vectoriel si, elle est une partie non vide de E stable par combinaison linéaire.

$$\forall x \in V \qquad x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n, v_n$$

7.3 Somme directe

Tout vecteur x de $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ s'écrit de manière unique comme une somme de vecteurs appartenant à $V_1, V_2, \cdots, V_n$.

7.4 SEV engendré

C' est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $v_1, v_2, \cdots, v_n$. On le note :

$$sev < v_1, v_2, \cdots, v_n >$$

7.5 Libre, Génératrice, Base

$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une

suite génératrice de E si $sev < v_1, v_2, \cdots, v_n >= E$

suite libre si$\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \cdots, \alpha_n e_n\} \Rightarrow \{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\}$

base de E si elle est à la fois libre et génératrice

Si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cette suite.

7.6 Changement de base

$$f^{(x)} = P.e^{(x)}$$

La matrice de changement de base P est régulière (possède une inverse).

7.7 Dimension

Toutes les bases d'un espace vectoriel finement engendré ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé *dimension de l'espace vectoriel*.

$$dim(V + W) = dimV + dimW + dim(V \cap W)$$

7.8 Rang d'une matrice

$A \in K^{m \times n}$

- $\star$ L(A) = SEV des lignes $\subset K^n$
- $\star$ C(A) = SEV des colonnes $\subset K^m$

Théorème :

$$dimL(\mathrm{A}) = C(\mathrm{A}) = \mathrm{rang(A)}$$

Si A = BC alors :

- $\star$ L(A) $\subset$ L(C)
- $\star$ C(A) $\subset$ C(B)

7.9 Théorème de Rouché

Ax = b admet une solution *sis* rang(A) = rang(A | b).

8 Systèmes linéaires & calcul matriciel

8.1 Linéarité

$\forall x, y \in E \alpha, \beta \in K$Si $\quad Ax = b \quad$ et $\quad Ay = c \quad$ alors

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha b + \beta c$$

8.2 Opérations élémentaires

Type I $L_i \to L_i + \lambda L_j$

Type II $L_i \leftrightarrow L_j$

Type II $L_i \to \lambda L_i \qquad (a \neq 0)$

8.3 Opérations par blocs

$$\left(\begin{array}{ccc} a_1 1 & a_1 2 & |a_1 3 \\ \hline a_2 1 & a_2 2 & |a_2 3 \\ a_3 1 & a_3 2 & |a_3 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Attention à ce que les blocs soient compatibles lors d'opérations.

8.4 Transposée

$$(a_i j)^t = (a_j i)$$

8.5 Inverse

Soit $A \in k^{m \times n}$:
Inverse à gauche : $B.A = I \Leftrightarrow rangA = n$
Inverse à droite : $A.C = I \Leftrightarrow rangA = m$
Une matrice est inversible, régulière, non-singulière si elle possède un inverse à gauche et une inverse à droite.

$$B.A = A.B = I$$

La matrice inverse est unique.

$$(A|I) \xrightarrow[lmentaires]{oprations} (I|A^{-1})$$

8.5.1 Propriétés

- ⋆ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- ⋆ $(AB)^t = B^t A^t$
- ⋆ $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- ⋆ $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
- ⋆ $det(A)0$
- ⋆ $rang(A) = n$

8.6 Déterminant

- ⋆ Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.
- ⋆ Si une matrice est *singulière* son déterminant est nul.
- ⋆

$$det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{lk} det(A_{lk})$$

8.7 Matrice des cofacteurs

$$cof(A) = ((-1)^{i+j} det(A_{i,j})_{i,j}$$
$$A^{-1} = (det(A))^{-1}.(cof(A))^{t}$$

9 Applications linéaires

9.1 Notion d ?application linéaire

Soient E et F, des espaces vectoriels sur K Une application $A : E \to F$ est dite linéaire si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\forall a, y \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Une application linéaire bijective est appelées isomorphisme.

9.2 Noyau et image

Le noyau de l'application linéaire $A : E \to F$ est un $s.e.v.$ de E tel que :

$$KerA = \{x \in E | A(x) = \vec{0}\}$$

L'espace image de A est un $s.e.v.$ de F tel que :

$$ImA = \{y \in F | \exists x \in E, A(x) = y\}$$

9.3 Propriétés (1)

- ⋆ L'ensemble des solutions pour l'équation linéaire de type $A(x) = b$ est égal à la somme d'une solution particulière et du noyau deA :

$$u + KerA = \{u + v | v \in KerA\}$$

- ⋆ A est inversible à gauche si il existe $B : F \to E$ tel que :

$$B \circ A = I_E$$

- ⋆ A est inversible à droite si il existe $B : F \to E$ tel que :

$$A \circ B = I_F$$

9.4 Propriétés (2)

Soit $A : E \to F$.

$$dimKerA + dimImA = dimE$$

A injective	A surjective
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
KerA = {0}	ImA = F
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
rang A = dim E	rang A = dim E - dim F
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
A inversible à gauche	A inversible à droite

9.5 Représentation matricielle

Une application linéaire $A : E \to F$ peut être représentée par une matrice $_f(A)_e$ dont chaque colonne est formée par l'image d'un vecteur de la base de E, exprimé dans la base de F.

Quatrième partie

Maths discrètes

10 Ensembles

10.1 Définitions

- *Equipotence* : A et B sont équipotents, noté $A \approx B$, si il existe une bijection de A vers B.

- *Ensemble fini* : Si A $\approx \{1, \cdots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
  n est le cardinal de A, noté $|A|$.

- *Ensemble infini* : A est infiniment dénombrable si $A \approx \mathbb{N}$.

10.2 *Power set*

Définition :

Pour tout ensemble non-vide A, l'ensemble $P(A)$ est *équipotents* à l'ensemble $\{0, 1\}^A$ des fonctions de A vers $\{0, 1\}^A$.

Démonstration :

A tout sous-ensemble B de A, on associe la fonction $f_B : A \to \{0, 1\}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} f_B(x) & = & 1 & \text{si } x \in B \\ f_B(x) & = & 0 & \text{si } x \in AB \end{cases}$$

La fonction f_B est appelée la fonction caractéristique de B comme sous-ensemble de A.

10.3 Principe des tiroirs

Informel :

Si m objets sont rangés dans n tiroirs et si $m > n$, alors il y au moins un tiroir qui contient plus d'un objet.

Formel :

Soient A et B, des ensembles finis non-vides tels que $|A| > |B|$. alors il n'existe pas de fonction injective de A dans B.

10.4 Principe d'induction

Conditions :

(1) $P(n_0)$ est vrai ;

(2) Avec $k \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0$, si $P(k)$ est vrai, alors $P(k+1)$ est vrai ;

Alors $P(n)$ est vrai pour tout naturel $n \geq n_0$.

10.5 Principe d'inclusion et d'exclusion

Formules :

- ⋆ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- ⋆ $|A \backslash B| \geq |A| - |B|$
- ⋆ $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

Principe :

Soit S un ensemble fini non-vide, et soient $S_1, S_2, \cdots, S_N$ des sous-ensembles de S avec $n \geq 1$. On s'intéresse au nombre d'éléments de S qui n'appartiennent à aucun des S_i, c'est-à-dire au nombre :

$$\sigma = |S| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right|$$

Généralisation :

- ⋆ $S_I = \bigcap_{i \in I} S_i$
- ⋆ $S_\emptyset = S$
- ⋆ $R_n = \{1, \cdots, n\}$

$$\sigma = \sum_{r=0}^{n} \left((-1)^r \sum_{|I|=r} |S_I| \right)$$

10.6 Règle de la somme

Si $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.

10.7 Règle du produit

$$|A \times B| = |A||B|$$

11 Dénombrement

11.1 Binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

11.2 Les fonctions

Une fonction de A vers B est un triple (A, B, R) tel que $\forall a \in A$ il existe un unique $b \in B : aRb$.

On note $B^A = \{f | f : A \to B\}$.

- ⋆ Rangement des objets de A dans les tiroirs de B.
- ⋆ Mot de longueur |A| pris dans l'alphabet B.

Soient A et B finis, $|A| = n, |B| = k$, le nombre de fonctions de A vers B est :

$$k^n$$

11.3 Injections

Une fonction est injective si et seulement si le mot qui la représente ne contient pas deux fois la même lettre.

Soient A et B finis, $|A| = n, |B| = k$,

$$In(n \leftarrow k) = [n]_k$$

11.4 Surjections

Une fonction $A \to C$ est surjective si et seulement si le mot qui la représente contient au moins une fois fois chaque lettres de de C.

Si $|A| = n, |C| = k$,

$$Sur(n \to k) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n$$

On trouve ce résultat à l'aide du principe d'inclusion et d'exclusion.

11.5 Bijections

Une fonction bijective ou bijection, est une fonction à la fois injective et surjective.
Le nombre de bijections de A vers A est $n!$.

11.6 Les dérangements

Un dérangement sur A est une bijection f sur A telle que :

$$\forall a \in A : f(a) \neq a$$

Le nombre de dérangements d'un n-ensembles est :

$$d_n = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \frac{n!}{r!}$$

11.7 Combinaisons

	Sans ordre	**Avec ordre**
Sans répétitions	$B(n,k) = \binom{n}{k} = C_n^k$ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$[n]^k = A_n^k$ $\frac{n!}{(n-k)!}$
Avec répétions	$B^*(n,k)$ $\mid \bullet \mid \bullet\bullet \mid \quad \mid \bullet \mid \bullet\bullet \mid$	n^k

11.8 Stirling

Le nombre de *k-partitions* d'un ensemble de cardinal n.

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} Sur(n \to k)$$

Récurrence :

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k)$$

11.9 Bell

Le nombre total de *partitions* d'un n-ensemble.

$$b_n = \sum_{i=0}^{i=n} S(n,i)$$

Récurrence :

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} b_i$$

11.10 Parallélisme

Pascal-Ensembles	**Stirling-Partitions**
$B(n,k) = \frac{1}{k!} In(n \leftarrow k)$	$S(n,k) = \frac{1}{k!} Sur(n \rightarrow k)$
$B(n,k) = B(n-1,k) + B(n-1,k-1)$	$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$
$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$	$\sum_{k=0}^{k=n} S(n,k) = b_n$

12 Equations de récurrence

12.1 Définition

Soit k un entier naturel. Une récurrence linéaire d'ordre k, à coefficients constants, en la suite *inconnue* $(v_n)_{n=0}^{\infty}$, est une équation de la forme :

$$a_0 v_{n+k} + a_1 v_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1} v_{n+1} + a_k v_n = b_n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

- ⋆ $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ est la suite *inconnue*.

- $a_0, \cdots, a_k$ sont des coefficients réels constants.
- $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de réels donnée.

- *Homogène* : $\forall \in \mathbb{N} : b_n = 0$
- *Affine* : cas général

12.2 Récurrences homogènes de degré 0 et 1

- *Degré 0* : $v_n = 0 \qquad \forall n$
- *Degré 1* : $v_n = v_0 \left(\frac{-a_1}{a_0}\right)^n$

12.3 Récurrences homogène de degré 2

Equation générale :

$$v_{n+2} + a_1 v_{n+1} + a_2 v_n = 0$$

Equation caractéristique :

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

12.4 Cas avec 2 racines réels distinctes

Solution générale :

$$v_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

Conditions initiales :

$$c_1 + c_2 = v_0 \qquad\qquad c_1 r_1 + c_2 r_2 = v1$$

12.5 Cas avec 2 racines très proches

Si les racines sont très proches l'une de l'autre, $r_2 = r_1(1+\delta)$, avec $|\delta| \ll 1$. La solution générale sera de la forme approchée :

$$\begin{aligned} v_n &\approx c_1 r_1^n + c_2 r_1^n (1 + n\delta) \\ &= (c_1 + c_2) r_1^n + (c_2 r_1 \delta) n r_1^{n-1} \end{aligned}$$

12.6 Cas avec 2 racines confondues

Solution générale :

$$v_n = d_0 r_1^n + d_1 n r_1^{n-1}$$

Conditions initiales :

$$d_0 = v_0 \qquad\qquad d_0 r_1 = d_1 = v_1$$

12.7 Cas avec 2 racines complexes conjuguées

Solution générale :

$$v_n = c_1 \rho^n \cos(n\theta) + c_2 \rho^n \sin(n\theta)$$

Conditions initiales :

$$c_1 = v_0 \qquad\qquad c_1 \rho \cos(\theta) + c_2 \rho \sin(\theta) = v_1$$

12.8 Certaines récurrences non homogènes

Equation générale :

$$a_0 v_{n+k} + a_1 v_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1} v_{n+1} + a_k v_n = b_n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Supposons $b_n = bs^n$. Résolution :

- ⋆ Somme d'une solution particulière et des solutions homogènes.
- ⋆ *Degré 0* : $v_n = bs^n \qquad \forall n$

12.9 Récurrences non homogènes de degré 1

Equation générale :

$$v_{n+1} - a v_n = bs^n$$

Résolution, en cherchant $v_n = cs^n$:

- ⋆ $s \neq a$

$$v_n = \frac{b}{s-a} s^n + d a^n \qquad\qquad v_0 = \frac{b}{s-a} + d$$

- ⋆ $s = a$

$$v_n = b n a^{n-1} + v_0 a^n$$

13 Graphes

13.1 Définition

Soir un N ensemble fini non vide, dont les éléments sont appelés des noeuds. Soit un R ensemble fini , dont les éléments sont appelés des arêtes. Soit I une relation entre noeuds et arêtes, c'est-à-dire un sous-ensemble de $N \times R$, appelé relation d'*incidence*, telle que e nombre de noeuds incidents à une arête soit égal à 1 ou à 2. On dit alors que le triplet (N, R, I) est un *graphe* (non orienté).

13.2 vocabulaire

- $\alpha \in \mathbb{R}$ est une boucle si $|\{i|iI\alpha\} = 1$
- $|N|$ est l'*ordre* du graphe.
- Le *degré* de n, noté $deg(n)$, est le nombre d'arêtes adjacentes au noeud n, les boucles comptant double.
- Un graphe est *simple* si il n'a ni boucle, ni noeuds reliés par des arêtes multiples.
- $\alpha = \{i, j\}$ identifie l'unique arête telle que $iI\alpha$ et $jI\alpha$

13.3 Isomorphisme

Deux graphes simples $G = (N, R)$ et $G' = (N', R')$ sont *isomorphes* si :

- Il existe une bijection $f : N \to N'$
- $\{i, j\} \in R \Leftrightarrow \{f(i), f(j)\} \in R'$

13.4 Matrice d'incidence

La matrice d'incidence M est de genre $|N| \times |R|$:

- $m_{i,\alpha} := 2 \Leftrightarrow \alpha$ est boucle sur i

- ⋆ $m_{i,\alpha} := 1 \Leftrightarrow \alpha$ est une arête ordinaire incidente à i
- ⋆ $m_{i,\alpha} := 0 \Leftrightarrow \alpha$ n'est pas incidente à i

Propriétés :

- ⋆ $\sum_{i \in N} m_{i,\alpha} = 2$
- ⋆ $\sum_{i \in N} m_{i,\alpha} = deg(i)$
- ⋆ $\sum_{i \in N} deg(i) = 2|R|$
- ⋆ Le nombre de noeuds de degré impair d'un graphe est pair

13.5 Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence A est de genre $|N| \times |N|$:

- ⋆ $a_{i,j}$:= nombre d'arêtes reliant i et j si $i \neq j$
- ⋆ $a_{i,j}$:= deux fois le nombre de boucles sur i

Propriétés :

- ⋆ $\sum_{j \in N} a_{i,j} = \sum_{j \in N} a_{i,j} = deg(i)$
- ⋆ $\sum_{(i,j) \in N^2} a_{i,j} = 2|R|$
- ⋆ $MM^t = A + D$ où D est la matrice diagonale des degrés.

13.6 Voyages dans un graphe

	Noeuds distincts	**Arêtes distinctes**
Parcours ouvert $i_0 \neq i_k$	chemin	piste ouverte
Parcours fermé	cycle	circuit (piste fermée)

Si G est un graphe simple, le nombre de parcours de longueur k entre ses noeuds i et j est donné par $(A^k)_{i,j}$.

13.7 Graphes bipartis

Le graphe simple $G = (N, R)$ est *biparti* si il existe une partition $\{N_0, N_1\}$ de N telle que

$$\{i, j\} \in R \Rightarrow i \in N_0 \; et \;\; j \in N_1 \; (ou \, i \in N_1 \; et \;\; j \in N_0)$$

Un graphe simple est biparti si et seulement si il ne possède aucun cycle de longueur impaire.

13.8 Connexité

Un graphe est *connexe* si il existe un chemin reliant toute paire de noeuds.

Soit un graphe $G = (N, R)$. On considère la partition $\{N_1, \cdots, N_m\} deNetl'ensemble\{\mathrm{R}_1, \cdots R_m\}$ des sous-ensembles R_l de R, disjoints deux à deux, qui satisfont aux deux conditions suivantes :

- ⋆ R_l est l'ensemble des arêtes incidentes aux noeuds dans N_l,
- ⋆ Le graphe $G_l := (N_l, R_l)$ est connexe,

pour $l = 1, \cdots, m$. Alors les graphes $G_1, \cdots, G_m$ sont appelés les composantes connexes du graphe G.

Si il existe $N' \subset N$ non vide tel que aucune arête ne relie un noeud de N et un noeud de $N \backslash N'$, alors G n'est pas connexe.

Test de connexité

Soient :

- ⋆ $i_0 \in N$ un noeud quelconque de $G = (N, R)$,
- ⋆ $N' = \{i_0\}$ et $R' = \emptyset$,
- ⋆ $R_{reste} = R$

Tant que $\exists \alpha \in R_{reste}$ et $i \in N'$ tels que $iI\alpha$:

- ⋆ $R_{reste} := R_{reste} \backslash \{\alpha\}, R' = R' \cup \{\alpha\}$
- ⋆ $N' := N' \cup \{j | jI\alpha\}$

G est connexe si et seulement si $N' = N$.

Corollaires

- ⋆ Si $G = (N, R)$ est connexe alors $|R| \geq |N| - 1$
- ⋆ Si $G = (N, R)$ est connexe alors $|R| = |N| - 1$ si et seulement si G est sans cycle

13.9 Arbres

- ⋆ G est connexe et sans cycle
- ⋆ G est connexe et $|R| = |N| - 1$
- ⋆ G est sans cycle et $|R| = |N| - 1$
- ⋆ G est sans cycle et lui ajouter une arête crée un t un seul cycle
- ⋆ G est connexe et supprimer une arête quelconque le déconnecte
- ⋆ Deux noeuds distincts de G sont reliés par un et un seul chemin

13.10 Arbres sous-tendants

L'arbre $G' = (N', R')$ est un arbre sous-tendant $G = (N, R)$ si $N = N'$ et $R' \subseteq R$.

⋆ G est connexe ⇔ G possède un arbre sous-tendant.

13.11 Arbres sous-tendants de poids minimum

Soient :

- ⋆ $c : R \to \mathbb{R}$ associant un poids à chaque arête.
- ⋆ $c(G) := \sum_{r \in R} c(r)$ est le poids du graphe G.

A est un *arbre sous-tendant de poids minimum* de G si et seulement si A sous-tend G et tout arbre A' sous-tendant G est tel que $c(A) \leq c(A')$.

Kruskal

Soit pour un graphe connexe $G = (N, R)$:

- $R_{ord} := trier(R)$,
- $R' := \emptyset$.

Tant que $|R'| < |N| - 1$:

- $\alpha = Premier(R_ord)$;
- $R_ord = R_ord \backslash \{\alpha\}$;
- Si $(N, R' \cup \{\alpha\})$ est sans cycle, alors $R' = R' \cup \{\alpha\}$.

(N, R') est un arbre sous-tendant de poids minimum de (N, R).

13.12 Euler

- Une *piste eulérienne* est une piste qui passe par toutes les arêtes du graphe.
- Un grahe connexe G est eulérien $\Leftrightarrow$ Tous les noeuds de G sont de degré pair.
- Le graphe G possède une piste eulérienne G est connexe, et contient au maximum deux noeuds de degré impair.

13.13 Hamilton

- un graphe simple possède un *chemin hamiltonien* si il possède un chemin passant par chacun de ses noeuds.
- Un graphe simple possède un *cycle hamiltonien* si il possède un cycle passant par chacun de ses noeuds.
  Un *graphe hamiltonien* est un graphe simple possédant un cycle hamiltonien.

13.14 Voyages complets dans un graphe

	Par tous les Noeuds une et une seule fois	**Par toutes les arêtes une et une seule fois**
Parcours ouvert $i_0 \neq i_k$	chemin hamiltonien	piste eulérienne
Parcours fermé	cycle hamiltonien graphe hamiltonien	circuit eulérien graphe eulérien

Cinquième partie

Mécanique

14 Vecteurs

14.1 Décomposition des vecteurs

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}$$

14.2 Produit scalaire

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = |A||B|\cos\theta$$
$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

14.3 Produit vectoriel

$$C = A \times B = AB\sin\theta$$

$C_x = A_yB_z - A_zB_y$ $\quad$ $C_y = A_zB_x - A_xB_z$ $\quad$ $C_z = A_xB_y - A_yB_x$

On à grâce à la méthode du *pouce* retrouver le produit des composantes :

$$\begin{array}{rcl} \hat{i} \times \hat{j} & = & \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} & = & \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} & = & \hat{j} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{A}_x & \mathrm{A}_y & \mathrm{A}_z \\ \mathrm{B}_x & \mathrm{B}_y & \mathrm{B}_z \end{vmatrix}$$

15 Lois de Newton

15.1 Loi d'inertie

Si la somme des forces agissant sur un corps est nulle, alors il ne subit aucune accélération et se déplacement à vitesse constante.

$$\sum \vec{F} = 0$$

15.2 Loi du mouvement

Soit un corps de masse m : l'accélération subie par ce corps est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

15.3 Principe d'action-réaction

Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par ce corps B.

$$\vec{F}_{AsurB} = -\vec{F}_{BsurA}$$

16 Conditions d'équilibre

16.1 Conditions

- ⋆ La somme des forces est nulle.

$$\sum \vec{F} = 0$$

- ⋆ La somme des moments en un point A est nulle.

$$\sum \vec{\tau_A} = 0$$

17 Mouvements

17.0.1 Mouvement rectiligne uniforme (MRU/MRUA)

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$
$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{at^2}{2}$$

17.1 Trajectoire d'un projectile

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t$$
$$y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v_x = v_0 \cos \alpha_0$$
$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt$$

17.2 Mouvement circulaire uniforme (MCU)

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}$$
$$T = \frac{2\pi R}{v}$$
$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$
$$a_{tan} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$
$$F_{net} = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R}$$

17.3 Vitesse en courbe

Sur un sol plat :

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s g R}$$

En virage incliné sans forces de frottements :

$$v_{max} = \sqrt{Rg \tan \beta}$$

En virage incliné avec forces de frottements :

$$v_{max} = \sqrt{Rg\left(\frac{\sin\beta + \mu_s \cos\beta}{\sin\beta - \mu_s \cos\beta}\right)}$$

$$\mu_s = \frac{v^2 \cos\beta - Rg \sin\beta}{v^2 \sin\beta + Rg \cos\beta}$$

17.4 Vitesse relative

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

18 Résistance des fluides et vitesse terminale

18.1 A petite vitesse

$$F_f = kv$$
$$v_t = \frac{mg}{k}$$

18.2 A grande vitesse

$$F_f = Dv^2$$
$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}}$$

19 Energie potentielle et cinétique

19.1 Travail

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} d\vec{l}$$

19.2 Energie

$$K_{cinétique} = \frac{mv^2}{2}$$
$$U_{potentielle\ gravitationnelle} = mgy$$
$$U_{potentielle\ élastique} = \frac{1}{2}kx^2$$

K et U sont définis à une constante près.

19.3 Forces conservatrices

Lorsqu'il n'y aucune perte d'énergie.

$$E = K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = cste$$

19.4 Forces non-conservatrices

Lorsque des forces extérieurs agissent sur le corps.

$$K_1 + U_1 + W_{ext} = K_2 + U_2$$

$$W_{ext} = (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = F(x_2 - x_1)$$

19.5 Energie potentielle élastique

$$F_{ressort} = kx$$

$$U_{élastique} = \frac{kx^2}{2}$$

k dépend de l'élasticité.

20 Gravitation

20.1 Force d'attraction d'un corps

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$$

Le poids d'un corps est la somme des forces gravitationnelles exercées sur celui-ci par tous les autres corps de l'univers.

$$W_{grav} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$$

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

20.2 Satellite en orbite circulaire

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v_{orbitale} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

20.3 Vitesse de libération

$$E_{totale} = E_{potentielle} + E_{cinétique} \Leftrightarrow 0 = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{GMm}{r} = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow v_{libération} \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$$v_{libération} \geq \sqrt{2}v_{orbitale}$$

21 Momentum

21.1 Définition par la deuxième loi de Newton

On peut définir le *momentum* comme étant la quantité de mouvement d'un corps.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt}dt = \int_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} d\vec{p} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$$

21.2 Momentum et énergie cinétique

⋆ L'énergie cinétique correspond au travail total effectué sur un corps pour accélérer celui-ci de l'état d'équilibre à sa vitesse actuelle.

⋆ Le momentum équivaut à l'impulsion pour accélérer un corps de l'état d'équilibre à sa vitesse présente.

21.2.1 Conservation de la quantité de mouvement

Si la somme des forces extérieurs est nulle, alors la quantité totale de mouvement du système est contante.

$$\vec{P} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + ...$$

22 Collisions

22.1 Types de collisions

- ⋆ *Collision élastique* : Les forces en les corps sont conservatrices et l'énergie totale du système reste la même avant et après la collision.
- ⋆ *Collision inélastique* : L'énergie totale du système est moindre après la collision.
- ⋆ *Collision totalement inélastique* : Après la collision, les deux corps *collent* ensemble pour ne former qu'un.

22.2 Collisions complètement inélastiques

Considérons un corps A en mouvement et un corps B au repos.

$$m_A v_{A1} + m_B \vec{v_{B1}} = (m_A + m_B)\vec{v_2}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{2x} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

22.3 Collisions élastiques

Considérons un corps A en mouvement et un corps B au repos.

$$m_A v_{A1x} = m_A \vec{v_2}x + m_B \vec{v_{B2x}} \qquad \& \qquad \frac{m_A v_{A1x}^2}{2} = \frac{m_A v_{A2x}^2}{2} + \frac{m_B v_{B2x}^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x} \qquad v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

23 Mouvement périodique

23.1 Formules

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

- ⋆ A : l'amplitude du mouvement.
- ⋆ ω : La vitesse angulaire donnée par

$$\omega = \frac{V}{R}$$

- ⋆ ϕ :le déphasage du mouvement.

23.2 Fréquence, période et vitesse angulaire

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

23.3 Oscillation d'un ressort

Soit :

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt} = -kx$$

En résolvant l'équation différentielle on trouve :

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

On peut ensuite trouver ω en injectant la solution dans l'équation :

$$\begin{array}{rcl} m(A\sin(\omega t))'' & = & -kA\sin(\omega t) \\ -mA\omega^2\sin(\omega t) & = & -kA\sin(\omega t) \\ m\omega^2 & = & k \end{array}$$

On trouve alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

23.4 Pendule simple

Soit :

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt} = m\frac{Ld^2\theta}{dt} = -mg\sin(\theta)$$

Pour des angles de faible amplitude on va pouvoir considérer :

$$\sin(\theta) \cong \theta$$

On a obtient donc :

$$\frac{Ld^2\theta}{dt} = -g\theta$$

En résolvant l'équation différentielle on trouve :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$$

On peut ensuite trouver ω en injectant la solution dans l'équation :

$$\begin{array}{rcl} L(\theta_0 \sin(\omega t))'' & = & -g\theta(t) \\ -L\theta_0\omega^2 \sin(\omega t) & = & -g\theta_0 \sin(\omega t) \\ L\omega^2 & = & g \end{array}$$

On trouve alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Similitude avec le ressort :

$$F_\theta = -mg\sin\theta \cong -mg\theta = -mg\frac{x}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

23.5 Energie dans un mouvement harmonique

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = cste$$

Sixième partie

Electricité

24 Electrostatique

24.1 Loi de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$K \cong 9.10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

24.2 Champs électriques

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{Q}$$

Champ d'un point de charge :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Champ à l'extérieur d'une sphère :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Champ à l'intérieur d'une sphère :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$

Champ d'une plaque infinie :

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Champ entre deux plaques :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

24.3 Dipôles

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{E} = pE\sin\phi$$

24.4 Flux électrique (Gauss)

$$\Phi_E = \oint E \cos\phi dA = \oint E_\perp dA = \oint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0}$$

Pour les conducteurs :

$$E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

24.5 Energie électrique

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -\delta U = \int_a^b F dr$$

$$\int_a^b F dr = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq_0}{r^2}dr = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

24.6 Potentiel électrique

$$V = \frac{U}{Q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{l} = \int_a^b E\cos\phi dl$$

24.7 Capacités et diélectriques

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2}$$

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad K = \frac{V_0}{V} \qquad K\epsilon_0 = \epsilon$$

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon E^2}{2} \qquad \oint K\overrightarrow{E}.d\overrightarrow{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0}$$

25 Courant continu

25.1 Courant électrique (DC)

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad \rho = \frac{E}{J} \qquad q(t) = \int_{t_0}^{t} i(t)dt + qt_0$$

25.2 Résistance et résistivité

$$R = \frac{\rho L}{A} \qquad V = IR$$

25.3 Force électromotrice et puissance

$$P = VI = I^2 R$$

$$V_{ab} = \varepsilon - IR_{interne} \qquad w = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$$

25.4 Lois de Kirchoff's

$$\sum I = 0 \qquad \sum V = 0$$

25.5 Capacités & Inductances

Capacité	**Inductance**
$I(t) = \frac{CdV}{dt}$	$V(t) = \frac{LdI}{dt}$
$\tau = RC$	$\tau = \frac{L}{R}$
$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$	$U = \frac{LI^2}{2}$

25.6 Circuit R-L-C

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{Q_{max}^2}{2C}$$

$$I = \pm\sqrt{\frac{Q_{max}^2 - q^2}{LC}}$$

$$w = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad w' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4C^2}}$$

26 Courant alternatif

26.1 Courant électrique (AC)

$$i = I\cos\omega t \qquad v = V\cos(\omega t + \phi)$$

$$X(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$$

26.2 Valeurs efficaces

$$I_{eff} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad V_{eff} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad P_{eff} = V_{eff}I_{eff}\cos\theta$$

26.3 Capacités & Inductances

Capacité	**Inductance**
$I_C = \frac{CdV}{dt}$	$V_L = \frac{LdI}{dt}$
$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \frac{I_0 \sin \omega t}{\omega}$	
$V_C = \frac{I_0 \sin \omega t}{\omega C}$	$V_L = -L\omega I_0 \sin \omega t$
$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$X_L = L\omega$

26.4 Circuit R-L-C

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

26.5 Transformateur

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad\qquad V_1 I_1 = V_2 I_2$$