МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)»

Институт «Компьютерные науки и прикладная математика» Кафедра 805

Группа М8О-211М-22 Направление подготовки 01.04.04 «Прикладная математика»

Магистерская программа «Информационные технологии в управлении»

Квалификация магистр

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

На тему: «Агрегирование нечётких отношений строгого порядка»

Автор ВКРМ Яманаева Римма Ренатовна (________)
(фамилия, имя, отчество полностью)

Научный руководитель Смерчинская Светлана Олеговна (________)
(фамилия, имя, отчество полностью)

Консультант ________ (________)
(фамилия, имя, отчество полностью)

Консультант ________ (________)
(фамилия, имя, отчество полностью)

Рецензент Латохин Дмитрий Владимирович (________)
(фамилия, имя, отчество полностью)

К защите допустить

Заведующий кафедрой № 805 Пантелеев Андрей Владимирович (________)
(фамилия, инициалы)

« 22 » мая 2024 г.

Москва 2024 г.

РЕФЕРАТ

ВКРМ содержит 81 страницу, 36 рисунков, 5 таблиц, 34 использованных источника.

АГРЕГИРОВАННОЕ ОТНОШЕНИЕ, НЕЧЁТКИЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ, РАНЖИРОВАНИЕ, СТРОГИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ПОРЯДОК, ТЕОРИЯ ГРУППОВОГО ВЫБОРА, ГАМИЛЬТОНОВЫ ПУТИ, НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА.

В ВКРМ показано решение задачи построения агрегированного нечёткого отношения на основе мнения экспертов, заданных нечёткими бинарными отношениями. Разработаны алгоритмы выявления экспертной информации и агрегирования предпочтений для нечёткого случая. Агрегирование производится с учётом цели минимизировать функцию расстояния, заданную на бинарных отношениях, а также улучшить характеристики результата, задаваемые относительно каждого предпочтения. Создана программная система поддержки принятия решений, реализующая предложенные алгоритмы. Апробация программы на реальных задачах показала работоспособность методик построения коллективного решения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Людям часто приходится делать выбор из множества предложенных вариантов, когда альтернативы невозможно оценить однозначно и объективно указать наилучшую. В таких случаях прибегают к методам экспертного оценивания, когда компетентные в заданной области люди, повинуясь своему опыту, имеют возможность оценить решения по неформальным, трудноформализуемым критериям, расставить альтернативы по убыванию предпочтительности и высказать, какие, по их мнению, альтернативы должны считаться наилучшими. Например, при голосованиях за кандидатов на выборные должности экспертами выступают заинтересованные лица – избиратели. В работе [1] показано разнообразие способов коллективного выбора, известных методов голосований, основанных на агрегировании упорядочений кандидатов избирателями. В частности, в [2] поднимается проблема выбора подмножества, а в [3] принимается во внимание нечёткая информация.

Значимость данной работы заключается в создании формального инструмента для коллективного выбора подмножества альтернатив или их ранжирования, учитывающего нечёткую информацию, выявляемую у экспертов, а также в обосновании выбранного способа агрегирования предпочтений. В работе исследуются методы теории группового выбора, затрагивающие нечёткие бинарные отношения.

Целью ВКР является разработка метода агрегирования нечёткой экспертной информации для более тонкого, в сравнении с четким случаем, решения задачи группового выбора. В задачи ВКР входят обоснование методов агрегирования, разработка системы поддержки принятия решений и тестирование её на реальных данных.

Для формального описания задач группового выбора возможно использовать различные математические методы: в [4-7], а также в [8-14] представлены элементы теории графов, аппарат теории множеств и нечётких бинарных отношений. В данных материалах поднимаются проблемы и приводятся соображения, на основании которых выбираются те или иные формальные модели. В работах [17-18], на теоретических результатах которых основывается данная ВКР, предлагаются способы построения агрегированного порядка для экспертных предпочтений, выраженных порядками, в том числе и способ построения мажоритарного графа, минимально удалённого от экспертных предпочтений – критерий минимальной совокупной удаленности от бинарных отношений экспертов представляется наиболее справедливым при коллективном выборе.

В качестве одного из самых близких источников к тематике исследования используется [19], где наиболее полно описаны решаемая задача и используемые методы. Продолжением этой работы с порядками является статья [20], объясняющая возможность применения аппарата нечётких множеств к решению задачи группового выбора. Предварительным исследованием зависимости результата от метода группового выбора можно считать работы [21, 22]. При практической реализации алгоритмов для быстрого создании транзитивных замыканий имеется возможность применять методы поиска путей в графе – алгоритм Флойда-Уоршалла, метод ветвей и границ [23, 24].

Методы агрегирования нечёткой экспертной информации представлены в работе [25], и основаны на использовании нечётких чисел и лингвистических переменных, что усложняет структуру вычислений и делает их менее прозрачными для понимания лицами, принимающими решения. В [26] описаны методы, наиболее близкие к исследуемым, но с отличающимся выбором критериев качества – в частности, с другим способом задания расстояния на множестве матриц нечётких отношений.

В данной работе выбор бинарных отношений как способа выявления экспертной информации основан на предположении о том, что людям проще сравнивать пару объектов, чем давать численные оценки сразу всем. Сложным моментом для модели является выявление информации, связанное с психологическим аспектом мышления человека [27]. К проблемам можно отнести:

- выбор последовательности предлагаемых эксперту пар для сравнения;
- сложность в численной оценке уверенности в том, кто в паре является доминирующей альтернативой;
- трудность понимания экспертом разницы понятий «вероятность» (статистическая) и «уверенность» (степень принадлежности) доминирования альтернатив;
- различие внутренних шкал экспертов.

В качестве путеводителя по литературе для дальнейшего изучения может быть использована обзорная статья [28], представляющая собой эпистемологический очерк, структурирование информации по теме решаемой задачи (в том числе в контексте исторического развития).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Определения

Гамильтонов путь – простой путь (путь без петель), проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Гамильтонов цикл – такой гамильтонов путь, начальная и конечная точки которого совпадают.

ЛПР – лицо, принимающее решение.

Матрица весов – матрица $\left[w_{ij}\right]_{n\times n}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, сопоставленная графу из n вершин, где w_{ij} – вес дуги, идущей из вершины с номером i в вершину с номером j.

Победитель по критерию Кондорсе – это кандидат, который победил бы каждого из остальных кандидатов при попарном сравнении.

Мажоритарное отношение – такое отношение ρ:

$$(a,b) \in \rho \Leftrightarrow n(a,b) \geq n(b,a), \tag{1.1}$$

где

$n(a,b)$ – количество индексов $i \in \{1,\dots,n\}$, для которых $(a,b) \in R^i$, а R^i – индивидуальное отношение на множестве альтернатив. Если $n(a,b) + n(b,a) = n$, то тогда ρ есть строгое (т.е. асимметричное) линейное предпочтение (см. [4, с. 90]). Иной вариант определения: $(a,b) \in \rho \Leftrightarrow n(a,b) \geq \frac{n}{2}$.

Расстояние «модуль разности» – расстояние $d(\rho_1,\rho_2)$ между отношениями ρ_1,ρ_2, ассоциируемыми с матрицами (смежности или принадлежности) R^1 и R^2. Это расстояние можно связать с расстоянием Хэмминга, работающем на четких матрицах бинарных отношений.

$$d(\rho_1,\rho_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|R_{ij}^1 - R_{ij}^2\right| \tag{1.2}$$

Расстояние «квадрат разности» между матрицами R^1 и R^2:

$$d(\rho_1, \rho_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(R_{ij}^1 - R_{ij}^2\right)^2 \qquad (1.3)$$

С ним также связано евклидово расстояние, которое является корнем из «квадрата разности». $d(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(R_{ij}^1 - R_{ij}^2\right)^2}$.

Суммарное расстояние $D(\rho)$ от отношения ρ (связано со своей матрицей R) до всех других отношений задаётся как

$$D(\rho) = \sum_{k=1}^{m} d(\rho, \rho_k) \qquad (1.4)$$

Минимум суммарного расстояния при использовании расстояния «квадрат разности» получается, когда каждый элемент матрицы R – среднее арифметическое элемента по всем матрицам экспертов: $R_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} R_{ij}^k$. Для расстояния «модуль разности» при нечётном числе экспертов m минимум достигается при медианных элементах $R_{ij} = R_{ij}^{t_{k+1}}$, где $R_{ij}^{t_1} \leq \dots \leq R_{ij}^{t_{k+1}} \leq \dots \leq R_{ij}^{t_{2k+1}}$. При чётном m элементы выбираются неоднозначно и дают минимум суммарного расстояния при $R_{ij} \in \left[R_{ij}^{t_k}, R_{ij}^{t_{k+1}}\right]$.

Медиана отношений (в случае чётких отношений – «точная медиана») – отношение, имеющее минимальное суммарное расстояние $D(\rho)$ до множества бинарных отношений (экспертных предпочтений). В случае, когда экспертные предпочтения задаются линейными порядками при нечетном числе экспертов, медиана определяется однозначно по правилу «большинства» (формулировка теоремы приведена в [29]). Предполагается, что линейная медиана, играющая роль агрегированного ранжирования, лучше соответствует экспертным предпочтениям по сравнению с другими вариантами ранжирований.

Отношение $\succ_P$ на множестве X задаётся так:

$$x_1, x_2 \in X, \qquad f_k(x_1) \geq f_k(x_2),\;\; k = \overline{1,m},$$
$$\exists K \in \{1, \dots, m\}: f_K(x_1) > f_K(x_2) \Leftrightarrow x_1 \succ_P x_2 \tag{1.5}$$

Множество оптимальных вариантов $P_f(X)$ – выбирает из множества X элементы так, что для элемента оптимального множества нельзя найти элемент исходного множества X такой, что был бы лучше по одному или нескольким параметрам при равенстве остальных. То есть, все другие элементы относительно включённого в оптимальное множество будут хуже хотя бы по одному параметру:

$$P_f(X) = \left\{x^* \in X \middle| \nexists x \in X: f_k(x) \geq f_k(x^*),\;\; \forall k = \overline{1,m},\;\; f(x) \neq f(x^*)\right\} \tag{1.6}$$

Или, в иной формулировке:

$$P_f(X) = \Big\{x^* \in X \Big| \nexists x \in X:\; f_k(x) \geq f_k(x^*),\;\; \forall k = \overline{1,m},$$
$$\exists l: f_l(x) \neq f_l(x^*)\Big\} \tag{1.7}$$

Нечёткое множество – подмножество упорядоченных пар:

$$A = \{x | \mu_A(x)\}, \qquad \mu_A: x \in X \to \mu_A(x) \in [0; 1] \subset \mathbb{R}^1, \tag{1.8}$$

где

X – универсальное (базовое) множество.

$\mu_A(x)$ – характеристическая функция, степень (функция) принадлежности элемента $x \in X$ множеству $A \subset X$. Если $\mu_A(x) = 1$, то элемент «чётко» принадлежит множеству A.

Носитель нечеткого множества A (основание) – нечеткое множество A таких точек в X, для которых $\mu_A(x) \succ 0$ или

$$supp\ A = \{x | \mu_A(x) > 0\}, \qquad \forall x \in X \tag{1.9}$$

Если $supp\ A \equiv \emptyset$, то заданно «чёткое» пустое множество A.

Точки перехода подмножества A – элементы $x \in X$, для которых порог $\alpha = 0.5$: $\mu_A(x) = 0.5$ (см. [7]).

Альфа-срез (множество альфа уровня) – те элементы исходного множества A, принадлежность которых не меньше (либо «строго выше») заданного порога α.

$$A_\alpha = \{x | x \in A \ \wedge \ \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{1.10}$$

$$A_\alpha = \{x | x \in A \ \wedge \ \mu_A(x) > \alpha\} \tag{1.11}$$

Нечёткое отображение – множество пар с введённой на нем характеристической функцией:

$$h: X \xrightarrow{\mu} Y = \{x \in X, y \in Y | \langle (x, y), \ \mu_h(x, y) \rangle\}, \tag{1.12}$$

где

$\mu_h(x, y)$ – функция принадлежности $(x, y) \in X \times Y$ (декартово произведение).

$x \in X$ – прообразы,

$y \in Y$ – образы.

$X, \ Y$ могут быть многомерными.

Нечёткое отношение – нечеткое отображение с $X = Y$:

$$r = \{x, y \in X | \langle (x, y), \ \mu_r(x, y) \rangle\} \tag{1.13}$$

Здесь подразумевается одномерное множество X. На нечётких отношениях можно ввести различные операции, а также нечеткие аналоги характеристик четких отношений (рефлексивность, симметричность и т. д.) [14].

Определения операций над нечёткими множествами (рисунок 1.1), $\forall x \in X$. Подробнее см. [13, 7].

Включение (доминирование, операция вложения):

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \tag{1.14}$$

Равенство:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \tag{1.15}$$

$\overline{A}$ – дополнение A:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{1.16}$$

Пересечение (вариант 1, пересечение по Заде):

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) \tag{1.17}$$

Пересечение (вариант 2, умножение по Ларсену, алгебраическое произведение):

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{1.18}$$

Пересечение (вариант 3, умножение по Лукашевичу):

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \tag{1.19}$$

Объединение (вариант 1, объединение по Заде):

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) \tag{1.20}$$

Объединение (вариант 2, вероятностное ИЛИ, алгебраическая сумма):

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{1.21}$$

Объединение (вариант 3, объединение по Лукашевичу):

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \min\big(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\big) \tag{1.22}$$

Разность $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (вариант 1, из пересечения по Заде):

$$\mu_{A\setminus B}(x) = \min\big(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\big) \tag{1.23}$$

Разность $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (вариант 2, из умножения по Ларсену):

$$\mu_{A\setminus B}(x) = \mu_A(x) \cdot \big(1 - \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{1.24}$$

Разность $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (вариант 3, из умножения по Лукашевичу):

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0) \quad (1.25)$$

Симметрическая разность (дизъюнктивная сумма) $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ (из (1.23)):

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \max\left(\min\left(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\right), \min\left(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)\right)\right) \quad (1.26)$$

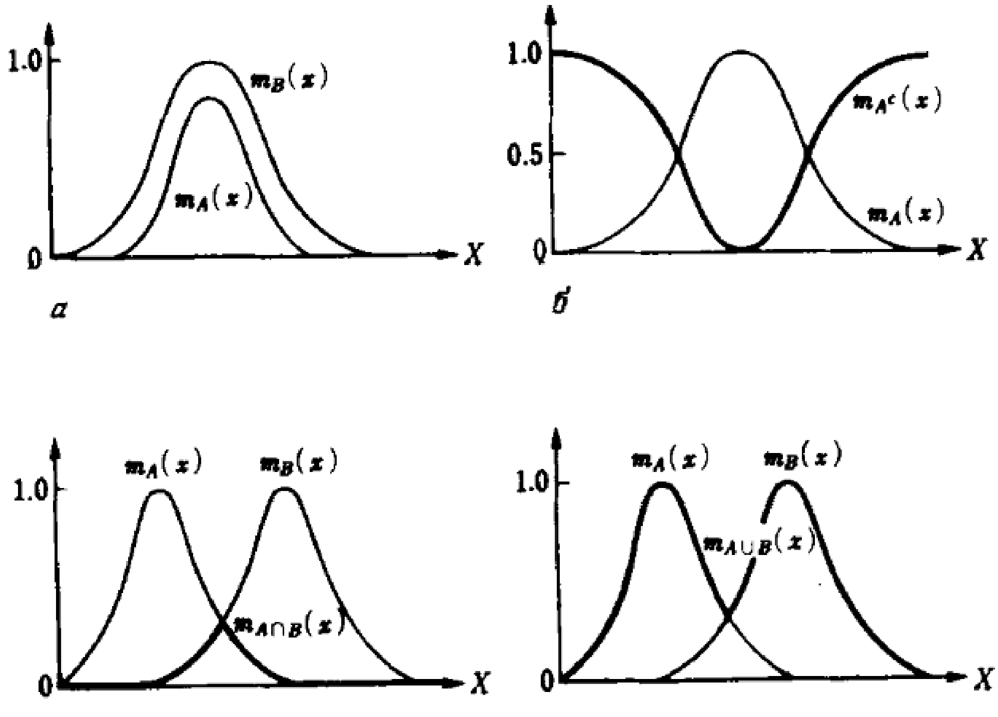


Рисунок 1.1 – Основные операции над нечёткими множествами

Для двух вариантов разностей можно привести простой пример, показывающий, что они не одинаковы (рисунок 1.2). Возьмем функции принадлежности $\mu_A(x) = x,\ \mu_B(x) = x$.

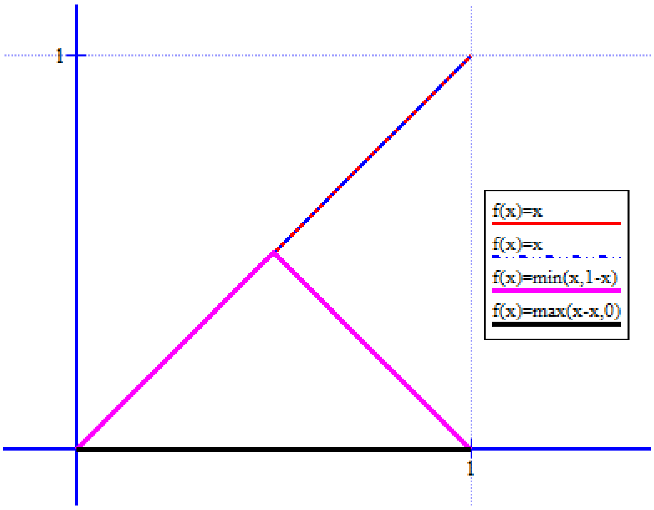


Рисунок 1.2 – Варианты разности

Нужно заметить, что

- в четком случае $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $\mu_A(x) \in \{0,1\} \Rightarrow \mu_{A\cap\overline{A}}(x) = 0$ для любого способа задания операций $\cap$, $\overline{A}$;
- в нечётком случае $A \cap \overline{A}$ зависит от определения операций $\cap$, $\overline{A}$.

Объединение множества и дополнения множества по (1.17):

$$\mu_{A\cap\overline{A}}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)\right) = \min\big(\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\big) \in [0; 0.5] \qquad (1.27)$$

Объединение множества и дополнения множества по (1.18):

$$\mu_{A\cap\overline{A}}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x) \cdot \big(1 - \mu_A(x)\big) = \mu_A(x) - \mu_A^2(x) \qquad (1.28)$$

Объединение множества и дополнения множества по (1.19):

$$\begin{aligned} \mu_{A\cap\overline{A}}(x) &= \max\big(0, \mu_A(x) + \mu_{\overline{A}}(x) - 1\big) \\ &= \max\big(0, \mu_A(x) + \big(1 - \mu_A(x)\big) - 1\big) \\ &= \max\big(0, \mu_A(x) - \mu_A(x)\big) = 0 \end{aligned} \qquad (1.29)$$

Если принять за универсальное множество $A \times A$, то для нечетких множеств также выполняется

$$(A \times A) \cap \rho = \rho \qquad (1.30)$$

$$(A \times A) \setminus \rho = (A \times A) \cap \overline{\rho} = \overline{\rho} \qquad (1.31)$$

В соответствии с операциями, введёнными в (1.17)-(1.19), (1.23)-(1.25).

Обратное отношение ρ^{-1} к нечёткому бинарному отношению ρ имеет функцию принадлежности:

$$\mu_{\rho^{-1}}(x,y) = \mu_\rho(y,x) \tag{1.32}$$

Композиция (максиминное произведение) $\rho_3 = \rho_2 \circ \rho_1$ двух нечетких бинарных отношений в общем случае:

$$\begin{gathered} x,y,z \in A, \qquad (x,y),(y,z),(x,z) \in A \times A \\ \mu_{\rho_3}(x,z) = \max_y\left(\min\left(\mu_{\rho_1}(x,y),\mu_{\rho_2}(y,z)\right)\right) \\ \Leftrightarrow \bigvee_y \left(\mu_{\rho_1}(x,y) \wedge \mu_{\rho_2}(y,z)\right) \end{gathered} \tag{1.33}$$

Операция max-min-композиции ассоциативна: $\rho_3 \circ (\rho_2 \circ \rho_1) = (\rho_3 \circ \rho_2) \circ \rho_1$. Также она дистрибутивна относительно объединения, но не дистрибутивна относительно пересечения:

$$\rho \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = (\rho \circ \rho_1) \cup (\rho \circ \rho_2)$$

$$\rho \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \neq (\rho \circ \rho_1) \cap (\rho \circ \rho_2)$$

Композиция $\rho^2 = \rho \circ \rho$ нечетких бинарных отношений:

$$\mu_{\rho^2}(x,z) = \max_y\left(\min\left(\mu_\rho(x,y),\mu_\rho(y,z)\right)\right) \Leftrightarrow \bigvee_y \left(\mu_\rho(x,y) \wedge \mu_\rho(y,z)\right) \tag{1.34}$$

Операция композиции производится над строками и столбцами подобно операции в матричном произведении по правилу «строка на столбец».

Максимультипликативное произведение двух нечётких бинарных отношений [3]:

$$\mu_{\rho_3}(x,z) = \sup_y\left(\mu_{\rho_1}(x,y) \cdot \mu_{\rho_2}(y,z)\right) \tag{1.35}$$

Обычное (чёткое) **отношение $\underline{A}$, ближайшее к нечёткому** отношению A – определяется выражением:

$$\mu_{\underline{A}}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x,y) < 0.5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_A(x,y) = 0.5\,, \\ 1, & \text{если } \mu_A(x,y) > 0.5 \end{cases}$$

$$\text{полагаем } \begin{cases} 0, & \mu_A(x,y) < 0.5 \\ 1, & \mu_A(x,y) \geq 0.5 \end{cases} \quad (1.36)$$

Определение ближайшего четкого отношения перекликается с определением альфа-среза (1.10) нечеткого отношения.

Рефлексивное нечёткое бинарное отношение ρ:

$$\forall (x,x) \in A \times A \colon \mu_\rho(x,x) = 1 \quad (1.37)$$

Когда на главной диагонали матрицы принадлежности все единицы. То есть четкая принадлежность пар (x,x) нечеткому бинарному отношению.

Обобщённый вариант определения: $(x,x) \in \rho$.

Антирефлексивное (**иррефлексивное**) нечёткое бинарное отношение ρ:

$$\forall (x,x) \in A \times A \colon \mu_\rho(x,x) = 0 \quad (1.38)$$

Когда на главной диагонали матрицы принадлежности стоят только нули. То есть, отсутствие пар (x,x) в нечетком бинарном отношении.

Обобщённый вариант определения: $(x,x) \notin \rho$.

Симметричное нечёткое бинарное отношение ρ:

$$\forall (x,y) \in A \times A \colon \big(\mu_\rho(x,y) = \mu\big) \Rightarrow \big(\mu_\rho(y,x) = \mu\big),$$
$$\text{также } \big(\mu_\rho(y,x) = \mu\big) \Rightarrow \big(\mu_\rho(x,y) = \mu\big), \text{ значит, } \mu_\rho(x,y) = \mu = \mu_\rho(y,x) \quad (1.39)$$

Матрица смежности симметрична относительно главной диагонали. На самой диагонали могут стоять различные числа (в том числе как единицы, так и нули).

Обобщённый вариант определения: $(x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$.

Несимметричное нечёткое бинарное отношение ρ:

$$\exists (x, y) \in A \times A, \qquad x \neq y: \mu_\rho(x, y) \neq \mu_\rho(y, x) \tag{1.40}$$

Антисимметричное нечёткое бинарное отношение ρ:

$$\forall (x, y) \in A \times A, \\ x \neq y: \mu_\rho(x, y) \neq \mu_\rho(y, x) \text{ или } \mu_\rho(x, y) = \mu_\rho(y, x) = 0 \tag{1.41}$$

Пары (x, x) могут как принадлежать, так и не принадлежать антисимметричному отношению.

Совершенное антисимметричное нечёткое бинарное отношение ρ – отношение со свойством сильнее, чем обычная антисимметрия. Любое совершенное антисимметричное отношение будет и антисимметричным отношением.

По Заде:

$$\forall (x, y) \in A \times A: \big(\mu_\rho(x, y) > 0 \text{ и } \mu_\rho(y, x) > 0\big) \Rightarrow (x = y) \tag{1.42}$$

По Кофману ([6, с. 113]):

$$\forall (x, y) \in A \times A, \qquad x \neq y: \big(\mu_\rho(x, y) > 0\big) \Rightarrow \big(\mu_\rho(y, x) = 0\big) \tag{1.43}$$

Обобщённый вариант определения (именно это определение в чётком случае обычно называют определением антисимметричного отношения):

$$(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y.$$

У антисимметричного (совершенного) отношения, при $x \neq y$, если есть одна пара (x, y), то другой пары (y, x) нет, также могут отсутствовать и обе. Пары (x, x) могут быть или не быть.

Асимметричное нечёткое бинарное отношение ρ:

$$\forall (x, y) \in A \times A: \big(\mu_\rho(x, y) > 0\big) \Rightarrow \big(\mu_\rho(y, x) = 0\big) \tag{1.44}$$

Или

$$\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset \Leftrightarrow \mu_{\rho \cap \rho^{-1}}(x, y) = 0 \tag{1.45}$$

У асимметричного отношения, при $x \neq y$, если есть одна пара (x, y), то другой пары (y, x) нет, также могут отсутствовать и обе. Пары (x, x) отсутствуют (на диагонали нули).

Обобщённый вариант определения: $(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \notin \rho$.

Транзитивное нечёткое бинарное отношение ρ – в таком отношении $\forall (x, y), (y, z), (x, z) \in A \times A$:

$$\mu_\rho(x, z) \geq \bigvee_y \left(\mu_\rho(x, y) \wedge \mu_\rho(y, z)\right) \tag{1.46}$$

Или

$$\mu_\rho(x, z) \geq \max_y \left(\min\left(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, z)\right)\right) \tag{1.47}$$

Или

$$\rho \supseteq \rho \circ \rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho^2 \subseteq \rho \tag{1.48}$$

Транзитивность является одним из основных свойств рационального отношения предпочтения ρ. Она означает, что если исход x не хуже исхода y с достоверностью $\mu_\rho(x, y)$ а исход y не хуже исхода z с достоверностью $\mu_\rho(y, z)$, то достоверность того, что x не хуже z не может быть меньше $\min\left(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, z)\right)$.

Обобщённый вариант определения: $(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$.

Транзитивное замыкание $\hat{\rho}$ (или $Tr\,\rho$) нечёткого бинарного отношения ρ:

$$|A| = n, \qquad (x, y) \in \rho \subseteq A \times A, \qquad \hat{\rho} = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n = \bigcup_{i=1}^{n} \rho^i \tag{1.49}$$

Верхний индекс обозначает операцию возведения в соответствующую степень. Кроме того, если для некоторого k имеем $\rho^{k+1} = \rho^k$, то $\hat{\rho} = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \dots \cup \rho^k$ (см. [6]).

Путь (также можно встретить наименования: **ранжирование**, **перестановка альтернатив**, **цепочка**) – упорядоченная последовательность элементов (вершин, узлов графа, альтернатив) с повторениями или без повторений, первым элементом является a_{i_1}, последним является a_{i_r}. Путь может быть отождествлён с графом отношения p^t (нечёткого или чёткого) и матрицей смежности P^t. Каждой паре вершин в пути соответствует дуга взвешенного орграфа. В случае нечёткого пути вес дуги равняется значению характеристической функции из $[0;1]$ (элементу матрице принадлежности нечёткому множеству пар). В чётком случае всему пути может сопоставляться матрица смежности (элементы матрицы из $\{0,\ 1\}$). Формы представления пути

$$\begin{gathered}\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\rangle \to p^t = \{\langle a_{i_1}, a_{i_2}\rangle, \langle a_{i_2}, a_{i_3}\rangle, \dots, \langle a_{i_{r-1}}, a_{i_r}\rangle\}, \\ a_{i_k} \in A,\ \ k = \overline{1,r}\end{gathered} \tag{1.50}$$

$$P^t = \left\|P_{ij}^t\right\|_{i,j=1}^n, \qquad P_{ij}^t = \begin{cases}1, & \langle a_i, a_j\rangle \in p^t \\ 0, & \langle a_i, a_j\rangle \notin p^t\end{cases}. \tag{1.51}$$

В пути из r вершин всего $(r-1)$ дуг непосредственного предшествования: $|p^t| = r - 1$.

Путь из всех n вершин может также задаваться бинарным отношением чёткого (или нечёткого) полного строгого линейного порядка – полного антирефлексивного асимметричного транзитивного отношения $\widehat{p^t}$ с матрицей $Tr(P^t)$. «Полное» – имеется в виду, что все альтернативы сравнимы.

$$\begin{gathered}\widehat{p^t} = \{\langle a_{i_1}, a_{i_2}\rangle, \langle a_{i_1}, a_{i_3}\rangle, \dots, \langle a_{i_1}, a_{i_n}\rangle, \qquad \langle a_{i_2}, a_{i_3}\rangle, \dots, \langle a_{i_2}, a_{i_n}\rangle, \\ \dots, \langle a_{i_{n-1}}, a_{i_n}\rangle\}.\end{gathered} \tag{1.52}$$

$$Tr(P^t) = \left\|\left(Tr(P^t)\right)_{ij}\right\|_{i,j=1}^n, \qquad \left(Tr(P^t)\right)_{ij} = \begin{cases}1, & \langle a_i, a_j\rangle \in \widehat{p^t} \\ 0, & \langle a_i, a_j\rangle \notin \widehat{p^t}\end{cases}. \tag{1.53}$$

Единица в $Tr(P^t)$ обозначает как непосредственно дугу между вершинами графа, так и предшествование одной вершины другой. Для матрицы $Tr(P^t)$ полного строгого линейного порядка для пути из n различных альтернатив выполняется

$$\left|\left\{\left(Tr(P^t)\right)_{ij}\middle|\left(Tr(P^t)\right)_{ij} > 0,\ i,j = \overline{1,n}\right\}\right| = \frac{n^2 - n}{2} \tag{1.54}$$

Множество путей из a_i в a_j: $\{C(a_i, a_j)|C(a_i, a_j) = \langle a_i = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} = a_j\rangle,\ r \in \mathbb{N}\}$.

Сила пути (пропускная способность пути) – минимальный вес из всех весов на ребрах пути (пропускная способность) во взвешенном орграфе с матрицей весов $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, обычно, с неотрицательными элементами:

$$Str(P^t, M) = \min\left(\left\{M_{ij}\middle|P_{ij}^t > 0,\ i,j = \overline{1,n}\right\}\right) \tag{1.55}$$

Также можно задать определение через функцию принадлежности для множества дуг p^t (см. (1.17)).

$$Str\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\right) = \mu_\rho\left(a_{i_1}, a_{i_2}\right) \wedge \mu_\rho\left(a_{i_2}, a_{i_3}\right) \wedge \dots \wedge \mu_\rho\left(a_{i_{r-1}}, a_{i_r}\right) \tag{1.56}$$

Это вес слабейшего звена пути в графе или, иначе, значение наименьшего веса дуги в цепочке дуг.

Сильнейший путь $C^*(a_i, a_j)$ из a_i в a_j – для него выполняется (см. (1.20))

$$Str\left(C^*(a_i, a_j)\right) = \bigvee_{\{C(a_i, a_j)\}} Str\left(C(a_i, a_j)\right), \tag{1.57}$$

где

$Str\left(C(a_i, a_j)\right)$ – сила пути из a_i в a_j.

$C^*(a_i, a_j)$ – путь, имеющий максимальную силу из всевозможных путей из a_i в a_j.

Длина пути – количество звеньев (дуг) пути в графе. Их на единицу меньше, чем количество вершин пути. Иногда под длиной пути могут подразумевать её стоимость или количество вершин пути.

Стоимость пути (иногда называют также длиной пути; также – **суммарный вес**) в графе – сумма весов всех дуг пути во взвешенном орграфе с матрицей весов $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Стоимость пути $p^t \leftrightarrow P^t$ может определяться по матрице M:

$$Cost(P^t, M) = \text{sum}\left(\left\{M_{ij} \middle| P_{ij}^t > 0,\ i, j = \overline{1, n}\right\}\right) \tag{1.58}$$

Полупредпорядок (**нерефлексивное нечеткое отношение предпорядка**) – нечёткое бинарное отношение, которое: 1) транзитивно.

Предпорядок (**нечеткое отношение предпорядка**, **квазипорядок**) – нечёткое бинарное отношение, которое: 1) рефлексивно; 2) транзитивно.

Антирефлексивный предпорядок (антирефлексивное нечеткое отношение предпорядка) – нечёткое бинарное отношение, которое: 1) антирефлексивно; 2) транзитивно.

Эквивалентность (**нечеткое отношение эквивалентности**, **отношение подобия**) – нечёткое бинарное отношение, которое: 1) рефлексивно; 2) симметрично; 3) транзитивно.

Порядок (**нечеткое отношение порядка**, **нестрогий порядок**, $x \succcurlyeq y$) – нечёткое бинарное отношение, которое: 1) рефлексивно; 2) антисимметрично; 3) транзитивно. Является антисимметричным предпорядком.

Строгий порядок ($x \succ y$) – нечёткое бинарное отношение, которое: 1) антирефлексивно; 2) антисимметрично; 3) транзитивно. Другой вариант определения строгого порядка: отношение 1) асимметричное; 2) транзитивное.

Совершенный порядок (**совершенный нестрогий порядок**) – нечёткое бинарное отношение, которое: 1) рефлексивно; 2) совершенно антисимметрично; 3) транзитивно.

Полный порядок (**полностью упорядоченное нечёткое отношение**) – отношение, у которого соответствующий ему обычный граф представляет собой полный порядок. Полнота отношения обычно означает, что каждая альтернатива сравнима с каждой (кроме, быть может, самой себя) – то есть, $\forall x, y$, где $x \neq y$, выполняется $(\langle x, y\rangle \in \rho) \vee (\langle y, x\rangle \in \rho)$.

Частичный порядок – отношение, у которого соответствующий ему обычный граф представляет собой частичное упорядочение.

Линейный порядок (линейное бинарное отношение, по Л.А. Заде) – полный совершенный порядок. Его можно определить через более строгое условие антисимметричности:

$$x \neq y, \qquad \text{либо } \mu_\rho(x, y) > 0, \;\; \text{либо } \mu_\rho(y, x) > 0 \tag{1.59}$$

У линейного отношения, при $x \neq y$, есть только одна из двух пар: $\langle x, y\rangle$ либо $\langle y, x\rangle$. Одновременно обе пары ($\langle x, y\rangle$ и $\langle y, x\rangle$) отсутствовать или присутствовать не могут. Пары (x, x) могут быть или не быть ([4, с. 36]).

Обобщённый вариант определения:

$$\forall x, y, \qquad x \neq y\colon (x, y) \in \rho \text{ либо } (y, x) \in \rho.$$

Альтернатива $\boldsymbol{x}$ доминирует альтернативу $\boldsymbol{y}$ с достоверностью $\mu_{\rho^S}(x, y)$, где ρ^S – нечетное отношение строгого предпочтения.

$$x \succ y, \qquad \text{если } \mu_\rho(x, y) > \mu_\rho(y, x) \tag{1.60}$$

Нечёткое отношение предпочтения (НОП) – нечеткое бинарное отношение на множестве альтернатив A, которое: 1) рефлексивно. Рефлексивность обусловлена тем, что предпочтение для упорядоченной пары $\langle x, y\rangle$ выражается по смыслу конструкцией «не хуже» – т.е. «x не хуже y», «x лучше либо равен y», $x \succcurlyeq y$. Соответственно, когда x, y – любые, то «x не хуже x» – это означает рефлексивность.

Нечеткое отношение строгого предпочтения ρ^S (**асимметричная часть** $As\,\rho$ отношения ρ) – соответствующее НОП нечеткое бинарное отношение, которое: 1) антирефлексивно, 2) совершенно антисимметрично. (Эти два условия можно заменить условием асимметричности.) В альтернатива $x \in A$ строго предпочитается альтернативе $y \in A$ (в обратную сторону не выполняется). В терминах теории множеств это можно записать как: $((x, y) \in \rho) \wedge ((y, x) \notin \rho)$ что то же самое, что $((x, y) \in \rho) \wedge ((x, y) \notin \rho^{-1})$.

$$\rho^S = As\,\rho = \rho \setminus \rho^{-1} \tag{1.61}$$

Значение функции принадлежности определяет степень достоверности строгого предпочтения между альтернативами.

Для $As\,\rho$ можно задать несколько способов вычисления матрицы принадлежности $\mu_{As\,\rho}(a_i, a_j)$, в зависимости от заданной операции разности множеств «\». Обозначим

$$\mu_{As\,\rho}(a_i, a_j) = R_{ij}^{As\,\rho}, \qquad \mu_\rho(a_i, a_j) = R_{ij}, \qquad \mu_{\rho^{-1}}(a_i, a_j) = R_{ji}.$$

Тогда, из (1.23):

$$R_{ij}^{As\,\rho} = \min\left(R_{ij}, 1 - \mu_{\rho^{-1}}(a_i, a_j)\right) = \min(R_{ij}, 1 - R_{ji}); \tag{1.62}$$

из (1.25):

$$R_{ij}^{As\,\rho} = \max(R_{ij} - \mu_{\rho^{-1}}(a_i, a_j), 0) = \max(R_{ij} - R_{ji}, 0). \tag{1.63}$$

Симметричная часть $Sym\,\rho$ отношения ρ – соответствующее НОП нечеткое бинарное отношение, которое: 1) симметрично. По смыслу определяет отношение, которое содержит в себе равноценные пары альтернатив.

$$\begin{aligned} Sym\,\rho &= \{(x, y) \in A \times A \,|\, ((x, y) \in \rho) \wedge ((y, x) \in \rho)\} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \,|\, ((x, y) \in \rho) \wedge ((x, y) \in \rho^{-1})\} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \,|\, (x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}\} = \rho \cap \rho^{-1} \end{aligned} \tag{1.64}$$

Функция принадлежности (по (1.17))

$$\mu_{Sym\,\rho}(x, y) = \min\left(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, x)\right) \tag{1.65}$$

Нужно заметить, что для нечётких отношений может быть $As\,\rho \neq \rho \setminus Sym\,\rho$. Если $As\,\rho = \rho \setminus \rho^{-1},\ Sym\,\rho = \rho \cap \rho^{-1}$, то

$$\rho \setminus Sym\,\rho = \rho \setminus (\rho \cap \rho^{-1}) = \rho \cap \overline{(\rho \cap \rho^{-1})} = \rho \cap \left(\overline{\rho} \cup \overline{\rho^{-1}}\right)$$
$$= (\rho \cap \overline{\rho}) \cup \left(\rho \cap \overline{\rho^{-1}}\right) = (\rho \cap \overline{\rho}) \cup (\rho \setminus \rho^{-1}) = (\rho \cap \overline{\rho}) \cup (As\,\rho).$$

Например, по (1.27) $\mu_{\rho\cap\overline{\rho}}(x,y) \in [0; 0.5] \Rightarrow \rho \cap \overline{\rho} \neq \emptyset$. В этом случае $As\,\rho \neq \rho \setminus Sym\,\rho$.

Например, по (1.29) $\mu_{\rho\cap\overline{\rho}}(x,y) = 0 \Rightarrow \rho \cap \overline{\rho} = \emptyset$. В этом случае $As\,\rho = \rho \setminus Sym\,\rho = (\rho \cap \overline{\rho}) \cup (As\,\rho) = \emptyset \cup As\,\rho$.

Нечеткое отношение безразличия ρ^I – соответствующее НОП нечеткое бинарное отношение, которое: 1) рефлексивно, 2) симметрично. Учитываем, что выполняется (1.30), (1.31). Альтернатива x в безразлична альтернативе y в двух случаях.

1) Если одновременно «x не хуже y» и «y не хуже x»: $(x,y) \in \rho$ и $(y,x) \in \rho$, то есть, $(x,y) \in Sym\,\rho$ (1.64).

2) Если одновременно $(x,y) \notin \rho$ и $(y,x) \notin \rho$ (нет информации, чтобы сравнить эти альтернативы). Или $\mu_\rho(x,y) = \mu_\rho(y,x) = 0$. Это условие можно записать как $\left((x,y) \notin \rho\right) \wedge \left((x,y) \notin \rho^{-1}\right) \Leftrightarrow (x,y) \in \left((A \times A) \setminus \rho\right) \cap \left((A \times A) \setminus \rho^{-1}\right) = (A \times A) \setminus (\rho \cup \rho^{-1}) = \overline{\rho \cup \rho^{-1}} = \overline{\rho} \cap \overline{\rho^{-1}}$.

$$\rho^I = Sym\,\rho \cup \left(\overline{\rho \cup \rho^{-1}}\right) = (\rho \cap \rho^{-1}) \cup \left(\overline{\rho} \cap \overline{\rho^{-1}}\right) \tag{1.66}$$

Функция принадлежности

$$\mu_{\rho^I}(x,y) = \max\left(\min\left(\mu_\rho(x,y), \mu_\rho(y,x)\right), \min\left(1 - \mu_\rho(x,y), 1 - \mu_\rho(y,x)\right)\right) \tag{1.67}$$

Можно показать, что $\mu_{\rho^I}(x,y) \neq \mu_{Sym\,\rho}(x,y)$. Выберем $\mu_\rho(x,y) = 0.3 = \mu_\rho(y,x)$.

$$\max\left(\min\left(\mu_\rho(x,y), \mu_\rho(y,x)\right), \min\left(1 - \mu_\rho(x,y), 1 - \mu_\rho(y,x)\right)\right)$$
$$\neq \min\left(\mu_\rho(x,y), \mu_\rho(y,x)\right),$$

$$\max(\min(0.3,0.3), \min(0.7,0.7)) \neq \min(0.3,0.3) \Leftrightarrow 0.7 \neq 0.3.$$

Линейность (полнота) НОП. Бинарное отношение называется линейным, если $\forall(x, y) \in A \times A$: либо $(x, y) \in \rho$, либо $(y, x) \in \rho$. Это говорит о том, что у ЛПР достаточно информации для того, чтобы сравнивать любые альтернативы. В нечетком случае функция принадлежности задаётся несколькими способами ($\forall(x, y) \in A \times A$).

1) Сильно линейное НОП: $$\max\left(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, x)\right) = 1 \quad (1.68)$$

2) λ-линейное НОП: $$\max\left(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, x)\right) > \lambda \quad (1.69)$$

3) Слабо линейное НОП: $$\max\left(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, x)\right) = 0 \quad (1.70)$$

Множество недоминируемых альтернатив НОП задаётся функцией принадлежности

$$\left\{x \in A: \mu_\rho^{\text{НД}}(x) = \min_{x_0 \in A}\left(1 - \mu_{\rho^s}(x_0, x)\right)\right\} \quad (1.71)$$

Это объясняется так: функция принадлежности $\mu_{\rho^s}(x_0, x)$ задаёт множество альтернатив, доминируемых фиксированной альтернативой x_0. И наоборот: $1 - \mu_{\rho^s}(x_0, x) = \mu_{\overline{\rho^s}}(x_0, x)$ сопряжено со множеством альтернатив, не доминируемых x_0. Так как нам нужно найти множество, которое ни одним x_0 не доминируется, возьмем пересечение таких множеств.

В частности, множество недоминируемых альтернатив может оказаться пустым. Транзитивность – одно из важных условий существования недоминируемых альтернатив.

Множество максимально недоминируемых альтернатив – четкое множество альтернатив, степень недоминируемости которых максимальна.

$$X_\rho^{\text{НД}} := \left\{x^* \in A: \mu_\rho^{\text{НД}}(x^*) = \max_{x \in A} \mu_\rho^{\text{НД}}(x)\right\} \quad (1.72)$$

Если $\max_{x \in A} \mu_\rho^{\text{НД}}(x) = 1$, то $X_\rho^{\text{НД}}$ называется множеством четко недоминируемых альтернатив $X_\rho^{\text{ЧНД}}$ (множеством Орловского). Надо заметить, что в конечном множестве альтернатив с заданным на нем транзитивным НОП имеется по крайней мере одна максимально недоминируемая альтернатива [3].

Орграф $G = \langle A, \rho \rangle$ нечёткого отношения ρ, заданного на множестве альтернатив A матрицей R [20], – орграф с дугами $\rho = \{\langle a_i, a_j \rangle \in A \times A | \mu_\rho(a_i, a_j) > 0\}$. Дуге $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho$ ставится в соответствие вес $R_{ij} = \mu_\rho(a_i, a_j)$.

Конъюнкция (&) матриц – поэлементное умножение булевых матриц (с элементами из $\{0,1\}$):

$$A = \|A_{ij}\|_{i,j=1}^{n}, \qquad B = \|B_{ij}\|_{i,j=1}^{n}, \qquad A\&B = \|A_{ij}\&B_{ij}\|_{i,j=1}^{n} \tag{1.73}$$

1.2 Постановка задачи

Заданы:

1. Множество **альтернатив** $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n < \infty$, которые также могут называться кандидатурами, кандидатами, вершинами графа.

2. Множество **экспертов** $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m < \infty$, которые также могут называться голосующими, избирателями.

3. Профили **экспертных предпочтений** – множество нечётких бинарных отношений ρ_1, $\rho_2, \dots, \rho_m$, соотносящихся с характеристическими функциями, которые выражены матрицами принадлежности (или характеристическими матрицами, матрицами нечётких предпочтений) $\{R^1, R^2, \dots, R^m\}$ размера $n \times n$. Каждое бинарное отношение ρ^k задаёт попарные сравнения альтернатив и сопоставляется некому взвешенному орграфу с матрицей весов R^k.

$$\forall(a_i, a_j) \in A \times A:\ R^k = \left\|R_{ij}^k\right\|_{i,j=1}^n, \qquad R_{ij}^k = \mu_{\rho_k}(a_i, a_j) \in [0; 1],$$
$$k = \overline{1, m},\ \ m \in \mathbb{N} \tag{1.74}$$

Множество пар $A \times A$ предполагает квадратные матрицы предпочтений. Элемент R_{ij}^k матрицы R^k k-го эксперта хранит результат процедуры парных сравнений, выполненной экспертом, и показывает степень предпочтительности альтернативы a_i относительно альтернативы a_j, либо уверенность в том, что альтернатива a_i доминирует над альтернативой a_j по степени предпочтительности (последнее – интерпретация нечётких множеств с матрицами принадлежности).

Требуется построить агрегированное отношение, которое будет лучше всего удовлетворять предпочтениям экспертов, и вывести из него:

- либо ранжирование альтернатив (нечёткий строгий линейный порядок, аналог пути в орграфе),
- либо разбиение на уровни, если ранжирование невозможно (если построенное агрегированное отношение не является полным).

Необходимо:

1) Программно реализовать алгоритмы агрегирования, в частности, алгоритм создания минимально удалённого агрегированного нечёткого отношения для множества экспертных отношений [20].
2) С помощью программы найти и вывести варианты путей или разбиений на уровни, где путь – последовательность альтернатив a_i в порядке их предпочтительности. Указать значения набора характеристик для каждого пути.
3) Проанализировать вычислительную сложность выбранных алгоритмов агрегирования $O(n)$ и программы в целом.
4) Проанализировать результаты работы программы на примерах.

1.3 Подготовка к применению методов решения задачи

1.3.1 Формализация задачи

$(a_i, a_j) \in \rho_k$ означает, что альтернатива a_i предпочтительнее альтернативы a_j в некотором смысле. Это предпочтение выражено численно в матрице нечёткого отношения на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, и число R_{ij}^k обозначает степень достоверности доминирования альтернативы a_i над альтернативой a_j для k-го эксперта. Можно говорить, что «a_i лучше a_j» (в случаях строгого доминирования может обозначаться «$a_i \succ a_j$») или «a_i не хуже a_j» (в случаях нестрогого доминирования обозначается «$a_i \succcurlyeq a_j$») со степенью достоверности $\mu_{\rho_k}(a_i, a_j)$.

При сравнении альтернативы с самой собой полагаем, что она не может быть лучше самой себя, поэтому на диагонали стоят 0, считаем, что нет петель, поэтому нечёткие отношения экспертов антирефлексивны.

$$(a_i, a_i) \in \rho_k\colon\ \mu_{\rho_k}(a_i, a_i) = 0, \qquad k \in \overline{1, m}, \qquad i = \overline{1, n}$$

Эксперт, попарно сравнивая альтернативы, может отразить в своей характеристической матрице варианты предпочтений:

1) Альтернатива a_i предпочтительнее (или «лучше») альтернативы a_j со степенью достоверности $R_{ij}^k \in [0; 1]$, где $R_{ij}^k \neq R_{ji}^k$.
2) Альтернативы $a_i,\ a_j$ равноценны со степенью достоверности $R_{ij}^k = R_{ji}^k \in (0; 1]$.
3) Альтернативы $a_i,\ a_j$ несравнимы, $R_{ij}^k = R_{ji}^k = 0$.

На основании множества профилей предполагается построение агрегированного нечёткого бинарного отношения (и соответствующего ему орграфа), наименее удалённого от каждого из экспертных предпочтений. Подсчёт расстояний осуществляется в соответствии с выбранным вариантом расстояния на матрицах предпочтений ((1.2), (1.3), (1.4)).

Матрица отношения нечёткого предпочтения эксперта должна быть:

1) Антирефлексивна в смысле определения (1.38).

2) Совершенно антисимметрична в смысле определения (1.42) или (1.43).

3) Транзитивна в смысле определения (1.47).

Условия 1), 2) можно заменить одним условием асимметричности в смысле определения (1.44).

Антирефлексивность означает, что каждая альтернатива не лучше себя самой.

Совершенная антисимметричность или асимметричность говорят о том, что если выбирается вариант $a_i \succ a_j$ ($a_{ij} > 0$), то нельзя сказать, что $a_j \succ a_i$. Поэтому степень достоверности задаётся только для упорядоченной пары альтернатив $\langle a_i, a_j \rangle$, а для $\langle a_j, a_i \rangle$ – не задаётся.

Используется предположение о непротиворечивости – отсутствии циклов в соответствующем орграфе (транзитивности). Предпочтение эксперта должно быть непротиворечивым. В противном случае эксперт вынужден пересмотреть своё решение и составить непротиворечивую матрицу нечётких предпочтений. Выполнение транзитивности в итоговом графе будет осуществляться за счёт разбиения циклов и построении транзитивного замыкания уже в ациклическом агрегированном отношении.

При выполнении условий выше, налагаемых на бинарное отношение предпочтения, эксперт сможет отразить в своём профиле варианты строгого предпочтения и несравнимости альтернатив, но не равноценности (в частности, из-за условия совершенной антисимметричности).

Чтобы построить требуемое в задаче коллективное решение – результирующее ранжирование или разбиение альтернатив на уровни, агрегированное нечёткое отношение должно являться отношением со свойствами:

- антирефлексивность (1.38),
- совершенная антисимметричность (1.42) или (1.43),
- транзитивность (1.47).

1.3.2 Смысловые интерпретации весов произвольных входных матриц

Матрица предпочтений эксперта может задаваться различными способами. Элементы произвольной матрицы могут содержать как положительные, так и отрицательные действительные числа, которые могут не удовлетворять ограничениям, накладываемым на элементы матриц предпочтений нечеткого бинарного отношения (характеристических матриц).

Матрица может являться матрицей весов ориентированного графа и задавать оценки парам альтернатив – будь то оценки экспертов-людей или оценки по неким заданным критериям, параметрам. Вес на дуге орграфа (значение ячейки матрицы на пересечении строки i и столбца j) может иметь смысл стоимости – сколько будет потеряно или приобретено в случае, если мы альтернативу a_i поставим выше (или «раньше») альтернативы a_j. Такой вес можно интерпретировать, к примеру, как время, затрачиваемое на проход по ребру, или деньги, которые нужно заплатить за проход по дуге (как пример прикладной задачи можно привести платные автомобильные дороги), или «полезность» («удовлетворённость» относительно параметра) прохода по направлению данной дуги. Также это могут быть какие-то стохастические величины, выражающие, например, вероятность возможности перемещения из узла a_i в узел a_j.

Дуга с нулевым весом ноль в некоторых постановках задач может обозначать дугу нулевой стоимости, либо отсутствие дуги. Иногда для отсутствующей дуги выбирается отдельное обозначение, например «$-\infty$».

При построении оптимального пути-ранжирования на графе, например, с случае, если максимизируется суммарный вес всех дуг пути, при агрегировании такая максимизация производится относительно нескольким матриц сразу (получаем многокритериальную оптимизационную задачу).

1.3.3 Преобразование произвольной действительной матрицы в положительную нормированную

Для работы с произвольной действительной матрицей как с характеристической функцией нечеткого бинарного отношения нужно, чтобы все её элементы располагались в отрезке $[0;1]$. Пусть $\tilde{\tilde{w}}_i \in \mathbb{R}$ – какое-либо значение из всех значений в ячейках заданной матрицы. После приведения значений матрицы в отрезок $[0;1]$, она будет иметь вид характеристической матрицы нечеткого бинарного отношения.

$$\left\{\tilde{\tilde{w}}_i \middle| \tilde{\tilde{w}}_i \in \mathbb{R}\right\} \to \left\{\tilde{w}_i \middle| \tilde{w}_i = \tilde{\tilde{w}}_i - \min_i \tilde{\tilde{w}}_i \in [0;\infty)\right\} \\ \to \left\{w_i \middle| w_i = \frac{\tilde{w}_i}{\max_i(\tilde{w}_i)} \in [0;1]\right\} \tag{1.75}$$

Преобразование шкал (сжатие, сдвиг), не изменяет относительное положение («силу доминирования») точки на шкале бинарного отношения, сохраняет пропорции между значениями предпочтительностей заданного бинарного отношения.

Бинарные отношения критериев (экспертов) независимы друг от друга и положение каждой альтернативы относительно других альтернатив считается в каждом отношении отдельно.

Заданное преобразование не должно влиять на итоговое агрегированное решение, потому что на решение влияет, в основном, только значение предпочтительности одной альтернативы перед другой.

Пример 1 (рисунок 1.3)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \to \text{сдвиг } +5 \to \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 5 & 9 & 6 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} \to \text{нормировка} \to \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 1 \\ 1/3 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

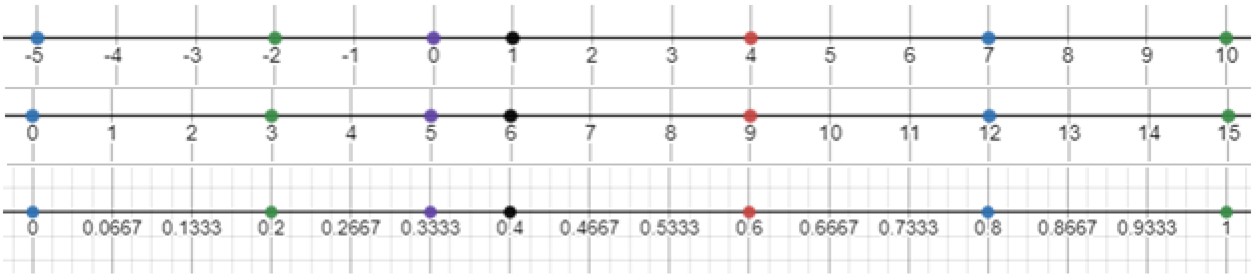


Рисунок 1.3 – Сдвиг и сжатие шкалы

1.3.4 Преобразование матрицы минимизируемого критерия в матрицу максимизируемого критерия

Если для нескольких критериев (выраженных матрицами) производится максимизация, а по другим – минимизация, то чтобы можно было применять методы, матрицы критериев должны быть приведены все к шкалам максимизации (либо все к шкалам минимизации).

Пусть оценки дуг и характеристики путей (стоимость, сила пути и др.) по матрице заданного критерия-эксперта должны минимизироваться (например, в общей задаче необходимо найти путь, который имел бы наименьшее значение стоимости пути по заданной матрице). Множество значений матрицы данного критерия: $\widetilde{W} = \{\widetilde{w}_i | \widetilde{w}_i \in \mathbb{R}\}_{i=1}^{k},\ k \in \mathbb{N}$

Переведём шкалу для минимизации в шкалу для максимизации, чтобы можно было использовать методы, направленные на максимизацию оценок пар по критериям-экспертам.

Расставим значения из множества значений матрицы весов ряд по убыванию $\langle \widetilde{w}_{(1)}, \dots, \widetilde{w}_{(k)} \rangle$, где $\widetilde{w}_{(i)} \in \widetilde{W},\ \forall i, j \in \{1, \dots, k\}: i < j \Rightarrow \widetilde{w}_{(i)} > \widetilde{w}_{(j)}$ (знак строгий, так как во множестве все значения различны).

Преобразование шкалы должно сохранять расстояния между двумя соседними значениями из ряда:

$$\widetilde{W} \to W = \left\{ w_i \middle| w_i = \left(\max_i \widetilde{w}_i + \min_i \widetilde{w}_i \right) - \widetilde{w}_i \right\} \qquad (1.76)$$

Пример 1 (рисунок 1.4)

Пусть исходная матрица является оценкой по минимизируемому критерию: $\begin{pmatrix} -10 & 9 & 6 \\ -10 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $W = \{9{,}6{,}5, -1, -10\}$.

Расстояния между последовательными элементами ряда: $\{3{,}1{,}6{,}9\}$. Применим преобразование (таблица 1.1):

$$w_i = (9 - 10) - \widetilde{w}_i = -1 - \widetilde{w}_i,\ W = \{-10, -7, -6, 0, 9\}.$$

Таблица 1.1 – Сопоставление исходной и инвертированной шкал

$\widetilde{\boldsymbol{W}}$	9	6	5	-1	-10
$\boldsymbol{W}$	-10	-7	-6	0	9
Расстояние	3	1	6	9	

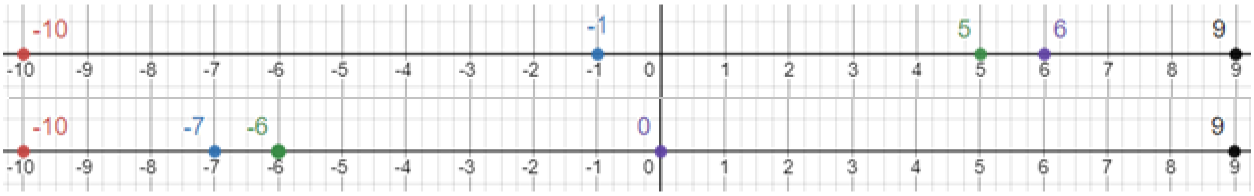


Рисунок 1.4 – Сопоставление исходной и инвертированной шкал

Тогда новая матрица будет иметь вид: $\begin{pmatrix} 9 & -10 & -7 \\ 9 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4 Математические объекты для решения задачи

1.4.1 Матрица *R* агрегированного нечёткого отношения

Для удовлетворения критерию «наилучшее соответствие предпочтениям» агрегированное отношение должно быть минимально удалено по расстояниям от всех экспертных отношений (см. (1.4)) – иметь минимальное суммарное расстояние до всех экспертных матриц. В [20] показывается, что предлагаемые способы построения агрегированного отношения отвечают критерию минимальной удалённости.

Матрица R агрегированного нечёткого отношения ρ:

$$\forall(a_i, a_j) \in A \times A\colon\ R = \left\| R_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}, \qquad R_{ij} = \mu_\rho(a_i, a_j) \in [0;1] \tag{1.77}$$

Значения матрицы R зависят от выбора функции расстояния между парой любых отношений. Пусть R_{ij}^{k} – элемент на пересечении строки i и столбца j матрицы k-го эксперта.

- Для расстояния «квадрат разности» (1.3), при любом числе экспертов m, значения матрицы R агрегированного нечёткого отношения

$$R_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} R_{ij}^{k} \tag{1.78}$$

- Для расстояния «модуль разности» (1.2), при нечётном числе экспертов $m = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$, минимум суммарного расстояния достигается при медианных элементах матрицы агрегированного нечёткого отношения относительно матриц предпочтения экспертов

$$R_{ij} = R_{ij}^{t_{k+1}}, \qquad \text{где } R_{ij}^{t_1} \le \cdots \le R_{ij}^{t_{k+1}} \le \cdots \le R_{ij}^{t_{2k+1}} \tag{1.79}$$

- Для расстояния «модуль разности» (1.2), при чётном числе экспертов $m = 2k,\ k \in \mathbb{N}$, элементы выбираются неоднозначно и дают минимум суммарного расстояния для агрегированного нечёткого отношения при

$$R_{ij} \in \left[R_{ij}^{t_k}, R_{ij}^{t_{k+1}}\right] \tag{1.80}$$

Пример 1

Создадим агрегированную матрицу R в случае произвольных матриц 5 экспертов для 4 альтернатив. Матрицы принадлежности, соответствующие отношениям экспертов, имеют вид (рисунок 1.5):

$$R^1 = R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

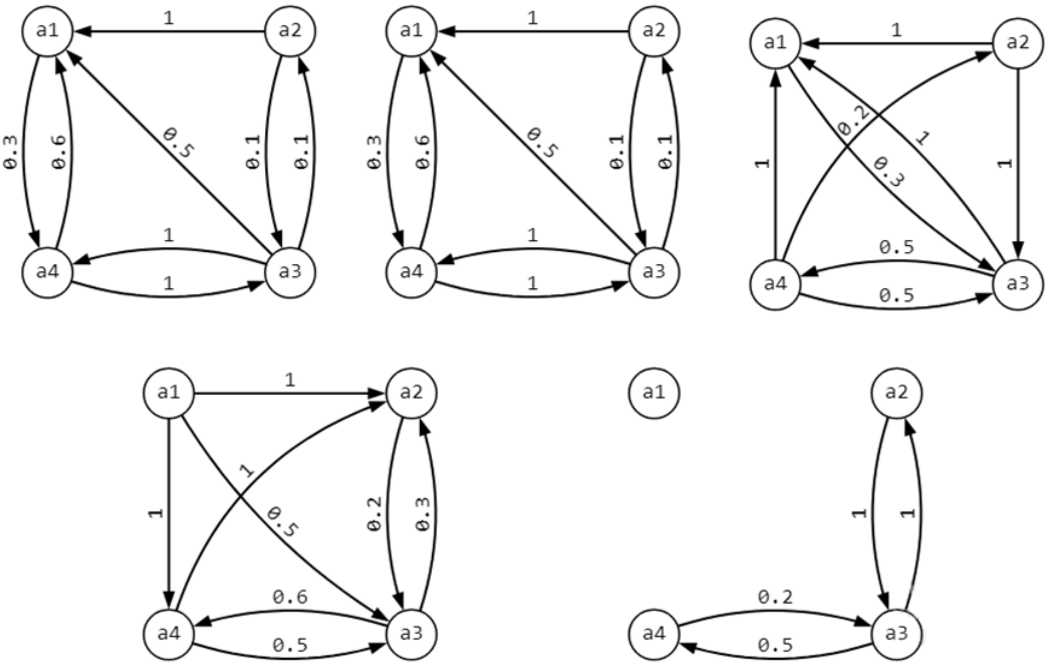


Рисунок 1.5 – Графы исходных нечётких предпочтений экспертов

Можно заметить, что исходные матрицы не транзитивны, некоторые альтернативы для каких-то экспертов «эквивалентны» ($a_{ij} = a_{ji}$), некоторые – «не сравнимы» ($a_{ij} = a_{ji} = 0$). Чтобы задать непротиворечивую экспертную матрицу, соответствующее ей отношение не должно содержать циклов (должно быть асимметричным и транзитивным).

Агрегированные матрицы, R_{square} и $R_{modulus}$, вычисляемые по (1.78) и (1.79) соответственно, имеют вид:

$$R_{square} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.16 & 0.32 \\ 0.6 & 0 & 0.48 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 & 0.72 \\ 0.44 & 0.24 & 0.46 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{modulus} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2

Пусть заданы матрицы:

$$R^1 = R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дополним отношения (рисунок 1.6), используя операцию транзитивного замыкания (1.49).

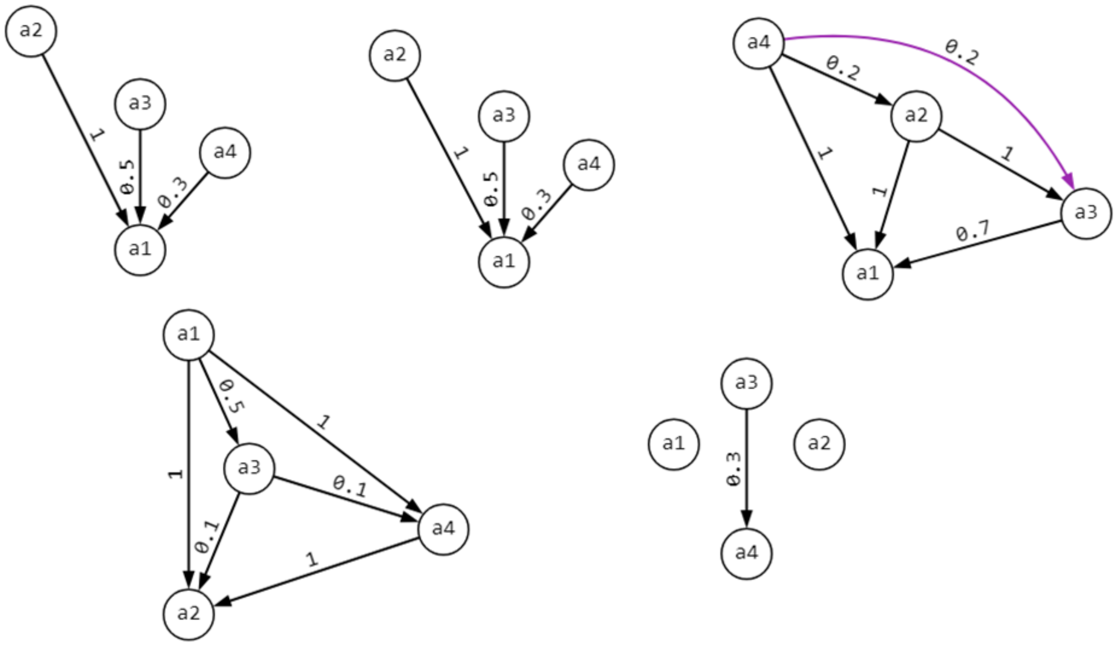


Рисунок 1.6 – Транзитивные графы отношений экспертов

Агрегированная матрица R, вычисляемая по (1.78), представлена на рисунке 1.7.

[0]	[0.2]	[0.1]	[0.2]
[0.6]	[0]	[0.2]	[0]
[0.34]	[0.02]	[0]	[0.08]
[0.32]	[0.24]	[0.04]	[0]

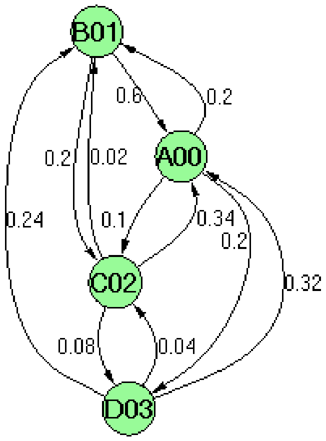


Рисунок 1.7 – Матрица и граф агрегированного отношения, построенного с использованием расстояния «квадрат разности»

Агрегированная матрица R, вычисляемая по (1.79) имеет вид: $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R^1$.

1.4.2 Матрицы смежности нечётких отношений

Матрица смежности Q нечёткого отношения ρ для соответствующего орграфа задаётся как альфа-срез уровня 0 по (1.11).

$$Q = \|Q_{ij}\|_{i,j}, \qquad Q_{ij} \in \{0; 1\}, \qquad Q_{ij} = \begin{cases} 1, & \mu_\rho(a_i, a_j) > 0 \\ 0, & \mu_\rho(a_i, a_j) = 0 \end{cases} \tag{1.81}$$

Матрица смежности орграфа нечёткого отношения k-го эксперта:

$$Q^k = \|Q_{ij}^k\|_{i,j=1}^n, \qquad Q_{ij}^k = \begin{cases} 1, & R_{ij}^k > 0 \\ 0, & R_{ij}^k = 0 \end{cases} \tag{1.82}$$

Матрица смежности орграфа агрегированного нечёткого отношения:

$$Q = \|Q_{ij}\|_{i,j=1}^n, \qquad Q_{ij} = \begin{cases} 1, & R_{ij} > 0 \\ 0, & R_{ij} = 0 \end{cases} \tag{1.83}$$

Пример 1

Ниже демонстрируется матрица и соответствующая ей матрица смежности графа.

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

1.4.3 Матрица контуров графа

Матрица контуров $Q_K = \left\|(Q_K)_{ij}\right\|_{i,j}$ содержит все дуги, входящие в какие-либо циклы (контуры) орграфа $G = \langle A, \rho \rangle$ отношения ρ [17].

$$Q_K = (Tr\ Q) \& (Tr\ Q)^T \& Q \tag{1.84}$$

Где

Q – матрица смежности графа (1.81),

$Tr(Q)$ – транзитивное замыкание матрицы Q (1.49),

& – поэлементная конъюнкция (1.73).

Если элемент $(Q_K)_{ij} > 0$ (а точнее, равен 1, так как Q – матрица смежности), то дуга, ведущая из вершины i в вершину j содержится в каком-либо цикле.

Пример 1

Ниже представлена матрица R отношения ρ, с соответствующей матрицей смежности Q, и матрицей Q_K, построенной по (1.84).

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Tr(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На рисунке 1.8 показаны графы перечисленных матриц.

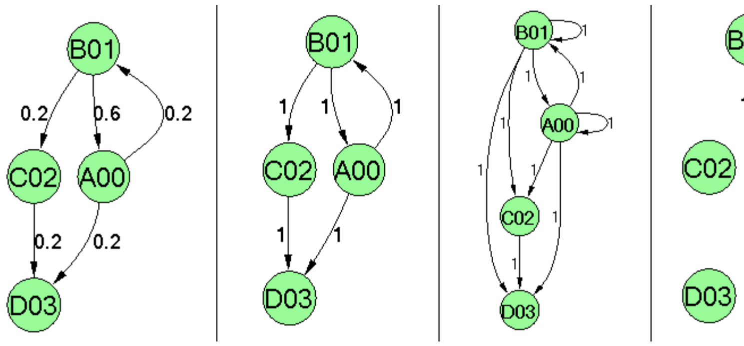


Рисунок 1.8 – Графы матриц, слева направо: $R,\ Q,\ Tr(Q),\ Q_K$.

1.4.4 Транзитивно замкнутое отношение

Транзитивно замкнутое отношение $\hat{\rho}$ (иногда обозначается как $Tr(\rho)$) задаётся по формуле (1.49) и выражается через транзитивное замыкание его матрицы принадлежности. В общем случае транзитивное замыкание удовлетворяет только свойству транзитивности, поэтому в исходном ρ (а, точнее, в соответствующем ему орграфе), от которого берётся транзитивное замыкание, могут присутствовать циклы и петли.

Если в ρ присутствует цикл, то в матрице отношения $\hat{\rho}$ в ячейках на диагонали, соответствующих входящим в цикл вершинам орграфа, появятся ненулевые элементы – орграф будет дополнен петлями. Пример для отношения «⩾»: $x \geqslant y,\ \ y \geqslant z,\ \ z \geqslant x \Rightarrow x \geqslant x$.

1.4.5 Транзитивно замкнутое отношение без контуров и петель

Транзитивное замыкание (1.49) нечёткого отношения, не содержащего контуров и петель, обозначает нечёткое отношение «лучше», у которого выполняются свойства:

- Асимметричность (1.44);
- Транзитивность (1.47).

Такое отношение в случае его полноты может задавать строгое ранжирование альтернатив (расстановка альтернатив по предпочтительности, создание цепочки, пути из них). Полнота отношения здесь подразумевает сравнимость каждой альтернативы с каждой. В общем случае из транзитивно замкнутого отношения (даже если оно не полное) возможно создать разбиение альтернатив на уровни.

В случае отсутствия контуров в исходном отношении ρ транзитивное замыкание может не включать отношение ρ^n, а считаться по формуле:

$$\hat{\rho} = \rho^1 \cup \dots \cup \rho^{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \rho^i \tag{1.85}$$

Можно провести аналогию с элементами какой-либо матрицы смежности M, возведенной в степень – элементы M_{ij}^n могут выражать возможность перехода из i в j за n шагов. Элементы матрицы, ассоциированной с ρ^n, обозначают наличие пути длиной в n шагов из вершины в вершину в графе $G = \langle A, \rho \rangle$. При наличии цикла, за n шагов можно обойти все n вершин и прийти в исходную (Гамильтонов путь состоит из $n-1$ шага). Если циклов в графе нет, то матрица, соответствующая ρ^n, будет состоять из нулей.

Транзитивное замыкание можно найти по определению или по модифицированному алгоритму Флойда-Уоршалла [23].

Пример 1

Процедура транзитивного замыкания для нечётких отношений схожа с процедурой умножения матриц, со своими аналогами операций умножения и сложения чисел. Пусть задана матрица M, найдём для неё транзитивное замыкание.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^1$$

$$M^2 = M \circ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операция композиции по (1.33) и для возведения в степень (1.34), с операциями (1.17), (1.20), задаёт элементы выходной матрицы как:

$$M_{ij}^2 = \bigvee_k \left(M_{ik} \wedge M_{kj}\right) = \max_k\left(\min\left(M_{ik}, M_{kj}\right)\right) \qquad (1.86)$$

$\vee$ полагается эквивалентом суммы, а $\wedge$ – эквивалентом умножения в случае нечётких матриц по сравнению с обычным матричным умножением. Точно так же, как в обычном умножении, можно применять правило «строка на столбец».

$$M^2 = \begin{pmatrix} \max(0) & \max(0) & \max(0) & \max(0) \\ \max(0;0.7) & \max(0) & \max(0) & \max(0) \\ \max(0) & \max(0) & \max(0) & \max(0) \\ \max(0;0.2) & \max(0) & \max(0;0.2) & \max(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Операция композиции ассоциативна. $M^3 = M^2 \circ M = M \circ M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^4 = M^3 \circ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Транзитивное замыкание $Tr(M)$ матрицы M: $Tr(M) = M \cup M^2 \cup M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$.

Для ускорения вычисления очередной степени матрицы можно не вычислять значения элементов строк (или столбцов), целиком состоящих из нулей – в выходной матрице можно заполнять их нулями, так как «перемножение» данной строки (столбца) на любой столбец (строку) может дать только элемент, равный нулю.

Также существует упрощение подсчёта: если начиная с какого-то k матрица M^k перестаёт меняться, то вычисление степеней матрицы можно прекратить.

1.4.6 Асимметричная часть $As\ \rho$ и симметричная часть $Sym\ \rho$ отношения ρ

С учётом разных вариантов (см. (1.62), (1.63)) вычисления асимметричной части матриц предпочтения получаются не одинаковые результаты (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Сравнение способа задания вычисления характеристической матрицы асимметричной части нечёткого бинарного отношения

R_{ij}	R_{ji}	$R_{ij}^{As\ \rho} = \min(R_{ij}, 1 - R_{ji})$	$R_{ij}^{As\ \rho} = \max(R_{ij} - R_{ji}, 0)$	$R_{ij}^{Sym\ \rho} = \min(R_{ij}, R_{ji})$
0	0	$\min(0,1-0) = 0$	$\max(0-0,0) = 0$	0
1	1	$\min(1,1-1) = 0$	$\max(1-1,0) = 0$	1
0	1	$\min(0,1-1) = 0$	$\max(0-1,0) = 0$	0
1	0	$\min(1,1-0) = 1$	$\max(1-0,0) = 1$	0
0.3	0.3	$\min(0.3,1-0.3) = 0.3$	$\max(0.3-0.3,0) = 0$	0.3
0.3	0.7	$\min(0.3,1-0.7) = 0.3$	$\max(0.3-0.7,0) = 0$	0.3
0.7	0.3	$\min(0.7,1-0.3) = 0.7$	$\max(0.7-0.3,0) = 0.4$	0.3
0.7	0.7	$\min(0.7,1-0.7) = 0.3$	$\max(0.7-0.7,0) = 0$	0.7
0.5	0.5	$\min(0.5,1-0.5) = 0.5$	$\max(0.5-0.5,0) = 0$	0.5
0	0.5	$\min(0,1-0.5) = 0$	$\max(0-0.5,0) = 0$	0
0.5	0	$\min(0.5,1-0) = 0.5$	$\max(0.5-0,0) = 0.5$	0

Вычисление функции принадлежности для $Sym\ \rho$ вариативно, в данном случае $\mu_{Sym\ \rho}$ вычисляется по (1.64). Условимся, что элементы матриц асимметричной и симметричной частей отношения ρ, связанного с матрицей R, будут задаваться как

$$\mu_{As\ \rho}(a_i, a_j) = R_{ij}^{As\ \rho} = \max(R_{ij} - R_{ji}, 0) \qquad (1.87)$$

$$\mu_{Sym\ \rho}(a_i, a_j) = R_{ij}^{Sym\ \rho} = \min(R_{ij}, R_{ji}) \qquad (1.88)$$

Таким образом в сумме асимметричная и симметричная части отношения ρ (в смысле поэлементного суммирования матриц принадлежности) дают исходное отношение ρ (с соответствующей матрицей принадлежности).

Пример 1

Для заданных матриц ($\mu_\rho = R$) можно вычислить (см. (1.87), (1.88)) асимметричные ($\mu_{As\,\rho} = As\,R$) и симметричные ($\mu_{Sym\,\rho} = Sym\,R$) части (рисунок 1.9).

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$As\,R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ As\,R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Sym\,R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Sym\,R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

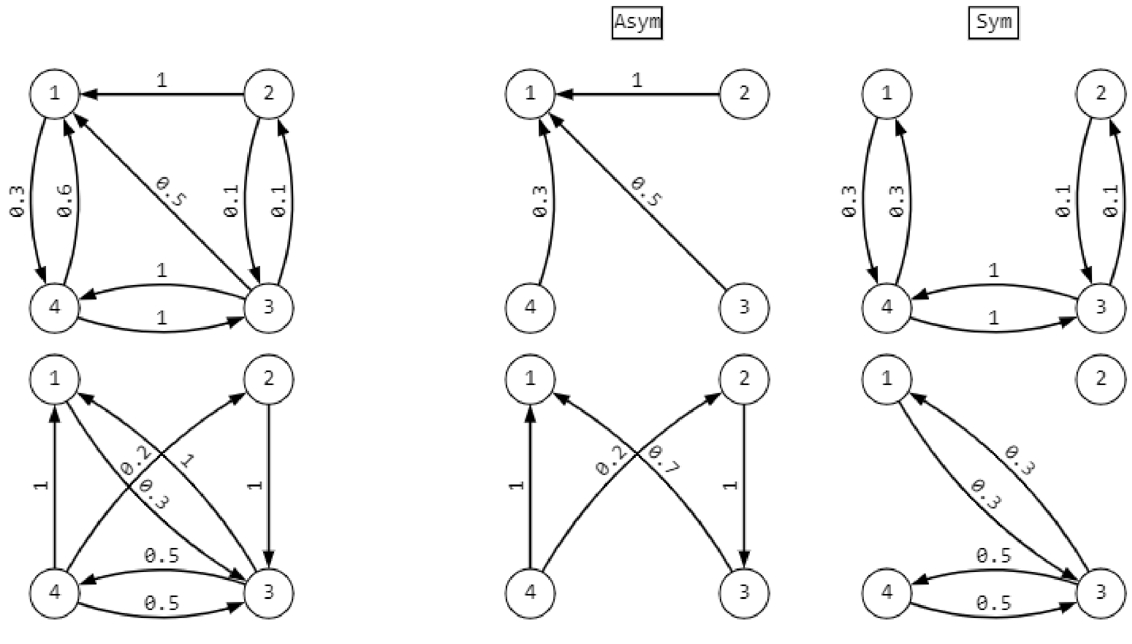


Рисунок 1.9 – Исходные матрицы предпочтений экспертов и их асимметричные и симметричные части

1.5 Методы построения агрегированных отношений

Для нахождения вариантов агрегированных ранжирований (либо разбиений на уровни) необходимо выполнить последовательность действий над исходными матрицами предпочтений экспертов.

1) Из матриц $R^1, \dots, R^m$ экспертов строится матрица R агрегированного отношения ρ, имеющая минимальное суммарное расстояние (см. (1.78), (1.79), (1.80)).
2) Матрица R рассматривается как матрица весов агрегированного отношения с орграфом $G = \langle A, \rho \rangle$. Гамильтоновы пути данного графа считаются ранжированиями, так как включают в себя последовательность альтернатив или узлов, вершин графа (путь), где каждая альтернатива входит в путь по одному разу.

Некоторые методы могут не иметь ранжирований – из-за недостаточности информации, получаемой этими способами (например, метод Шульце [30, 31] и метод с исключением контуров (см. параграф 1.5.1)). В случае, если метод в качестве результата выдаёт некоторое бинарное отношение, то, применив алгоритм разбиения на уровни (например, алгоритм Демукрона) можно получить частичное упорядочение альтернатив – разбиение множества альтернатив на уровни, а также множество недоминируемых альтернатив. Если полученное отношение будет являться линейным порядком (полное), то разбиение на уровни может представлять собой строгое ранжирование – на каждом уровне будет по одной альтернативе.

Так как результирующее бинарное отношение может являться как чётким, так и нечётким, то из него будет получено, соответственно, чёткое или нечёткое частичное упорядочение или ранжирование.

1.5.1 Создание совершенного строгого порядка из нечёткого бинарного отношения путём удаления контуров

Пусть задана характеристическая матрица R (1.77) агрегированного нечёткого бинарного отношения ρ, заданного на множестве альтернатив (вершин) A ($|A| = n$), соответствующая орграфу $G = \langle A, \rho \rangle$. Из R необходимо построить матрицу отношения (нечёткого), которое (см. параграф 1.3.1): 1) антирефлексивно, 2) совершенно антисимметрично, 3) транзитивно. Выполнение этих трёх пунктов гарантирует, что в создаваемом отношении (то есть, в его графе) не будет циклов. Алгоритм создания совершенного строгого порядка из ρ следующий [18]:

1. Взять отношение ρ, разбить в нём все контуры (в том числе циклы длины 1 – петли, и циклы длины 2, из-за которых может не выполняться свойство совершенной антисимметричности) по алгоритму удаления контуров.
2. После удаления контуров взять транзитивное замыкание $Tr(\cdot)$ от полученного отношения. Результат будет совершенным строгим порядком.

Алгоритм удаления контуров:

1. Составить матрицу контуров (1.84) по матрице смежности (1.83) графа. Если в графе есть циклы – а в матрице контуров есть единицы (матрица контуров не нулевая) – перейти к п. 2. Иначе (если матрица контуров нулевая) – граф на данной итерации задаёт искомое отношение без контуров.
2. По матрице контуров найти множество дуг, входящих в какие-либо циклы (единицы в матрице контуров).
3. Во множестве дуг циклов найти все дуги, имеющие наименьший вес и удалить их в графе. Перейти к п. 1.

Посредством данного алгоритма мы избирательно разбиваем контуры графа и создаём непротиворечивое ранжирование. Так, чтобы удаляемые дуги имели наименьший вес в контуре. При этом мы удаляем сразу все дуги наименьшего веса из всех найденных контуров, так как нельзя оценить точно, к чему приведёт выборочное удаление конкретных дуг. Например, некоторые дуги могут принадлежать нескольким контурам, или варианты удаления могут быть разные – наименьшее число дуг для удаления можно взять по-разному. Удаление же сразу всех дуг наименьшего веса по всем контурам гарантирует однозначность алгоритма.

Пример 1

В качестве примера выполнения алгоритма создадим ранжирование из нечёткого отношения, соответствующего матрице R (рисунок 1.10).

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.34 & 0.02 & 0 & 0.08 \\ 0.32 & 0.24 & 0.04 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

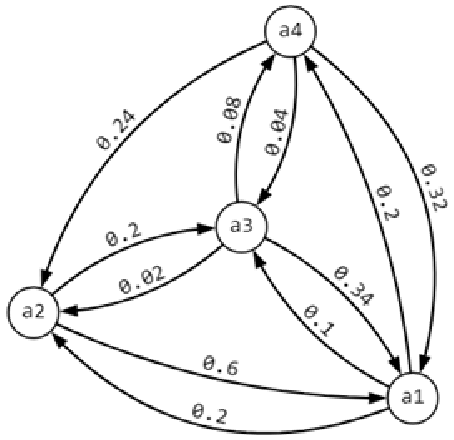


Рисунок 1.10 – Граф отношения, $a_1 = A00,\ a_2 = B01,\ a_3 = C02,\ a_4 = D03$

Проведём процедуру удаления контуров. Последовательно удаляем дуги минимального веса из всех циклов и на каждом шаге проверяем, не разрушились ли циклы.

$$Q_K = (Tr\ Q)\&(Tr\ Q)^T\&Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q.$$

$$R \to \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.34 & \boxed{0} & 0 & 0.08 \\ 0.32 & 0.24 & 0.04 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_K = Q.$$

$$R \to \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.34 & 0 & 0 & 0.08 \\ 0.32 & 0.24 & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_K = Q.$$

$$R \to \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.34 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0.32 & 0.24 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_K = Q.$$

$$R \to \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & \boxed{0} & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.34 & 0 & 0 & 0 \\ 0.32 & 0.24 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_K = Q.$$

$$R \to \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} \\ 0.6 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0.34 & 0 & 0 & 0 \\ 0.32 & 0.24 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Tr\,Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Искомое отношение строгого порядка находится через создание транзитивного замыкания (1.85) найденного ациклического отношения.

$$Tr(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34 & 0 & 0 & 0 \\ 0.32 & 0.24 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Выходное ранжирование, получаемое по отношению, будет неполным, так как удалена информация в процессе удаления контуров, получим разбиение на уровни (рисунок 1.11): уровень 1 – $\{a_4\}$, уровень 2 – $\{a_2, a_3\}$, уровень 3 – $\{a_1\}$.

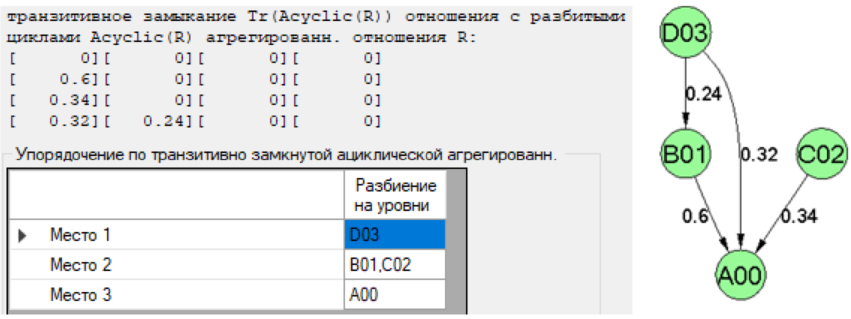


Рисунок 1.11 – Разбиение на уровни

Пример 2

Алгоритм можно аналогично применять и к асимметричной части нечеткого бинарного отношения, для которого хотим создать совершенный строгий порядок (т.е., вместо матрицы отношения ρ использовать матрицу $As(\rho)$). Такой подход чреват потерей информации, на основании которой можно было бы, например, сравнить равноценные альтернативы. С другой стороны, точно так же можно потерять информацию в процессе разбиения контуров путём удаления дуг наименьшего веса, если таких дуг будет много. Для определения целесообразности построения совершенного строгого порядка из асмметричной части агрегированного отношения ρ требуется дополнительное исследование.

Проделаем тот же пример с асимметричной частью $As\,R$ агрегированного отношения (рисунок 1.12, рисунок 1.13).

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.34 & 0.02 & 0 & 0.08 \\ 0.32 & 0.24 & 0.04 & 0 \end{pmatrix}, \qquad As(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.18 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0.04 \\ 0.12 & 0.24 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

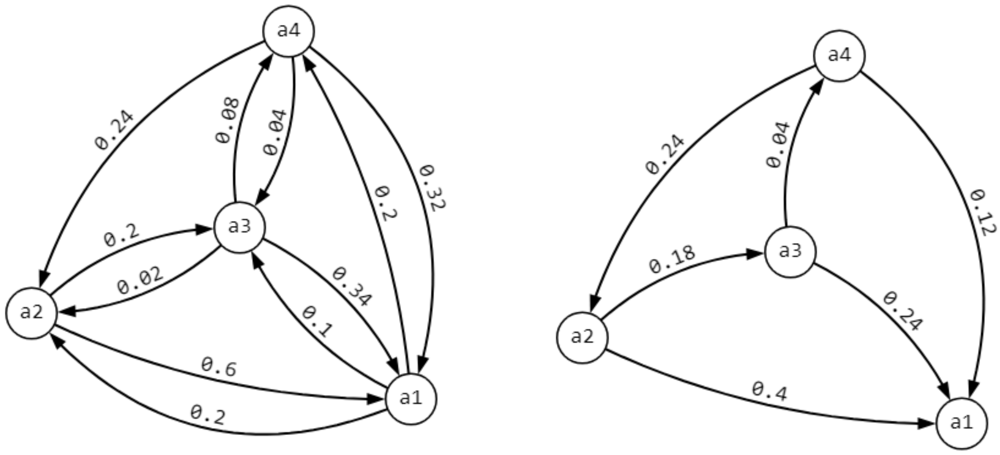


Рисунок 1.12 – Граф отношения и его асимметричная часть

$$Q_K = \left(Tr(Q)\right)\&\left(Tr(Q)\right)^T\&Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad As(R) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.18 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0.12 & 0.24 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Tr(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Tr\big(As(R)\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.18 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0.24 & 0.18 & 0 \end{pmatrix}.$$

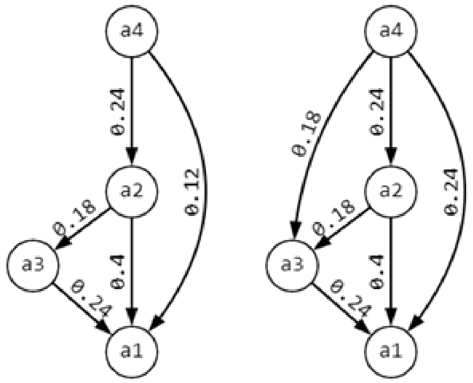


Рисунок 1.13 – Полученный граф асимметричной части после разбиения контуров (слева), и его транзитивное замыкание (справа)

Таким образом для асимметричной части агрегированного отношения можно построить однозначное ранжирование: $a_4 \to a_2 \to a_3 \to a_1$.

1.5.2 Нахождение Гамильтоновых путей через перемножение матриц

Используя алгоритм перемножения матриц для поиска путей в графе, можно найти все Гамильтоновы пути, чтобы затем выделить из них те, что имеют наилучшие характеристики в контексте решаемой задачи. Алгоритм:

0. Обозначим последовательно вершины $a_1,\ a_2, \dots, a_n$ графа буквами $a, b, c, \dots$. (чтобы не возникали дополнительные трудности с индексами).
1. Выпишем вспомогательную матрицу H следующим образом: на место единиц в матрице смежности Q графа напишем буквы, обозначающие вершины, причем в первом столбце – «a», во втором – «b», и т. д.
2. Положим $Q_1 = Q$. По смыслу число 1 в индексе обозначает, что эта матрица даёт пути с количеством дуг, равным 1 (пути длины 1).
3. Вычислим $Q_2' = H \cdot Q_1$ и $Q_2 = F(Q_2')$.

В матрицах Q_i' указаны промежуточные вершины путей длины $i = \overline{1, n-1}$. Первая вершина добавляется в начало пути в соответствие со строкой матрицы, а последняя – в соответствии со столбцом.

$F(Q_i')$ – преобразование обнуления элементов матрицы Q_i', если они соответствуют путям с повторяющимися вершинами, в частности, контурам. Поскольку все диагональные элементы соответствуют контурам, можно ставить нули ещё в матрицах Q_i'.

4. Вычислим $Q_i' = H \cdot Q_{i-1}$, и $Q_i = F(Q_i')$, для $i = \overline{2, n-1}$. Количество дуг в пути на единицу меньше, чем количество вершин в нём.
5. На последнем этапе вычислим $Q_{n-1}' = H \cdot Q_{n-2}$, и $Q_{n-1} = F(Q_{n-1}')$. Матрица Q_{n-1} покажет все пути длины $n-1$ в графе (с количеством вершин равным n) – Гамильтоновы пути.

Если элементы матриц состоят из нескольких слагаемых, то существует несколько путей.

Подсчитаем сложность алгоритма поиска путей перемножением матриц. Имеем матрицы $n \times n$ элементов. На каждой итерации происходит перемножение матриц, имеющее кубическую сложность – в худшем случае. Используем классическое определение умножения матриц, несмотря на некоторую разреженность.

Всего необходимо сделать $(n-2)$ штук итераций $(i = \overline{2, (n-1)})$. То есть, несколько раз вызывается функция, включающая перемножение матриц, назовём её $f = O(n^3)$. Здесь фигурирует композиция функций. $f(Q) = F(H \cdot Q)$, где Q – матрица. Пусть $Q = Q_1$, $f(Q) = f(Q_1) = Q_2$.

$$\underbrace{f(\ldots \underbrace{f\big(f(Q)\big)}_{Q_3})}_{Q_{n-1}} = \underbrace{f \circ \ldots \circ \underbrace{f \circ \underbrace{f}_{Q_2}}_{Q_3}}_{Q_{n-1}} = O(\underbrace{n^3 \cdot \ldots \cdot n^3}_{(n-2)}) = O\big(n^{3(n-2)}\big) = O(n^{3n}) \qquad (1.89)$$

Алгоритм имеет сложность выше полиномиальной – это NP-алгоритм.

Пример 1

По алгоритму поиска путей перемножением матриц найдём Гамильтоновы пути в орграфе (рисунок 1.14) с матрицей смежности Q.

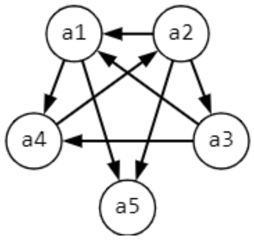


Рисунок 1.14 – Граф с 5 вершинами

Найдем, сколько путей длины 4 существует в орграфе. Возводим матрицу смежности Q в четвертую степень с обычными алгебраическими операциями.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Не считая циклы на диагонали, получим 18 путей длины 4.

Во вспомогательной матрице H, единицы матрицы смежности заменяются буквами-вершинами, соответствующими столбцам.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & e \\ a & 0 & c & 0 & e \\ a & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = Q,$$

$$Q_2' = H \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & e \\ a & 0 & c & 0 & e \\ a & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = F(Q_2') = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & a + c & a \\ 0 & d & 0 & a & a \\ b & 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q_3' = H\cdot Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & e \\ a & 0 & c & 0 & e \\ a & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & a+c & a \\ 0 & d & 0 & a & a \\ b & 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} db & 0 & db & 0 & db \\ 0 & ad+cd & 0 & ca & ca \\ db & ad & db & 0 & db \\ bc & 0 & 0 & ba+bc & ba \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q_3 = F(Q_3') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & db & 0 & db \\ 0 & 0 & 0 & ca & ca \\ db & ad & 0 & 0 & db \\ bc & 0 & 0 & 0 & ba \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$F(Q_3')$ −обнуление циклов (диагональные элементы) и путей с повторяющимися вершинами с учетом вершин строки и столбца.

$$Q_4' = H\cdot Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & e \\ a & 0 & c & 0 & e \\ a & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & db & 0 & db \\ 0 & 0 & 0 & ca & ca \\ db & ad & 0 & 0 & db \\ bc & 0 & 0 & 0 & ba \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} dbc & 0 & 0 & 0 & dba \\ cdb & cad & adb & 0 & adb+cdb \\ dbc & 0 & adb & 0 & adb+dba \\ 0 & 0 & 0 & bca & bca \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q_4 = F(Q_4') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & adb+dba \\ 0 & 0 & 0 & 0 & bca \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В орграфе три Гамильтоновых пути. Перечислим вершины этих путей, добавляя в начало вершину, соответствующую строке, а в конец – столбцу: (c,a,d,b,e), (c,d,b,a,e), (d,b,c,a,e).

1.5.3 Задание всех возможных ранжирований

Для полного анализа всех возможных ранжирований, каждое из которых могло бы являться агрегированным ранжированием, нужно охарактеризовать каждое из всевозможных ранжирований. Множество всех путей (1.50) для n

альтернатив (всевозможные перестановки из n объектов, $P_n = n!$) задаётся как

$$Rankings = \left\{p^t \middle| p^t,\ t = \overline{1, n!}\right\} \leftrightarrow \left\{P^t \middle| P^t,\ t = \overline{1, n!}\right\} \quad (1.90)$$

После чего можно определить характеристики для каждого ранжирования и по полученным характеристикам выбрать наилучшие ранжирования. Этот способ является полным перебором и не удовлетворяет требованию скорости выдачи результата, особенно если альтернатив достаточно много.

Ранжирования соответствуют разным формам представления, в том числе можно задавать чёткие ранжирования – с использованием чёткой характеристической матрицы, элементы коей из множества $\{0; 1\}$.

1.6 Характеристики ранжирований

На множестве всех возможных ранжирований (1.90) из n альтернатив [32] для оценки качества получаемых ранжирований вводятся характеристики, вычисляемые, в том числе, по матрицам экспертов-критериев.

Для построения скалярной характеристики «стоимость» (1.58) оценим путь по агрегированной матрице. Для построения векторной характеристики «стоимость» путь оценивается по матрицам экспертов. Аналогичный способ построения для характеристики «сила» (1.55). Для построения векторной характеристики «расстояние» (см. (1.2), (1.3)) определяются расстояния от отношения данного ранжирования (возможно, нечёткого) до отношения каждого из экспертов. Для подсчёта скалярной характеристики «суммарное расстояние» (1.4) берётся сумма расстояний до отношений всех экспертов.

Задавать ранжирования можно как чёткими матрицами, имеющими элементы из $\{0; 1\}$, так и нечёткими матрицами с элементами из $[0; 1]$, результат подсчёта расстояния изменяется в зависимости от выбора типа ранжирования (чёткое или нечёткое).

Любая векторная характеристика ранжирования, заданная относительно отношений экспертов, может быть представлена точкой в пространстве размерности m (по количеству экспертов-критериев).

Матрицы экспертов и агрегированная матрица имеют элементы из $[0;1]$, так как являются матрицами принадлежности нечётких отношений, следовательно, максимально возможная стоимость пути из n вершин равна количеству дуг пути $(n-1)$ в предположении, что вес на каждой будет максимален, то есть равен 1. Максимально возможная сила пути равна 1.

Скалярные оценки по агрегированной матрице:

- оценка по стоимости

$$F_R^{Cost}(p^t) = Cost(P^t, R), \qquad F_R^{Cost}(p^t): Rankings \to [0; n-1], \qquad (1.91)$$

- оценка по силе

$$F_R^{Str}(p^t) = Str(P^t, R), \qquad F_R^{Str}(p^t): Rankings \to [0; 1]. \qquad (1.92)$$

Векторные оценки по матрицам экспертов, $k = \overline{1, m}$:

- оценка по стоимости

$$F^{Cost}(p^t) = \begin{pmatrix} F_1^{Cost}(p^t) \\ \vdots \\ F_m^{Cost}(p^t) \end{pmatrix}, \qquad \text{где } F_k^{Cost}(p^t) = Cost(P^t, R^k),$$
$$F_k^{Cost}(p^t): Rankings \to [0; n-1], \qquad (1.93)$$

- оценка по силе

$$F^{Str}(p^t) = \begin{pmatrix} F_1^{Str}(p^t) \\ \vdots \\ F_m^{Str}(p^t) \end{pmatrix}, \qquad \text{где } F_k^{Str}(p^t) = Str(P^t, R^k),$$
$$F_k^{Str}(p^t): Rankings \to [0; 1], \qquad (1.94)$$

- оценка по расстоянию

$$F^d(p^t) = \begin{pmatrix} F_1^d(p^t) \\ \vdots \\ F_m^d(p^t) \end{pmatrix}, \qquad \text{где } F_k^d(p^t) = d(p^t, \rho_k). \qquad (1.95)$$

Скалярные оценки по матрицам экспертов (в зависимости от выбранного способа подсчёта расстояния между двумя отношениями):

- оценка по расстоянию (суммарное по всем экспертам)

$$F^D(p^t) = D(p^t) \tag{1.96}$$

Критерии оптимальности:

- максимизация оценок

$$F_R^{Cost}(p^t) \to \max_{p^t}\ ,\ \ F_k^{Cost}(p^t) \to \max_{p^t}\ ,$$

$$F_R^{Str}(p^t) \to \max_{p^t}\ ,\ \ F_k^{Str}(p^t) \to \max_{p^t}\ ;$$

- минимизация оценок

$$F_k^d(p^t) \to \min_{p^t}\ ,\qquad F^D(p^t) \to \min_{p^t}\ .$$

Оптимальные множества $P_F \subseteq Rankings$ для векторных оценок характеристик $F \in \{F^{Cost}, F^{Str}, F^d\}$ задаются как:

$$P_F = \{p^* | \nexists p \in Rankings, \forall k : F_k(p) \geq F_k(p^*),\ \ \exists l : F_l(p) \neq F_l(p^*)\}. \tag{1.97}$$

Для максимизируемых оценок (стоимость, сила) в формуле (1.97) используется знак «≥», для минимизируемых (расстояние) вместо знака «≤» – знак «≤».

Также можно использовать более широкое оптимальное множество S_F:

$$Rankings \supseteq S_F = \{p^* | \nexists p \in Rankings, \forall k : F_k(p) > F_k(p^*)\}. \tag{1.98}$$

Альтернативы из оптимального подмножества можно направить на следующий этап коллективного выбора. Отбрасывание неоптимальных путей сужает область поиска наилучшего варианта расстановки альтернатив.

Пример 1 (см. параграф 2.2.6)

Поставим задачу посетить несколько городов, перемещаясь между ними по дорогам (считаем, что каждый город не посещается больше одного раза). Дорожная сеть представляет собой граф, дуга – это одна дорога. Необходимо найти маршрут, максимизирующий удовлетворённость («полезность») по некоторым показателям. Например, таким как: «интересность» дороги (по шкале красоты пейзажей и архитектуры, например), время перемещения по дороге, деньги, потраченные на проезд, количество потраченного бензина, «опасность» дороги (по какой-либо шкале опасности и/или разбитости дорог). Каждому эксперту сопоставлена матрица, выражающая численные значения «полезности» проезда по дорогам, в смысле оценки по некому показателю: чем больше элемент матрицы, тем больше удовлетворённость данным отрезком пути по данному показателю. Нулями (минимальным значением элементов) на диагонали вынужденно обозначим отсутствие петель – положим, что никакой ценности не имеет оставаться в одной точке.

На произвольные отношения экспертов не накладывается условие отсутствия циклов («противоречий»), матрицы критериев могут быть неасимметричные и нетранзитивные, потому что каждая дуга орграфа – отдельная дорога со своими показателями, не зависящая от других дуг.

Пусть количество вершин $n = 3$, критериев $m = 2$. Пусть первый «эксперт» – «интересность», второй «эксперт» – «удовлетворённость временем, потраченным на дорогу». Пусть $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$. Матрицы экспертов и их нормированные (1.75) аналоги (рисунок 1.15):

$$\tilde{R}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix},\ \tilde{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix},\ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

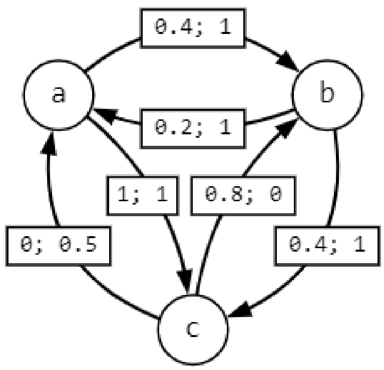


Рисунок 1.15 – Граф со значениями двух критериев на дугах

Агрегированная матрица по формуле (1.30) и построенное по нему отношение нечёткого частичного порядка (задающее нечёткое ранжирование $\langle a, b, c\rangle$) будут, соответственно, выражаться матрицами

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 1 \\ 0.6 & 0 & 0.7 \\ 0.25 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Tr\big(Acyc(R)\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таблице 1.3 показаны все возможные пути и их оценки.

Таблица 1.3 – Векторные оценки всевозможных путей

$\boldsymbol{p^t}$	$\boldsymbol{Tr(P^t)}$	**Оценка по стоимости**	**Оценка по силе**
$\langle a,b,c\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4+0.4 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \min(0.4,\ 0.4) \\ \min(1,\ 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\langle a,c,b\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+0.8 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \min(1,\ 0.8) \\ \min(1,\ 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\langle b,a,c\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \min(0.2,\ 1) \\ \min(1,\ 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\langle b,c,a\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4+0 \\ 1+0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \min(0.4,\ 0) \\ \min(1,\ 0.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
$\langle c,b,a\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8+0.2 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \min(0.8,\ 0.2) \\ \min(0,\ 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\langle c,a,b\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0+0.4 \\ 0.5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \min(0,\ 0.4) \\ \min(0.5,\ 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Оценки в виде точек размещаются на двумерный график (рисунок 1.16).

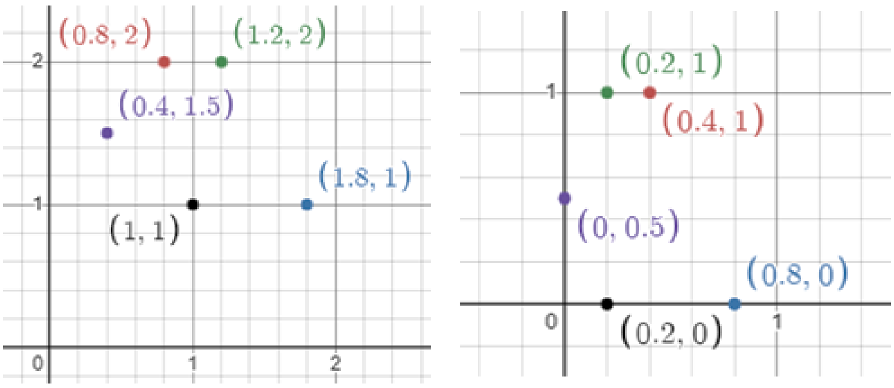
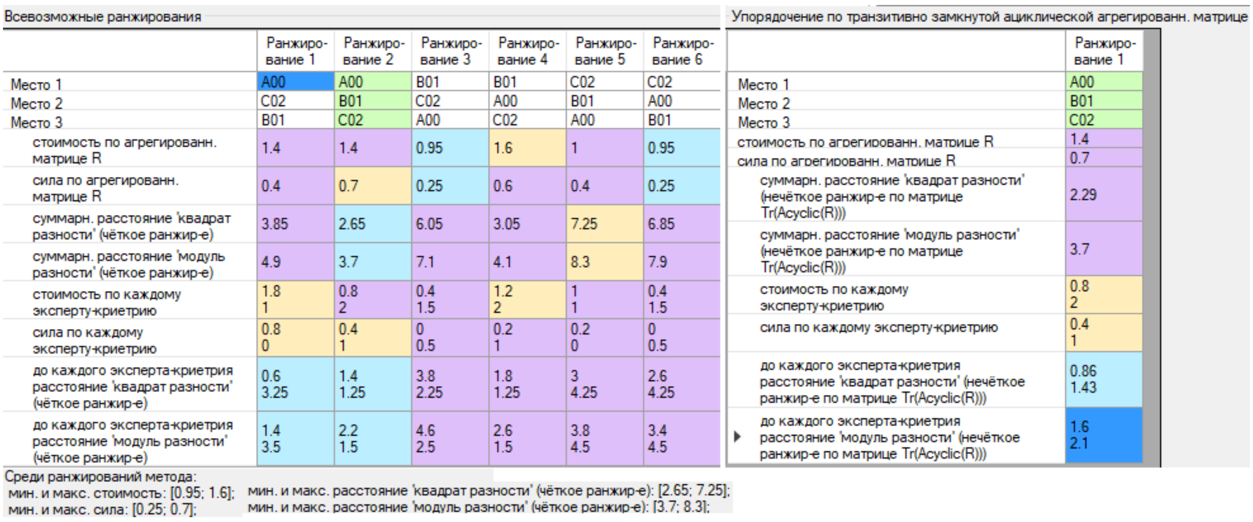


Рисунок 1.16 – Векторные оценки: по стоимости (слева) и по силе (справа)

Оптимальные множества:

$$P_{F^{Cost}} = \{\langle a,c,b\rangle,\ \langle b,a,c\rangle\}, \qquad P_{F^{Str}} = \{\langle a,c,b\rangle,\ \langle a,b,c\rangle\}$$

На рисунке 1.17 показан результат работы программы на данном примере. Видно, что $\langle b,a,c\rangle$ – путь максимальной стоимости, а $\langle a,b,c\rangle$ – путь максимальной силы, также имеющий минимальное суммарное расстояние.



Всевозможные ранжирования

	Ранжиро-вание 1	Ранжиро-вание 2	Ранжиро-вание 3	Ранжиро-вание 4	Ранжиро-вание 5	Ранжиро-вание 6
Место 1	A00	A00	B01	B01	C02	C02
Место 2	C02	B01	C02	A00	B01	A00
Место 3	B01	C02	A00	C02	A00	B01
стоимость по агрегированн. матрице R	1.4	1.4	0.95	1.6	1	0.95
сила по агрегированн. матрице R	0.4	0.7	0.25	0.6	0.4	0.25
суммарн. расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	3.85	2.65	6.05	3.05	7.25	6.85
суммарн. расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	4.9	3.7	7.1	4.1	8.3	7.9
стоимость по каждому эксперту-криетрию	1.8 1	0.8 2	0.4 1.5	1.2 2	1 1	0.4 1.5
сила по каждому эксперту-криетрию	0.8 0	0.4 1	0 0.5	0.2 1	0.2 0	0 0.5
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	0.6 3.25	1.4 1.25	3.8 2.25	1.8 1.25	3 4.25	2.6 4.25
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	1.4 3.5	2.2 1.5	4.6 2.5	2.6 1.5	3.8 4.5	3.4 4.5

Среди ранжирований метода:
мин. и макс. стоимость: [0.95; 1.6]; мин. и макс. расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е): [2.65; 7.25];
мин. и макс. сила: [0.25; 0.7]; мин. и макс. расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е): [3.7; 8.3];

Упорядочение по транзитивно замкнутой ациклической агрегированн. матрице

	Ранжиро-вание 1
Место 1	A00
Место 2	B01
Место 3	C02
стоимость по агрегированн. матрице R	1.4
сила по агрегированн. матрице R	0.7
суммарн. расстояние 'квадрат разности' (нечёткое ранжир-е по матрице Tr(Acyclic(R)))	2.29
суммарн. расстояние 'модуль разности' (нечёткое ранжир-е по матрице Tr(Acyclic(R)))	3.7
стоимость по каждому эксперту-криетрию	0.8 2
сила по каждому эксперту-криетрию	0.4 1
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'квадрат разности' (нечёткое ранжир-е по матрице Tr(Acyclic(R)))	0.86 1.43
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'модуль разности' (нечёткое ранжир-е по матрице Tr(Acyclic(R)))	1.6 2.1

Рисунок 1.17 – Характеристики четких ранжирований и нечёткого ранжирования, полученного из агрегированной матрицы, в интерфейсе реализованной программы

Оценки расстояния («квадрат разности») для одного из ранжирований в чётком и нечётком случае представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4 – Оценки расстояния всевозможных путей

$\boldsymbol{p^t}$	$\boldsymbol{Tr(P^t)}$	**Векторная оценка**	**Скалярная оценка**
$\langle a,b,c\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (1-0.4)^2+(1-0.4)^2+0.2^2+0.8^2 \\ 1^2+0.5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.25 \end{pmatrix}$	2.65
Нечёткое $\langle a,b,c\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0.7-0.4)^2+0.3^2+0.2^2+0.8^2 \\ (1-0.7)^2+(1-0.7)^2+1^2+0.5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 \\ 1.43 \end{pmatrix}$	2.29

Оценка по чёткому ранжированию можно считать более «грубой» в прикладном смысле, по сравнению с нечётким случаем вычислений, так как агрегированное нечёткое отношение более «приближено» к отношениям критериев (1.17).

Пример 2

Рисунок 1.18 демонстрирует пример, в котором агрегированное ранжирование (см. п. 1.5) может иметь минимальное расстояние, но не являться путём наибольшей силы или стоимости, не входить в оптимальные множества $P_{F_{Cost}}$, $P_{F_{Str}}$.

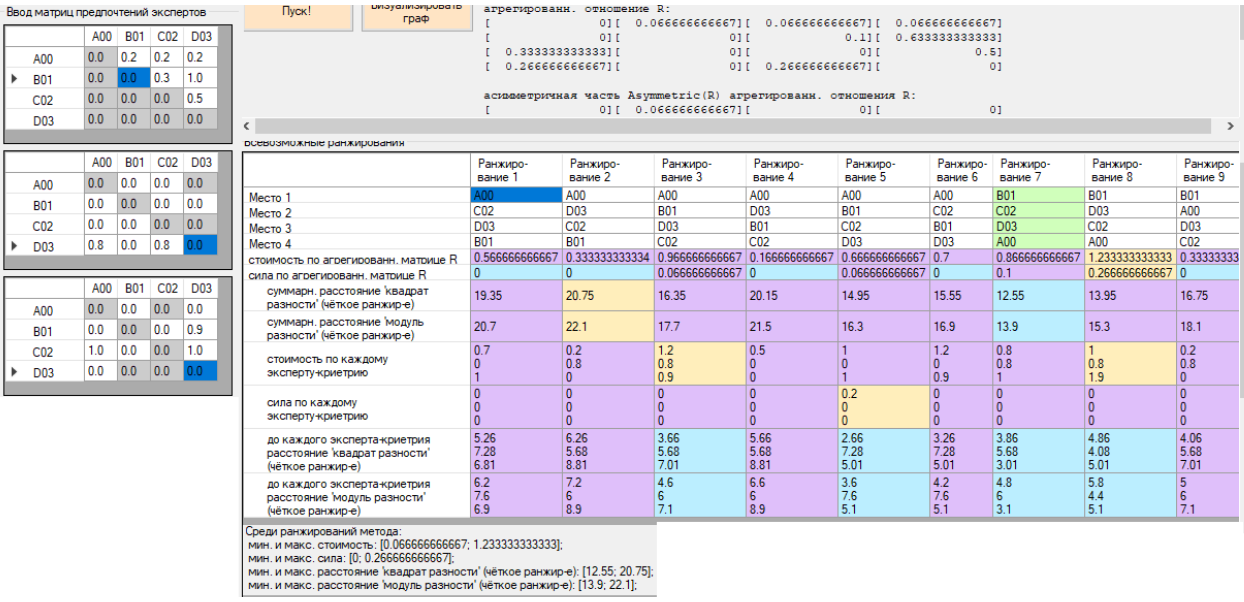


Рисунок 1.18 – Пример, когда ранжирование по $Tr(Acyc(R))$ не является лучшим ни по стоимости, ни по силе

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1 Описание разработанной программной системы поддержки принятия решений для агрегирования нечётких предпочтений

2.1.1 Описание СППР

Для реализации предложенных алгоритмов была написана программа (система поддержки принятия решений, СППР) [33, 34]. Некоторые характеристики реализованной программы (рисунок 2.1) представлены ниже.

- Операционная система: Windows.
- Язык программирования: C#. Предыдущая версия программы была реализована на Python, но из-за большого количества модулей и сложности масштабирования было решено изменить архитектуру кода и перенести его на другой язык, более удобный для применения принципов ООП.
- Среда разработки: .NET Framework 4.7.2.
- Использованные библиотеки:
    - Windows.Forms – для создания окон приложения;
    - Microsoft.Msagl –для визуализации графов.

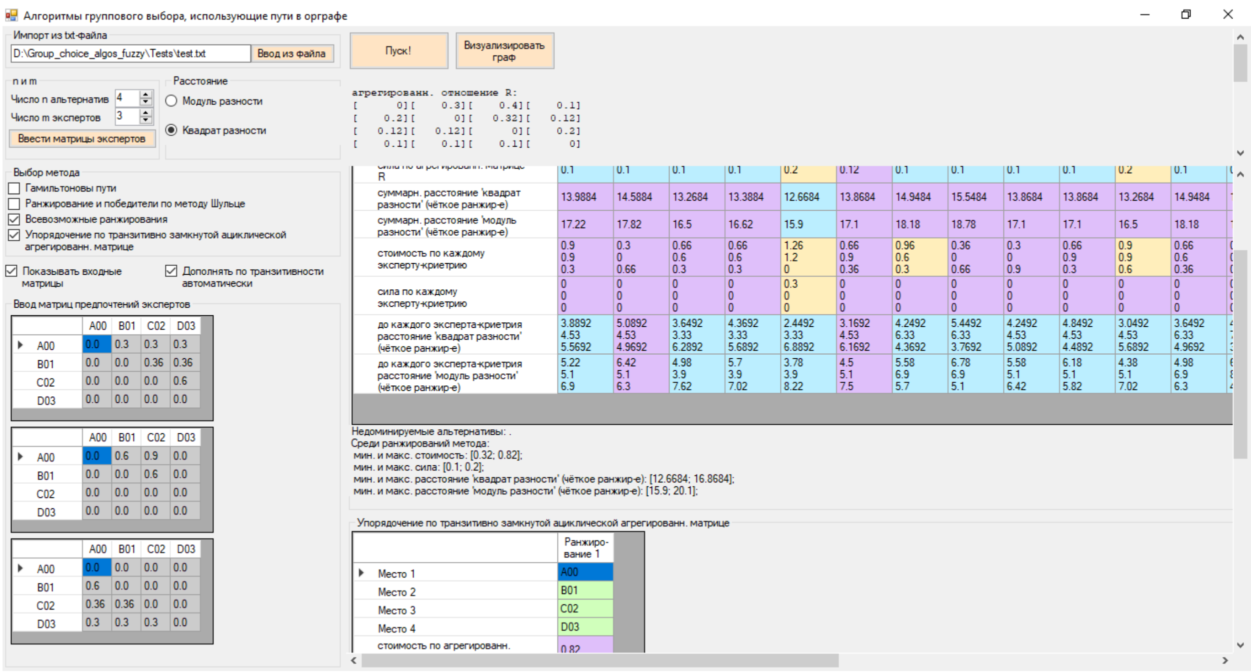


Рисунок 2.1 – Интерфейс главного окна программы

Работа с программой заключается в задании настроек, вводе данных и получении ответа (детализация пунктов описана ниже).

1) Указать значения настроек (рисунок 2.2):
   - способ подсчёта расстояния между парой матриц;
   - отображение вводимых матриц (вкл./выкл.);
   - методы, которые будут использованы для создания агрегированных бинарных отношений;
   - дополнять ли по транзитивности автоматически матрицы в процессе их ввода (вкл./выкл.).
2) Задать матрицы экспертов одним из способов (рисунок 2.3).
   - **В интерфейсе программы**: указать количество альтернатив (вершин графа) n и количество экспертов m; при нажатии кнопки отобразятся m матриц размера $n \times n$ с ячейками для ввода, если включена отрисовка входных матриц.
     - ★ При вводе слишком большого n (и/или m) при выполнении алгоритмов, имеющих большую вычислительную сложность, программа может зависнуть вплоть до прекращения работы, поэтому заданы ограничения на размер и количество

входных матриц.

- **Из файла**: ввести в поле название файла с матрицами; при нажатии кнопки ввода матрицы будут считаны из файла и отображены в виде матриц с ячейками для ввода, если включена отрисовка входных матриц.
    - ★ Входной файл должен содержать в себе матрицы, разделённые переводами строк. Матрица $n \times n$ заполняется как набор из n строк в каждой из которой n чисел, разделённых пробельным(-и) символом(-ами).

3) Если необходимо, заполнить ячейки матриц. Если включено дополнение матриц по транзитивности, то программа при возможности дополнить матрицу, будет автоматически вписывать значения некоторых ячеек. Подробнее про выявление предпочтений экспертов см. в [27].

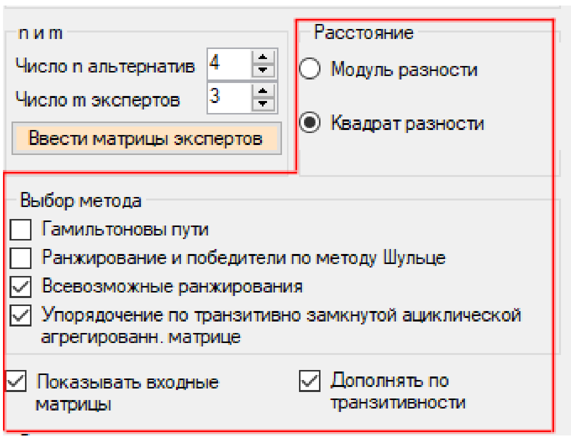


Рисунок 2.2 – Параметры выполнения алгоритмов программы

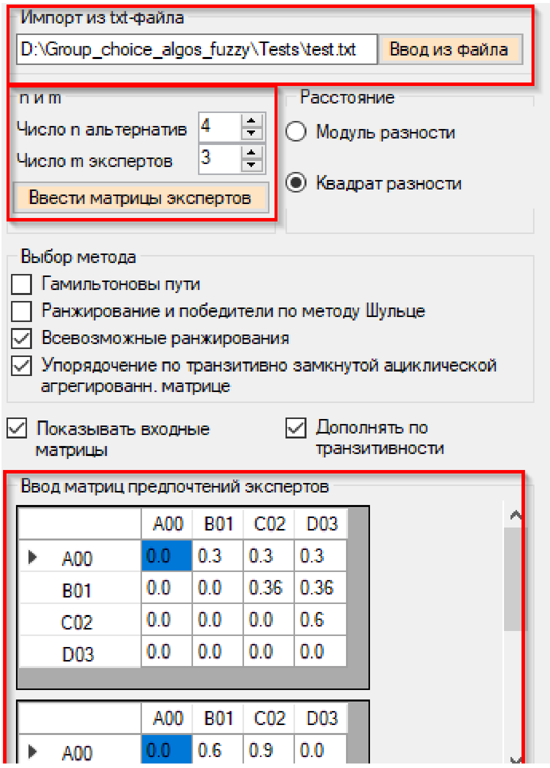


Рисунок 2.3 – Ввод экспертных матриц

4) Запустить выполнение алгоритмов нажатием кнопки. В интерфейсе

отобразится результат работы каждого из выбранных к выполнению методов – ранжирования с их характеристиками или разбиение альтернатив на уровни. Результаты работы алгоритмов будут также записаны в выходной файл (он будет находиться в одной директории с исполняемым файлом программы).

5) Нажатием кнопки визуализировать графы входных отношений экспертов и графы агрегированных отношений (рисунок 2.4).

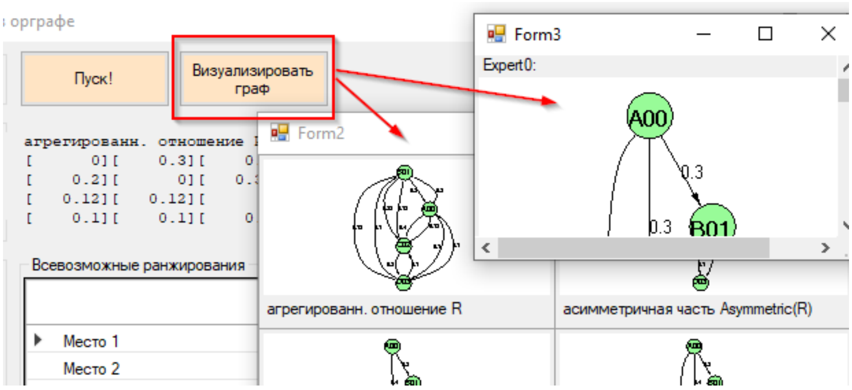


Рисунок 2.4 – Визуализация графов введённых отношений

2.1.2 Оценка вычислительной сложности СППР

Основным модулем реализованной программы является алгоритм построения агрегированного ранжирования с разбиением циклов и взятием транзитивного замыкания (см. п. 1.5.1), поэтому на рисунке 2.5 представлена блок-схема процесса работы программы, включающего именно данный алгоритм.

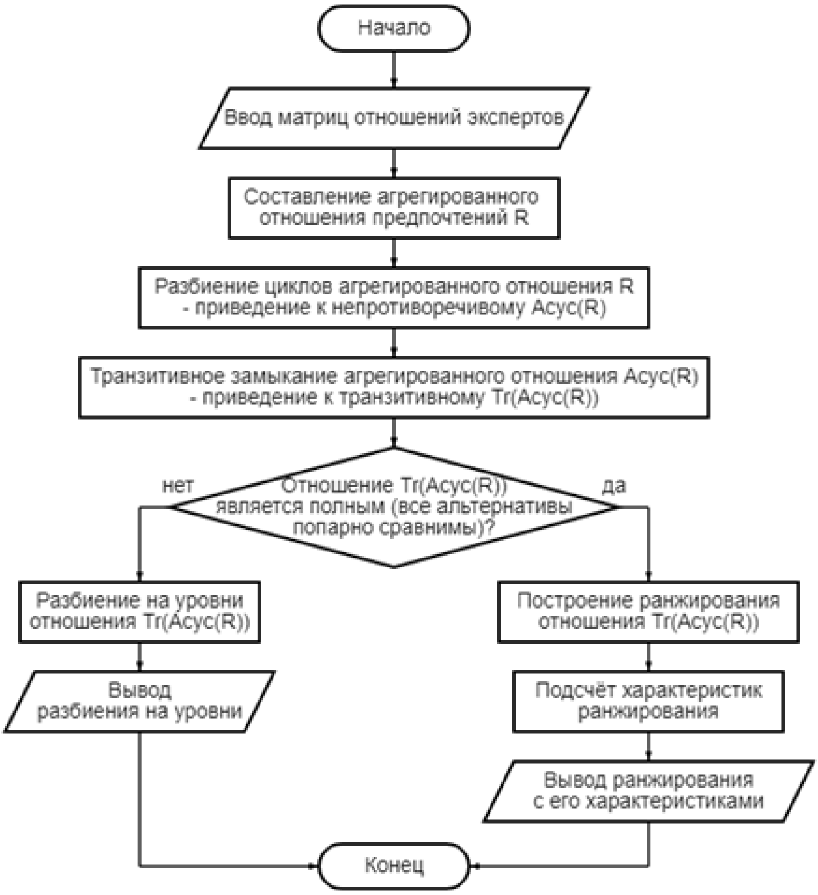


Рисунок 2.5 – Блок-схема работы СППР

Подсчитаем вычислительную сложность этапов выполнения основного алгоритма от выявления информации у ЛПР до выдачи итогового результата.

1) Транзитивные замыкания при опросе экспертов: $O(n^3)$ не более чем n раз для каждого из m экспертов. Итого: $O(n^4m)$.
2) Составление агрегированной матрицы: $O(n^2m)$.
3) Разбиение контуров: в худшем случае (когда граф полный) придётся удалить $O\big(n^2-(n-1)\big)=O(n^2)$ дуг, чтобы привести граф в вид дерева – связного графа без циклов, в коем $n-1$ дуг при n вершинах. Единичная операция нахождения и удаления дуг занимает $O(n^3)$ операций. Итого: $O(n^5)$.
4) Транзитивное замыкание: $O(n^3)$.
5) Разбиение на уровни или ранжирование: $O(n^2)$.

Вычислительная сложность всей программы (худший случай): $O(n^4m)+O(n^5)$.

2.2 Модельные и прикладные примеры

2.2.1 Модельный пример 1

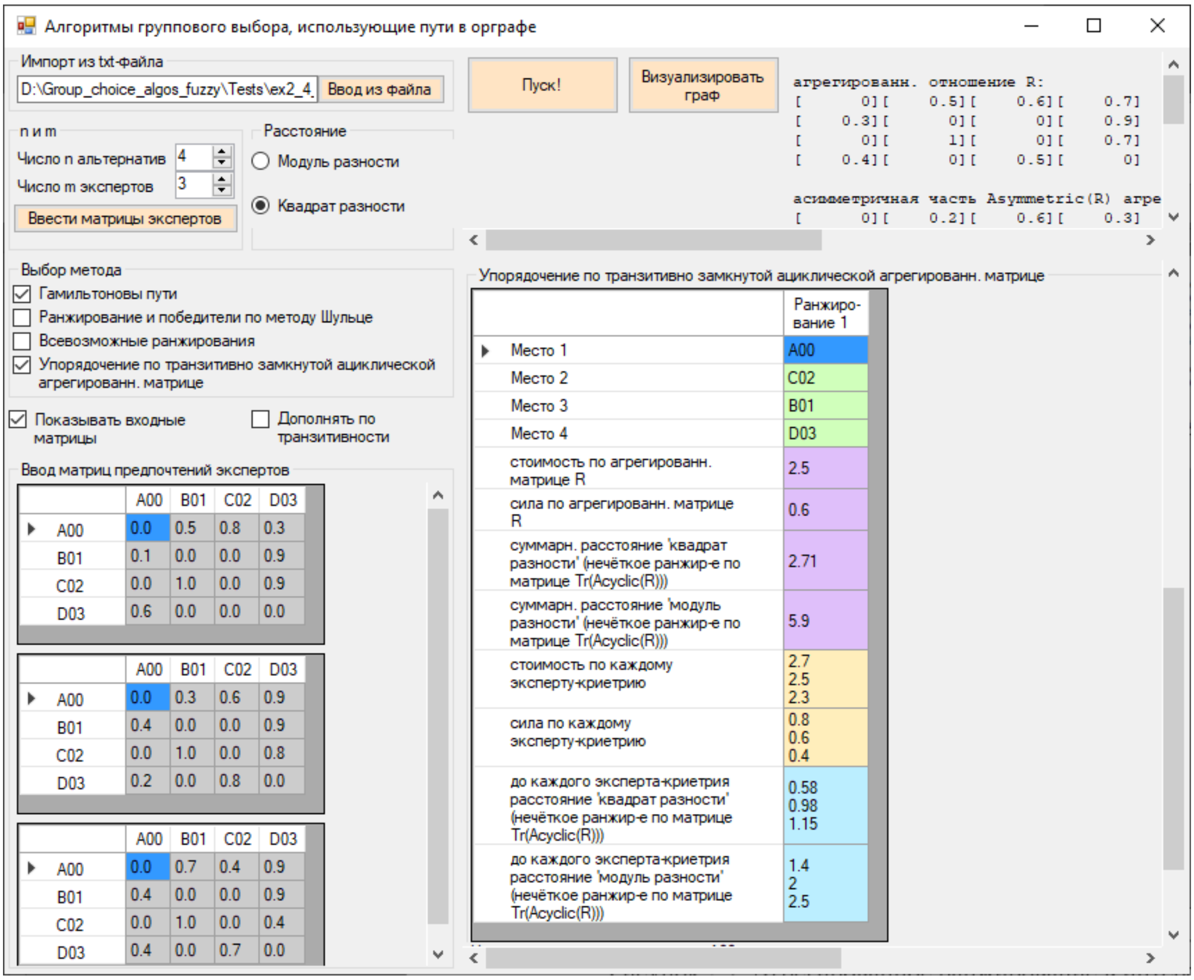
Результаты работы программы на примере из статьи [20] представлены ниже (рисунок 2.6, рисунок 2.7).

Гамильтоновы пути

	Ранжиро-вание 1	Ранжиро-вание 2	Ранжиро-вание 3	Ранжиро-вание 4	Ранжиро-вание 5	Ранжиро-вание 6	Ранжиро-вание 7	Ранжиро-вание 8	Ранжиро-вание 9	Ранжиро-вание 10	Ранжиро-вание 11
Место 1	A00	A00	A00	B01	B01	B01	C02	C02	C02	D03	D03
Место 2	D03	B01	C02	A00	D03	A00	B01	D03	B01	C02	A00
Место 3	C02	D03	B01	D03	A00	C02	D03	A00	A00	B01	C02
Место 4	B01	C02	D03	C02	C02	D03	A00	B01	D03	A00	B01
стоимость по агрегированн. матрице R	2.2	1.9	2.5	1.5	1.9	1.6	2.3	1.6	2	1.8	2
сила по агрегированн. матрице R	0.5	0.5	0.6	0.3	0.4	0.3	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4
суммарн. расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	10.96	11.56	4.36	12.76	14.56	11.56	10.96	15.16	9.16	17.56	12.76
суммарн. расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	15	15.6	8.4	16.8	18.6	15.6	15	19.2	13.2	21.6	16.8
стоимость по каждому эксперту-криетрию	1.3 2.7 2.6	1.4 2 2.3	2.7 2.5 2.3	0.4 2.1 2	2.3 1.7 1.7	1.8 1.8 1.2	2.5 2.1 2.3	2 1.3 1.5	1.4 2.3 2.3	1.1 2.2 2.1	2.4 1.8 1.8
сила по каждому эксперту-криетрию	0 0.8 0.7	0 0.3 0.7	0.8 0.6 0.4	0 0.4 0.4	0.6 0.2 0.4	0.1 0.4 0.4	0.6 0.2 0.4	0.5 0.2 0.4	0.1 0.4 0.4	0 0.4 0.4	0.6 0.2 0.4
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	4.77 3.35 2.84	4.97 3.55 3.04	1.17 1.55 1.64	5.77 3.35 3.64	5.17 4.75 4.64	3.97 3.35 4.24	2.97 3.95 4.04	3.97 5.95 5.24	3.57 2.55 3.04	6.57 5.75 5.24	4.17 4.75 3.84
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	5.9 4.7 4.4	6.1 4.9 4.6	2.3 2.9 3.2	6.9 4.7 5.2	6.3 6.1 6.2	5.1 4.7 5.8	4.1 5.3 5.6	5.1 7.3 6.8	4.7 3.9 4.6	7.7 7.1 6.8	5.3 6.1 5.4

Среди ранжирований метода:
мин. и макс. стоимость: [1.5; 2.5];
мин. и макс. сила: [0.3; 0.6];
мин. и макс. расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е): [4.36; 17.56];
мин. и макс. расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е): [8.4; 21.6];

Рисунок 2.6 – Гамильтоновы пути, посчитанные по матрице смежности агрегированной матрицы *R*



	A00	B01	C02	D03
A00	0.0	0.5	0.8	0.3
B01	0.1	0.0	0.0	0.9
C02	0.0	1.0	0.0	0.9
D03	0.6	0.0	0.0	0.0

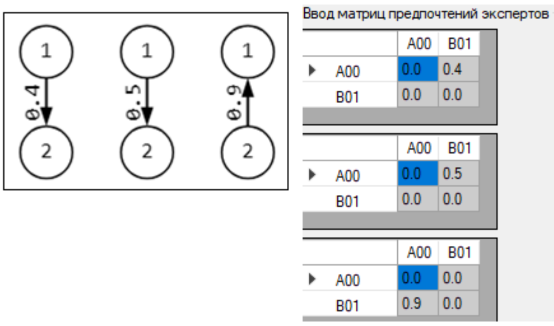
	A00	B01	C02	D03
A00	0.0	0.3	0.6	0.9
B01	0.4	0.0	0.0	0.9
C02	0.0	1.0	0.0	0.8
D03	0.2	0.0	0.8	0.0

	A00	B01	C02	D03
A00	0.0	0.7	0.4	0.9
B01	0.4	0.0	0.0	0.9
C02	0.0	1.0	0.0	0.4
D03	0.4	0.0	0.7	0.0

Рисунок 2.7 – Агрегированное ранжирование в интерфейсе программы

2.2.2 Модельный пример 2

Пример, показывающий, что результат агрегирования зависит от выбора расстояния между отношениями (рисунок 2.8).



	A00	B01
A00	0.0	0.4
B01	0.0	0.0

	A00	B01
A00	0.0	0.5
B01	0.0	0.0

	A00	B01
A00	0.0	0.0
B01	0.9	0.0

Рисунок 2.8 – Представления входных отношений

В случае расстояния «квадрат» ранжировать альтернативы невозможно (рисунок 2.9). В случае расстояния «модуль» побеждает альтернатива A01 (рисунок 2.10).

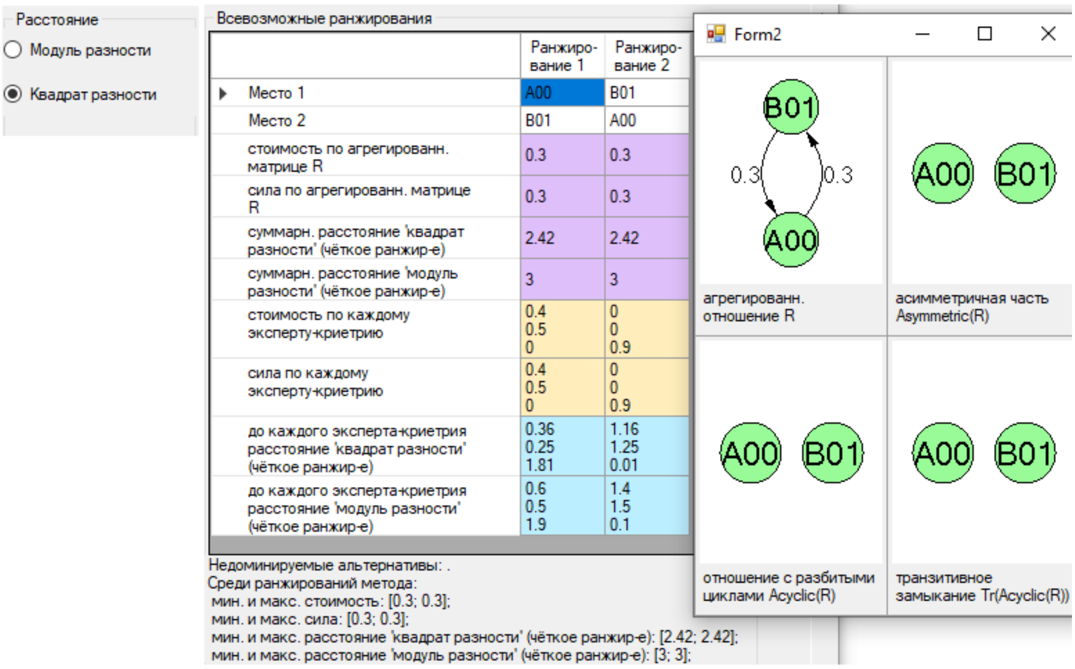


Рисунок 2.9 – Агрегирование по расстоянию «квадрат разности»

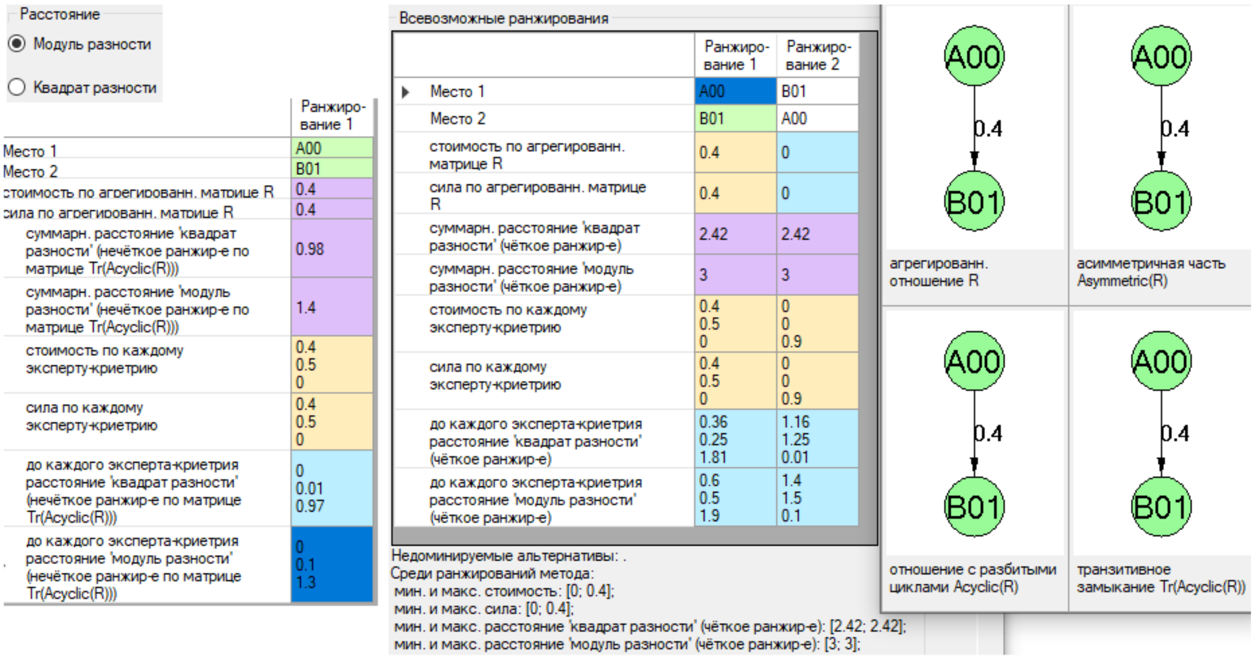


Рисунок 2.10 – Агрегирование по расстоянию «модуль разности»

2.2.3 Прикладной пример 1. Выбор дня проведения занятия

Группы магистров потока «Прикладная математика» хотят выбрать, в какой день проводить потоковые практические занятия, чтобы договориться с преподавателем на одно определённое для всех время. В качестве альтернатив предложены шесть дней недели (все, кроме воскресенья).

Каждый студент имеет возможность выбрать, какой день ему больше нравится из пары предложенных к сравнению и задать степень предпочтительности (или «уверенность в доминировании») одной альтернативы перед другой в виде числа от 0 до 1 включительно. 0 означает, что альтернатива А ни в коем случае не лучше альтернативы Б, 1 означает, что альтернатива А однозначно чётко лучше альтернативы Б. Промежуточные числа от 0 до 1 могут означать: «А лучше Б, но это не точно».

Назначение чисел уверенности подразумевает базовую компетентность студентов в выявлении собственных предпочтений и умении выражать их в форме, достаточной для последующей алгоритмической обработки. А именно в форме элементов матрицы; для её корректного заполнения необходимо понимание свойств бинарных отношений. Можно сказать, что такие методы больше применимы к людям с инженерно-техническим складом ума.

Можно варьировать методику выведения коллективного решения.

1) Каждая группа делает свою агрегированную матрицу из матриц студентов, имеющую свойства такие же, как и у матрицы одного студента. После чего матрицы групп собираются в финальную агрегированную матрицу потока.
2) Предпочтения собираются сразу для всех людей потока и из этих матриц собирается агрегированная – без «делегирования» обобщённого предпочтения от группы. Для случая «без делегирования» будет играть роль количество заинтересованных голосующих людей в группе – чем больше людей, тем больше шанс того, что они «перетянут на себя» результат общего решения.

Из агрегированной матрицы студентов составляется либо ранжирование, либо множество недоминируемых альтернатив – лучших для проведения занятия дней. Результат предлагается преподавателю в качестве ориентира, основанного на предпочтениях студентов. Матрицы (11 шт.), полученные от заинтересованных студентов групп представлены ниже (рисунок 2.11).

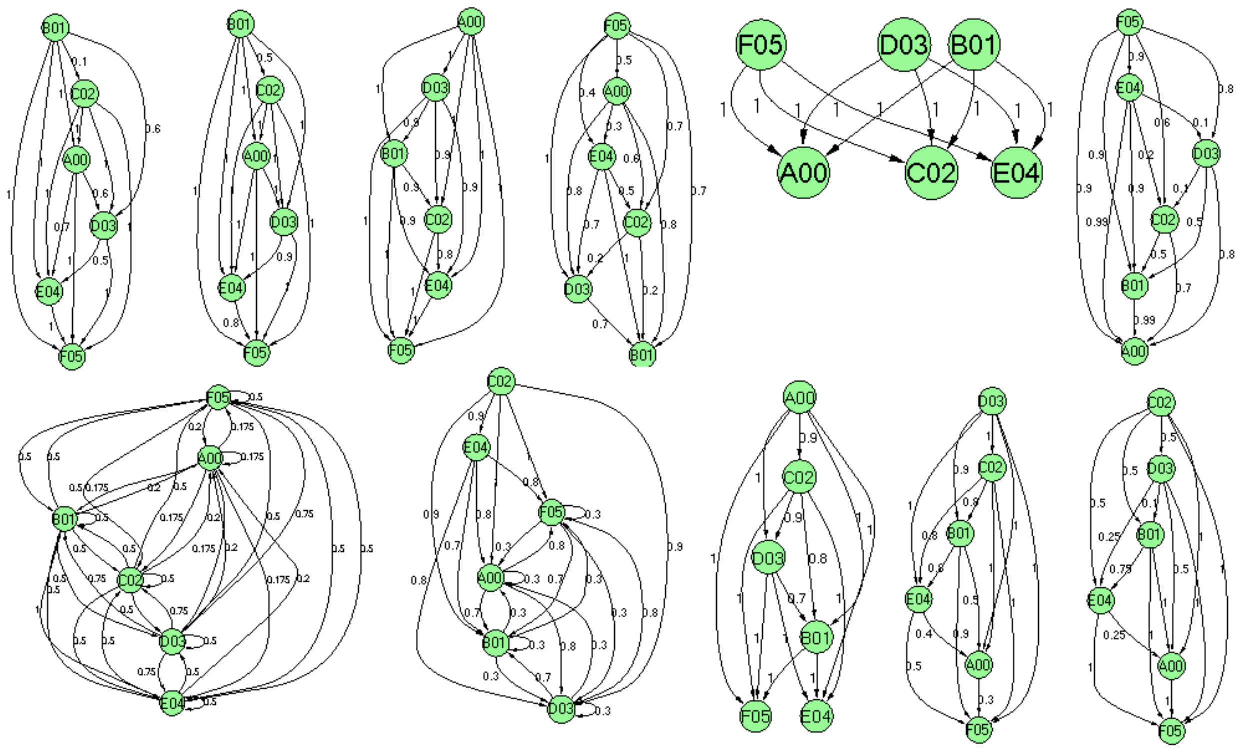


Рисунок 2.11 – Графы предпочтений студентов

$$\text{М8О-201М-22:}\begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 1 & 0.9 & 0 & 0.9 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.8 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.9 \\ 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.8 & 0.9 & 1 & 0 & 1 & 0.9 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{М8О-202М-22:}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 & 0.9 & 0 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.25 & 1 \\ 0.5 & 0.1 & 0 & 0 & 0.25 & 1 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

М8О-204М-22:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.7 & 1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

М8О-205М-22:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0.7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

М8О-211М-22:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.7 & 1 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0.6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.99 & 0.9 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.6 & 0.6 & 0.8 & 0.9 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.125 & 0.175 & 0 & 0 \\ 0.075 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0.75 & 0.75 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0.05 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.9 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.9 & 1 & 1 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общие матрицы по каждой группе (рисунок 2.12):

$$201: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 1 & 0.85 & 0 & 0 & 0.85 & 1 \\ 0.65 & 0.8 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.9 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 202: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.825 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.575 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$204: \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.7 & 1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}, \quad 205: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0.7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$211: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.435 & 0.435 \\ 0.638 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0 \end{pmatrix}.$$

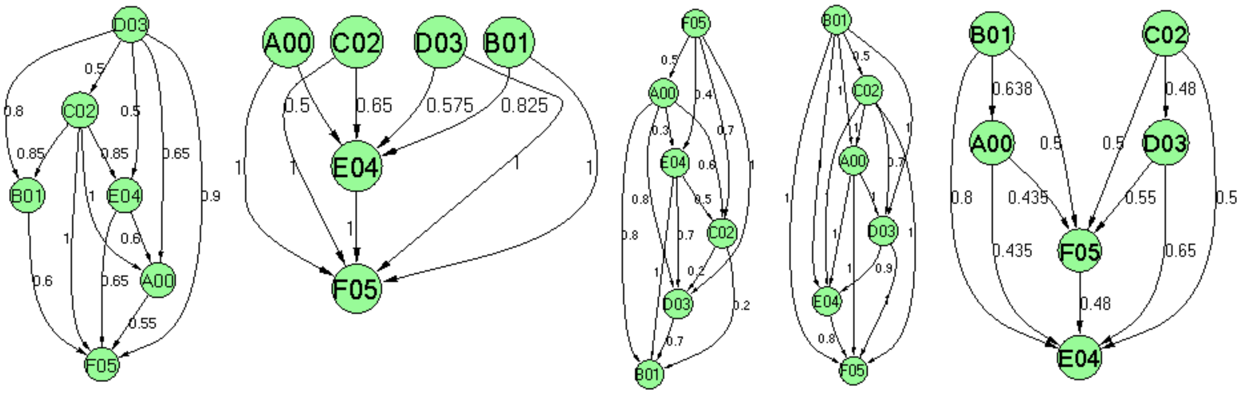


Рисунок 2.12 – Графы предпочтений, агрегированные внутри каждой группы

Ниже представлены результаты работы программы методом «с делегированием» (рисунок 2.13) и «без делегирования» (рисунок 2.14).

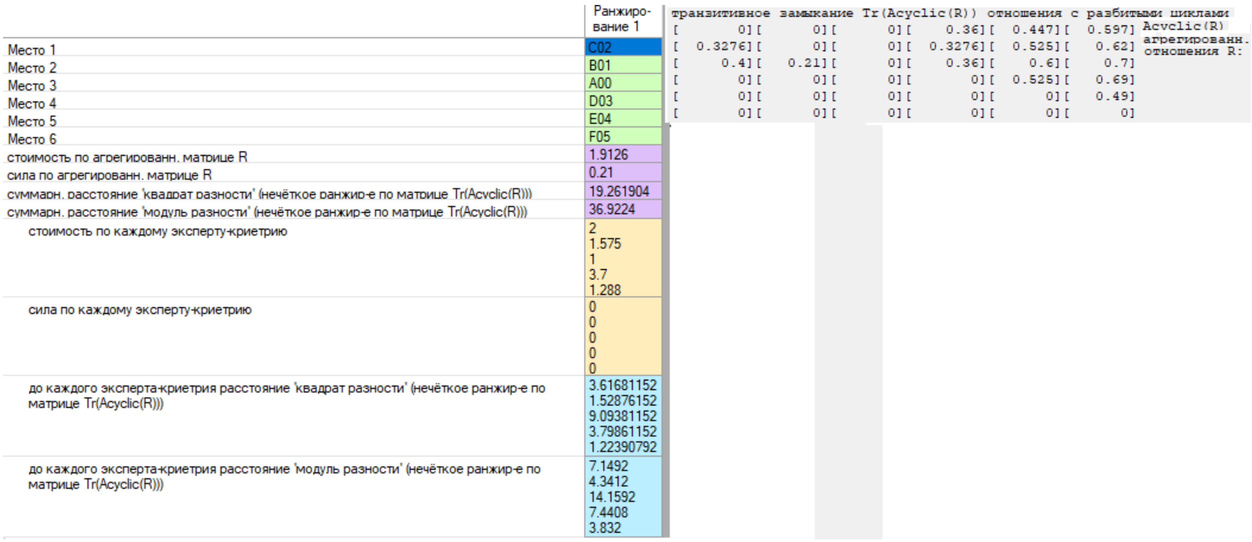


Рисунок 2.13 – Агрегирование «с делегированием»

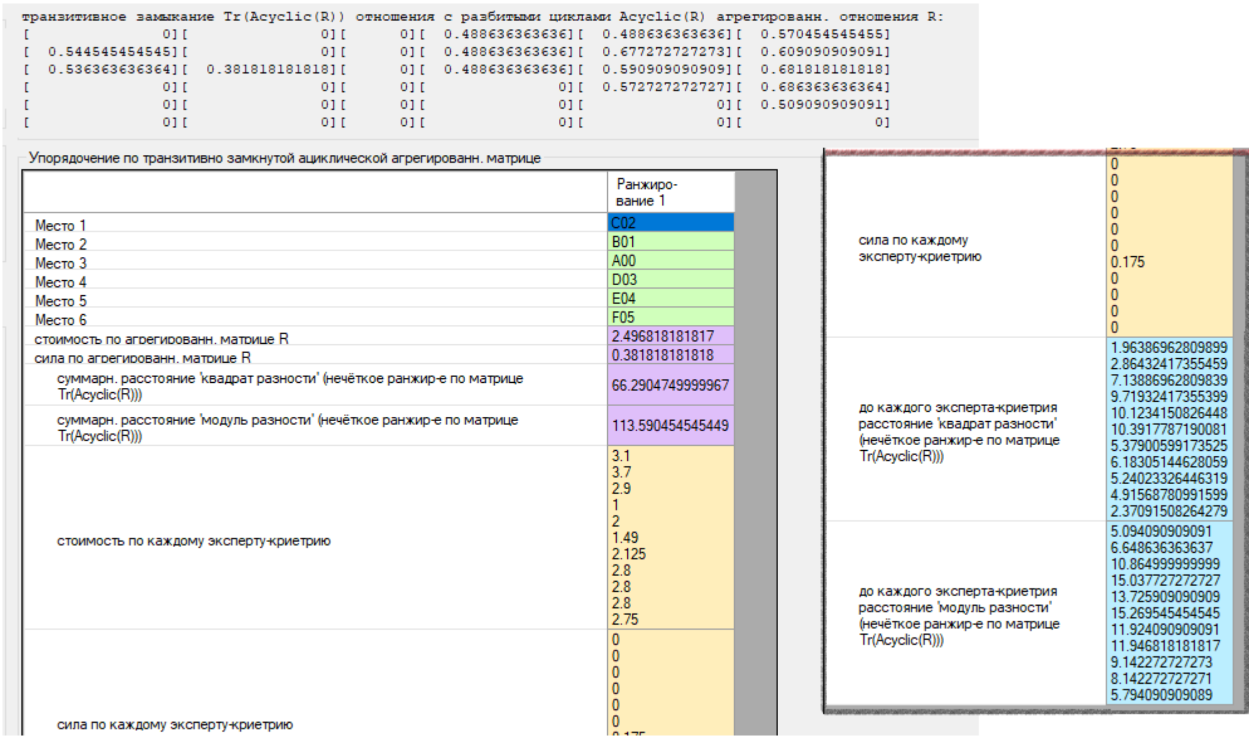


Рисунок 2.14 – Агрегирование «без делегирования»

В обоих вариантах сортировка дней по предпочтительности такая: среда (лучше всего), вторник, понедельник, четверг, пятница, суббота. По итогу был выбран вторник (пожелание преподавателя), несмотря на то что среди энтузиастов потока лучшей оказалась среда. Но степень доминирования среды над вторником (0.21 и 0.3818 – по каждому из вариантов) не столь существенна, как степень доминирования между другими парами альтернатив, поэтому, в некотором смысле (например, если от нечёткого агрегированного ранжирования взять альфа-срез (1.11) с $\alpha = 0.22$ и $\alpha = 0.4$), разницу между вторником и средой можно считать несущественной.

2.2.4 Прикладной пример 2. Выбор музыкального инструмента для турпохода

Три туриста-любителя (эксперты) выбирают музыкальный инструмент, который можно взять с собой в поход. Предложены А) деревянная флейта, В) укулеле, С) гитара, D) варган (он же комус). Эксперт имеет внутреннее представление о необходимости каждого инструмента на основании разных факторов. Например, таких как способность играть на инструменте, вес, объём и хрупкость инструмента, предпочтения по издаваемым звукам, возможность петь под инструмент и др. Предпочтения экспертов, введённые в программу показаны на рисунке 2.15.

	A00	B01	C02	D03
A00	0.0	0.3	0.3	0.3
B01	0.0	0.0	0.36	0.36
C02	0.0	0.0	0.0	0.6
D03	0.0	0.0	0.0	0.0

	A00	B01	C02	D03
A00	0.0	0.6	0.9	0.0
B01	0.0	0.0	0.6	0.0
C02	0.0	0.0	0.0	0.0
D03	0.0	0.0	0.0	0.0

	A00	B01	C02	D03
A00	0.0	0.0	0.0	0.0
B01	0.6	0.0	0.0	0.0
C02	0.36	0.36	0.0	0.0
D03	0.3	0.3	0.3	0.0

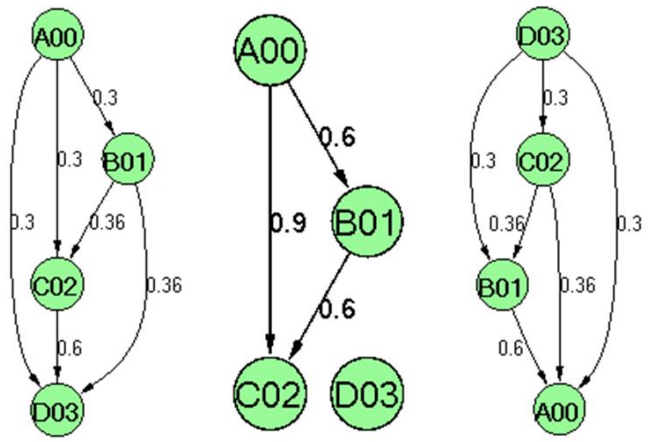


Рисунок 2.15 – Предпочтения туристов-походников

В качестве примера представлены всевозможные ранжирования из 4 альтернатив их характеристики (рисунок 2.16).

Всевозможные ранжирования

	Ранжиро-вание 1	Ранжиро-вание 2	Ранжиро-вание 3	Ранжиро-вание 4	Ранжиро-вание 5	Ранжиро-вание 6	Ранжиро-вание 7	Ранжиро-вание 8	Ранжиро-вание 9	Ранжиро-вание 10
Место 1	A00	A00	A00	A00	A00	A00	B01	B01	B01	B01
Место 2	C02	D03	B01	D03	B01	C02	C02	D03	A00	D03
Место 3	D03	C02	D03	B01	C02	B01	D03	C02	D03	A00
Место 4	B01	B01	C02	C02	D03	D03	A00	A00	C02	C02
стоимость по агрегированн. матрице R	0.7	0.32	0.52	0.52	0.82	0.64	0.62	0.34	0.4	0.62
сила по агрегированн. матрице R	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.12	0.1	0.1	0.1	0.1
суммарн. расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	13.9884	14.5884	13.2684	13.3884	12.6684	13.8684	14.9484	15.5484	13.8684	13.8684
суммарн. расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	17.22	17.82	16.5	16.62	15.9	17.1	18.18	18.78	17.1	17.1
стоимость по каждому эксперту-криетрию	0.9 0.9 0.3	0.3 0 0.66	0.66 0.6 0.3	0.66 0.6 0.3	1.26 1.2 0	0.66 0.9 0.36	0.96 0.6 0.3	0.36 0 0.66	0.3 0 0.9	0.66 0.9 0.3
сила по каждому эксперту-криетрию	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0.3 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	3.8892 4.53 5.5692	5.0892 4.53 4.9692	3.6492 3.33 6.2892	4.3692 3.33 5.6892	2.4492 3.33 6.8892	3.1692 4.53 6.1692	4.2492 6.33 4.3692	5.4492 6.33 3.7692	4.2492 4.53 5.0892	4.8492 4.53 4.4892
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	5.22 5.1 6.9	6.42 5.1 6.3	4.98 3.9 7.62	5.7 3.9 7.02	3.78 3.9 8.22	4.5 5.1 7.5	5.58 6.9 5.7	6.78 6.9 5.1	5.58 5.1 6.42	6.18 5.1 5.82

	Ранжиро-вание 11	Ранжиро-вание 12	Ранжиро-вание 13	Ранжиро-вание 14	Ранжиро-вание 15	Ранжиро-вание 16	Ранжиро-вание 17	Ранжиро-вание 18	Ранжиро-вание 19	Ранжиро-вание 20	Ранжиро-вание 21	Ранжиро-вание 22	Ранжиро-вание 23	Ранжиро-вание 24
Место 1	B01	B01	C02	C02	C02	C02	C02	C02	D03	D03	D03	D03	D03	D03
Место 2	A00	C02	B01	D03	A00	D03	A00	B01	B01	C02	A00	C02	A00	B01
Место 3	C02	A00	D03	B01	D03	A00	B01	A00	C02	B01	C02	A00	B01	A00
Место 4	D03	D03	A00	A00	B01	B01	D03	D03	A00	A00	B01	B01	C02	C02
стоимость по агрегированн. матрице R	0.8	0.54	0.34	0.5	0.32	0.6	0.54	0.42	0.54	0.42	0.62	0.52	0.72	0.7
сила по агрегированн. матрице R	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.12	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
суммарн. расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	13.2684	14.9484	16.1484	16.2684	15.6684	15.6684	15.5484	16.1484	15.6684	16.8684	14.5884	16.2684	13.3884	13.9884
суммарн. расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	16.5	18.18	19.38	19.5	18.9	18.9	18.78	19.38	18.9	20.1	17.82	19.5	16.62	17.22
стоимость по каждому эксперту-криетрию	0.9 0.9 0.6	0.66 0.6 0.36	0.36 0 0.66	0.6 0 0.9	0.3 0 0.66	0.9 0.6 0.3	0.66 0.6 0.36	0.3 0 0.96	0.36 0.6 0.66	0 0 1.26	0.3 0.9 0.66	0.3 0.6 0.66	0.66 1.2 0.3	0.3 0.9 0.9
сила по каждому эксперту-криетрию	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0.3	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е)	3.0492 4.53 5.6892	3.6492 6.33 4.9692	4.9692 7.53 3.6492	5.6892 7.53 3.0492	4.4892 6.33 4.8492	5.0892 6.33 4.2492	3.7692 6.33 5.4492	4.3692 7.53 4.2492	6.1692 6.33 3.1692	6.8892 7.53 2.4492	5.6892 4.53 4.3692	6.2892 6.33 3.6492	4.9692 3.33 5.0892	5.5692 4.53 3.8892
до каждого эксперта-криетрия расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е)	4.38 5.1 7.02	4.98 6.9 6.3	6.3 8.1 4.98	7.02 8.1 4.38	5.82 6.9 6.18	6.42 6.9 5.58	5.1 6.9 6.78	5.7 8.1 5.58	7.5 6.9 4.5	8.22 8.1 3.78	7.02 5.1 5.7	7.62 6.9 4.98	6.3 3.9 6.42	6.9 5.1 5.22

Среди ранжирований метода:
мин. и макс. стоимость: [0.32; 0.82];
мин. и макс. сила: [0.1; 0.2];
мин. и макс. расстояние 'квадрат разности' (чёткое ранжир-е): [12.6684; 16.8684];
мин. и макс. расстояние 'модуль разности' (чёткое ранжир-е): [15.9; 20.1];

Рисунок 2.16 – Все возможные ранжирования из 4 альтернатив

Ниже представлен результат работы программы (рисунок 2.17). Лучшим выбором оказалась альтернатива А – деревянная флейта.

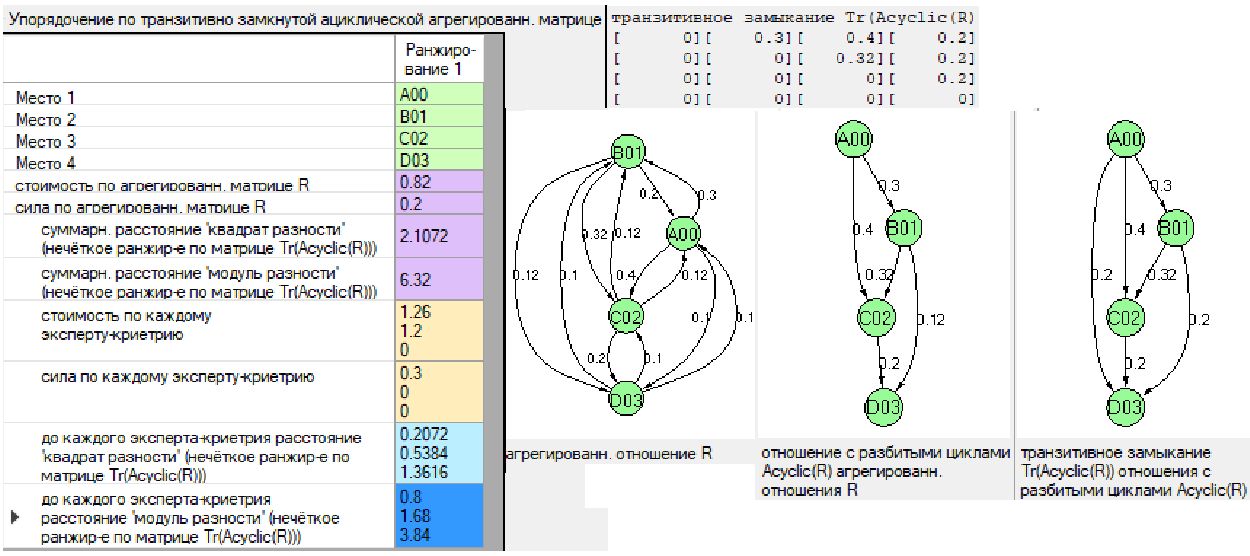


Рисунок 2.17 – Результирующее ранжирование

2.2.5 Прикладной пример 3. Сортировка файлов

Данный пример демонстрирует адаптацию реальной задачи к построенной модели. Пусть задано множество альтернатив, в контексте задачи именуемых «файлами». Необходимо сортировать файлы по «подозрительности» (назовём так) и выделить самые подозрительные файлы. У каждого файла есть совокупность свойств, свойство – это эксперт. Каждое свойство имеет численную характеристику из $[0; 1]$, именуемую «уверенность» в подозрительности. Если у файла a_i присутствует данное выбранное свойство, а у файла a_j – нет, то в матрице этого k-го свойства в ячейке R_{ij}^k будет стоять значение уверенности. Например, если у файла присутствует свойство со значением уверенности 1, то этот файл точно можно назвать подозрительным. Если значение уверенности меньше 1 (и не равно 0), то можно сказать «файл подозрительный, но это не точно». Чем больше свойств подтверждают подозрительность файла, тем более подозрителен файл в целом.

Пусть файлов – 5 шт., свойств – 9 шт. Свойства, присущие файлам и значения уверенности представлены в таблице 2.1. Входные матрицы, их количество, результат работы программы показаны на рисунке 2.18.

Таблица 2.1 – Наличие свойств у файлов

Свойство	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Уверенность	**0.58**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0.4**
Файл A00	да	–	–	–	–	–	–	–	–
Файл B01	да	да	–	–	–	–	–	–	–
Файл C02	–	–	да	да	да	да	да	–	–
Файл D03	–	–	–	–	–	–	–	да	да
Файл E04	да	–	–	–	–	–	–	–	–

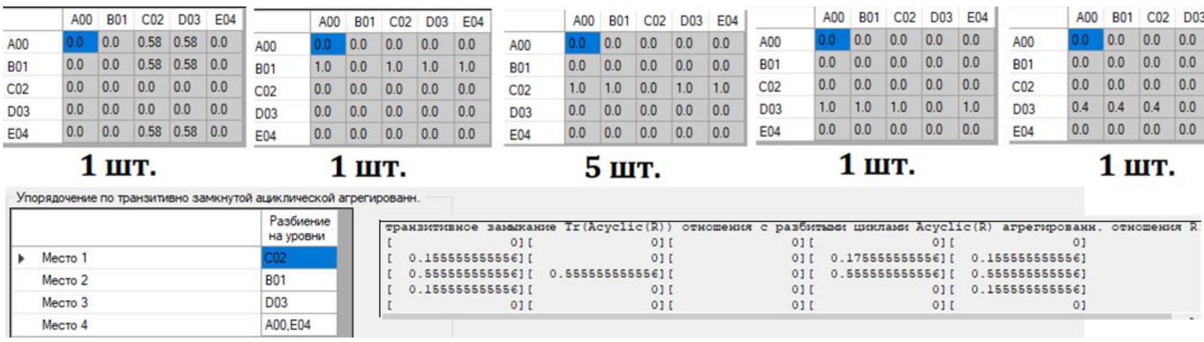


Рисунок 2.18 – Входные матрицы и вывод программы

Самым подозрительным оказался файл C02, за ним по убыванию B01, D03 и на последнем уровне – два файла: A00 и E04. Выбор файла C02 обоснован – у данного файла нашлось целых 5 свойств, говорящих в пользу его подозрительности.

2.2.6 Прикладной пример 4. Составление маршрута поездки на графе дорожной сети

Пример демонстрируется в параграфе 1.6 и иллюстрирует назначение характеристик множеству ранжирований. Основной алгоритм выдаёт путь, на дугах которого ни один критерий не равен нулю (1.17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами работы являются: разработка алгоритмов опроса экспертов, алгоритмов группового выбора с нечеткими бинарными отношениями; создание программной системы поддержки принятия решений [34] с реализацией предложенных алгоритмов и визуализацией (для дальнейшего анализа) характеристик получаемых ранжирований; оценка вычислительной сложности.

СППР апробирована на реальных данных (в том числе при выборе лучших докладов конференции для 10 альтернатив (докладов) и 9 членов жюри). Кодовая база подготовлена к внедрению на производстве для приоритизации списка файлов в очереди на обработку (получен акт о внедрении).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вольский В.И. Процедуры голосования в малых группах // Проблемы управления. – Москва: ООО «Сенсидат-Плюс», 2016. – С. 2-40.

2. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. – СПб: Санкт-Петербургский государственный университет, 2008. – № 1. – С. 98-112.

3. Губко М.В. Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации / Губко М.В. – Москва: ИПУ РАН, 2004. – 37 с. – Версия 1.

4. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

5. Орловский, С.А. Проблемы принятия решений при нечёткой информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.

6. Кофман А. Введение в теорию нечётких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

7. Хижняков Ю.Н. Алгоритмы нечеткого, нейронного и нейро-нечеткого правления в системах реального времени: учеб. пособие. Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. – 160 с.

8. Элементы теории нечетких множеств, нечеткой логики и их применение в экономике: пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования I и II ступеней. В 3 ч. Ч. 2. Нечеткие отношения и нечеткие графы / Белкоопсоюз, Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Кафедра высшей математики; [авт.-сост. Н.Д. Романенко, В.И. Тютин]. – Гомель: БТЭУ, 2014. – 84 с.

9. Кристофидес Н. Теория графов, Алгоритмический подход. / Перевод с англ. Э.В. Вершкова, И.В. Коновальцева; под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

10. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях / Беллман Р., Заде Л. // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С. 172-215.

11. Алескеров, Ф.Т., Хабина, Э.Л., Шварц, Д.А. Бинарные отношения, графы

и коллективные решения: учеб. пособие для вузов / Ф.Т. Алескеров, Э.Л. Хабина, Д.А. Шварц; Гос. ун-т – Высшая школа экономики. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006. – 298 с.
12. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.– 312 с.
13. Асаи К., Ватада Д., Иваи С. Прикладные нечеткие системы / ред. Тэрано Т., Асаи К., Сугэно М. / перев. Чернышов Ю. Н. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
14. Шустова Е.П. Математика (Дискретная математика. Элементы теории нечётких множеств). Практикум. Учебное пособие / Е.П. Шустова. – Казань: Казан. ун-т, 2020. –114 с.
15. Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка / В.Н. Нефёдов, В.А. Осипова, С.О. Смерчинская, Н.П. Яшина // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2018. – № 5. – С. 71-85.
16. Нефёдов В.Н., Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Непротиворечивое агрегирование отношений квазипорядка // Прикладная дискретная математика. – Томск: ТГУ, 2019. – № 45. – УДК 519.81. – С. 113-126. – DOI 10.17223/20710410/45/13.
17. Нефёдов В.Н. Построение агрегированного отношения, минимально удалённого от экспертных предпочтений / В.Н. Нефёдов, С.О. Смерчинская, Н.П. Яшина // Прикладная дискретная математика. – Томск: ТГУ, 2018. – № 42. – С. 120-132.
18. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Построение агрегированного отношения предпочтения на основе нагруженного мажоритарного графа [Электрон. ресурс] / С.О. Смерчинская, Н.П. Яшина // Журнал: Труды МАИ. – 2010. – №39. – URL: https://mai.ru/publications/index.php?ID=14817 (дата обращения: 01.03.2022).
19. Смерчинская С.О. Непротиворечивое агрегирование предпочтений при принятии решений: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18, 05.13.01. – Москва, 2018. – 173 с. URL: https://mai.ru/upload/iblock/35d/Agregirovanie12345-_2_.pdf (дата обращения: 24.02.2024).

20. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование нечетких отношений строгого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2022. – № 7. – С. 30-43. – URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm/y2022/i7/p30 (дата обращения: 24.02.2024).
21. Яманаева, Р.Р. Выбор альтернатив, согласованных с экспертными предпочтениями / Р.Р. Яманаева // Сборник избранных научных докладов по итогам XLVIII Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения». – М.: «Перо», 2022. – 157 с. – С. 142-155. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50186433&pff=1
22. Яманаева, Р.Р. Выбор вариантов проектов, согласованных с экспертными предпочтениями / Р.Р. Яманаева // Сборник тезисов работ международной молодёжной научной конференции XLVIII "Гагаринские чтения – 2022". – М.: Издательство «Перо», 2022. – С. 431-432. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49212424&pff=1
23. Алгоритм Флойда-Уоршелла нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин [Электрон. ресурс] // e-maxx: [сайт]. – URL: https://e-maxx.ru/algo/floyd_warshall_algorithm (дата обращения: 13.08.2023).
24. Галяутдинов Р.Р. Задача коммивояжера – метод ветвей и границ [Электрон. ресурс] // Сайт преподавателя экономики. [2023]. URL: https://galyautdinov.ru/post/zadacha-kommivoyazhera (дата обращения: 13.08.2023).
25. Полещук О.М. Применение нечетких множеств второго типа и Z-чисел для формализации групповой экспертной информации // Лесной вестник / Forestry Bulletin. – 2020. – Т. 24. – № 5. – С. 116–121. – DOI: 10.18698/2542-1468-2020-5-116-121. – URL: https://les-vest.msfu.ru/contents/2020/5/pdf/116-121.pdf (дата обращения: 25.12.2022)
26. Посадский А.И., Сивакова Т.В., Судаков В.А. Агрегирование нечетких суждений экспертов [Электрон. ресурс] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2019. – № 101. – 12 с. – DOI:10.20948/prepr-2019-101. – URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-101

27. Смерчинская С.О., Яманаева Р.Р. Экспертное задание нечётких строгих порядков // Моделирование и анализ данных (на 23.05.2024 принято к публикации).
28. Бахусова Е.В. Нечёткая математика для IT-специалистов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2012. – №8. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/nechyotkaya-matematika-dlya-it-spetsialistov (дата обращения: 25.12.2022).
29. Нефедов В.Н. Медиана для нечётного числа отношений линейного порядка и её использование в задачах группового выбора // Прикладная дискретная математика. – Томск: ТГУ, 2022. – № 3(57). – С. 98-127.
30. Schulze M. A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and condorcet-consistent single-winner election method // Social Choice and Welfare: электронный журнал. – Vol. 36, No 2. – P. 267-303. – URL: https://www.semanticscholar.org/paper/A-new-monotonic%2C-clone-independent%2C-reversal-and-Schulze/f420a1dbb06acbe945a242527b6ba8ca54c0abf6 (дата обращения: 03.05.2022). – Дата публикации: 01.02.2011. – DOI 10.1007/s00355-010-0475-4.
31. The Schulze Method of Voting [Электрон. ресурс] // arXiv. – URL: https://arxiv.org/abs/1804.02973 (дата обращения: 03.05.2022).
32. Яманаева Р.Р. Система поддержки принятия решений для оценки ранжирований альтернатив при многокритериальном выборе // Журнал: Вестник компьютерных и информационных технологий (на 23.05.2024 находится на рецензировании).
33. Яманаева Р.Р. Программная система для построения агрегированного нечёткого отношения предпочтений экспертов // Материалы AMMAI'2024 (на 23.05.2024 принято к публикации).
34. Яманаева Р.Р. Group_choice_algos_fuzzy: программа [Исходный код] / – 2024. – URL: https://github.com/GrapevineSnail/Group_choice_algos_fuzzy.git