Université de Caen Normandie
UFR des Sciences
Département Mathématiques-Informatique

1ère année de Master Informatique
Spécialité Image & Données Multimédia

Analyse fonctionnelle

Projet

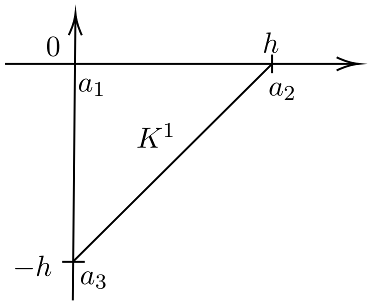
Étudiant: Guillaume LETELLIER (21804030)

Année universitaire : 2021 / 2022

1 Assemblage des matrices élémentaires

Exercice 1

Nous avons $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$ et $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix}$ composant le triangle K_1.



Pour obtenir la matrice d'assemblage élémentaire associée au triangle K_1, il nous faut :

1. calculer les coordonnées barycentriques $\lambda_j^{K_1}$, $1 \leq j \leq 3$ associés à a_1, a_2 et a_3 ;
2. calculer les gradients pour chaque coordonnées barycentriques $\lambda_j^{K_1}$;
3. calculer les entrées de la matrice (couple (i,j)) à l'aide de la formule

$$\alpha_{i,j}^{K_1} = \int_{K_1} \nabla\lambda_i^{K_1}\, \nabla\lambda_j^{K_1}\, dx$$

Déterminons les coordonnées barycentriques d'un point $x \in \mathbb{R}^2$ par rapport aux sommets de K_1. Nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1^{K_1}(x)a_1 + \lambda_2^{K_1}(x)a_2 + \lambda_3^{K_1}(x)a_3 & = & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_1^{K_1}(x) + \lambda_2^{K_1}(x) + \lambda_3^{K_1}(x) & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1^{K_1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2^{K_1}(x)\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3^{K_1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_1^{K_1}(x) + \lambda_2^{K_1}(x) + \lambda_3^{K_1}(x) & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h\lambda_2^{K_1}(x) & = & x_1 \\ -h\lambda_3^{K_1}(x) & = & x_2 \\ \lambda_1^{K_1}(x) + \lambda_2^{K_1}(x) + \lambda_3^{K_1}(x) & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2^{K_1}(x) & = & \frac{x_1}{h} \\ \lambda_3^{K_1}(x) & = & \frac{-x_2}{h} \\ \lambda_1^{K_1}(x) & = & 1 - \left(\lambda_2^{K_1}(x) + \lambda_3^{K_1}(x)\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1^{K_1}(x) & = & 1 - \frac{x_1}{h} - \frac{-x_2}{h} \quad = 1 - \frac{x_1}{h} + \frac{x_2}{h} \\ \lambda_2^{K_1}(x) & = & \frac{x_1}{h} \\ \lambda_3^{K_1}(x) & = & \frac{-x_2}{h} \end{array}\right.$$

Ensuite, il nous faut calculer les gradients des coordonnées barycentriques :

$$\nabla\lambda_1^{K_1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_1(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\lambda_1(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(1-\frac{x_1}{h}+\frac{x_2}{h})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(1-\frac{x_1}{h}+\frac{x_2}{h})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\lambda_2^{K_1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_2(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\lambda_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{x_1}{h})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\frac{x_1}{h})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla\lambda_3^{K_1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_3(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\lambda_3(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{-x_2}{h})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\frac{-x_2}{h})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons désormais calculer la matrice d'assemblage élémentaire associée au triangle K_1 qui est définie comme :

$$\alpha^{K_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{K_1} & \alpha_{1,2}^{K_1} & \alpha_{1,3}^{K_1} \\ \alpha_{2,1}^{K_1} & \alpha_{2,2}^{K_1} & \alpha_{2,3}^{K_1} \\ \alpha_{3,1}^{K_1} & \alpha_{3,2}^{K_1} & \alpha_{3,3}^{K_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,1}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_1^{K_1}\,\nabla\lambda_1^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} dx = \int_{K_1} \frac{-1}{h}\frac{-1}{h} + \frac{1}{h}\frac{1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_1} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2}\,dx = \frac{2}{h^2}\int_{K_1} dx = \frac{2}{h^2}\frac{h^2}{2} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_1^{K_1}\,\nabla\lambda_2^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{K_1} \frac{-1}{h}\frac{1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_1} \frac{-1}{h^2}\,dx = \frac{-1}{h^2}\int_{K_1} dx = \frac{-1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{-1}{2} \\
\alpha_{2,1}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_2^{K_1}\,\nabla\lambda_1^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \nabla\lambda_1^{K_1}\,\nabla\lambda_2^{K_1}\,dx = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,3}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_1^{K_1}\,\nabla\lambda_3^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} dx = \int_{K_1} \frac{1}{h}\frac{-1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_1} \frac{-1}{h^2}\,dx = \frac{-1}{h^2}\int_{K_1} dx = \frac{-1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{-1}{2} \\
\alpha_{3,1}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_3^{K_1}\,\nabla\lambda_1^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \nabla\lambda_1^{K_1}\,\nabla\lambda_3^{K_1}\,dx = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,2}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_2^{K_1}\,\nabla\lambda_2^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{K_1} \frac{1}{h}\frac{1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_1} \frac{1}{h^2}\,dx = \frac{1}{h^2}\int_{K_1} dx = \frac{1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,3}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_2^{K_1}\,\nabla\lambda_3^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} dx = \int_{K_1} 0\,dx = 0 \\
\alpha_{3,2}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_3^{K_1}\,\nabla\lambda_2^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \nabla\lambda_2^{K_1}\,\nabla\lambda_3^{K_1}\,dx = 0
\end{aligned}$$

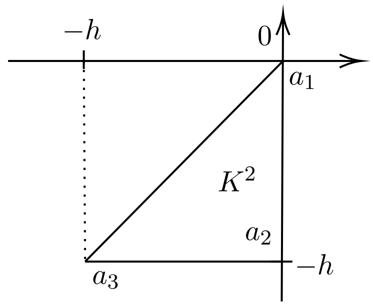
$$\begin{aligned}
\alpha_{3,3}^{K_1} &= \int_{K_1} \nabla\lambda_3^{K_1}\,\nabla\lambda_3^{K_1}\,dx = \int_{K_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} dx = \int_{K_1} \frac{-1}{h}\frac{-1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_1} \frac{1}{h^2}\,dx = \frac{1}{h^2}\int_{K_1} dx = \frac{1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a donc la matrice élémentaire d'assemblage :

$$\alpha^{K_1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Nous avons $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix}$ et $a_3 = \begin{pmatrix} -h \\ -h \end{pmatrix}$ composant le triangle K_2.



Pour obtenir la matrice d'assemblage élémentaire associée au triangle K_2, il nous faut :

1. calculer les coordonnées barycentriques $\lambda_j^{K_2}$, $1 \leq j \leq 3$ associés à a_1, a_2 et a_3 ;
2. calculer les gradients pour chaque coordonnées barycentriques $\lambda_j^{K_2}$;
3. calculer les entrées de la matrice (couple (i,j)) à l'aide de la formule

$$\alpha_{i,j}^{K_2} = \int_{K_2} \nabla\lambda_i^{K_2}\, \nabla\lambda_j^{K_2}\, dx$$

Déterminons les coordonnées barycentriques d'un point $x \in \mathbb{R}^2$ par rapport aux sommets de K_2. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \lambda_1^{K_2}(x)a_1 + \lambda_2^{K_2}(x)a_2 + \lambda_3^{K_2}(x)a_3 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_1^{K_2}(x) + \lambda_2^{K_2}(x) + \lambda_3^{K_2}(x) &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^{K_2}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2^{K_2}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix} + \lambda_3^{K_2}(x)\begin{pmatrix} -h \\ -h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_1^{K_2}(x) + \lambda_2^{K_2}(x) + \lambda_3^{K_2}(x) &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -h\lambda_3^{K_2}(x) &= x_1 \\ -h\lambda_2^{K_2}(x) - h\lambda_3^{K_2}(x) &= x_2 \\ \lambda_1^{K_2}(x) + \lambda_2^{K_2}(x) + \lambda_3^{K_2}(x) &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3^{K_2}(x) &= \frac{-x_1}{h} \\ \lambda_2^{K_2}(x) &= -\frac{x_2 + h\lambda_3^{K_2}(x)}{h} = -\frac{x_2 + h\frac{-x_1}{h}}{h} = \frac{x_1 - x_2}{h} \\ \lambda_1^{K_2}(x) &= 1 - \lambda_2^{K_2}(x) - \lambda_3^{K_2}(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^{K_2}(x) &= 1 - \frac{x_1 - x_2}{h} - \frac{-x_1}{h} = 1 + \frac{x_2}{h} \\ \lambda_2^{K_2}(x) &= \frac{x_1 - x_2}{h} \\ \lambda_3^{K_2}(x) &= \frac{-x_1}{h} \end{cases}$$

Ensuite, il nous faut calculer les gradients des coordonnées barycentriques :

$$\nabla\lambda_1^{K_2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_1(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\lambda_1(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(1+\frac{x_2}{h})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(1+\frac{x_2}{h})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\lambda_2^{K_2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_2(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\lambda_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{x_1-x_2}{h})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\frac{x_1-x_2}{h})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\lambda_3^{K_2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_3(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\lambda_3(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{-x_1}{h})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\frac{-x_1}{h})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons désormais calculer la matrice d'assemblage élémentaire associée au triangle K_2 qui est définie comme :

$$\alpha^{K_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{K_2} & \alpha_{1,2}^{K_2} & \alpha_{1,3}^{K_2} \\ \alpha_{2,1}^{K_2} & \alpha_{2,2}^{K_2} & \alpha_{2,3}^{K_2} \\ \alpha_{3,1}^{K_2} & \alpha_{3,2}^{K_2} & \alpha_{3,3}^{K_2} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,1}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_1^{K_2}\,\nabla\lambda_1^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} dx = \int_{K_2} \frac{1}{h}\frac{1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_2} \frac{1}{h^2}\,dx = \frac{1}{h^2}\int_{K_2} dx = \frac{1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,2}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_1^{K_2}\,\nabla\lambda_2^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} dx = \int_{K_2} \frac{1}{h}\frac{-1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_2} \frac{-1}{h^2}\,dx = \frac{-1}{h^2}\int_{K_2} dx = \frac{-1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{-1}{2} \\
\alpha_{2,1}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_2^{K_2}\,\nabla\lambda_1^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \nabla\lambda_1^{K_2}\,\nabla\lambda_2^{K_2}\,dx = \frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,3}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_1^{K_2}\,\nabla\lambda_3^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{K_2} 0\,dx = 0 \\
\alpha_{3,1}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_3^{K_2}\,\nabla\lambda_1^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \nabla\lambda_1^{K_2}\,\nabla\lambda_3^{K_2}\,dx = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{2,2}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_2^{K_2}\,\nabla\lambda_2^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} dx = \int_{K_2} \frac{1}{h}\frac{1}{h} + \frac{-1}{h}\frac{-1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_2} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2}\,dx = \frac{2}{h^2}\int_{K_2} dx = \frac{2}{h^2}\frac{h^2}{2} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{2,3}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_2^{K_2}\,\nabla\lambda_3^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ \frac{-1}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{K_2} \frac{1}{h}\frac{-1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_2} \frac{-1}{h^2}\,dx = \frac{-1}{h^2}\int_{K_2} dx = \frac{-1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{-1}{2} \\
\alpha_{3,2}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_3^{K_2}\,\nabla\lambda_2^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \nabla\lambda_2^{K_2}\,\nabla\lambda_3^{K_2}\,dx = \frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{3,3}^{K_2} &= \int_{K_2} \nabla\lambda_3^{K_2}\,\nabla\lambda_3^{K_2}\,dx = \int_{K_2} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{K_2} \frac{-1}{h}\frac{-1}{h}\,dx \\
&= \int_{K_2} \frac{1}{h^2}\,dx = \frac{1}{h^2}\int_{K_2} dx = \frac{1}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

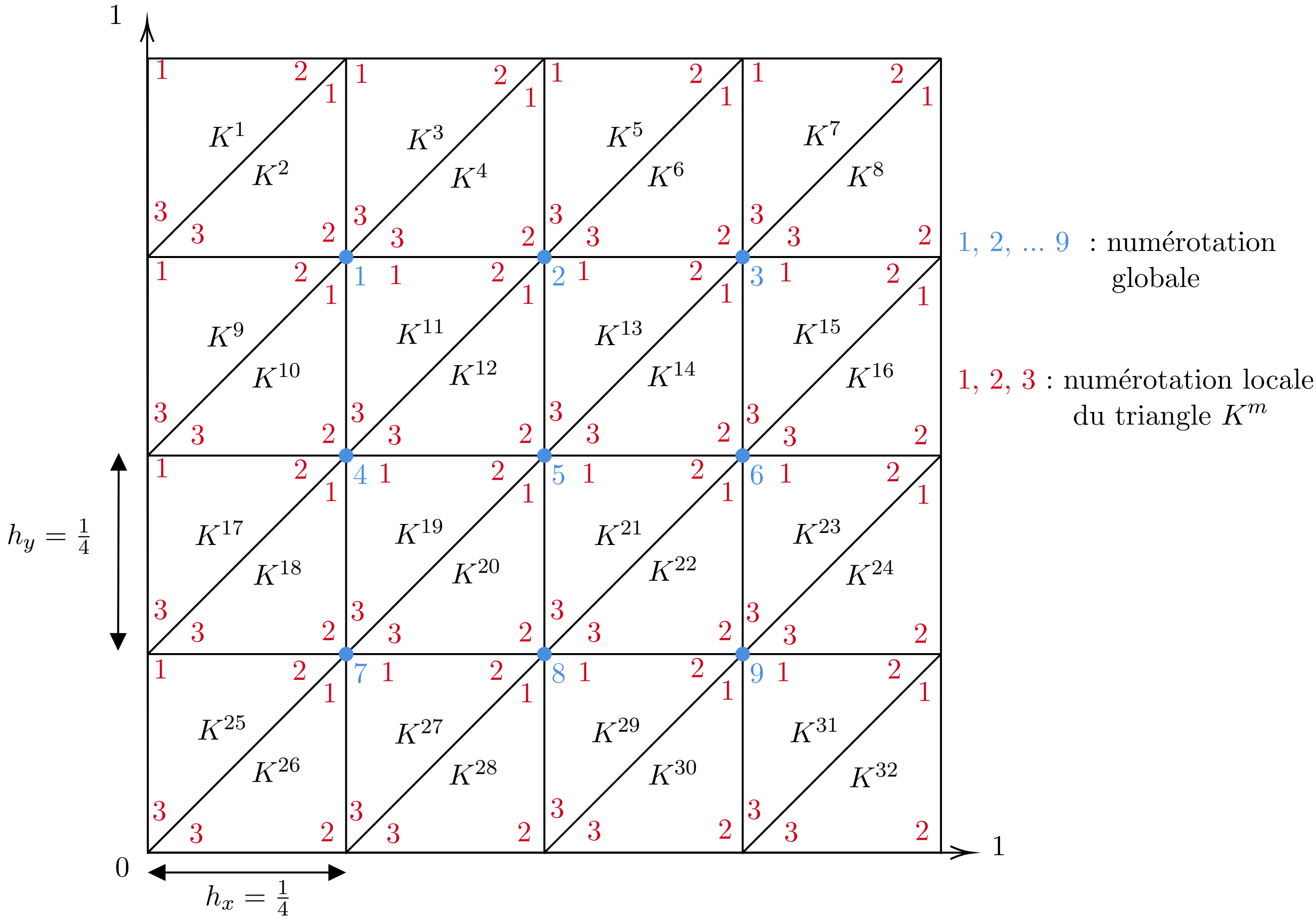
On a donc la matrice élémentaire d'assemblage :

$$
\alpha^{K_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

2 Assemblage de la matrice globale

Exercice 3

Afin de calculer la matrice A pour le problème de Dirichlet pour le Laplacien posé dans $]0,1[^2$, pour l'élément P_1 et pour le maillage structuré avec $h_x = h_y = \frac{1}{4}$, nous obtenons le schéma suivant :



Ici, les triangles K^m où m est un nombre impair (resp. pair) sont dits des triangles de type 1 (resp. type 2), c'est-à-dire qu'ils ont la même matrice d'assemblage que le triangle K de l'exercice 1 (resp. exercice 2).

Calculons les entrées de la matrice A, en utilisant la formule :

$$A_{j,j'} = \sum_{I} \alpha^{K^m}_{\theta(m,j),\theta(m,j')}$$

où $I = \{m \mid \exists p, p',\, m = m^j_p = m^{j'}_{p'}\}$.

Calculons pour le premier sommet :

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= \sum_{\{3,9,11,2,4,10\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,1)} \\
&= \alpha^{K^3}_{\theta(3,1),\theta(3,1)} + \alpha^{K^9}_{\theta(9,1),\theta(9,1)} + \alpha^{K^{11}}_{\theta(11,1),\theta(11,1)} + \alpha^{K^2}_{\theta(2,1),\theta(2,1)} + \alpha^{K^4}_{\theta(4,1),\theta(4,1)} + \alpha^{K^{10}}_{\theta(10,1),\theta(10,1)} \\
&= \underbrace{\alpha^{K^3}_{3,3} + \alpha^{K^9}_{2,2} + \alpha^{K^{11}}_{1,1}}_{\text{triangle de type 1}} + \underbrace{\alpha^{K^2}_{2,2} + \alpha^{K^4}_{3,3} + \alpha^{K^{10}}_{1,1}}_{\text{triangle de type 2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4
\end{aligned}
$$

$$A_{1,2} = \sum_{\{11,4\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,2)} = \alpha^{K^{11}}_{1,2} + \alpha^{K^4}_{3,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{1,3} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,3)} = 0$$

$$A_{1,4} = \sum_{\{11,10\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,4)} = \alpha^{K^{11}}_{1,3} + \alpha^{K^{10}}_{1,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{1,5} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,5)} = 0$$

$$A_{1,6} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,6)} = 0$$

$$A_{1,7} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,7)} = 0$$

$$A_{1,8} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,8)} = 0$$

$$A_{1,9} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,1),\theta(m,9)} = 0$$

$$A_{2,1} = \sum_{\{11,4\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,1)} = \alpha^{K^{11}}_{2,1} + \alpha^{K^4}_{2,3} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{2,2} = \sum_{\{5,11,13,4,6,12\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,2)} = \alpha^{K^5}_{3,3} + \alpha^{K^{11}}_{2,2} + \alpha^{K^{13}}_{1,1} + \alpha^{K^4}_{2,2} + \alpha^{K^6}_{3,3} + \alpha^{K^{12}}_{1,1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$A_{2,3} = \sum_{\{13,6\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,3)} = \alpha^{K^{13}}_{1,2} + \alpha^{K^6}_{3,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{2,4} = \sum_{\{11,12\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,4)} = \alpha^{K^{11}}_{2,3} + \alpha^{K^{12}}_{1,3} = 0 + 0 = 0$$

$$A_{2,5} = \sum_{\{13,12\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,5)} = \alpha^{K^{13}}_{1,3} + \alpha^{K^{12}}_{1,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{2,6} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,6)} = 0$$

$$A_{2,7} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,7)} = 0$$

$$A_{2,8} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,8)} = 0$$

$$A_{2,9} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,2),\theta(m,9)} = 0$$

$$
\begin{aligned}
A_{3,1} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,1)} = 0\\
A_{3,2} &= \sum_{\{13,6\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,2)} = \alpha^{K^{13}}_{2,1} + \alpha^{K^{16}}_{2,3} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1\\
A_{3,3} &= \sum_{\{7,13,15,6,8,14\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,3)} = \alpha^{K^7}_{3,3} + \alpha^{K^{13}}_{2,2} + \alpha^{K^{15}}_{1,1} + \alpha^{K^6}_{2,2} + \alpha^{K^8}_{3,3} + \alpha^{K^{14}}_{1,1}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\\
A_{3,4} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,4)} = 0\\
A_{3,5} &= \sum_{\{13,14\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,5)} = \alpha^{K^{13}}_{2,3} + \alpha^{K^{14}}_{1,3} = 0 + 0 = 0\\
A_{3,6} &= \sum_{\{15,14\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,6)} = \alpha^{K^{15}}_{1,3} + \alpha^{K^{14}}_{1,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1\\
A_{3,7} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,7)} = 0\\
A_{3,8} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,8)} = 0\\
A_{3,9} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,9)} = 0
\end{aligned}
$$

$$A_{4,1} = \sum_{\{11,10\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,1)} = \alpha^{K^{11}}_{3,1} + \alpha^{K^{10}}_{2,1} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{4,2} = \sum_{\{11,12\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,2)} = \alpha^{K^{11}}_{3,2} + \alpha^{K^{12}}_{3,1} = 0 + 0 = 0$$

$$A_{4,3} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,3)} = 0$$

$$A_{4,4} = \sum_{\{11,17,19,10,12,18\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,4)} = \alpha^{K^{11}}_{3,3} + \alpha^{K^{17}}_{2,2} + \alpha^{K^{19}}_{1,1} + \alpha^{K^{10}}_{2,2} + \alpha^{K^{12}}_{3,3} + \alpha^{K^{18}}_{1,1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$A_{4,5} = \sum_{\{19,12\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,3),\theta(m,5)} = \alpha^{K^{19}}_{1,2} + \alpha^{K^{12}}_{3,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{4,6} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,6)} = 0$$

$$A_{4,7} = \sum_{\{19,18\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,7)} = \alpha^{K^{19}}_{1,3} + \alpha^{K^{18}}_{1,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{4,8} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,8)} = 0$$

$$A_{4,9} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,4),\theta(m,9)} = 0$$

$$A_{5,1} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,1)} = 0$$

$$A_{5,2} = \sum_{\{13,12\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,2)} = \alpha^{K^{13}}_{3,1} + \alpha^{K^{12}}_{2,1} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{5,3} = \sum_{\{13,14\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,3)} = \alpha^{K^{13}}_{3,2} + \alpha^{K^{14}}_{3,1} = 0 + 0 = 0$$

$$A_{5,4} = \sum_{\{19,12\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,4)} = \alpha^{K^{19}}_{2,1} + \alpha^{K^{12}}_{2,3} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{5,5} = \sum_{\{13,19,21,12,14,20\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,5)} = \alpha^{K^{13}}_{3,3} + \alpha^{K^{19}}_{2,2} + \alpha^{K^{21}}_{1,1} + \alpha^{K^{12}}_{2,2} + \alpha^{K^{14}}_{3,3} + \alpha^{K^{20}}_{1,1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$A_{5,6} = \sum_{\{21,14\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,6)} = \alpha^{K^{21}}_{1,2} + \alpha^{K^{14}}_{3,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{5,7} = \sum_{\{19,20\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,7)} = \alpha^{K^{19}}_{2,3} + \alpha^{K^{20}}_{1,3} = 0 + 0 = 0$$

$$A_{5,8} = \sum_{\{21,20\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,8)} = \alpha^{K^{21}}_{1,3} + \alpha^{K^{20}}_{1,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{5,9} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,5),\theta(m,9)} = 0$$

$$
\begin{aligned}
A_{6,1} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,1)} = 0 \\
A_{6,2} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,2)} = 0 \\
A_{6,3} &= \sum_{\{15,14\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,3)} = \alpha^{K^{15}}_{3,1} + \alpha^{K^{14}}_{2,1} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\
A_{6,4} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,4)} = 0 \\
A_{6,5} &= \sum_{\{21,14\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,5)} = \alpha^{K^{21}}_{2,1} + \alpha^{K^{14}}_{2,3} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\
A_{6,6} &= \sum_{\{15,21,23,14,16,22\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,6)} = \alpha^{K^{15}}_{3,3} + \alpha^{K^{21}}_{2,2} + \alpha^{K^{23}}_{1,1} + \alpha^{K^{12}}_{2,2} + \alpha^{K^{16}}_{3,3} + \alpha^{K^{22}}_{1,1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \\
A_{6,7} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,7)} = 0 \\
A_{6,8} &= \sum_{\{21,22\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,8)} = \alpha^{K^{21}}_{2,3} + \alpha^{K^{22}}_{1,3} = 0 + 0 = 0 \\
A_{6,9} &= \sum_{\{23,22\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,6),\theta(m,9)} = \alpha^{K^{23}}_{1,3} + \alpha^{K^{22}}_{1,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{7,1} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,1)} = 0 \\
A_{7,2} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,2)} = 0 \\
A_{7,3} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,3)} = 0 \\
A_{7,4} &= \sum_{\{19,18\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,4)} = \alpha^{K^{19}}_{3,1} + \alpha^{K^{18}}_{2,1} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\
A_{7,5} &= \sum_{\{19,20\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,5)} = \alpha^{K^{19}}_{3,2} + \alpha^{K^{20}}_{3,1} = 0 + 0 = 0 \\
A_{7,6} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,6)} = 0 \\
A_{7,7} &= \sum_{\{19,25,27,18,20,26\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,7)} = \alpha^{K^{19}}_{3,3} + \alpha^{K^{25}}_{2,2} + \alpha^{K^{27}}_{1,1} + \alpha^{K^{18}}_{2,2} + \alpha^{K^{20}}_{3,3} + \alpha^{K^{26}}_{1,1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \\
A_{7,8} &= \sum_{\{27,20\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,8)} = \alpha^{K^{27}}_{1,2} + \alpha^{K^{20}}_{3,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\
A_{7,9} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,7),\theta(m,9)} = 0
\end{aligned}
$$

$$A_{8,1} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,1)} = 0$$

$$A_{8,2} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,2)} = 0$$

$$A_{8,3} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,3)} = 0$$

$$A_{8,4} = \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,4)} = 0$$

$$A_{8,5} = \sum_{\{21,20\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,5)} = \alpha^{K^{21}}_{3,1} + \alpha^{K^{20}}_{2,1} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$A_{8,6} = \sum_{\{21,22\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,6)} = \alpha^{K^{21}}_{3,2} + \alpha^{K^{22}}_{3,1} = 0 + 0 = 0$$

$$A_{8,7} = \sum_{\{27,20\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,7)} = \alpha^{K^{27}}_{2,1} + \alpha^{K^{20}}_{2,3} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$\begin{aligned} A_{8,8} &= \sum_{\{21,27,29,20,22,28\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,8)} = \alpha^{K^{21}}_{3,3} + \alpha^{K^{27}}_{2,2} + \alpha^{K^{29}}_{1,1} + \alpha^{K^{20}}_{2,2} + \alpha^{K^{22}}_{3,3} + \alpha^{K^{28}}_{1,1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$A_{8,9} = \sum_{\{29,22\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,8),\theta(m,9)} = \alpha^{K^{29}}_{1,2} + \alpha^{K^{22}}_{3,2} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$
\begin{aligned}
A_{9,1} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,1)} = 0 \\
A_{9,2} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,2)} = 0 \\
A_{9,3} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,3)} = 0 \\
A_{9,4} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,4)} = 0 \\
A_{9,5} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,5)} = 0 \\
A_{9,6} &= \sum_{\{23,22\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,6)} = \alpha^{K^{23}}_{3,1} + \alpha^{K^{22}}_{2,1} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\
A_{9,7} &= \sum_{\{\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,7)} = 0 \\
A_{9,8} &= \sum_{\{29,22\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,8)} = \alpha^{K^{29}}_{2,1} + \alpha^{K^{22}}_{2,3} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \\
A_{9,9} &= \sum_{\{23,29,31,22,24,30\}} \alpha^{K^m}_{\theta(m,9),\theta(m,9)} = \alpha^{K^{23}}_{3,3} + \alpha^{K^{29}}_{2,2} + \alpha^{K^{31}}_{1,1} + \alpha^{K^{22}}_{2,2} + \alpha^{K^{24}}_{3,3} + \alpha^{K^{30}}_{1,1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4
\end{aligned}
$$

Pour résumer, nous avons

$$
A = \begin{pmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{pmatrix}
$$

Exercice 4

Les fichiers contenant le code sont joints à ce rapport.
Voici quelques explications concernant les fonctions et classes créées pour le projet.

N.B : Le code a été réalisé en Python en utilisant le package SymPy. Je n'ai pas réussi à trouver les bonnes fonctions du package NumPy et je n'ai pas réussi à implémenter en Python natif (sans aucun package externe).

Fichiers utilisés dans plusieurs exercices

Fichier *print_matrix.py*

print_matrix Cette fonction prend une matrice en entrée et l'affiche sur la console avec un formattage possible pour les valeurs des entrées. Le formattage par défaut est `"{:.2f}"`, signifiant que l'on affiche la partie entière et seulement deux chiffres de la partie flottante.

Fichiers correspondant aux exercices 1 et 2

Fichier *elementary_matrix.py*

abs Cette fonction évalue une expression littérale afin de trouver le signe pour retourner la valeur absolue de celle-ci. Elle permet de simplifier les expressions car la fonction native ne le fait pas. Retourne donc la valeur absolue de toute expression littérale que l'on passe dans le paramètre x.

compute_barycenters Cette fonction calcule les coordonnées barycentriques associées aux points $a1$, $a2$ et $a3$ que l'on passe en argument de cette fonction. Dans cette fonction, on résout le système d'équations que l'on peut avoir à la page 2 ou 5 par exemple. On retourne la solution de ce système.

get_triangle_area Cette fonction calcule l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées des trois points le composant. Retourne une expression littérale ou une valeur réelle en fonction du type d'argument se trouvant dans les séquences représentant les points du triangle.

compute_gradient Calcule et retourne le gradient d'une expression littérale en fonction de variables (stockées dans la séquence représentée par le paramètre x).

scalar_product Calcule et retourne le produit scalaire entre deux vecteurs (ou séquences en Python).

compute_elementary_matrix Cette fonction réalise les trois points des exercices 1 et 2 de manière séquentielle :

- calcule les coordonnées barycentriques des points associés au triangle passé
  On initialise les séquences nécessaires puis on appelle *compute_barycenters* pour calculer les coordonnées barycentriques.
- calcule les gradients pour chaque coordonnées barycentriques
  Pour toutes les coordonnées barycentriques, on appelle *compute_gradient* que l'on stocke dans un dictionnaire permettant d'y accéder rapidement par la suite.
- calcule les entrées de la matrice α
  On réalise une double boucle sur les coordonnées barycentriques (pour itérer sur toutes les entrées), puis pour chaque entrée (i, j), on réalise le calcul suivant $triangle\_area * \nabla\lambda_i \, \nabla\lambda_j$. En effet, on peut remarquer en réalisant les calculs à la main dans les exercices 1 et 2, que l'on obtient à la fin l'aire dessinée par le triangle multiplié par le produit scalaire entre les deux gradients correspondant à l'entrée recherchée.

Fichier *exercice1.py*

main Crée le symbole h et les points du triangle de l'exercice 1. Calcule ensuite la matrice d'assemblage élémentaire de celui-ci avant de l'afficher sur la console.

Fichier *exercice2.py*

main Crée le symbole h et les points du triangle de l'exercice 2. Calcule ensuite la matrice d'assemblage élémentaire de celui-ci avant de l'afficher sur la console.

Fichiers relatifs à l'exercice 3

Fichier *mesh_triangle.py*

Classe *MeshTriangle* Classe représentant un triangle dans un maillage. Il est défini par ses trois points. On calcule la matrice d'assemblage élémentaire associée au triangle. Quelques méthodes ont été définies :

— *is_in* : permet de vérifier qu'un point que l'on passe en argument est un des trois points définissant le triangle ;

— *get_local_num* : renvoie la numérotation locale du point passé en argument dans le triangle. Si le point n'est pas un point définissant le triangle, une erreur du type *KeyError* est levée ;

— *get_matrix_entry* : renvoie l'entrée de la matrice associée aux deux points passés en argument ($v1$ représentant la ligne et $v2$ représentant la colonne). Si un des points n'est pas un point définissant le triangle, une erreur du type *KeyError* est levée.

Fichier *dirichlet_problem.py*

compute_global_matrix Cette fonction calcule la matrice d'assemblage globale en fonction d'une liste de points et d'un ensemble de triangles (type *MeshTriangle*). Elle réalise donc les calculs allant de la page 8 à la page 16. Tout le système de gestion de numérotation locale et globale est gérée automatiquement entre les objets *MeshTriangle* et les points du maillage grâce aux pointeurs cachés derrière les objets Python.

dirichlet_problem Cette fonction permet de calculer la matrice d'assemblage globale pour n'importe quelle grille maillée. En effet, on peut passer un h_x et h_y différents, on peut définir les bornes minimales et maximales en x et en y, mais aussi, choisir d'exclure ou non les points se trouvant sur la bordure du maillage souhaité. La fonction crée de manière automatique les points et les triangles, puis renvoie ensuite le résultat lui-même renvoyé par l'appel de la fonction *compute_global_matrix*.

Fichier *exercice3.py*

main Appelle la fonction *dirichlet_problem* en lui passant le maillage à créer :

— $h_x = h_y = \frac{1}{4} = 0.25$,

— $x \in]0, 1[$,

— $y \in]0, 1[$.