Mathematique

Benoit Legat

February 3, 2012

1 Espaces euclidiens

Definition 1.1 (Espace euclidien) *Un espace euclidien E est un espace vectoriel reel muni d'une fonction $(-|-) : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est*

Bilineaire $\forall x, y, z \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\alpha x + \beta y|z) &= \alpha(x|z) + \beta(y|z) \\ (x|\alpha y + \beta z) &= \alpha(x|y) + \beta(x|z) \end{aligned}$$

Symetrique $\forall x, y \in E$

$$(x|y) = (y|x)$$

Defini positif $\forall x \in E \setminus \{0\}$

$$(x|x) > 0$$

C'est le produit scalaire.

Notation 1.2 *Soient E un espace euclidien, $V \subseteq E$ et $x, y \in E$.*

$$\begin{aligned} ||x|| &\triangleq \sqrt{(x|x)} \\ \text{dist}(x, y) &\triangleq ||x - y|| \\ x \perp y &\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (x|y) = 0 \\ V^\perp &\triangleq \{z \in E | z \perp v, \forall v \in V\} \end{aligned}$$

Propriete 1.3 *Soient E un espace euclidien, $V \subseteq E$ et $x, y \in E$.*

- $||x|| \geq 0 \wedge dist(x, y) \geq 0$
- $(x \neq 0 \Rightarrow ||x|| > 0) \wedge (x \neq y \Rightarrow \text{dist}(x, y) > 0)$
- $||\alpha x|| = \alpha ||x||$
- $|(x|y)| \leq ||x|| \times ||y||$ *(Inegalite de Cauchy)*

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Inegalite triangulaire)*
- $V \cap V^{\perp} = \{0\}$
- $E^{\perp} = \{0\} \wedge \{0\}^{\perp} = E$
- $V^{\perp}$ *est un sev de* E

Definition 1.4 *Soient* E *un espace euclidien,* V *un sev de* E *et* $x \in E$*. La projection orthogonale de* x *sur* V *est un vecteur* $P_V(x)$ *tel que*

1. $P_V(x) \in V$
2. $x - P_V(x) \in V^{\perp}$

Propriete 1.5 *Soient* E *un espace euclidien,* V *un sev de* E *et* $x \in E$*.*

- $P_V(x)$ *existe et est unique.*
- $y \neq P_V(x) \Rightarrow \mathrm{dist}(x, P_V(x)) < \mathrm{dist}(x, y)$.
- $P_V : E \to E$ *est une application lineaire.*
- $\mathrm{Ker} P_V = V^{\perp} \wedge \mathrm{Im} P_V = V$.