LINGI1101

Logique et Structures Discrètes

Solutions des TP par les étudiants

Titulaire : Peter Van Roy

Auteurs : Adrien Ballet, Basile Cassiers, Maxime Dimidschstein, Samuel Monroe, Nicolas Vanvyve

2016-2017

Table des matières

TP 1 6

TP 2 13

TP 3 21

TP 4 27

TP 5 29

TP 6 34

TP 7 37

TP 8 40

TP 9 44

TP 10 49

TP 11 56

TODO

Indiquez ici quels TPs vous comptez faire. Il s'agit de faire ça rapidement et efficacement, donc si vous voyez que certains bûchent déjà sur un TP, indiquez plutôt votre nom sur un des suivants, et faites alors celui-là.

Voici les balises proposées : `[TO DO]`, `[EN COURS]`, `[DONE]`, `[HELP]` (quand vous êtes arrivé au bout de ce que vous savez faire et qu'il vous faut de l'aide pour finir le TP). Ajustez-les en conséquence, et unissons nos forces pour qu'il n'y ait plus que des `[DONE]` le plus vite possible !

TP	**Contributeur(s)**	**Statut**	**Ex. Restants**
1	Max Dimi, Samuel Monroe	`DONE`	
2	Adrien Ballet, Max Dimi	`DONE`	
3	Leak	`DONE`	
4	Max Dimi, Samuel Monroe, Adrien Ballet	`EN COURS`	4 + Fin 3
5	Base, Sébastien Mottet, Grâce M.	`DONE`	
6	Maxime de Streel, Max Dimi	`EN COURS`	3 à 5 + Fin 1
7	Nicolas Vanvyve, Max Dimi	`EN COURS`	5 à 8
8	Max Dimi	`HELP`	6 + Fin 1
9	Nicolas Vanvyve	`DONE`	
10	Max Dimi	`HELP`	Fin 9
11	Max Dimi	`DONE`	

TEMPLATE

Le syllabus peut être trouvé à l'adresse `https://github.com/petervanroy/lingi1101`. C'est de là que proviennent la majorité des templates utilisés dans ce solutionnaire, inspirez-vous en.
Lorsque vous trouvez une nouvelle structure qui n'a pas encore été employée dans ce rapport, tapez-en un exemple ici dans une section, en plus de la mettre dans votre partie. (Et faites en sorte que ça compile !) Comme ça les prochains pourront également s'en servir sans devoir fouiller partout.
Cette partie ne sera pas inclue dans le rapport final, elle sert uniquement lors de sa rédaction.

Quantificateurs et symboles

- **Et logique** : $\wedge$
- **Ou logique** : $\vee$
- **Négation** : $\neg$
- **Pour tout** : $\forall$
- **Il existe** : $\exists$
- **Implication** : $\Rightarrow$
- **Si et seulement si** : $\Leftrightarrow$
- **Tautologie** : $\models$
- **Conséquence logique** : $\Rrightarrow$
- **Équivalence logique** : $\Longleftrightarrow$

Règle - cas - résultat

1. Règle : $\forall\ x,\ sac(x) \Rightarrow blanc(x)$
2. Cas : $sac(a),\ sac(b),\ \cdots$

---

3. Résultat : $blanc(a),\ blanc(b),\ \cdots$

Table de vérité

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \vee \neg Q)$	$P \wedge Q$	$(\neg P \vee \neg Q)$
F	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F

Règle BNF

<identificateur>	: :=	$A \mid B \mid C \mid D \mid \ldots$
<proposition>	: :=	true
	|	false
	|	<identificateur>
	|	(<proposition>)
	|	¬<proposition>
	|	<proposition> ∧ <proposition>
	|	<proposition> ∨ <proposition>
	|	<proposition> ⇒ <proposition>
	|	<proposition> ⇔ <proposition>

Pseudocode

while $false \notin S$ *et* $\exists$ *? clauses résolvables non résolues* **do**
- choisir $C_1, C_2 \in S$ tel que $\exists P \in C_1, \neg P \in C_2$
- calculer r :=$C_1 - \{P\} \vee C_2 - \{\neg P\}$
- calculer S := $S \cup \{r\}$

end
if $false \in S$ **then**
| C est prouvé
else
| C n'est pas prouvé
end

Exemple de résolution

C_1 : P ∨ Q
C_2 : P ∨ R
C_3 : ¬Q ∨ ¬R
C : P $\{C_1, C_2, C_3, \neg C\}$

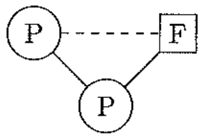
Quelques pas de résolution :

C_1 + ¬C → Q (C_5)
C_2 + ¬C → R (C_6)
C_3 + C_5 → ¬R (C_7)
C_6 + C_7 → false (∈ S donc C est prouvé)

Preuve

1. A⇒B	prémisse
2. C⇒D	prémisse
3. B∨D ⇒E	prémisse
4. ¬E	prémisse
5. A	hypothèse
6. B	modus ponens (1)
7. B∨D	addition (6)
8. E	modus ponens (7)
9. ¬A	preuve indirecte
10. C	hypothèse
11. D	modus ponens (2)
12. D∨B	addition (11)
13. B∨D	commutativité (12)
14. E	modus ponens (9)
15. ¬C	preuve indirecte
16. ¬A ∧ ¬C	conjonction (9,15)

Tracer des graphes avec Tikz



TP 1

Exercice 1

Expliquez ce qu'est une interprétation et un modèle en logique propositionnelle.

Interprétation c'est une fonction $Val_I : Ep \rightarrow \{true, false\}$ rien de plus

Solution

— L'**interprétation** en logique propositionnelle est une façon de définir si une proposition est vraie ou fausse.
Si Ep est l'ensemble des propositions premières, alors une interprétation I définit la fonction :

$$val_I(Ep) \rightarrow \{true, false\}$$

qui permet de savoir si ces propositions sont vraies ou fausses.

— A partir de la définition de l'interprétation, soit $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ un ensemble de propositions logiques.
Une interprétation I est un **modèle** de B si et seulement si :

$$\forall b_i \in B.VAL_I(b_i) = True$$

$\rightarrow$ I décrit un univers qui respecte toutes les règles se trouvant dans l'ensemble B.

modèle c'est une interp tel que $VAL_I(p) = true$

Exercice 2

Si je vous dis : *s'il fait beau alors je vais faire du vélo*, dans quelles situations je suis un menteur ?

		Menteur ?
Il a fait beau	J'ai fait du vélo	
Il a fait beau	Je n'ai pas fait du vélo	
Il n'as pas fait beau	J'ai fait du vélo	
Il n'as pas fait beau	Je n'ai pas fait du vélo	

Comparez ceci avec la table de vérité de $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Solution

Posons tout d'abord les propositions suivantes :

— A : Il a fait beau
— B : J'ai fait du vélo
— M : Je suis un menteur

A	B	M
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

Exercice 3

Enlevez les parenthèses non nécessaires dans les formules suivantes :

1. $(P \vee (\neg Q)) \Rightarrow R$
2. $(\neg P) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$
3. $((\neg P) \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R$
4. $P \wedge (Q \vee R)$
5. $(Q \wedge P) \vee R$

Solution

Ordre de priorité : $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$. En cas d'égalité : le connecteur de gauche est prioritaire, sauf dans le cas de $\Rightarrow$. (Donc $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ est équivalent à $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.)

1. $P \vee \neg Q \Rightarrow R$
2. $\neg P \Leftrightarrow Q \Rightarrow R$
3. $(\neg P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R$
4. $P \wedge (Q \vee R)$
5. $P \wedge Q \vee R$

Exercice 4

Ajoutez des parenthèses dans les formules suivantes, de façon à pouvoir les lire sans tenir compte des règles de précédance des connecteurs logiques :

1. $\neg P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg R$
2. $\neg P \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $P \Rightarrow Q \vee (R \wedge \neg S)$
4. $P \wedge (Q \vee R \Rightarrow S) \vee T \Leftrightarrow U$

Solution

1. $((\neg P) \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (\neg R)$
2. $(\neg P) \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $P \Rightarrow (Q \vee (R \wedge (\neg S)))$
4. $((P \wedge ((Q \vee R) \Rightarrow S)) \vee T) \Leftrightarrow U$

Exercice 5

Combien de lignes y a-t-il dans la table de vérité d'une proposition avec n propositions primaires ?

Solution

Une proposition primaire peut être soit vraie, soit fausse. Chacune des n propositions peut donc prendre 2 valeurs différentes. Il y a 2^n combinaisons différentes de ces valeurs, et donc autant de lignes dans la table de vérité.

Exercice 6

Écrivez la table de vérité des formules suivantes :

1. $\neg(P \vee Q)$
2. $\neg(P \wedge Q)$
3. $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
4. $P \vee (Q \wedge R) \Rightarrow (P \wedge Q) \vee R$

Solution

1)

P	Q	$\neg$	$(P \vee Q)$
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

2)

P	Q	$\neg$	$(P \wedge Q)$
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	F

3)

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\wedge$	$\neg$	$(P \wedge Q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F
F	T	T	T	T	F
F	F	F	F	T	F

4)

P	Q	R	P	$\vee$	$(Q \wedge R)$	$\Rightarrow$	$(P \wedge Q)$	$\vee$	R
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F

Exercice 7

Quel est la différence entre l'utilisation de p et P (majuscule vs minuscule) ?

Solution

Une majuscule représente une proposition première, tandis que les minuscules sont utilisées pour construire les phrases propositionnelles.

Exercice 8

Pour chacune des propositions suivantes, dites si c'est une *tautologie*, une *contradiction* ou une *proposition contingente* sans construire leur tables de vérité.

1. $P \Rightarrow P$
2. $P \wedge \neg P$
3. $P \wedge (Q \vee P)$
4. $P \wedge \neg(Q \Rightarrow P)$
5. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
6. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
7. $P \wedge Q \wedge \neg Q$
8. $P \vee Q \wedge \neg Q$
9. $P \vee Q \vee \neg Q$
10. $P \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q)$

Solution

Une tautologie est toujours vraie, une contradiction toujours fausse et une contingence est tantôt vraie, tantôt fausse.

1. Tautologie
2. Contradiction
3. Contingence
4. Contradiction
5. Tautologie
6. Tautologie
7. Contradiction
8. Contingence
9. Tautologie
10. Contingence

Exercice 9

Pour chacune des formules suivantes, écrivez une formule équivalente en utilisant uniquement les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.

1. $p \Rightarrow q$
2. $p \Leftrightarrow q$

Solution

1. $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$
2. $p \Leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Exercice 10

Pour chacune des formules suivantes, écrivez une formule équivalente en utilisant uniquement les connecteurs logiques $\wedge$, et $\neg$.

1. $p \vee q$
2. $p \Rightarrow q$
3. $p \Leftrightarrow q$

Solution

1. $p \vee q \Longleftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
2. $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \neg p \vee q \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
3. $p \Leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Longleftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$

Exercice 11

Expliquez la différence entre $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ et $\Rrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, respectivement.

Solution

On emploie la conséquence logique $p \Rrightarrow q$ lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est une tautologie. De même, on utilise l'équivalence logique $p \Longleftrightarrow q$ lorsque l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est une tautologie.

Exercice 12

Pour chacune des formules suivantes, comptez combien de modèles elle possède.

1. $(A \wedge B \wedge \neg C) \Rightarrow ((D \vee E) \Rightarrow \neg B)$
2. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D) \Rightarrow E$
3. $(A \wedge B \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow (D \Rightarrow \neg(E \vee F))$

Solution

Un une

Le modèle est l'interprétation qui rend vraie la proposition, il faut donc ici compter le nombre de "combinaisons" qui donnent True.

1) $(A \wedge B \wedge \neg C) \Rightarrow ((D \vee E) \Rightarrow \neg B)$

Posons tout d'abord les propositions suivantes pour simplifier les notations :

— $p : A \wedge \neg C$
— $q : B$
— $r : D \vee E$

p	q	r	$p \wedge q$	$\Rightarrow$	$(r \Rightarrow \neg q)$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T

On voit donc que la proposition n'est fausse que dans le cas où $(A \wedge B \wedge \neg C)$ et $(D \vee E)$ sont vraies. Cela correspond à 3 combinaisons possibles (soit D, soit E, soit les deux sont vrais).
Puisque l'on a un total de 5 propositions primaires, on a $2^5 = 32$ combinaisons possibles. On a donc $32 - 3 = 29$ cas où la proposition est vraie, et donc **29** modèles.

X

21 modèles

2) $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D) \Rightarrow E$

$A \Rightarrow B$ $\boxed{3}$

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ $\boxed{5}$

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D$ $\boxed{11}$

$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D) \Rightarrow E$ $\boxed{21}$

Cette proposition n'est fausse que lorsque E est fausse alors que $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D)$ est vraie. C'est à dire dans tous les cas où E est fausse, sauf lorsque D est fausse alors que $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$ est vraie. C'est à dire dans tous les cas où D est fausse, sauf lorsque C est fausse alors que $(A \Rightarrow B)$ est vraie. C'est à dire dans tous les cas où C est fausse, sauf lorsque B est fausse alors que A est vraie.
On constate dès lors qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour que la proposition soit fausse. Puisqu'on a 5 propositions primaires, à nouveau on a 32 combinaisons possibles. Seule 1 de ces combinaisons n'est pas valable, et donc on a **31** modèles.

3) $(A \wedge B \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow (D \Rightarrow \neg(E \vee F))$

Posons tout d'abord les propositions suivantes pour simplifier les notations :
— $p : A \wedge B \Rightarrow \neg C$
— $q : D \Rightarrow \neg(E \vee F)$
On sait que $p \Leftrightarrow q$ est vraie si p et q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.
p est fausse uniquement lorsque $\neg C$ est fausse alors que $(A \wedge B)$ est vraie, c'est à dire dans un seul cas. p est donc vraie dans $2^3 - 1 = 7$ cas.
q est fausse uniquement lorsque $\neg(E \vee F)$ est fausse alors que D est vraie, c'est à dire dans 3 cas (soit E, soit F, soit les deux sont fausses). q est donc vraie dans $2^3 - 3 = 5$ cas.
p et q sont donc toutes les deux fausses dans $1 \times 3 = 3$ cas ; et toutes les deux vraies dans $7 \times 5 = 35$ cas. On a donc un total de **38** modèles.

Exercice 13

Soient p et q deux formules propositionelles définies sur $P_1, \ldots, P_k$. Montrez que $p \Rightarrow q$ si et seulement si $p \models q$.

Solution

On cherche à démontrer : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \models q)$.

avec le fait

$\Rightarrow$: Supposons $p \Rightarrow q$. Soit M un modèle de p. On cherche à montrer que q est vrai dans M.
Puisque $p \Rightarrow q$, et p est vrai dans M, q est également toujours vrai dans M. Pq ? Justifier par $p \Rightarrow q$ est tautologie
On a donc montré que $p \Rightarrow q$ implique $p \models q$.

$\Leftarrow$: Supposons $p \models q$. On cherche à montrer que $p \Rightarrow q$.

ce ne veut rien dire.

Puisque q est une tautologie de p, q est vrai dans n'importe quel modèle M de p. On a donc dans M $p \Rightarrow q$ qui est toujours vrai, car p et q sont toujours vrais. Et donc $p \Rightarrow q$ est une tautologie, ce que

non...

q est vrai dans tous les

p peut être faux, mais dans ce cas $p \Rightarrow q$ est

l'on peut écrire comme $\models (p \Rightarrow q)$ ou encore $p \Rrightarrow q$.
On a donc montré que $p \models q$ implique $p \Rrightarrow q$.

TP 2

Exercice 1

Démontrez les équivalences logiques suivantes.

1. $p \wedge (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Longleftrightarrow \textbf{true}$
4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \Longleftrightarrow q$
5. $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Longleftrightarrow \textbf{true}$
6. $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee r))$
7. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
8. $p \wedge q \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$

Solution

Notons d'abord que toutes les preuves suivantes peuvent aussi être réalisées grâce aux table de vérités.

1)

$$\begin{aligned}
p \wedge (q \wedge r) &\Longleftrightarrow \neg\neg(p \wedge (q \wedge r)) && \text{Double négation}\\
&\Longleftrightarrow \neg(\neg(q \wedge r) \vee \neg p) && \text{De Morgan}\\
&\Longleftrightarrow \neg((\neg r \vee \neg q) \vee \neg p) && \text{De Morgan}\\
&\Longleftrightarrow \neg((\neg p \vee \neg q) \vee \neg r) && \text{Associativité}\\
&\Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\neg r && \text{De Morgan}\\
&\Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r && \text{De Morgan et double négation}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &\Leftrightarrow p \Rightarrow (\neg q \vee r) && \text{Implication}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{Implication}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{Associativité}\\
&\Leftrightarrow (\text{true} \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r && \text{Simplification inverse}\\
&\Leftrightarrow ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r && \text{Loi du tiers exclus}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \vee r && \text{Distributivité}\\
&\Leftrightarrow ((p \vee \neg q) \vee \neg p) \vee r && \text{Associativité}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r) && \text{Associativité}\\
&\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r) && \text{Double négation}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee \neg r) && \text{De Morgan}\\
&\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) && \text{Implication}
\end{aligned}$$

X

3) X

trop vite

$$\begin{aligned}
p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q &\Leftrightarrow p \wedge \neg(\neg p \vee q) \vee q && \text{Implication}\\
&\Leftrightarrow p \wedge (p \wedge \neg q) \vee q && \text{De Morgan}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge \neg q \wedge q && \text{Associativité}\\
&\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee q && \text{Simplification}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee q && \text{Ajout de parenthèses}\\
&\Leftrightarrow \neg q \vee q && \text{Simplification}\\
&\Leftrightarrow \text{true} && \text{Simplification}
\end{aligned}$$

$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow q$

?

copy paste ??

4)

X

$$\begin{aligned}
p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q &\Leftrightarrow p \wedge \neg(\neg p \vee q) \vee q && \text{Implication}\\
&\Leftrightarrow p \wedge (p \wedge \neg q) \vee q && \text{De Morgan}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge \neg q \wedge q && \text{Associativité}\\
&\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee q && \text{Simplification}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee q && \text{Ajout de parenthèses}\\
&\Leftrightarrow \neg q \vee q && \text{Simplification}\\
&\Leftrightarrow \text{true} && \text{Simplification}
\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) &\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \neg p) && \text{Loi commutative}\\
&\Leftrightarrow q \vee (p \wedge \neg p) && \text{Distributivité}\\
&\Leftrightarrow q \vee \text{false} && \text{Simplification}\\
&\Leftrightarrow q && \text{Simplification}
\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
\neg\neg(p \vee q) \vee (\neg p \vee \neg q) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{De Morgan}\\
&\Leftrightarrow \text{true} && \text{Loi du tiers exclus}
\end{aligned}$$

7)

$$
\begin{aligned}
(p \lor q) \land \neg(p \land q) &\Longleftrightarrow \neg(\neg(p \lor q) \lor (p \land q)) && \text{Double négation et De Morgan}\\
&\Longleftrightarrow \neg((\neg p \land \neg q) \lor (p \land q)) && \text{De Morgan}\\
&\Longleftrightarrow \neg((\neg p \lor p) \land (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p) \land (\neg q \lor q)) && \text{Distributivité}\\
&\Longleftrightarrow \neg(\text{true} \land (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p) \land \text{true}) && \text{Simplification}\\
&\Longleftrightarrow \neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)) && \text{Simplification}\\
&\Longleftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor p) && \text{De Morgan}\\
&\Longleftrightarrow (p \land \neg q) \lor (q \land \neg p) && \text{De Morgan}
\end{aligned}
$$

8)

$$
\begin{aligned}
(p \lor q) \land (p \Leftrightarrow q) &\Longleftrightarrow (p \lor q) \land (\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q) && \text{Double implication}\\
&\Longleftrightarrow (p \land \neg p \land p) \lor (p \land \neg p \land \neg q) \lor (p \land q \land p) \lor (p \land q \land \neg q)\\
&\lor (q \land \neg p \land p) \lor (q \land \neg p \land \neg q) \lor (q \land q \land p) \lor (q \land q \land \neg q) && \text{Distributivité}\\
&\Longleftrightarrow \text{false} \lor \text{false} \lor (p \land q \land p) \lor \text{false} \lor \text{false} \lor \text{false} \lor (q \land q \land p) \lor \text{false} && \text{Simplification}\\
&\Longleftrightarrow (p \land q) \lor (q \land p) && \text{Simplification}\\
&\Longleftrightarrow (p \land q) && \text{Simplification}
\end{aligned}
$$

+ Loi de l'[illegible]

$p \Leftrightarrow q$ $(\equiv)$ $(p \Rightarrow q)$ $\land (q \Rightarrow p)$

Exercice 2

Démontrez, à l'aide d'une table de vérité, la validité des arguments suivants :

1.
$$\begin{array}{l} p \lor q \\ \underline{\neg p} \\ q \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} \underline{p} \\ p \lor q \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ p \Rightarrow r \end{array}$$

Solution

1)

p	q	$\neg p$	$p \lor q$	$(\neg p) \land (p \lor q)$
T	T	F	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

On remarque que quand $(\neg p) \land (p \lor q)$ est vrai, q est vrai.

2)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

On remarque que quand p est vrai, $p \vee q$ est vrai.

3)

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

On remarque que quand $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ est vrai, $(p \Rightarrow r)$ est vrai.

Exercice 3

Démontrez que les arguments suivants ne sont pas valides.

1.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{c} p \Leftrightarrow q \\ p \Rightarrow r \\ r \\ \hline p \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

Solution

Il y a deux façons de résoudre cet exercice. Nous faisons avec le premier un exemple de ces deux méthodes.

1) Tout d'abord, l'algorithme de preuve :

1. $p \vee q$	Prémisse
2. $\neg p$	Prémisse
3. $\neg q$	Hypothèse
4. p	Syllogisme disjoint (1, 3)
5. q	Réduction à l'absurde

Ensuite une table de vérité :

P	Q	$(P \vee Q)$	$\wedge$	$\neg P$	$\neg Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T

On constate que lorsque $(P \vee Q) \wedge \neg P$ est vrai, $\neg Q$ est faux.

2) On trouve un contre-exemple pour démontrer que l'argument est invalide :

X

1. $p \Leftrightarrow q$	Prémisse
2. $p \Rightarrow r$	Prémisse
3. r	Prémisse
4. $\neg p \vee r$	Implication (2)/Addition (3)
5. $\neg q$	Hypothèse
6. $\neg p$	Équivalence (1, 5)

On a donc trouvé un cas où $\neg p$ est vrai, et donc p n'est pas toujours vrai.

preuve incomplète. en fait une preuve c'est pas top pour résoudre cet exercice. Il suffit de trouver une inter où c'est faux.

$$\frac{\begin{array}{c} p \Leftrightarrow q \\ p \Rightarrow r \\ r \end{array}}{p}$$

r vrai
p faux, donc q faux *
contre-exemple : $\{p \to F, r \to T, q \to F$

3) Ici aussi, on trouve un contre-exemple :

X

même pas pour 2).
Un contre exemple renvoit, par exemple :
$val_I(p) = val_I(q) = F$

1. $p \Rightarrow q$	Prémisse
2. $q \Rightarrow p$	Prémisse
3. $p \Leftrightarrow q$	Équivalence (1, 2)
4. $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$	Équivalence (3)
5. $\neg q$	Hypothèse
6. $\neg p$	Équivalence (3, 5)
7. $\neg p \wedge \neg q$	Conjonction (5, 6)

On a donc trouvé un cas où $\neg p \wedge \neg q$ est vrai, et donc $p \wedge q$ n'est pas toujours vrai.

Exercice 4

Pour chaque ensemble de prémisses, démontrez la conclusion qui suit. Faites attention à bien identifier les lois logiques et les règles d'inférence utilisées.

1. Premisses : $p \Rightarrow q, \quad q \Rightarrow r$
   Conclusion : $p \Rightarrow r$
2. Premisses : $p \Rightarrow q, \quad r \Rightarrow t, \quad q \vee t \Rightarrow u, \quad \neg u$
   Conclusion : $\neg p \wedge \neg r$
3. Premisses : $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r), \quad t \vee \neg r \vee u, \quad p \Rightarrow t, \quad \neg t$
   Conclusion : $q \Rightarrow u$

4. Premisses : $p \Rightarrow \neg q,\ q \vee r \vee s,\ \neg r \vee s \Rightarrow p,\ \neg r$
   Conclusion : s
5. Premisses : $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\ s \vee \neg r \vee t,\ p \Rightarrow s,\ \neg s$
   Conclusion : $q \Rightarrow t$
6. Premisses : $\neg(\neg p \wedge q),\ \neg(\neg q \vee r)$
   Conclusion : p
7. Premisses : $p \vee q,\ \neg q \vee r$
   Conclusion : $p \vee r$
8. Premisses : $(p \wedge q) \vee (r \wedge s),\ (q \wedge r) \vee (s \wedge t)$
   Conclusion : $r \vee (p \wedge t)$

Solution

1)

1. $p \Rightarrow q$	Prémisse
2. $q \Rightarrow r$	Prémisse
3. p	Hypothèse
4. q	Modus ponens (1, 3)
5. r	Modus ponens (2, 4)
6. $p \Rightarrow r$	Théorème de déduction (3, 5)

2)

1. $p \Rightarrow q$	Prémisse
2. $r \Rightarrow t$	Prémisse
3. $q \vee t \Rightarrow u$	Prémisse
4. $\neg u$	Prémisse
5. $\neg(q \vee t)$	Modus tollens (3, 4)
6. $\neg q \wedge \neg t$	De Morgan (5)
7. $\neg t$	Simplification (6)
8. $\neg r$	Modus tollens (2, 7)
9. $\neg q$	Simplification (6)
10. $\neg p$	Modus tollens (1, 9)
11. $\neg r \wedge \neg p$	Conjonction (8, 10)

3)

1. $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	Prémisse
2. $t \vee \neg r \vee u$	Prémisse
3. $p \Rightarrow t$	Prémisse
4. $\neg t$	Prémisse
5. $\neg p$	Modus tollens (3, 4)
6. $q \Rightarrow r$	Modus ponens (1, 5)
7. $\neg r \vee u$	Syllogisme disjoint (2, 4)
8. q	Hypothèse
9. r	Modus ponens (6, 8)
10. u	Syllogisme disjoint (7,9)
11. $q \Rightarrow u$	Déduction (8, 10)

4)

1. $p \Rightarrow \neg q$	Prémisse
2. $q \vee r \vee s$	Prémisse
3. $\neg r \vee s \Rightarrow p$	Prémisse
4. $\neg r$	Prémisse
5. $q \vee s$	Syllogisme disjoint (2, 4)
6. p	Modus ponens (3, 4)
7. $\neg q$	Modus ponens (1, 6)
8. s	Syllogisme disjoint (5, 7)

trop vite

$\neg r$

$\neg r \vee s$ addition

p modus ponens

5)

1. $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	Prémisse
2. $s \vee \neg r \vee t$	Prémisse
3. $p \Rightarrow s$	Prémisse
4. $\neg s$	Prémisse
5. $\neg p$	Modus tollens (3, 4)
6. $q \Rightarrow r$	Modus ponens (1, 5)
7. $\neg r \vee t$	Syllogisme disjoint (2, 4)
8. q	Hypothèse
9. r	Modus ponens (6, 8)
10. t	Syllogisme disjoint (7,9)
11. $q \Rightarrow t$	Déduction (8, 10)

6)

1. $\neg(\neg p \wedge q)$	Prémisse
2. $\neg(\neg q \vee r)$	Prémisse
3. $p \vee \neg q$	De Morgan (1)
4. $q \wedge \neg r$	De Morgan (2)
5. q	Simplification (4)
6. p	Syllogisme disjoint (3, 5)

7)

1. $p \vee q$	Prémisse
2. $\neg q \vee r$	Prémisse
3. $q \Rightarrow r$	Loi de l'implication (2)
4. $\neg(p \vee r)$	Hypothèse
5. $\neg p \wedge \neg r$	De Morgan (4)
6. $\neg p$	Simplification (5)
7. $\neg r$	Simplification (5)
8. q	Syllogisme disjoint (1, 6)
9. $\neg q$	Syllogisme disjoint (2, 7)
10. $p \vee r$	Réduction à l'absurde (4)

8)

1. $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$	Prémisse
2. $(q \wedge r) \vee (s \wedge t)$	Prémisse
3. $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee s) \wedge (q \vee r)$	Distributivité (1)
4. $(q \vee s) \wedge (q \vee t) \wedge (r \vee s) \wedge (r \vee t)$	Distributivité (2)
5. $p \vee r$	Simplification (3)
6. $r \vee t$	Simplification (4)
7. $(p \vee r) \wedge (r \vee t)$	Conjonction (5, 6)
8. $r \vee (p \wedge t)$	Distributivité (7)

Exercice 5

Pour chaque ensemble de prémisses, démontrez la conclusion qui suit. Faites attention à bien identifier les lois logiques et les règles d'inférence utilisées.

1. Premisses :
   Conclusion : $p \vee \neg(p \wedge q)$
2. Premisses :
   Conclusion : $(p \wedge q) \vee \neg p \vee \neg q$
3. Premisses :
   Conclusion : $\neg p \vee \neg(\neg q \wedge (\neg p \vee q))$

Solution

1)

1. $\neg p$	Hypothèse
2. $\neg p \vee \neg q$	Addition
~~3. $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$~~	~~Négation~~
4. $\neg(p \wedge q)$	De Morgan 1
5. $\neg p \Rightarrow \neg(p \wedge q)$	Déduction
6. $\neg\neg p \vee \neg(p \wedge q)$	Implication
7. $p \vee \neg(p \wedge q)$	Négation

2)

1. $\neg(p \wedge q)$	Hypothèse
2. $\neg p \vee \neg q$	De Morgan 1
3. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$	Déduction
4. $(\neg\neg(p \wedge q)) \vee (\neg p \vee \neg q)$	Implication
5. $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$	Négation

manquant les lignes

3)

1. p	Hypothèse
2. $p \vee q$	Addition
3. $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow q$	ex. 2.1 ?
4. $((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \Leftrightarrow (q \wedge \neg q)$	Mystification
5. $\neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q)$	Contradiction
6. $p \Rightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q)$	Déduction
7. $\neg p \vee \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q)$	Implication

2 Exercices

Exercice 1.
Démontrez avec un preuve formelle que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une tautologie.

Solution

1	P	supposition
2	Q	supposition
3	P	(1)
4	$Q \Rightarrow P$	thm déduction (2-3)
5	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$	thm déduction (1-4)

Exercice 2.
Une formule propositionelle est en *forme normale disjonctive* si elle est composée de disjonctions de conjonctions de literaux, cet-à-dire, elle est de la forme

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij}$$

où L_{ij} sont des literaux.

1. Quel est l'avantage d'une formule en forme normale disjonctive ?
2. Comment peut-on faire pour automatiser la transformation d'une table de vérité en une formule qui possède la même table de vérité ?
3. Est-ce que toute formule propositionelle peut s'écrire en forme normale disjonctive ?

Solution

1. On peut facilement trouver un modèle, il suffit de satisfaire une des conjonctions.
2. Pour chaque ligne qui rends la formule vraie on construit une conjonction avec un literal positive pour chaque T et un negatif pour chaque F. Après on prends la disjonction de tous.

   Example :

p	q			
T	T	T	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
T	F	F		
F	T	T	$\rightarrow$	$(\neg p \wedge q)$
F	F	F		

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$$

3. Oui par le point 2.

Exercice 3.
Metez les formules suivantes en forme normale conjonctive.

1. $p \oplus q$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
4. $(p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge s)$
5. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
6. $(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n)$

Solution

1.

p	q	$p \oplus q$	$((p \vee q)$	$\wedge$	$\neg$	$(p \wedge q))$
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	F
F	T	T	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	F

$$p \oplus q \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

2.

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \Longleftrightarrow \neg(p \Rightarrow q) \vee r \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \Longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

3.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow \neg p \vee (q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

4.
$$(a+b+c)*(e+f+g) = ae+af+ag+be+bf+bg+ce+cf+cg$$

$$\begin{aligned}
(p \land q \land \neg s) \lor (\neg p \land q \land s) &\Longleftrightarrow \\
(p \lor \neg p) \land (p \lor q) \land (p \lor s) \land \\
(q \lor \neg p) \land (q \lor q) \land (q \lor s) \land \\
(\neg s \lor \neg p) \land (\neg s \lor q) \land (\neg s \lor s) &\Longleftrightarrow \\
(p \lor q) \land (p \lor s) \land (q \lor \neg p) \land q \land (q \lor s) \land (\neg s \lor \neg p) \land (\neg s \lor q)
\end{aligned}$$

5. On a que

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \Longleftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \land (r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))$$

On va faire les deux parties séparément :

$$\begin{aligned}
(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r \Longleftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q) \lor r \Longleftrightarrow (p \oplus q) \lor r \Longleftrightarrow \\
[(p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)] \lor r \Longleftrightarrow (p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg r \lor (p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg r \lor ((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)) \Longleftrightarrow \\
\neg r \lor (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q) \Longleftrightarrow \\
(\neg r \lor p \lor \neg p) \land (\neg r \lor p \lor \neg q) \land (\neg r \lor q \lor \neg p) \land (\neg r \lor q \lor \neg q) \Longleftrightarrow \\
\mathbf{true} \land (\neg r \lor p \lor \neg q) \land (\neg r \lor q \lor \neg p) \land \mathbf{true} \Longleftrightarrow \\
(\neg r \lor p \lor \neg q) \land (\neg r \lor q \lor \neg p)
\end{aligned}$$

Donc

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \Longleftrightarrow (p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg r \lor p \lor \neg q) \land (\neg r \lor q \lor \neg p)$$

6.

$$\begin{aligned}
(a_1 \land b_1) \lor (a_2 \land b_2) \lor \ldots \lor (a_n \land b_n) \Longleftrightarrow \\
(a_1 \lor a_2 \lor \ldots \lor a_{n-1} \lor A_n) \land \\
(a_1 \lor a_2 \lor \ldots \lor a_{n-1} \lor b_n) \land \\
\ldots \land \\
(b_1 \lor b_2 \lor \ldots \lor b_{n-1} \lor b_n) \land
\end{aligned}$$

Contien 2^n clauses chacune contien soit a_i soit b_i a la position i.

Exercice 4.
Montrez que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} p \\ p \Leftrightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Solution

1	p	prémisse
2	$p \Leftrightarrow q$	prémisse
3	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$	loi de l'équivalence (2)
4	$p \Rightarrow q$	simplification (3)
5	q	modus ponens (1, 4)

Exercice 5.
Montrez que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} \neg p \\ p \Leftrightarrow q \\ \hline \neg q \end{array}$$

Solution

1	$\neg p$	prémisse
2	$p \Leftrightarrow q$	prémisse
3	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$	loi de l'équivalence (2)
4	$q \Rightarrow p$	simplification (3)
5	$\neg q$	modus tollens (1, 4)

Exercice 6.
Montrez avec une preuve formelle que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ r \end{array}$$

Solution

1	$p \vee q$	prémisse
2	$p \Rightarrow r$	prémisse
3	$q \Rightarrow r$	prémisse
4	$\quad \neg(p \vee q \Rightarrow r)$	supposition
5	$\quad \neg(\neg(p \vee q) \vee r)$	loi de l'implication (4)
6	$\quad \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$	De Morgan (5)
7	$\quad (\neg\neg p \vee \neg\neg q) \wedge \neg r$	De Morgan (6)
8	$\quad (p \vee q) \wedge \neg r$	2x double négation (7)
9	$\quad \neg r$	simplification (8)
10	$\quad \neg p$	modus tollens (9, 2)
11	$\quad \neg q$	modus tollens (9, 3)
12	$\quad \neg p \wedge \neg q$	conjonction (10, 11)
13	$\quad \neg(p \vee q)$	De Morgan (12)
14	$\quad p \vee q$	simplification (8))
15	$\neg\neg(p \vee q \Rightarrow r)$	réduction a l'absurde (4-14)
16	$p \vee q \Rightarrow r$	double négation (15)
17	r	modus ponens (1, 15)

Exercice 7.
Montrez avec une preuve formelle que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r, p \vdash q \Leftrightarrow r$

Solution

1	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$	prémisse
2	p	prémisse
3	$\neg(q \Rightarrow r)$	supposition
4	$\neg(\neg q \vee r)$	loi de l'implication (3)
5	$q \wedge \neg r$	De Morgan + double négation (4)
6	$\neg r$	simplification (5)
7	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	exercice 5 (1, 6)
8	$\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow p)$	De Morgen + loi de l'équivalence (7)
9	$\neg(p \Rightarrow q)$	supposition
10	$p \wedge \neg q$	loi de l'implication + De Morgan + double négation (9)
11	$\neg q$	simplification (10)
12	q	simplification (5)
13	$p \Rightarrow q$	réduction a l'absurde + double négation (9-12)
14	$\neg(q \Rightarrow p)$	syllogisme disjoint (8, 13)
15	$q \wedge \neg p$	loi de l'implication + De Morgan + double négation (14)
16	$\neg p$	simplification (15)
17	$q \Rightarrow r$	réduction a l'absurde + double négation (3-16)
18	$\neg(r \Rightarrow q)$	supposition
19	$r \wedge \neg q$	loi de l'implication + De Morgan + double négation (18)
20	r	simplification (19)
21	$p \Leftrightarrow q$	exercice 4 (20, 1)
22	q	exercice 4 (21, 2)
23	$\neg q$	simplification (19)
24	$r \Rightarrow q$	réduction a l'absurde + double négation (18-22)
25	$(q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$	conjonction (17, 24)
26	$q \Leftrightarrow r$	loi de l'équivalence (25)

TP 4

Exercice 1

Prouvez que la régle de résolution est valide.

Solution

La règle de résolution peut s'écrire comme suit :

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ r \vee \neg q \\ \hline p \vee r \end{array}$$

ici on veut le générale mais c'est le même genre de raisonnement.

Elle peut être démontrée de la manière suivante :

1. $p \vee q$	prémisse
2. $r \vee \neg q$	prémisse
3. $\neg(p \vee r)$	supposition
4. $\neg p \wedge \neg r$	De Morgan 2
5. $\neg p$	simplification
6. q	syllogisme
7. $\neg r$	simplification
8. $\neg q$	syllogisme
9. $\neg(\neg(p \vee r))$	contradiction
10. $p \vee r$	négation

Exercice 2 X

Est-ce que cette application de la règle de résolution est correcte ? Justifiez.

$$res(P \vee Q, \neg P \vee \neg Q) = \textbf{false}$$

Pas bon car alors il n'y aurait pas de modèles de $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ mais il y en a vu que $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow P \oplus Q$

Solution

res($P \vee Q$, $\neg P \vee \neg Q$) = **false** n'est pas une application valable de la règle de résolution. En effet, si on prend R tel que $R \Leftrightarrow \neg P$, on peut appliquer :

??

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ R \vee \neg Q \\ \hline P \vee R \end{array}$$

On obtient donc $P \vee R$. Or $(P \vee R) \Leftrightarrow (P \vee \neg P)$. Puisque $(P \vee \neg P)$ est toujours vrai, on en conclut que res($P \vee Q$, $\neg P \vee \neg Q$) = **true**.

Exercice 3

Pour chaque ensemble de prémisses montrez avec l'algorithme de résolution que la conclusion est une conséquence logique des prémisses.

1. Prémisses : $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R$
   Conclusion : $P \Rightarrow R$
2. Prémisses : $P \vee Q, P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R$
   Conclusion : R
3. Prémisses : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R, P$
   Conclusion : $Q \Leftrightarrow R$
4. Prémisses : $P \Rightarrow Q, R \Rightarrow T, Q \vee T \Rightarrow U, \neg U$
   Conclusion : $\neg P \wedge \neg R$
5. Prémisses : $\neg P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), T \vee \neg R \vee U, P \Rightarrow T, \neg T$
   Conclusion : $Q \Rightarrow U$

Solution

Rappel : Algorithme de résolution

1. On met les prémisses et la $\neg$ conclusion en FNC
2. $While(false \notin S$ AND p q resolvable)
   — Résolution sur p et q
   — Ajouter résultat dans S
3. Si $false \in S \rightarrow Proof$
4. Sinon $\rightarrow Noproof$

1.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array} \quad \textbf{Conversion} \quad \begin{array}{c} \neg p \vee q \\ \neg q \vee r \\ \hline p \wedge \neg r \end{array}$$

Notation pas claire on a l'impression que $p \Rightarrow r \Leftrightarrow p \wedge \neg r$ et non $\neg(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge \neg r$

$$S = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee r,\ p,\ \neg r\}$$
$$res\,(\neg p \vee q,\ \neg q \vee r) = \neg p \vee r$$
$$S = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee r,\ p \wedge \neg r,\ \neg p \vee r\}$$
$$res\,(\neg p \vee r,\ \neg r) = \neg p$$
$$S = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee r,\ p \wedge \neg r,\ \neg p \vee r,\ \neg p\}$$
$$res\,(\neg p,\ p) = \textbf{false}$$

$p \Rightarrow r$ est une conséquence logique des prémisses.

Exercice 4

Demontrez que $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \vDash c$ si et seulement si $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg c \vDash$ **false**.

Solution ?

TP 5

Exercice 1

Expliquez ce qu'est un modèle en logique des prédicats.

Solution

Un modèle en logique des prédicats est comme un modèle en logique propositionnelle. C'est une interprétation qui possède une valeur `True`. voir syllabus.

Exercice 2

Soit l'interprétation suivante :

$$\begin{aligned} D_I &= \mathbb{N} \\ val_I(a) &= 0 \\ val_I(f) &= \text{"succ"} \\ val_I(P) &= \text{"<"} \\ val_I(x) &= 1 \\ val_I(y) &= 0 \end{aligned}$$

Déterminez les valeurs de vérité des formules suivantes dans cette interprétation :

1. $P(x,a)$
2. $P(x,a) \wedge P(x,f(x))$
3. $\exists y\ P(y,x)$
4. $\exists y\ P(y,a) \vee P(f(y),y)$
5. $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$
6. $\exists y\ \forall x\ P(x,y)$

Solution

1) $VAL_I(P(x,a)) = T$

`ssi` $val_I(P)(VAL_I(x), VAL_I(a)) = T$

`ssi` $val_I(P)(val_I(x), val_I(a)) = T$

`ssi` $val_I(x) < val_I(a) = T$

`ssi` $1 < 0$

`or` $1 < 0$ ~~$= F$~~ est faux

$\Rightarrow VAL_I(P(x,a)) =$ ~~`False`~~ F

2) $VAL_I[P(x,a) \wedge P(x,f(x))] = T$

`ssi` $VAL_I(P(x,a)) \wedge VAL_I(P(x,f(x))) = T$

`or` $VAL_I(P(x,a)) =$ ~~`False`~~ F

$\Rightarrow VAL_I[P(x,a) \wedge P(x,f(x))] =$ ~~`False`~~ F

3) $VAL_I(\exists y P(y,x)) = T$

`ssi` $\exists d \in \mathbb{N} : VAL_{I'}(P(y,x)) = T$ où $I' = I\{y \to d\}$

`ssi` $\exists d \in \mathbb{N} : val_{I'}(P)(VAL_{I'}(y), VAL_{I'}(x)) = T$

`ssi` $\exists d \in \mathbb{N} : val_{I'}(P)(val_{I'}(y), val_{I'}(x)) = T$

`ssi` $\exists d \in \mathbb{N} : d < 1.$

$\Rightarrow VAL_I(\exists y P(y,x)) =$ ~~`True`~~ T, si $d = 0$

Mauvaise formulation. ~~VAL_I~~ $\exists d \in \mathbb{N} : d < 1$ est vrai, par exemple $d = 0 \in \mathbb{N}$. Donc $VAL_I(\exists y\, P(y,x)) = T$.

4 $VAL_I[\exists P(y,a) \vee P(f(y),y)] = T$

`ssi` $\exists d \in D_s : VAL_{I'}[P(y,a) \vee P(f(y),y)] = T$ avec $I' = I\{y \to d\}$

? `ssi` $\exists d \in D_s : VAL_{I'}[P(y,a)] \vee VAL_{I'}[P(f(y),y)] = T$

`ssi` $\exists d \in D_s : val_{I'}(P)[val_{I'}(y), val_{I'}(a)] \vee val_{I'}(P)[VAL_{I'}(f(y)), val_{I'}(y)] = T$

`ssi` $\exists d \in D_s : (d < 0) \vee [val_{I'}(f)(val_{I'}(y)) < d]$

`ssi` $\exists d \in \mathbb{N} : (d < 0) \vee (succ(d) < d)$

`ssi` $\exists d \in D_s : (d < 0) \vee (d + 1 < d)$

$\Rightarrow VAL_I[\exists P(y,a) \vee P(f(y),y)] =$ ~~`False`~~ F

Justification pas dans $\mathbb{N}$ c'est pas pareille.

5 $VAL_I[\forall x \exists y P(x,y)] = T$

$\forall d \in \mathbb{N}, VAL_{I'}[\exists y P(x,y)] = T$ avec $I' = I\{x \to d\}$

$\forall d \in \mathbb{N} \exists e \in \mathbb{N} : VAL_{I''}[P(x,y)] = T$ avex $I'' = I'\{y \to d\}$

$\forall d \in \mathbb{N} \exists e \in \mathbb{N} : val_{I''}(P)[val_{I''}(x), val_{I''}(y)] = T$

$\forall d \in \mathbb{N} \exists e \in \mathbb{N} : d < e$

$\Rightarrow VAL_I[\forall x \exists y P(x,y)] =$ ~~`True`~~ T

Justification? Pour $d \in \mathbb{N}$, $e = d+1 \in \mathbb{N}$ est tel que $d < e$.

Exercice 3

On considère une grille 3×3 et

$$P = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

l'ensemble des positions de la grille. De plus, on considère les prédicats carre, circle, vide et adj qui représentent les choses suivantes :

carre(x)	la forme de la position x est un carré.
circle(x)	la forme de la position x est un cercle.
vide(x)	la position x est vide.
adj(x,y)	les positions x et y sont adjacentes

Pour chaque configuration, dites quelles sont les formules vraies.

A

○		
□		
		○

B

□		
○	□	
		□

C

	□	
□		□
	□	

D

○	□	○
□	○	□
○	□	○

E

○		□
□	○	□
□	△	○

1. $\exists x : P$ vide(x)
2. $\exists x : P$ $\neg$vide(x)
3. $\exists x : P$ circle(x)
4. $\exists x : P$ carre(x)
5. $\forall x : P$ vide$(x) \vee$ carre$(x) \vee$ circle(x)
6. $\forall x : P$ carre$(x) \Rightarrow \exists y : P$ (adj$(x, y) \wedge$ circle(y))
7. $\forall x : P$ carre$(x) \Rightarrow \exists y : P$ (adj$(x, y) \wedge$ carre(x))
8. $\exists x, y, z : P$ vide$(x) \wedge$ vide$(y) \wedge$ vide(z)
9. $\exists x : P$ ($\forall x : P$ circle(x)) $\vee$ carre(x)
10. $\forall x : P$ $\exists y : P$ $\neg$vide$(x) \wedge$ vide(y)
11. $\forall x : P$ $\exists y : P$ vide$(x) \wedge \neg$vide(y)
12. $\forall x : P$ $\exists y : P$ $\neg$vide$(x) \Rightarrow$ vide(y)
13. $\forall x : P$ $\exists y : P$ $\neg$vide$(y) \Rightarrow$ vide(x)
14. $\forall x : P$ circle$(x) \Rightarrow \exists y, z : P$ carre$(y) \wedge$ carre$(z) \wedge$ adj$(x, y) \wedge$ adj(x, z)
15. $\exists x : P$ vide$(x) \Rightarrow$ ($\forall y : P$ $\neg$vide$(x) \Rightarrow$ carre(y))

Solution

TODO : Finir pour les formules [9, 10, 11, 12, 13, 14]

il y a de [illegible]...

— **A :** 1, 2 3, 4, 5, 6, 8 , ...
— **B :** 1, 3, 4, 5, 8, ...
— **C :** 1, 4, 5, 8,..., 15
— **D :** 2, 3, 4, 5, 6, ...
— **E :** 1, 3, 4, 7, ...

Je l'ai fait au cours partout.

Exercice 4

Faites une preuve formelle de :

1.
$$\frac{\exists x\ p(x) \qquad \forall x\ p(x) \Rightarrow q(x)}{\exists x\ q(x)}$$

2.
$$\frac{\forall x\ p(x) \vee r(x) \Rightarrow \neg q(x) \qquad \exists x\ \neg(\neg p(x) \wedge \neg r(x))}{\exists x\ \neg q(x)}$$

3.
$$\frac{\forall x\ p(x) \vee q(x) \Rightarrow r(x) \wedge s(x) \qquad \neg\forall x\ r(x) \wedge s(x)}{\neg\forall x\ p(x)}$$

4.

$$\begin{array}{l} \forall x\ q(x) \lor s(x) \Rightarrow r(x) \\ \neg\forall z\ p(z) \lor \neg s(z) \\ \hline \exists x\ r(x) \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{l} \forall x\ p(x) \Rightarrow \neg q(x) \\ \exists x\ r(x) \land q(x) \\ \hline \exists x\ r(x) \land \neg p(x) \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{l} p(a) \\ \forall x\ p(x) \Rightarrow q(x, b) \\ \hline \exists x\ q(a, x) \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{l} \forall x\ \forall y\ p(x, y) \\ \hline \exists x\ p(x, x) \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{l} \forall x\ \neg p(x, x) \land \forall x\ \forall y\ \forall z\ p(x, y) \land p(y, z) \Rightarrow p(x, z) \\ \hline \forall x\ \forall y\ \neg(p(x, y) \land p(y, x)) \end{array}$$

Solution

1

1. $\exists x\ p(x)$	prémisse
2. $\forall x\ p(x) \Rightarrow q(x)$	prémisse
3. $p(a)$	$\exists$ élim(1)
4. $p(a) \Rightarrow q(a)$	$\forall$ élim(2)
5. $q(a)$	Modus ponens(3,4)
6. $\exists x\ q(x)$	intro(5)

2

	1. $\forall x\ p(x) \lor r(x) \Rightarrow \neg q(x)$	prémisse
	2. $\exists x\ \neg(\neg p(x) \land \neg r(x))$	prémisse
	3. $\exists x\ p(x) \lor r(x)$	DeMorgan(2)
	4. $p(a) \lor r(a)$	$\exists$ élim(3)
	5. $p(a) \lor r(a) \Rightarrow \neg q(a)$	$\forall$ élim(1)
$\neg q(a)$	6. $\neg(a)$	Modus ponens (4,5)
	7. $\exists x\ \neg q(x)$	$\exists intro(6)$

3

	1. $\forall x\ p(x) \lor q(x) \Rightarrow r(x) \land s(x)$	prémisse
	2. $\forall x\ r(x) \land s(x)$	prémisse
??	3. $\exists x\ \neg(r(x) \land s(x))$	"rentrer" négation (2)
	4. $\neg r(a) \lor \neg s(a)$	$\exists$ élim + DeMorgan (3)
	5. $p(a) \lor q(a) \Rightarrow r(a) \land s(a)$	$\forall$ élim(1)
X	6. $\neg(p(a) \lor q(a))$	Modus Tollens (5,4)
	7. $\neg p(a) \land \neg q(a)$	DeMorgan(6)
	8. $\neg p(a)$	Simplif(7)
	9. $\exists x\ \neg p(x)$	$\exists$ Intro(8)
	10. $\neg\forall x\ p(x)$	"mis en avant" négation (9)

faux.

4

1. $\forall x\ q(x) \lor s(x) \Rightarrow r(x)$	prémisse
2. $\neg\forall z\ p(z) \lor \neg s(z)$	prémisse
3. $\exists z\ \neg(p(z) \lor \neg s(z))$	prémisse
4. $\exists z\ \neg p(z) \land s(z)$	DeMorgan(3)
5. $\neg p(a) \land s(a)$	$\exists$ élim(4)
6. $\neg\exists x\ r(x)$	hypothèse
7. $\forall x \neg r(x)$	(6)
8. $\neg r(a)$	$\forall$ elim(7)
9. $q(a) \lor s(a) \Rightarrow r(a)$	$\forall$ elim(1)
10. $\neg(q(a) \lor s(a))$	Modus Tolens(8,9)
11. $\neg q(a) \land \neg s(a)$	DeMorgan (10)
12. $\neg s(a)$	Simplification(11)
13. $s(a)$	Simplification(5)
14. $\neg\neg\exists x\ r(x)$	Réduction à l'absurde(6-13)
15. $\exists x\ r(x)$	Double négation (14)

5

X

1. $\forall x\ p(x) \Rightarrow \neg q(x)$	prémisse
2. $\exists x\ r(x) \land \neg q(x)$	prémisse
3. $r(a) \land \neg q(a)$	$\exists$ élim(2)
4. $p(a) \Rightarrow \neg q(a)$	$\forall$ élim(1)
5. $p(a)$	Hypothèse
6. $\neg q(a)$	Modus Ponens (4,5)
7. $q(a)$	Simplif(3)
8. $\neg p(a)$	Réduction à l'absurde (5-7)
9. $r(a)$	Simplif (3)
10. $r(a) \land \neg p(a)$	conjonction (8,9)
11. $\exists x\ r(x) \land \neg p(x)$	$\exists$ Intro(10)

ça donne $\neg q(a)$ pas $q(a)$...

6

pas x, a

1. p(a)	prémisse
2. $\forall x\ p(x) \Rightarrow q(x,b)$	prémisse
3. $p(a) \Rightarrow q(a,b)$	$\forall$ Elim(2)
4. $\neg p(x) \lor q(a,b)$	loi implication (3)
5. $q(a,b)$	syllogisme disjoint (1,4)
6. $\exists x\ q(a,x)$	$\exists$ Intro(5)

7

1. $\forall x\ \forall y\ p(x,y)$	prémisse
2. $p(a,a)$	2x $\forall$ Elim(1)
3. $\exists x\ p(x,x)$	$\exists$ Intro(2)

8

1. $(\forall x\ \neg p(x,x)) \land (\forall x\ \forall y\ \forall z\ p(x,y) \land p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$	prémisse
2. $\neg\forall x\ \forall y\ \neg(p(x,y) \land p(y,x))$	Hypothèse
3. $\exists x\ \exists y\ \neg\neg(p(x,y) \land p(y,x))$	"rentrer" négation(2)
4. $\exists x\ \exists y\ (p(x,y) \land p(y,x))$	double négation(3)
5. $p(a,b) \land p(b,a)$	2x $\exists$ élim(4)
6. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ p(x,y) \land p(y,z) \Rightarrow p(x,z)$	Simplif(1)
7. $p(a,b) \land p(b,a) \Rightarrow p(a,a)$	3x $\forall$ Elim(6) $[x \to a; y \to b; z \to a]$
8. $p(a,a)$	Modus Ponens(5,7)
9. $\forall x\ \neg p(x,x)$	Simplif(1)
10. $\neg p(a,a)$	$\forall$ Elim(9)
10. $\neg\neg\forall x\ \forall y\ \neg(p(x,y) \land p(y,x))$	Réduction à l'absurde (2-10)
11. $\forall x\ \forall y\ \neg(p(x,y) \land p(y,x))$	double négation

TP 6

Exercice 1 ✗

Pour chacune des affirmations suivantes, démontrez-la ou trouvez un contre-exemple.

1. $\neg\exists x\ \forall y\ p(x,y) \Longleftrightarrow \forall x, y\ \neg p(x,y)$
2. $\exists x\ p(x) \vee q(x) \Rightarrow (\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x))$
3. $(\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x)) \Rightarrow \exists x\ p(x) \wedge q(x)$
4. $\forall x\ \exists y\ p(x,y) \Longleftrightarrow \exists x \forall y\ p(x,y)$
5. $(\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)) \Rightarrow \exists x\ p(x) \vee q(x)$

Solution

$\forall$ x $\neg$ $\forall$ y p(x,y) $\Longleftrightarrow$ $\forall$ x,y $\neg$ p(x,y)	$\neg$ vers l'intérieur
$\forall$ x $\exists$ y $\neg$ p(x,y) $\neq$ $\forall$ x,y $\neg$ p(x,y)	$\neg$ vers l'intérieur

×

$\forall x \neg \forall y\ p(x,y)$

$\Updownarrow$

$\forall x\ \exists y\ \neg p(x,y)$

$\equiv$

∃ et pas ∀

1. ∃x p(x) ∨ q(x)	hypothèse
2. ¬ [∃x p(x) ∨ ∃x q(x)]	hypothèse absurde
3. ¬ ∀x p(x) ∧ ¬ ∃x q(x) ∀	Morgan
∃ 4. ∀x ¬ p(x) ∧ ∀x ¬ q(x)	¬ vers l'intérieur
5. ∀x ¬ p(x)	simplification
6. ¬ p(x)	élimination ∀
7. p(x) ∨ q(x)	élimination ∃ (1)
8. q(x)	Syllogisme disjoint (6,7)
9. ∀x ¬ q(x)	simplification (4)
10. ¬ q(x)	
11. ¬¬ (∃x p(x) ∨ ∃x q(x))	preuve par contradiction
12. ∃x p(x) ∨ ∃x q(x)	
13. ∃x p(x) ∨ q(x) ⇒ (∃x p(x) ∨ (∃x q(x))	

Exercice 2

Mettez les formules suivantes en forme normale prenexe puis en forme normale de Skolem et finalement en forme clausale.

1. $(p(x) \vee \exists x\ q(x)) \Rightarrow \forall z\ r(z)$
2. $(\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x))) \wedge (\exists z\ p(z)) \wedge (\exists z\ (q(z) \Rightarrow r(t)))$
3. $\forall x\ (((\exists y\ r(x,y)) \wedge (\forall y\ \neg s(x,y)) \Rightarrow \neg(\exists y\ r(x,y) \wedge P)))$
4. $\neg\forall x\ \exists y\ f(u,x,y) \Rightarrow (\exists x\ \neg\forall y\ g(y,v) \Rightarrow h(x))$

Solution

1)

Renommage = étape 1 ⚠

$(p(x) \lor \exists x\ q(x)) \Rightarrow \forall z\ r(z)$	Départ	Expression de base
$\neg(p(x) \lor \exists x\ q(x)) \lor (\forall z\ r(z))$	Suppression de $\Rightarrow$	
$\neg(p(y) \lor \exists x\ q(x)) \lor (\forall z\ r(z))$	Renommage des variables	
$(\neg p(y) \land \neg\exists x\ q(x)) \lor (\forall z\ r(z))$	De Morgan 2	
$(\neg p(y) \land \forall x\ \neg q(x)) \lor (\forall z\ r(z))$	$\neg\exists x$ devient $\forall x \neg$	
$\forall x\ \forall z\ [(\neg p(y) \land \neg q(x)) \lor r(z)]$	Extraction des quantificateurs	Forme prénexe
$\forall x\ \forall z\ [(\neg p(y) \land \neg q(x)) \lor r(z)]$	Pas de changements	Forme de Skolem
$\forall x\ \forall z\ [(\neg p(y) \lor r(z)) \land (\neg q(x) \lor r(z))]$	Distribution	Forme clausale

2)

$(\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x))) \land (\exists z\ p(z)) \land (\exists z\ (q(z) \Rightarrow r(t)))$	Départ	Expression de base
$(\forall x\ (\neg p(x) \lor q(x))) \land (\exists z\ p(z)) \land (\exists z\ (\neg q(z) \lor r(t)))$	Suppression $\Rightarrow$	
$(\forall x\ (\neg p(x) \lor q(x))) \land (\exists y\ p(y)) \land (\exists z\ (\neg q(z) \lor r(t)))$	Renommage	
$\forall x\ \exists y\ \exists z\ [(\neg p(x) \lor q(x)) \land p(y) \land (\neg q(z) \lor r(t))]$	Extraction	Forme prénexe
$\forall x\ [(\neg p(x) \lor q(x)) \land p(f(x)) \land (\neg q(g(x)) \lor r(t))]$	Élimination $\exists$	Forme de Skolem
$\forall x\ [(\neg p(x) \lor q(x)) \land p(f(x)) \land (\neg q(g(x)) \lor r(t))]$	Pas de changements	Forme clausale

3) X

$\forall x\ [(\exists y\ r(x,y)) \land (\forall y\ \neg s(x,y)) \Rightarrow \neg(\exists y\ r(x,y) \land P)]$	Départ	Expression de base
$\forall x\ [\neg((\exists y\ r(x,y)) \land (\forall y\ \neg s(x,y))) \lor \neg(\exists y\ r(x,y) \land P)]$	Suppression $\Rightarrow$	
$\forall x\ [\neg((\exists y\ r(x,y)) \land (\forall u\ \neg s(x,u))) \lor \neg(\exists v\ r(x,v) \land P)]$	Renommage	
$\forall x\ [\neg(\exists y\ r(x,y)) \lor \neg(\forall u\ \neg s(x,u)) \lor (\neg\exists v\ r(x,v) \lor \neg P)]$	De Morgan 1	
$\forall x\ [(\forall y\ \neg r(x,y)) \lor (\exists u\ s(x,u)) \lor (\forall v\ \neg r(x,v) \lor \neg P)]$	Simplification $\neg$	
$\forall x\ \forall y\ \exists u\ \forall v\ [\neg r(x,y) \lor s(x,u) \lor (\neg r(x,v) \lor \neg P)]$	Extraction	Forme prénexe
$\forall x\ \forall y\ \exists u\ \boxed{\forall v}\ [\neg r(x,y) \lor s(x,u) \lor \neg r(\underline{x,v}) \lor \neg P]$	Associativité $\lor$	
disparu ? $\forall x\ \forall y\ \exists u\ [\neg r(x,y) \lor s(x,u) \lor \neg P]$	Simplification	
$\forall x\ \forall y\ [\neg r(x,y) \lor s(x,f(x,y)) \lor \neg P]$	Élimination $\exists$	Forme de Skolem
$\forall x\ \forall y\ [\neg r(x,y) \lor s(x,f(x,y)) \lor \neg P]$	Pas de changements	Forme clausale

4)

$\neg\forall x\ \exists y\ f(u,x,y) \Rightarrow (\exists x\ \neg\forall y\ g(y,v) \Rightarrow h(x))$	Départ	Expression de base
$\neg\forall x\ \exists y\ [\neg f(u,x,y) \lor (\exists x\ \neg\forall y\ (\neg g(y,v) \lor h(x)))]$	Suppression $\Rightarrow$	
$\neg\forall x\ \exists y\ [\neg f(u,x,y) \lor (\exists w\ \neg\forall z\ (\neg g(z,v) \lor h(w)))]$	Renommage	
$\exists x\ \forall y\ \neg[\neg f(u,x,y) \lor (\exists w\ \exists z\ \neg(\neg g(z,v) \lor h(w)))]$	Simplification	
$\exists x\ \forall y\ [\neg\neg f(u,x,y) \land \neg(\exists w\ \exists z\ \neg(\neg g(z,v) \lor h(w)))]$	De Morgan 2	
$\exists x\ \forall y\ [f(u,x,y) \land (\forall w\ \forall z\ (\neg g(z,v) \lor h(w)))]$	Simplification	
$\exists x\ \forall y\ \forall w\ \forall z\ [f(u,x,y) \land (\neg g(z,v) \lor h(w))]$	Extraction	Forme prénexe
$\forall y\ \forall w\ \forall z\ [f(u,x,y) \land (\neg g(z,v) \lor h(w))]$	Élimination $\exists$	Forme de Skolem
$\forall y\ \forall w\ \forall z\ [f(u,x,y) \land (\neg g(z,v) \lor h(w))]$	Pas de changements	Forme clausale

Exercice 3

Montrez avec l'algorithme de résolution que $p_1 \land p_2 \land p_3$ est une contradiction où

$$p_1 \equiv \forall x\ p(x, f(x)) \Rightarrow q(x)$$
$$p_2 \equiv \forall x\ \forall y\ p(f((x)), f(y))$$
$$p_3 \equiv \exists x\ \neg q(f(x))$$

Solution

Exercice 4

Montrez avec l'algorithme de résolution que si $\forall x\ q(x) \Leftrightarrow p(x)$ et $\exists x\ \neg q(x)$ alors $\exists x\ \neg p(x)$.

Solution

Exercice 5

Montrez avec l'algorithme de résolution que si $\forall x\ p(x) \Rightarrow q(x,y)$, $\forall x\ p(x) \vee r(x)$ et $\neg r(a)$ alors $\exists x\ q(a,x)$.

Solution

TP 7

Exercice 1

La théorie OPS est définie au moyen du symbole de prédicat P et des axiomes :

Ax1 : $\forall x\ \neg P(x,x)$

Ax2 : $\forall x\ \forall y\ \forall z\ P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)$

1. Montrez que cette théorie est consistante.
2. Prouvez que

$$\forall x\ \forall y\ P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x)$$

est un théorème de la théorie OPS.

Solution

1) Une théorie est consistante si elle possède au moins un modèle.
Soit $D_I = \mathfrak{R}$, $Val_I(P) = '<'$

Axiome 1 : $Val_I(\forall x\ \neg P(x,x)) = True$ ssi $\forall d \in \mathfrak{R}$, $Val_{I'}(P(x,x)) = false$, avec $I' = I \circ \{x \to d\}$; c'est-à-dire que $d < d$, qui est toujours faux.
Donc $Val_I(\forall x\ \neg P(x,x)) = True$

Axiome 2 : $\forall x\ \forall y\ \forall z\ P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z) = True$
ssi $\forall a, b, c \in \mathfrak{R}$ si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$ ce qui est toujours vrai.
Conclusion : I est un modèle de OPS et OPS est donc consistant.

2)

1. $\forall x\ \neg P(x,x)$	Axiome 1
2. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)$	Axiome 2
3. $\neg\forall x\ \forall y\ P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x)$	Hypothèse
4. $\exists x \exists y\ \neg\ (P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x))$	$\neg\exists z \Longleftrightarrow \forall z \neg$
5. $\exists x \exists y\ \neg\ (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,x))$	Implication
6. $\exists x \exists y\ P(x,y) \wedge P(y,x)$	De Morgan 2
7. $P(a,b) \wedge P(b,a)$	Élimination $\exists$
8. $P(a,b) \wedge P(b,a) \Rightarrow P(a,a)$	Axiome 2
9. $P(a,a)$	Modus Ponens (8, 2)
10. $\neg P(a,a)$	Élimination $\forall$ (1)
11. $\neg\neg\ \forall x\ \forall y\ (P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x)$	Réduction à l'absurde (3, 10)
12. $\forall x\ \forall y P(x,y) \Rightarrow \neg P(x,y)$	Négation

Exercice 2

Est-ce que

$$\forall x\ \forall y\ P(x,y) \vee P(y,x)$$

est un théorème de la théorie OPS ?

Solution

Soit $D_I = \mathfrak{R}$, $Val_I(P) = '<'$

On a déjà montré à l'exercice précédent que $Val_I(\text{Axiome 1}) = True$ et $Val_I(\text{Axiome 2}) = True$.

$Val_I(\forall x\ \forall y\ P(x,y) \vee P(y,x)) = True$ ssi $\forall a,\ b \in \mathfrak{R}\ Val_{I'}(P(x,y) \vee P(y,x)) = True$, avec $I' = I \circ \{x \to a, y \to b\}$; c'est à dire ssi $\forall a,\ b \in \mathfrak{R}\ a < b$ or $b < a$, ce qui est faux : on peut prendre comme contre-exemple $a = b$.
On conclut donc que $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \vee P(y,x)$ n'est pas un théorème de la théorie OPS.

Exercice 3

Expliquez ce qu'est une théorie du premier ordre *consistante* et *minimale.*

Solution

1. Une théorie est consistante si elle possède au moins un modèle.
2. Une théorie est minimale si aucun de ses axiomes ne peut être prouvé à partir des autres.

Exercice 4

La théorie FAM est définie au moyen des symboles de prédicats P, GP, GM, des symboles de fonction p et m et des axiomes :
Ax1 : $\forall x\ P(x,p(x))$
Ax2 : $\forall x\ P(x,m(x))$
Ax3 : $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \Rightarrow GP(x,p(y))$
Ax4 : $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \Rightarrow GM(x,m(y))$
Est-ce que

$$\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y)$$

est un théorème de la théorie FAM ?

il faut aussi vérifier que les axiomes sont vrais

Solution

Soit D_I = ensemble des humains qui ont un enfant, $Val_I(p)$ = 'père de', $Val_I(m)$ = 'mère de', $Val_I(P)$ = 'parent de', $Val_I(GP)$ = 'grand-père de', $Val_I(GM)$ = 'grand-mère de'

$Val_I(\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y)) = True$ ssi $\exists b \in D_I,\ \forall a \in D_I\ Val_{I'}(\neg P(x,y)) = True$, avec $I' = I \circ \{x \to a, y \to b\}$; c'est à dire ssi $\exists b \in D_I$ qui n'a pas d'enfant, ce qui est faux.
On conclut donc que $\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y)$ n'est pas un théorème de la théorie FAM.

Exercice 5

Soit T un théorie du premier ordre minimale. Supposons que $\nvdash_{\mathrm{T}}$ Ax. Est-ce que T + Ax est toujour minimale ?

Solution

Exercice 6

Montrez que

$$\forall x \; \exists y \; P(x,y)$$

est un théorème de la théorie FAM.

Solution

Exercice 7

Est-ce que la formule

$$\forall x \; \forall z \; GP(x,z) \Rightarrow \exists y \; P(x,y) \wedge P(y,z).$$

est un théorème de la théorie FAM ?

Solution

Exercice 8

Dans la théorie de l'ordre partiel, démontrez

1. $\models_{OP} \forall x \; \forall y \; x == y \Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x$
2. $\models_{OP} \forall x \; \forall y \; x \leq y \wedge \neg(x == y) \Rightarrow \neg(y \leq x)$

Solution

TP 8

Exercice 1

Modelisez les propositions suivantes en prolog.

1. $\forall\ X, Y, Z\ american(X)\ \wedge\ weapon(Y)\ \wedge\ sells(X, Y, Z)\ \wedge\ hostile(Z) \Rightarrow criminal(X)$
2. $owns(nono, m1)$
3. $missile(m1)$
4. $\forall X\ missile(X)\ \wedge\ owns(nono, X) \Rightarrow sells(west, X, nono)$
5. $\forall X\ missile(X)\ \Rightarrow weapon(X)$
6. $\forall X\ enemy(X, america) \Rightarrow hostile(X)$
7. $american(west)$
8. $enemy(nono, america)$

Quelles sont les étapes que prolog fait pour répondre à la requête `criminal(west)` ?

Solution

```
criminal(X) :- american(X), weapon(Y), sells(X, Y, Z), hostile(Z).
owns(nono, m1).
missile(m1).
sells(west, X, nono) :- missile(X), owns(nono, X).
weapon(X) :- missile(X).
hostile(X) :- enemy(X, america).
american(west).
enemy(nono, america).
```

TODO : ÉTAPES

Exercice 2

Dans cet exercice on va voir comment définir des prédicats pour l'arithmétique en prolog. On définit 0 par le symbole `0`, 1 par `s(0)`, 2 par `s(s(0))` etc. On définit $-x$ par `negative(x)`. Par example, -2 est representé par `negative(s(s(0)))`.

1. Écrivez un programme qui fait la somme de deux nombres.
2. Écrivez un programme qui fait la soustraction de deux nombres.
3. Comment vous faites pour calculer $a - b$ si $a < b$?.

Solution

Pour réaliser un programme en Prolog, l'idéal est de réfléchir d'abord au cas de base, puis au cas récursif.

```
/* Addition */
add(0, X, X).                                 % 0+X=X
add(s(X), Y, Z) :- add(X, s(Y), Z).           % (X+1)+Y=Z  <==  X+(Y+1)=Z

/* Soustraction */
minus(X, 0, X).                               %  X-0=X
minus(s(X), s(Y), Z) :- minus(X, Y, Z).       % (X+1)-(Y+1)=Z  <==  X-Y=Z
minus(0, X, negative(X)).                     % Cas a < b
```

Exercice 3

Dans cette exercice on va voir comment définir des prédicats pour des opérations sur des listes en prolog. Écrivez un programme qui :

1. ajoute un élément dans une liste.
2. retire le premier élément d'une liste.
3. vérifie si une liste contient un élément donné.
4. fait la somme des éléments d'une liste.
5. fait la concaténation de deux listes.
6. calcule la taille d'une liste.
7. vérifie si deux listes sont les mêmes.
8. obtient le i-ème élément d'une liste.

Solution

```
/* Ajout/Suppression */
add(X, L, [X|L]).
remove([X|L], L).

/* Contient */
contains(X, [X|L]).
contains(X, [Y|L]) :- contains(X,L).

/* Somme */
sum([], 0).
sum([X|L], R) :- sum(L, R1), R is X + R1.

/* Concatenation */
concat([], L, L).
concat([X|L1], L2, [X|L3]) :- concat(L1, L2, L3).

/* Taille */
size([], 0).
size([X|L], R) :- size(L, R1), R is 1 + R1.

/* Comparaison */
equal([],[]).
equal([X|L1],[X|L2]) :- equal(L1, L2).

/* Recuperation element */
```

```
get([X|L], 1, X).
get([X|L], I, R) :- H is I - 1, get(L, H, R).
```

Exercice 4

Quel est le résultat de la requête `concat(X, Y, [1, 2, 3])` pour votre opération `concat` de l'exercice 3 ?

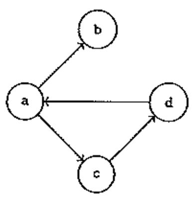
Solution

On obtient le résultat suivant :

```
X = [ ],
Y = [1, 2, 3]
```

Exercice 5

On peut modéliser un graphe en prolog avec des prédicats `link(a, b)` pour les arêtes du graphe. Par example, le graphe



est représenté par :

```
link(a, b).
link(a, c).
link(c, d).
link(d, a).
```

1. Écrivez un prédicat `path(X, Y)` qui est vrai s'il exsite un chemin de X à Y.
2. Est-ce que l'ordre des prédicats dans votre programme a de l'importance ?
3. Comment calculer le chemin, et pas juste savoir s'il y en a un ? Vous pouvez calculer le chemin dans l'ordre inverse si c'est plus simple.
4. Comment on fait pour calculer tous les chemins entre X et Y ?

Solution

```

/* Partie 1 : Existence */

link(a, b).
link(a, c).
link(c, d).
link(d, a).

path(X, Y) :- link(X, Y).
path(X, Y) :- link(X, Z), path(Z, Y).
```

```

/* Partie 2 : Ordre *

path(X,Y) :- path(Z, Y), link(X, Z).
% Fonctionne aussi, mais moins efficace.
% L'ordre des predicats n'a de l'importance que pour les performances.

/* Partie 3 : Chemin */

link(a, b, [a, b]).
link(a, c, [a, c]).
link(c, d, [c, d]).

path(X, Z, P) :- link(X, Z, P).
path(X, Z, [X|P2]) :- link(X, Y, P1), path(Y, Z, P2).
```

4) Pour calculer tous les chemins, il suffit de lancer le programme de la partie 3, puis d'attendre une réponse. Lorsqu'on a une solution, on peut demander au programme de revenir en arrière et de modifier son dernier choix pour trouver une solution différente. En pratique, cela peut se faire en répondant à la réponse du programme par un ";" au lieu d'un ".". Il n'y a qu'à réitérer l'opération jusqu'à ce que le programme n'ait plus de choix disponible et qu'il se termine pour de bon.

Exercice 6

Le programme suivant décide si un nombre est premier ou pas.

```
isPrime(2).
isPrime(3).
isPrime(P) :- P > 3, P mod 2 =\= 0, \+ hasFactor(P,3).
hasFactor(N,L) :- N mod L =:= 0.
hasFactor(N,L) :- L * L < N, L2 is L + 2, hasFactor(N,L2).
```

Montrez les étapes que prolog fait pour répondre aux requêtes `isPrime(15)` et `isPrime(17)`.

Solution

TODO

TP 9

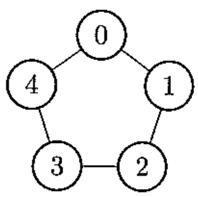
Exercice 1

Soient x, y et z trois nœuds distincts. On dit que x est un *nœud pivot* pour y et z si tous les chemins les plus courts entre y et z passent par x.

1. Donnez un exemple d'un graphe où tous les nœuds sont un nœud pivot pour au moins une paire de nœuds.
2. Donnez un exemple d'un graphe où tous les nœuds sont un nœud pivot pour au moins trois paires de nœuds.
3. Soit G un graphe qui représente les liens d'amitié d'un groupe de personnes. Si on suppose que la probabilitée que deux personnes qui ne sont pas amies au temps t deviennent amies au temps $t+1$ est inversement proportionelle a la distance entre elles, quel est l'effet sur la probabilité de retirer un personne pivot du graphe ?
4. Montrez qui si tous les nœuds sont un nœud pivot pour au moins une paire de nœuds alors le graphe posséde au moins un cycle.

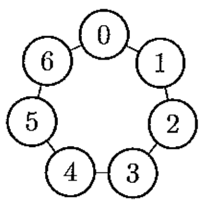
Solution

1) On prend $G =$



$\forall i$ le noeud i est pivot de $(i-1)\&(i+1)$ (modulo 5).

2) On prend $G =$



$\forall i$ le noeud i est pivot de : $(i-1)\&(i+1)$, $(i-1)\&(i+2)$ et $(i-2)\&(i+1)$ (modulo 7).

3) Retirer le noeud pivot augmente la distance entre 2 personnes. Donc la probabilité que celles ci deviennent amies au temps $t+1$ diminue.

4) On prouve d'abord que si un graphe n'a pas de cycle alors il possède au moins un noeud de degré 1.

Supposons que G n'a pas de cycle et V l'ensemble fini de ses noeuds. Soit $x \in V$. On construit une séquence $P = (x_1, x_2, x_3, ...)$. Pour choisir $x_i (i > 1)$, on prend un voisin de x_{i-1} qiu n'a pas encore été choisi. Comme V est fini, ce processus doit finir et on obtient $P = (x_1, x_2, x_3, ..., x_k)$. Le noeud k a un degré 1 car sinon il a un voisin $y \neq x_{k-1}$. Si $y \in P$: Contradiction. Si $y \notin P$, x_k n'est pas la fin de la séquance : Contradiction.

On prouve ensuite que un noeud de degré un ne peu pas etre pivot.

Soit $x \in V$ tel que $\deg(x) = 1$. Par hypothèse x est pivot d'une paire (y, z). Donc il existe un chemin le plus court entre y et z qui passe bien par x. Soit w le seul voisin de x. Mais alors il existe un chemin encore plus court : $(y, ..., w, ..., z)$ qui ne passe pas par x.

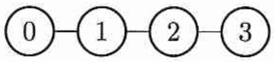
Exercice 2

Soient x, y et z trois nœuds distincts. On dit que x est un *gardien* de y et z si tous les chemins entre y et z passent par x. On dit qu'un nœud x est un *gardien locale* s'il existent deux voisins de x qui ne sont pas connectés directement.

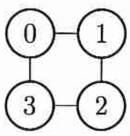
1. Donnez un exemple d'un graphe où au moins la moitié des nœuds sont gardiens.
2. Donnez un exemple d'un graphe où il n'y a pas de gardiens mais chaque nœud est un gardien locale.
3. Quel est l'impacte sur un graphe de retirer un gardien ?

Solution

1) Les noeud 1 et 2 sont gardien entre 0 et 3



2)



3) Le graphe n'est plus connexe

Exercice 3

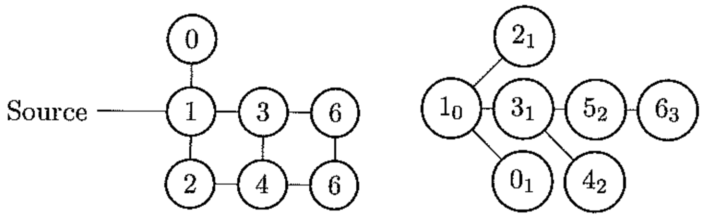
1. Comment peut-on faire pour calculer efficacement les distances d'un nœuds a tout les autres ?
2. Un graphe est biparti si on peut séparer les nœuds en deux ensembles V_1 et V_2 tells que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ et il n'y a pas d'arêtes entre aucune paire de nœuds de V_1 et pas d'arêtes entre aucune paire de nœuds de V_2. Soit G un graphe connexe et $d_0(x)$ la distance du nœud 0 au nœud x. Comment peut-on vérifier que G est bipartit a partir de d_0 ?

1) On utilise l'algorithme BFS qui utiise une `Queue FIFO`

1. Mettre le nœud source dans la Queue. (n'importe quel noeud)
2. Retirer le nœud du début de la Queue pour l'examiner.

3. Mettre tous les voisins non explorés dans la Queue.
4. Si la file n'est pas vide reprendre à l'étape 2.

Exemple :



2) On vérifie qu'il n'existe pas d'arètes (x, y) tel que $d_0(x)$ et $d_0(y)$ ont la meme parité

Exercice 4

Le *diamètre* d'un graphe connexe est la distance maximum entre toutes les paires de nœuds. La *distance moyenne* d'un graphe connexe c'est la moyenne des distances entre toutes les paires de nœuds. Formellement

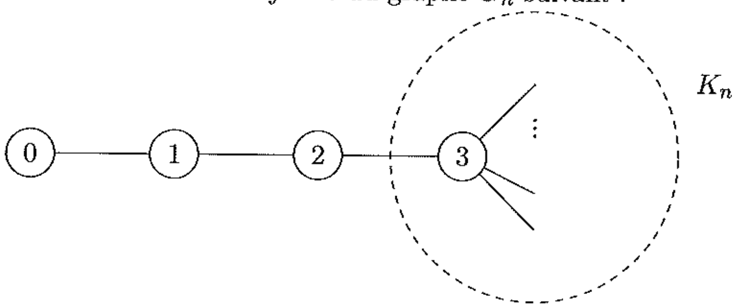
$$diam(G) = \max_{u,v} d(u, v)$$

et

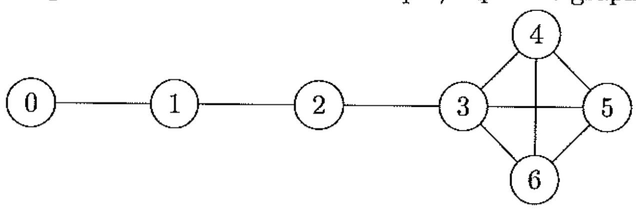
$$l_G = \frac{1}{V(V-1)} \sum_{u \neq v} d(u, v)$$

oú V est le nombre de nœuds de G.

1. Calculez le diamètre et la distance moyenne du graphe G_n suivant :



où K_n est le graphe complet avec n nœuds. Par examplе, G_4 est le graphe :



2. Montrez qu'il existe un graphe G avec plus de 7 nœuds tel que

$$\frac{diam(G)}{l_G} = 2$$

Solution

1) $\dim(G) = 4$

Selon la table des distance :

	0	1	2	3	>3
0	0	1	2	3	4
1	1	0	1	2	3
2	2	1	0	1	2
3	1	2	3	0	1
>3	4	3	2	1	1 (0 si lui meme)

On peut calculer $\sum_{u \neq v} d(u,v)$.

$$\begin{aligned}\sum_{u\neq v} d(u,v) =& 6+4(n-1)\\ &+4+3(n-1)\\ &+4+2(n-1)\\ &+6+(n-1)\\ &+(n-1)(10+(n-2))\\ =&20+(n-1)(4+3+2+1)+(n-1)(9+(n-2))\\ =&20+10(n-1)+9(n-1)+(n-1)^2\\ =&20+19(n-1)+(n-1)^2\\ &\Rightarrow l_G(n)=\frac{n^2+17n+2}{n^2+5n+6}\end{aligned}$$

2) $\dfrac{\mathrm{diam}(G)}{l_G} = \dfrac{4}{l_G} = 2$

$$\begin{aligned}&\frac{4n^2+20n+24}{n^2+17n+2}=2\\ &\Rightarrow 4n^2+20n+24=2n^2+34n+4\\ &\Rightarrow 2n^2-14n+2\\ &\Rightarrow n=5 \quad \& \quad n=2\end{aligned}$$

Or G doit comporter au moins 7 noeuds donc $G(5)$.

Exercice 5

On suppose qu'on est dans une communauté ou les amitiés sont représentées par un graphe G connexe avec n nœuds. Si chaque jour les amis des amis se rencontrent et deviennent amis, on s'interesse au nombre de jours $T(G)$ nécessaires pour que tout le monde deviennent ami, c'est-à-dire, pour le graphe deviennent K_n (un graphe complet).

1. Supposons que $G = P_n$ (le chemin avec n nœuds) et $T(P_n)$.
2. Même question pour $G = C_n$ (le cycle avec n nœuds).
3. Quel est la valeur de $T(G)$ en géneral ?

Solution

1) Soit $A(i)$, les amis de 0 au jour i.

$$
\begin{aligned}
A(0) &= \{1\} \\
A(1) &= \{1, 2\} \\
A(2) &= \{1, 2, 3, 4\} \\
A(3) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \} \\
A(i) &= \{x + y | x, y \in A(i-1)\} \\
&= \{1, 2, 3, ..., 2^i\} \\
T(P_n) &= \lceil \log_2(n) \rceil
\end{aligned}
$$

2) Le noeud le plus loin de 0 dans un cycle de n noeuds, est le noeud $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$T(C_n) = \left\lceil \log_2 \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right\rceil$$

3) En général les noeuds à distance maximum prennent le plus de temps. Cette distance est le diamètre du graphe. Donc :

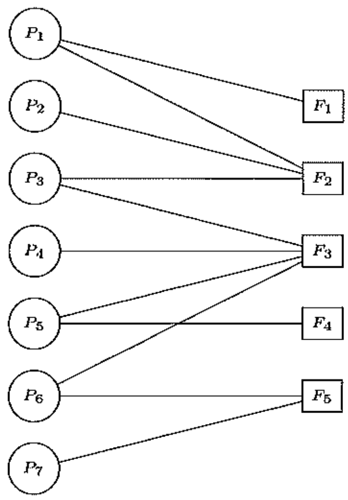
$$T(G) = \lceil \log_2 (\dim(G)) \rceil$$

TP 10

Exercice 1

Soit $G = (P, F)$ un graphe d'affiliations (P repésente les personnes et F les focus). On définit le *graphe projeté sur les personnes* comme étant un graphe avec ensemble de sommets P et tel qu'il existe un lien entre deux personnes s'il existe un focus commun aux deux personnes dans G.

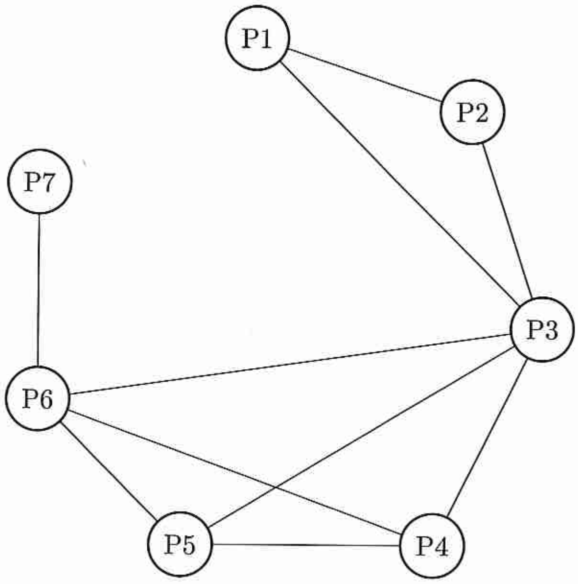
On considère le graphe d'affiliations suivant.



1. Calculez le graphe projeté sur les personnes.
2. Donnez, si possible, un autre graphe d'affiliations avec la même projection sur les personnes.

Solution

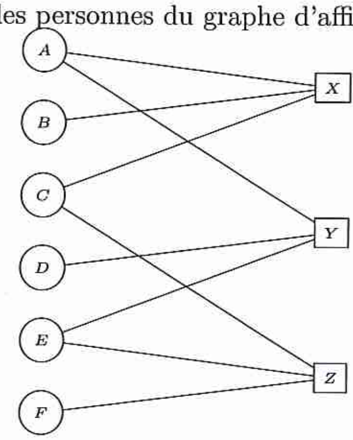
La projection sur les personnes donne le graphe suivant :



Il est facile d'obtenir la même projection avec un graphe d'affiliations différent. On peut pour cela rajouter un (ou plusieurs) focus relié(s) à une seule personne. Il est aussi possible de diviser un focus en 3 focus (vu plus en détail à la question 3).

Exercice 2

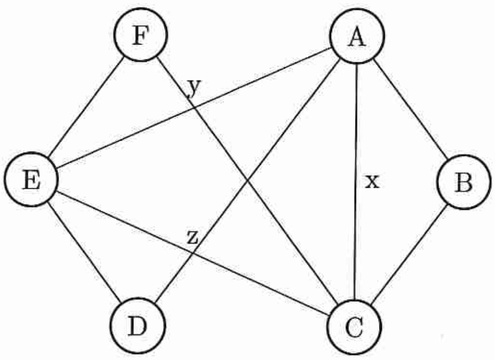
1. Calculez de graphe projeté sur les personnes du graphe d'affiliations suivant.

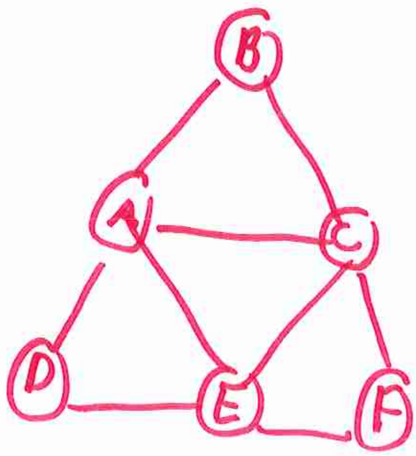


2. Dans le graphe résultant de la projection, expliquez la diffèrence qualitative entre le triangle A-E-C et les autes.

Solution

Le graphe projeté sur les personnes est le suivant :





(plus joli ^^)

c'est vrai mais c'est pas vraiment un théorème du cours.

La différence entre le triangle A-E-C et les autres est que celui-ci ne correspond pas à 1 seul et unique focus. En effet, A-C correspond à x, A-E à y, et C-E à z.
Il y a d'ailleurs un théorème important qui signale que lorsque la projection sur les personnes contient un sous-graphe complet, cela n'implique pas l'existence d'un focus commun à tous ses noeuds.

il en correspond à aucun.

Exercice 3

Quel est le nombre minimum de focus qu'il faut avoir dans un graphe d'affiliation pour que sa projection sur les personnes soit le graphe complèt si il n'y a pas de focus commum à toutes les personnes ?

Solution

Il faut au minimum **trois** focus pour que la projection sur les personnes donne un graphe complet sans avoir de focus commun à tous.

On prouve tout d'abord que cela ne fonctionne pas avec moins de 3 focus.
Si l'on prend 1 seul focus, le seul moyen d'obtenir le graphe complet est de relier toutes les personnes à ce focus, et on aura donc 1 focus commun à tous.
Si l'on prend 2 focus, on peut démarrer avec 3 personnes et voir qu'il est impossible d'obtenir K_3 avec la projection sur les personnes. En effet, pour éviter d'avoir un focus commun, on prend 2 de ces personnes et on les relie chacune à un focus différent. La $3^{\text{ème}}$ personne est reliée aux 2 focus, et donc aux 2 autres. Mais il est donc impossible de connecter les 2 premières sans que toutes aient un focus commun.
On a donc montré qu'on ne pourra pas employer moins de 3 focus.

Prouvons maintenant que 3 focus suffisent.
On reprend le principe de la construction effectuée précédemment pour 2 focus et 3 personnes. On relie 2 personnes à 2 focus différents. Ensuite, on relie la $3^{\text{ème}}$ à ces 2 focus. Il ne reste qu'à connecter les 2 premières grâce au $3^{\text{ème}}$ focus inoccupé. Chaque focus n'est donc commun qu'à 2 personnes, et donc aucun n'est commun à toutes les personnes.
Si l'on ajoute une personne, il ne faut le relier qu'à 2 focus pour le relier aux autres. On peut par exemple l'attacher aux mêmes focus que la $3^{\text{ème}}$ personne, de sorte qu'il soit connecté à toutes les autres. Le focus commun aux 2 premières reste uniquement lié à ces 2 personnes. On peut donc continuer à rajouter des personnes sans déroger à cette règle.
On a donc montré que 3 focus suffisent à obtenir le résultat souhaité, ceci termine la preuve.

Exercice 4

Dans une étude sur trois petits villages A, B et C chacun habité par 30 personnes, on a construit un réseau social avec les personnes des trois villages et on a constaté que chaque personne est amie avec les personnes du même village mais enemie des personnes des deux autres villages.

1. Est-ce que le graph satisfait la propriété de balance structurelle ?
2. Et la proriété de balance structurelle faible ?
3. Est-ce qu'il existent des triangles $(-,-,-)$? Et $(+,+,-)$?

Solution

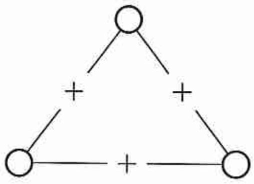
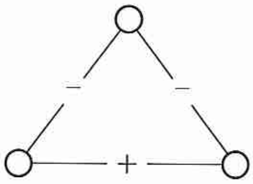
Rappel :
Un graphe satisfait la propriété d'équilibre structurel si et seulement si il peut être séparé en deux parties telles que chaque partie contient uniquement des +, et qu'il n'y a que des − entre ces deux parties.

ou une partie avec tous +

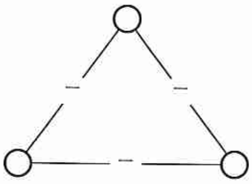
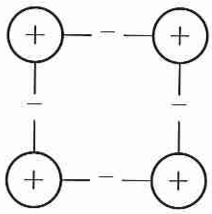
+ − + ou +

La propriété d'équilibre structurel faible correspond à un graphe qui peut être séparé en plus de deux parties qui respectent les conditions sus-mentionnées.

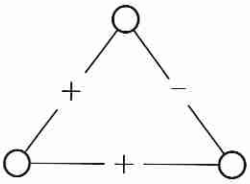
Exemples de graphes équilibrés :

Exemples de graphes faiblement équilibrés :

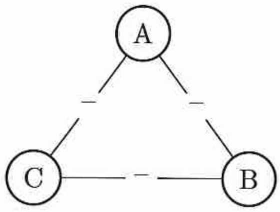



Exemple de graphe non équilibré :

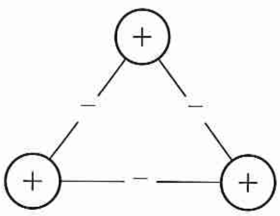


Solution :

Le graphe de cette situation peut être représenté comme suit :



Avec les noeuds A, B et C tels qu'ils ne contiennent que des +. On peut donc le retracer :



Ce graphe ne satisfait pas la propriété de balance structurelle. En revanche, il respecte l'équilibre faible.
On constate qu'il existe des triangles (−, −, −) : il suffit de prendre 3 personnes issues de 3 villages différents. Il n'y a pas de triangles (+, +, −) : pour avoir un lien −, il faut prendre 2 personnes de 2 villages différents, et pour avoir un lien + il faut 2 personnes du même village. D'autre part, la présence de tels triangles donnerait un graphe non-équilibré.

Exercice 5

Soit K_n le graphe complet avec $n \geq 5$ sommets. Supposons que les liens $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, ... $(n-1,n)$, $(n,1)$ sont positifs et que tous les autres liens sont négatifs. Pour chaque lien comptez le nombre de triangles balancés et non balancés auxquelles il appartient.

Solution

Il y a deux types de triangles balancés :

1. Les triangles composés uniquement de liens positifs : ce graphe n'en compte aucun.
2. Les triangles composés d'un seul lien positif et de deux liens négatifs : à chaque lien positif correspondent $n-4$ triangles de cette sorte (on retire les 2 noeuds incidents au lien, ainsi que les 2 noeuds qui leur sont adjacents par un lien positif).

Il n'y a par contre qu'un seul type de triangle non-balancé contenant un lien positif : les triangles contenant deux liens positifs et un négatif. Pour chaque lien positif il y en a 2 ("un de chaque côté").

Puisqu'il y a n lien positifs, il y a donc au total $n(n-4)$ triangles balancés. Il y a également $\frac{2n}{2}$ triangles non balancés pour ces liens positifs. On divise par deux, car chacun de ces triangles emploie 2 liens positifs.

On peut vérifier tout cela en comptant le nombre total de triangles possédant un lien positif. Ce nombre est $n(n-2)-n = n(n-3)$. Le terme $(n-2)$ vient du fait qu'on compte ici les triangles en prenant les deux noeuds incidents à chaque lien positif. On doit ensuite en retirer n, sinon on compterait deux fois chaque triangle composé de deux liens positifs. On vérifie donc bien $n(n-4)+n = n(n-3)$, le compte est bon.

Exercice 6

Si G est complet et non équilibré est-ce possible d'introduir un noveau sommet tel que tout les triangles auxquelles ce sommet appartient soient équilibrés ? Si oui donnez une procedure pour le faire. Sinon donnez une preuve.

Solution

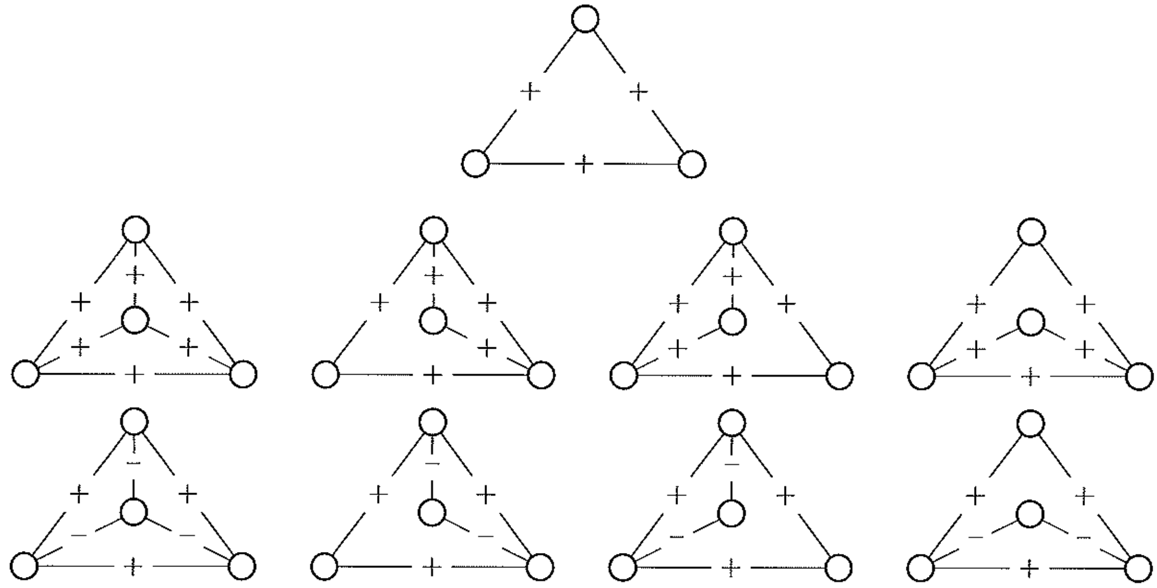
Si G est complet et non équilibré il est impossible d'introduire un nouveau sommet tel que tous les triangles auxquels ce sommet appartient soient équilibrés en gardant le caractère complet de G. En revanche, si l'on ne conserve pas cette propriété, l'opération est possible.
Si G ne possède que des liens négatifs, il suffit de relier un sommet au nouveau par un lien positif, et un autre sommet par un lien négatif. On obtiendra ainsi un (et un seul, il est impossible d'en créer plus) triangle (+, −, −), qui est équilibré.
Si G possède des triangles du type (+, +, −), on peut relier le nouveau sommet à deux sommets liés par un lien négatif comme dans le cas précédent (+, −, −) ; ou à deux sommets liés par un lien positif avec deux liens positifs (+, +, +) ; ou à deux sommets liés par un lien positif avec un lien positif et un lien négatif (+, −, −).

Exercice 7

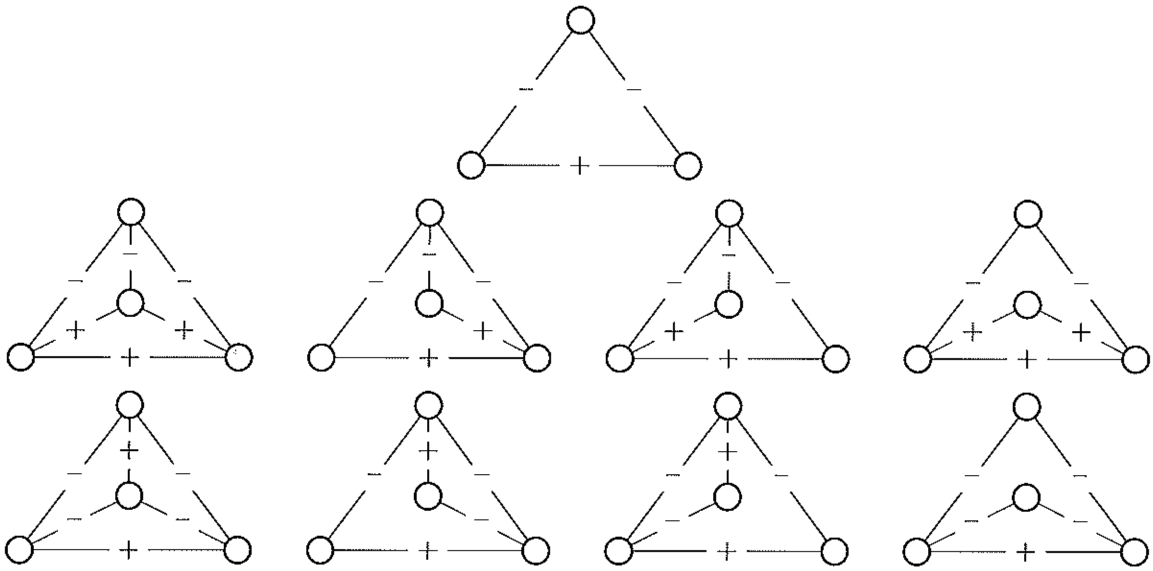
Soit G un triangle équilibré. De combien de façons peut-on ajouter un sommet en gardant l'équilibre structurel ?

Solution

Commençons par le premier type de triangles équilibrés :

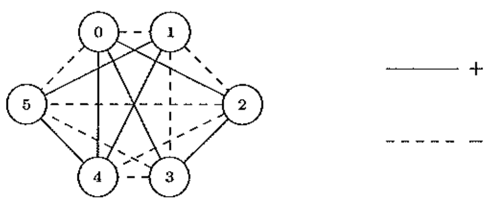


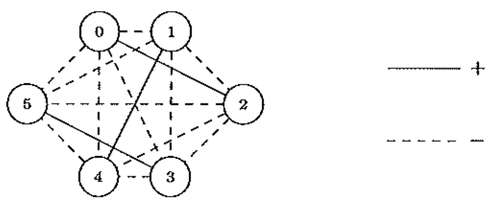
Pour le second type de triangles équilibrés :

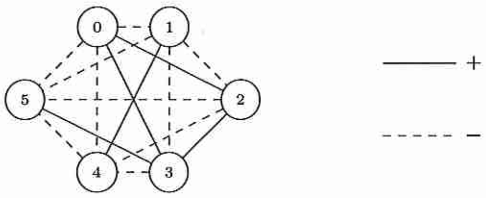


Exercice 8

Est-ce que les graphes suivants ont la propriété d'équilibre structurel ? Et d'équilibre stucturel faible ?







Solution

- Ce graphe satisfait la propriété d'équilibre structurel. On peut séparer les noeuds en deux groupes : (0, 2, 3) et (1, 4, 5). Ces groupes ne contiennent que des liens positifs, et ne sont liés que par des liens négatifs.
- Ce graphe ne satisfait pas la propriété d'équilibre. Il contient des triangles faiblement équilibrés : (0, 4, 5), (1, 2, 3), (2, 3, 4), ... En revanche, il satisfait la propriété d'équilibre faible. On peut le séparer en 3 groupes : (0, 2), (1, 4) et (3, 5).
- Ce graphe ne satisfait pas la propriété d'équilibre. Il contient un triangle non-équilibré : (0, 3, 5).

Exercice 9

On prends un groupe de n personnes et on ajoute des liens entre chaque paire de personnes avec le signe du lien choisi aléatoirement. Chaque lien est positif avec probabilité $\frac{1}{2}$. Quel est la probabilité que le graphe soit structurellement équilibré ?

Solution

On cherche le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas total.
Puisque chaque arête prend 1 valeur parmi 2, et que le graphe est complet, il y a $2^{|E|} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}}$ cas possibles.
On a $\frac{2^n}{2}$ cas favorables. **TODO : RAISONNEMENT**
On a donc une probabilité de :

$$\frac{\frac{2^n}{2}}{2^{\frac{n^2-n}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{n^2-3n+2}{2}}}$$

chaque sommet soit gauche soit droit ⇒ 2^n choix

mais A B même chose que B A

donc /2.

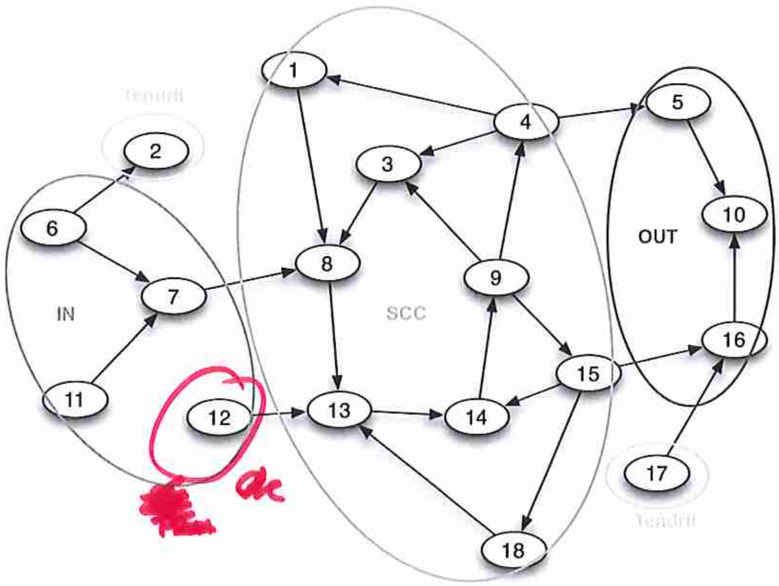
Cette probabilité vaut donc 0.5 dans le cas où $n = 3$. Ce qui est logique, puisque dans ce cas on a 8 triangles possibles, dont 4 sont équilibrés.

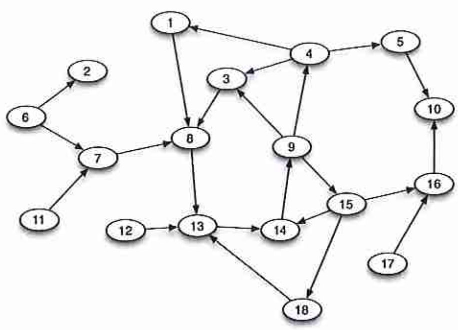
TP 11

Exercice 1

Considérer de graphe avec 18 pages Web dans la Figure 1. Quels sont les noeuds qui font partie du noyau, les noeuds IN et les noeuds OUT ?

Solution





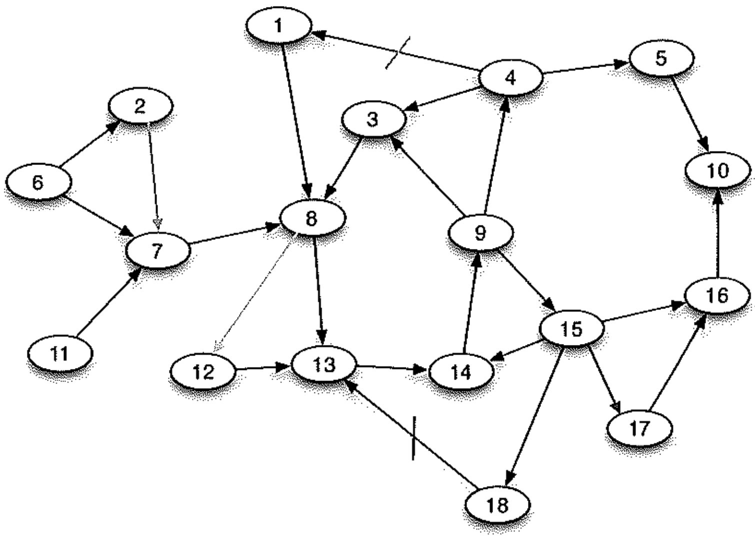
Graphique 1 – Un graphe des pages web.

Exercice 2

Pour le graphe de la Figure 1.

1. Montrez une arête tel que si on l'ajoute ou on la retire, on augmente la taille du noyau.
2. Montrez une arête tel que si on l'ajoute ou on la retire, on augmente la taille de IN.
3. Montrez une arête tel que si on l'ajoute ou on la retire, on augmente la taille de OUT.

Solution



— Le vert indique une arête à rajouter/retirer pour augmenter la taille du IN.
— Le rouge indique une arête à rajouter/retirer pour augmenter la taille du OUT.
— Le bleu indique une arête à rajouter pour augmenter la taille du SCC. Il n'est pas possible d'augmenter la taille du SCC en retirant une arête.

Il y a bien sûr d'autres possibilités que celles-là.

Exercice 3

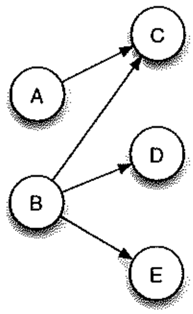
Décrivez un graphe tel qu'il existe une arête dont le retrait diminue la taille du noyeau d'au moins 1000 noeuds.

Solution

Il faut pour cela un noyau qui possède un ensemble de 1000 noeuds ou plus qui n'est pas relié au IN ni au OUT et qui est relié au reste du noyau par seulement 2 arêtes : une entrante et une sortante. Supprimer l'arête qui va de cet ensemble au reste revient à rajouter l'ensemble au IN, tandis que supprimer l'autre arête revient à l'ajouter au OUT.

Exercice 4

Décrivez un graphe tel qu'il existe une arête dont l'ajout diminue la taille de OUT d'au moins 1000 noueds.



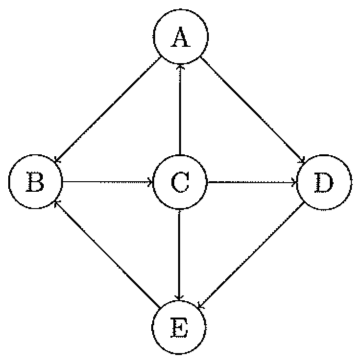
Graphique 2 – graphe de page web

Solution

Il faut que le OUT possède une chaîne de 1000 noeuds ou plus et dont au moins un des noeuds de départ est directement lié au noyau. Il suffit de rajouter une arête au dernier noeud de cette chaîne pour qu'elle fasse partie intégrante du noyau, et donc pour diminuer la taille de OUT.

Exercice 5

1. Calculez les valeurs de concentrateurs et d'autorités pour les pages dans le graphe présenté à la Figure 2 après deux itérations.
2. Quelles sont les valeurs une fois que la normalisation a été effectuée.



Graphique 3 – graphe de page web

Solution

— **Auth** : authorité : liens entrants
— **Conc** : concentrateur : liens sortants

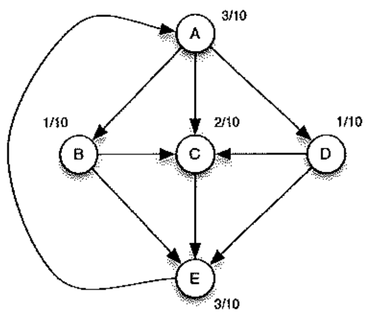
	A	B	C	D	E
Auth	1	1	1	1	1
Conc	1	1	1	1	1
Auth	0	0	2	1	1
Conc	1	3	0	0	0
Auth	0	0	4	3	3
Conc	2	4	0	0	0

Normalisation :

	A	B	C	D	E
Auth	0	0	0.4	0.3	0.3
Conc	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0

Exercice 6

Calculez les valeurs de PageRank pour chaque page dans le graphe présenté à la Figure 3 après deux itérations avec S = 1.



Graphique 4 – graphe de page web

Solution

Règle de mise à jour : $Pr'(p) = S\ Pr(p) + (1-S)\frac{1}{n} = Pr(p)$. Seule la probabilité de suivre un lien à partir d'une page web entre en compte ici.
À chaque itération k, on effectue les mises à jour suivantes :

$Pr(A) = \frac{1}{3}Pr(C)$
$Pr(B) = \frac{1}{2}Pr(A) + Pr(E)$
$Pr(C) = Pr(B)$
$Pr(D) = \frac{1}{2}Pr(A) + \frac{1}{3}Pr(C)$
$Pr(E) = \frac{1}{3}Pr(C) + Pr(D)$

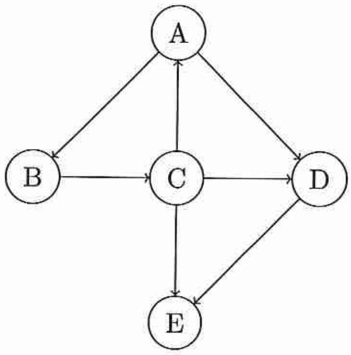
k	A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{30}$

Exercice 7

Dans la Figure 4, les nombres à coté des noeuds représentent la valeur de PageRank de la page. Avec ce graphe, les valeurs de PageRank forment-elles un ensemble équilibré ? Si oui pourquoi ? Si non pourquoi ?

Solution

Il y a deux conditions à respecter pour que les valeurs de PageRank d'un graphe forment un ensemble équilibré :



Graphique 5 – graphe de page web

1. La somme des valeurs doit valoir 1 : $\sum Pr(p_i) = 1$
2. Une nouvelle itération doit donner les mêmes valeurs : $Pr'(p_i) = Pr(p_i)\ \forall p_i$

Vérifions tout d'abord la première condition :

$$\sum Pr(p_i) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Ensuite la seconde :

$Pr'(A) = Pr(E) = \frac{3}{10} = Pr(A)$
$Pr'(B) = \frac{1}{3}Pr(A) = \frac{1}{10} = Pr(B)$
$Pr'(C) = \frac{1}{3}Pr(A) + \frac{1}{2}Pr(B) + \frac{1}{2}Pr(D) = \frac{2}{10} = Pr(C)$
$Pr'(D) = \frac{1}{3}Pr(A) = \frac{1}{10} = Pr(D)$
$Pr'(E) = \frac{1}{2}Pr(B) + Pr(C) + \frac{1}{2}Pr(D) = \frac{3}{10} = Pr(E)$

Nous pouvons donc conclure que nous cet ensemble de valeurs PageRank forme bien un ensemble équilibré.

Exercice 8

1. Calculez les valeurs de PageRank pour chaque page dans le graphe présenté à la Figure 5 après trois itérations avec S = 1.
2. Que remarquez-vous ? Selon vous comment vont évoluer les valeurs de PageRank pour un nombre d'itérations de plus en plus grand
3. Calculez à nouveau les valeurs de PageRank pour chaque page mais pour 2 itérations avec S = 0.5.

Solution

Pour S=1, à chaque itération k, on effectue les mises à jour suivantes :

$Pr(A) = \frac{1}{3}Pr(C)$
$Pr(B) = \frac{1}{2}Pr(A)$
$Pr(C) = Pr(B)$
$Pr(D) = \frac{1}{2}Pr(A) + \frac{1}{3}Pr(C)$
$Pr(E) = \frac{1}{3}Pr(C) + Pr(D)$ + Pr(E) (il n'y a pas de lien sortant)

On obtient le résultat qui suit :

k	A	B	C	D	E
0	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$
1	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{8}{30}$
2	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{7}{30}$
3	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$

recalculer avec $+ Pr(E)$

On remarque que la somme des valeurs ne vaut plus 1, et tend même à diminuer petit à petit. Les valeurs vont donc toutes tendre vers 0 lorsque le nombre d'itérations va augmenter.

Pour S=0.5, à chaque itération k, on effectue les mises à jour suivantes :

$Pr(A) = \frac{1}{6}Pr(C) + \frac{1}{10}$

$Pr(B) = \frac{1}{4}Pr(A) + \frac{1}{10}$

$Pr(C) = \frac{1}{2}Pr(B) + \frac{1}{10}$

$Pr(D) = \frac{1}{4}Pr(A) + \frac{1}{6}Pr(C) + \frac{1}{10}$

$Pr(E) = \frac{1}{6}Pr(C) + \frac{1}{2}Pr(D) + \frac{1}{10}$

Ils vont tous $\to 0$ sauf E qui $\to 1$

Le tableau résultant est :

k	A	B	C	D	E
0	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$
1	$\frac{4}{30}$	$\frac{4.5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4.25}{30}$	$\frac{7}{30}$
2	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5.25}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6.125}{30}$