Université de Caen **Année 2021 – 2022**
UFR des Sciences

MASTER 1 IDM
Module : Analyse Fonctionnelle

1 Assemblage des matrices élémentaires

On désigne par a_1, a_2 et a_3 les sommets d'un triangle K. On note λ_j^K, $1 \leq j \leq 3$ les coordonnées barycentriques associées à a_1, a_2 et a_3.

Définition La matrice d'assemblage élémentaire associée au triangle K est une matrice symétrique à 9 éléments, de terme général :

$$\alpha_{i,j}^K = \int_K \nabla\lambda_i^K \nabla\lambda_j^K dx$$

Exercice 1 Calculer la matrice élémentaire d'assemblage du triangle a_1, a_2 et a_3 de coordonnées $(0,0)$, $(h,0)$ et$(0,-h)$ respectivement.

Exercice 2 Calculer la matrice élémentaire d'assemblage du triangle a_1, a_2 et a_3 de coordonnées $(0,0)$, $(0,-h)$ et$(-h,-h)$ respectivement.

2 Assemblage de la matrice globale

À partir des matrices élémentaires, on va assembler la matrice globale $\mathbf{A}$. Pour cela, étant donné un maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω, on numérote chacun des triangle de façon suivante :

$$K^l, 1 \leq l \leq L.$$

Pour chaque triangle K^l on numérote $a_q^l, 1 \leq q \leq 3$, ses trois sommets. Cette numérotation est arbitraire dans chaque triangle. Un sommet qui appartient à deux triangles voisins pourra être repéré par deux numéros différents, dans les deux triangles.
On sait que si s^j le sommet a_k^l du triangle K^l, alors la restriction à K^l de la fonction de base φ^j coincide avec la coordonnée barycentrique $\lambda_k^{K^l}$ associée au sommet a_k^l du triangle K^l. Ainsi les coefficients de la matrice $\mathbf{A}$ peuvent être calculés en sommant certains éléments des matrices élémentaires d'assemblage. Il est donc indispensable, étant donné un sommet s^j, de connaitre les triangles qui ont s^j pour sommet. Cette information est donnée à l'aide d'un pointeur, assemblé au moment de la construction du maillage : pour j donné, les entiers

$$m_1^j, \cdots m_{P_j}^j, \quad 1 \leq p \leq P_j$$

repèrent les triangles dont s^j est l'un des sommets. L'une des premières applications de ce pointeur est de déterminer l'intersection du support de deux fonctions de bases données. En effet, puisque dans le cas de l'élément fini P_1 le support d'une fonction de base φ^j est l'ensemble des triangles autour du sommet s^j, nous déduisons que l'intersection des supports φ^j et $\varphi^{j'}$ est l'ensemble des triangles K^m tels qu'il existe une paire (p, p') avec

$$1 \leq p \leq P_j, \quad 1 \leq p' \leq P_{j'}, \quad m = m_p^j = m_{p'}^{j'}.$$

D'autre part deux catégories de numérotations existent pour les sommets : d'un coté la numérotation globale s^j $1 \leq j \leq J$ et de l'autre, la numérotation des sommets de chaque triangle. Il nous faut maintenant correspondre ces deux numérotations. Nous avons recours à un nouveau pointeur. Le sommet s^j est un sommet de K^l, si $l = m_p^j$ pour un certain $p \in \{1, \cdots P_j\}$. On note alors $\theta(l, j)$ le numéro entre 1 et 3, du sommet s^j, dans la numérotation locale de K^l.

Étant donnés φ^j et $\varphi^{j'}$, on peut calculer le terme $A_{j,j'}$ de la matrice $\mathbf{A}$. On commence par restreindre le calcul de l'intégrale à l'intersection du support des deux fonctions à l'aide de formule suivante :

$$a_{j,j'} = \int_\Omega \bigtriangledown\varphi^j \bigtriangledown \varphi^{j'} dx = \sum_I \int_{K^m} \bigtriangledown\varphi^j \bigtriangledown \varphi^{j'},$$

avec $I = \{m| \quad \exists p, p', m = m_p^j = m_{p'}^{j'}\}$.
Mais $m = m_p^j = m_{p'}^{j'}$, les deux sommets s^j et $s^{j'}$ appartiennent au triangle K^m. Dans le triangle K^m, les sommets s^j et $s^{j'}$ sont numérotés $\theta(m, j)$ et $\theta(m, j')$. On déduit

$$A_{j,j'} = \sum_I \int_{K^m} \nabla\lambda_{\theta(m,j)}^{K^m} \cdot \nabla\lambda_{\theta(m,j')}^{K^m} dx = \sum_I \alpha_{\theta(m,j)}^{K^m} \cdot \alpha_{\theta(m,j')}^{K^m} dx.$$

Exercice 3. Calculer la matrice $\mathbf{A}$ pour le problème de Dirichlet pour le Laplacien, posé dans le carré $]0, 1[\times]0, 1[$, pour l'élément fini P_1 et pour un maillage structuré avec $h_x = h_y = \frac{1}{4}$.

Exercice 4
1) Écrire un programme sous python ou scilab permettant de calculer, pour chaque triangle (voir exercices 1 et 2).

a. Les coordonnées barycentriques.

b. Les matrices élémentaires.

2) Un programme pour **assembler** et **calculer** (à partir de 1) et le cours)) la matrice globale $\mathbf{A}$ de l'exercice 3.