Mathematique Q2

Benoit Legat Nicolas Cognaux

February 11, 2012

1 Espaces euclidiens

Definition 1.1 (Espace euclidien) *Un espace euclidien E est un espace vectoriel réel muni d'une fonction $(-|-) : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est*

Bilineaire $\forall x, y, z \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\alpha x + \beta y|z) &= \alpha(x|z) + \beta(y|z) \\ (x|\alpha y + \beta z) &= \alpha(x|y) + \beta(x|z) \end{aligned}$$

Symetrique $\forall x, y \in E$
$$(x|y) = (y|x)$$

Defini positif $\forall x \in E \setminus \{0\}$
$$(x|x) > 0$$

C'est le produit scalaire.

Notation 1.2 *Soient E un espace euclidien, $V \subseteq E$ et $x, y \in E$.*

$$\begin{aligned} ||x|| &\triangleq \sqrt{(x|x)} \\ \mathrm{dist}(x, y) &\triangleq ||x - y|| \\ x \perp y &\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (x|y) = 0 \\ V^\perp &\triangleq \{z \in E | z \perp v, \forall v \in V\} \end{aligned}$$

Propriete 1.3 *Soient E un espace euclidien, $V \subseteq E$ et $x, y \in E$.*

- $||x|| \geq 0 \wedge dist(x, y) \geq 0$
- $(x \neq 0 \Rightarrow ||x|| > 0) \wedge (x \neq y \Rightarrow \mathrm{dist}(x, y) > 0)$
- $||\alpha x|| = \alpha ||x||$
- $|(x|y)| \leq ||x|| \times ||y||$ *(Inegalite de Cauchy)*

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Inegalite triangulaire)*
- $V \cap V^{\perp} \subseteq \{0\}$ *avec egalite* $\iff 0 \in V$
- $E^{\perp} = \{0\} \wedge \{0\}^{\perp} = E$
- $V^{\perp}$ *est un sev de* E

Definition 1.4 *Soient E un espace euclidien, V un sev de E et $x \in E$. La projection orthogonale de x sur V est un vecteur $P_V(x)$ tel que*

1. $P_V(x) \in V$
2. $x - P_V(x) \in V^{\perp}$

Propriete 1.5 *Soient E un espace euclidien, V un sev de E et $x \in E$.*

- *$P_V(x)$ existe et est unique.*
- $y \neq P_V(x) \Rightarrow \mathrm{dist}(x, P_V(x)) < \mathrm{dist}(x, y)$.
- *$P_V : E \to E$ est une application lineaire.*
- $\mathrm{Ker} P_V = V^{\perp} \wedge \mathrm{Im} P_V = V$.

1.1 Existence de la projection hortogonale

Definition 1.6 *Soient E un espace euclidien et $x_1, x_2, ..., x_n \in E$,*

1. *La famille $x_1, x_2, ..., x_n$ est ume famille orthogonale si*
   - $x_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$
   - $(x_i | x_j) = 0, \forall i \neq j$
2. *La famille $x_1, x_2, ..., x_n$ est une famille orthonormée si*
   - $||x_i|| = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$
   - $(x_i | x_j) = 0, \forall i \neq j$

Propriete 1.7 *Soient E un espace euclidien, et $u_1, \ldots, u_n$ une base orthonormee de V. $\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$,*

$$(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n | \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n) = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n$$

Propriete 1.8 *Soient E un espace euclidien, V un sous-espace vectoriel de E, $u_1, u_2, ..., u_n$ une base orthonormée de V. $\forall x \in E, P_V(x)$ existe et: $P_V(x) = (x|u_1)u_1 + (x|u_2)u_2 + \ldots + (x|u_n)u_n$ Commentaires:*

- *Si on a une base orthonormée, alors $P_v(x)$ existe, maintenant, a-t-on une base orthonormée ? (A prouver)*

- *L'hypothèse (base: $u_1, u_2, ..., u_n$) doit être une base de V, E est de dimension trop importante.*

Propriete 1.9

- *Une famille orthonormée est une famille orthogonale.*
- *Une famille orthogonale est une famille libre.*

Propriete 1.10 *Soient E un espace euclidien, V un sev de E de dimension finie tel que $V \neq 0$. V admet une base orthonormee.*

Propriete 1.11 *Soient E un espace euclidien, V un sev de E et $u_1, \ldots, u_n$ une base orthonormee de V*

- $\forall x \in E, \exists! P_V(x)$ *et* $P_V(x) = (x|u_1)u_1 + \ldots + (x|u_n)u_n$.
- $E = V + V^{\perp}$ *et cette somme est une somme directe.*
- $\dim E = \dim V + \dim V^{\perp}$.