< 3장 의문점 >

1. well-defined 의 의미

To ensure that $\mathbb{E}(X)$ is well defined, we say that $\mathbb{E}(X)$ exists if $\int_x |x| dF_X(x) < \infty$. Otherwise we say that the expectation does not exist.

p.48

Let $a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \underbrace{\sum_{i: a_i \ge 0} a_i}_{\text{양수}} + \underbrace{\sum_{i: a_i < 0} a_i}_{\text{음수}} = b + c$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ is well defined if either b or c is finite

둘중 하나라도 finite 면 well defined. 둘다 infinite 하면 안됨.

ex) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots = ?$

<Example 1>

$E(X)$ may exist and be ∞. $c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

Let $p(k) = \frac{1}{ck^2}$ for $k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$

$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{ck^2} = \sum \frac{1}{ck} = \infty \quad \Rightarrow E(X) = \infty$

<Example 2>

$E(X)$ might not exist. $P(k) = \begin{cases} \frac{1}{2ck^2} & \text{if } k \in \mathrm{Int},\ k \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$E(X) = \sum_{k \in \mathrm{Int}} k \cdot p(k) = \sum_{k>0} + \sum_{k<0} = \infty - \infty$ (not well defined)

근데 $\int_x |x| dF_X(x) < \infty$ 이어야 존재한다는건 뭐지?

E[X]는 finite이든 infinite이든 양수부분 음수부분 둘다 infinite이 아니기만 하면 존재할 수는 있다. (well-defined)

A random variable X is integrable if and only if

$$\int_\Omega |X| \, dP = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < \infty, \quad |X| = X^+ + X^-$$

↳ 이 식은 둘 다 finite 해야 만족하는것 아닌가?

이렇게 다시 정리해보고 있습니다! 근데 well defined는 x+ x- 둘 중 하나라도 finite 면 성립하는건데 integral |x| dF(x)< 무한대 는 둘 다 finite 해야 만족하는거 아닌가요?

sungbin 🤗 12:15 AM

integrable 이랑 기대값의 존재랑 또 다르다능

일단

X is “integrable” 에서 integrable 은 우리가 소위 말하는 “적분이 가능하다” 란 의미로 보통 해석하는데

“적분값” 이 숫자로 존재하는 경우에 적분이 가능하다고 얘기하는 거구요

X is well-defined 는 “적분가능” 하거나 발산하더라도 +∞ 나 -∞ 로 발산하는 경우를 말해요

∞ - ∞ 의 케이스는 진동하는 케이스라서 well-defined 가 성립하지 않아요

“발산하더라도 +∞ 나 -∞ 로 발산하는 경우” 는 수학에서는 “extended real number system 안에서 수렴한다” 라고도 얘기해요

extended real number system = 실수 U {∞} U {-∞} 임

2. 왜 Sample variance는 n-1로 나눌까?

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 &= \Sigma(X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \\ &= \Sigma X_i^2 - 2\bar{X}_n \Sigma X_i + n\cdot\bar{X}_n^2 \\ &= \Sigma X_i^2 - 2n\bar{X}_n^2 + n\cdot\bar{X}_n^2 \\ &= \Sigma X_i^2 - n\cdot\bar{X}_n^2\end{aligned}$$

$$E[X_i^2] - E[X_i]^2 = \sigma^2 \qquad E[\bar{X}_n^2] - E[\bar{X}_n]^2 = Var[\bar{X}_n]$$

$$E[X_i^2] = \mu^2 + \sigma^2 \qquad E[\bar{X}_n^2] = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

왜지?

$$\begin{aligned}E[\Sigma(X_i - \bar{X}_n)^2] &= \Sigma E[X_i^2] - E[n\cdot\bar{X}_n^2] \\ &= \Sigma(\mu^2 + \sigma^2) - n\times(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}) \\ &= \cancel{n\cdot\mu^2} + n\cdot\sigma^2 - \cancel{n\mu^2} - \sigma^2 \\ &= (n-1)\sigma^2\end{aligned}$$

$$Var[\bar{X}_n] = Var[\frac{1}{n}\Sigma X_i] = \Sigma\frac{1}{n^2}Var[X_i] = \Sigma\frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

http://www.visiondummy.com/2014/03/divide-variance-n-1/

3. Covariance.

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\Big)$ 일때 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$ 인가?

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E((X-\mu_x)(Y-\mu_y)) \\
&= E(XY - \mu_y X - \mu_x Y + \mu_x \mu_y) \\
&= E(XY) - \mu_y \cdot E(X) - \mu_x \cdot \cancel{E}(Y) + \cancel{\mu_x}\mu_y \\
&= E(XY) - E(Y)E(X) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= E(X-E[X])^2 + E((Y-E[Y])^2) + 2E\big((X-E[X])(Y-E[Y])\big) \quad \text{인가?} \\
&= E(\cancel{X^2} - 2X\cancel{E}[X] + E[X]^2) + E[\cancel{Y^2} - 2\cancel{Y}E[Y] + E[Y]^2) \\
&\quad + E(2\cancel{X}Y - 2Y\cancel{E}[X] - 2X\cancel{E}[Y] + 2E[X]E[Y])
\end{aligned}
$$

$$E((X+Y-E(X+Y))^2) = E(\cancel{X^2} + \cancel{Y^2} + (E(X+Y))^2 + 2\cancel{X}Y - 2X\cancel{E}(X+Y) - 2Y\cancel{E}(X+Y))$$

$$
\begin{aligned}
E(E[X]^2 + E[Y]^2 + 2E[X]E[Y]) &= E((E(x+y))^2) \\
&= E((E(x)+E(y))^2) \\
&= E(E(x)^2 + E(y)^2 + 2E(x)E(y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Var}(X+Y) \\
= \; & E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\
= \; & E(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mu_X + \mu_Y)^2 \\
= \; & E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\
& - \mu_X^2 - 2\mu_X\mu_Y - \mu_Y^2 \\
= \; & E(X^2) - \mu_X^2 + 2(E(XY) - \mu_X\mu_Y) \\
& + E(Y^2) - \mu_Y^2 \\
= \; & \mathrm{Var}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)
\end{aligned}
$$

4. Conditional Variance

$\mathbb{V}(Y|X=x) = \int (y-\mu(x))^2 f(y|x)dy$ 일때 $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\mathbb{V}(Y|X) + \mathbb{V}\mathbb{E}(Y|X).$ 인가?

$= \int (y - E(Y|X=x))^2 f(y|x)\, dy$

$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$

$E[Y|X] = \int x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$

Radoslav Harman, PhD in Statistics
Answered Mar 26

Using the formula for the variance of the difference of two random variables (e.g., this page) we have

$$var(Y - E(Y|X)) = var(Y) - 2cov(Y, E(Y|X)) + var(E(Y|X)).$$

Clearly, the covariance above can be expressed as

$$cov(Y, E(Y|X)) = \overset{①}{E}(YE(Y|X)) - E(Y)\overset{②}{E}(E(Y|X)).$$

However, using the law of total expectation, we have

①
$$E(YE(Y|X)) = E(E(YE(Y|X)|X)) = E(E(Y|X)E(Y|X)) = E((E(Y|X))^2),$$

제곱의 평균

and

②
$$E(Y)E(E(Y|X)) = E(E(Y|X))E(E(Y|X)) = (E(E(Y|X)))^2,$$

평균의 제곱

therefore, in fact,

$$cov(Y, E(Y|X)) = var(E(Y|X)),$$

hence

$$var(Y - E(Y|X)) = var(Y) - var(E(Y|X)).$$

The rest of the proof follows from the law of total variance

$$var(Y) = var(E(Y|X)) + E(var(Y|X)).$$