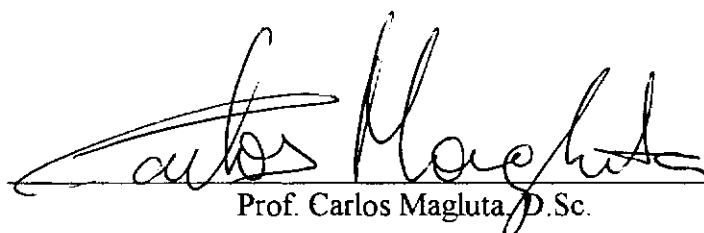


ESTUDO DE TÉCNICAS TEMPO-FREQUÊNCIA E SUAS APLICAÇÕES EM ENGENHARIA CIVIL

Henrique Frederico Bucher

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

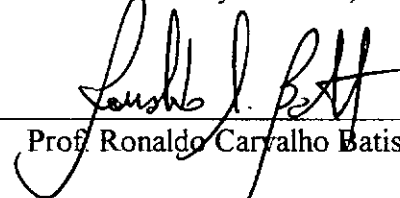
Aprovada por:



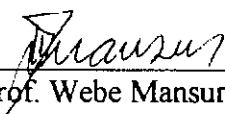
Prof. Carlos Magluta, D.Sc.



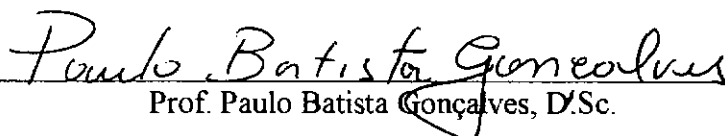
Prof. Ney Roitman, D.Sc.



Prof. Ronaldo Carvalho Batista, Ph.D.



Prof. Webe Mansur, Ph.D.



Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Maio de 1998

BUCHER, HENRIQUE FREDERICO

Estudo De Técnicas Tempo-
Frequência E Suas Aplicações Em
Engenharia Civil [Rio de Janeiro] 1998

XIV, 208 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Civil, 1998)

Tese - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1. Distribuições tempo-frequência
2. Análise experimental
3. Wavelets

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Dedico esta tese a Henrique e Ziléa, meus pais, e a minha paixão, Selma.

Não vivo sem vocês.

AGRADECIMENTOS

Às minhas irmãs Evelane, Dahlen, Ivelise e Hanne pela imensa boa-vontade e ajuda que tornaram menos duro o caminho.

A Jorge e Raimundo, exemplos incontestes de que grandes homens e amigos ainda existem.

Ao meu orientador Carlos Magluta pelo tema, pelas excelentes idéias das aplicações e por me ensinar toda a didática de uma tese.

Ao professor Webe Mansur que, sempre atarefado e sem ter a obrigação de tal, sempre teve um tempo para discutir e contribuir.

Ao professor Alberto Ortigão (UFRJ) pelos sinais dos ensaios sísmicos e pelo inestimável apoio dispensado ao final da tese.

Aos professores Walnório Graça Ferreira (CT-UFES) e Robson Sarmento (CT-UFES) por enxergar e acreditar em minha capacidade.

Devo agradecer especialmente ao CNPq, cujo apoio financeiro decisivamente viabilizou este trabalho.

A todos estes, muito obrigado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO DE TÉCNICAS TEMPO-FREQÜÊNCIA E SUAS APLICAÇÕES EM ENGENHARIA CIVIL

Henrique Frederico Bucher

Maio/1998

Orientador: Carlos Magluta

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho trata da utilização de técnicas de tempo-freqüência como ferramentas adicionais do engenheiro na compreensão de sinais obtidos experimentalmente. Técnicas tempo-freqüência sempre podem ser usadas para gerar uma distribuição de energia bidimensional, função do tempo e freqüência, que permite avaliar o comportamento da energia em determinada faixa do espectro com a evolução do tempo.

São apresentadas e discutidas as principais técnicas tempo-freqüência, incluindo as wavelets, num texto de caráter introdutório voltado essencialmente ao engenheiro civil. Detalhes mais aprofundados do desenvolvimento teórico são alocados em dois apêndices. Sinais acadêmicos são analisados com as diversas técnicas com o objetivo de acostumar o leitor à leitura dos gráficos tridimensionais resultantes. Aspectos computacionais como esforço de processamento necessário, algoritmos implementados e formas gráficas de apresentação são discutidos. Por fim são demonstradas várias utilizações práticas em engenharia civil destas técnicas como a determinação de amortecimento em estruturas, determinação de parâmetros em estruturas não-lineares, análise da dispersividade de ondas de flexão e análise de sinais resultantes de ensaios sísmicos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STUDY OF TIME-FREQUENCY TECHNIQUES AND THEIR APPLICATIONS IN CIVIL ENGINEERING

Henrique Frederico Bucher

May/1998

Advisor: Carlos Magluta

Department: Civil Engineering

This work discusses the use of time-frequency techniques as the engineer's additional tools in the understanding of signals obtained experimentally. Time-frequency technics can always be used to generate a bidimensional distribution of energy, function of time and frequency, that it allows to evaluate the behavior of the energy in certain strip of the spectrum with the evolution of the time.

It's presented and discussed the main time-frequency technics, including the wavelets, in an introductory text returned essentially to the civil engineer. Deepened details of the theoretical development are allocated in two appendixes. Academic signals are analyzed with the several techniques aiming at making the reader used to reading the resultants three-dimensional graphs. Computational aspects as necessary processing effort, implemented algorithms and the form of graph presentation are discussed. Several practical uses of these techniques in civil engineering are finally demonstrated such as the determination of structural damping properties, determination of parameters in non-linear structures, analysis of dispersivity of flexional waves and analysis of resulting signals of seismic experiments.

ÍNDICE

I INTRODUÇÃO	1
II DESENVOLVIMENTO DAS TÉCNICAS DE PROCESSAMENTO DE SINAIS	3
II.1 INTRODUÇÃO	3
II.2 O SINAL NO DOMÍNIO DO TEMPO	3
II.3 O SINAL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	8
II.4 O SINAL NO DOMÍNIO TEMPO-FREQUÊNCIA	15
II.5 O SINAL NO DOMÍNIO TEMPO-ESCALA	45
II.6 CLASSIFICAÇÃO DAS FAMÍLIAS DE WAVELETS	61
III IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	74
III.1 INTRODUÇÃO	74
III.2 IMPLEMENTAÇÃO DAS ROTINAS	74
III.3 ANÁLISE DE CUSTO COMPUTACIONAL	88
III.4 APRESENTAÇÃO GRÁFICA	92
III.5 REFINAMENTO DA VISUALIZAÇÃO	104
IV APLICAÇÕES SIMPLES	113
IV.1 INTRODUÇÃO	113
IV.2 TRÊS HARMÔNICOS	114
IV.3 HARMÔNICO VARIANDO AMPLITUDE	118
IV.4 CHIRP LINEAR	123
IV.5 IMPACTO	126
IV.6 ONDA QUADRADA	129
IV.7 RUÍDO BRANCO	132
V APLICAÇÕES EM ENGENHARIA	135
V.1 UTILIZAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES TEMPO-FREQUÊNCIA PARA ESTIMAR AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS COM COMPORTAMENTO LINEAR	136
V.2 SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE NÃO-LINEARES	143
V.3 SIMULAÇÃO DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM VIGA BI-APOIADA	161
V.4 UTILIZAÇÃO DE TÉCNICAS TEMPO-FREQUÊNCIA NO AUXÍLIO A DETECÇÃO DE PROBLEMAS EM ENSAIOS SÍSMICOS PARA DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE CISALHAMENTO DE SOLOS	170
VI CONCLUSÕES E SUGESTÕES	177
VI.1 CONCLUSÕES	177
VI.2 SUGESTÕES	179
BIBLIOGRAFIA	181

APÊNDICE A FREQUÊNCIA INSTANTÂNEA E O SINAL ANALÍTICO	186
A.1 FREQUÊNCIA INSTANTÂNEA	187
A.2 O SINAL ANALÍTICO	188
A.3 CARACTERÍSTICAS DO SINAL ANALÍTICO	191
A.4 PARADOXOS	194
APÊNDICE B WAVELETS DISCRETAS	196
B.1 ANÁLISE HIERÁRQUICA EM NÍVEIS DE RESOLUÇÃO	196
B.2 DEFINIÇÃO DE BASES	198
B.3 NÍVEIS DE DETALHE	199
B.4 PROPRIEDADE DE ORTOGONALIDADE DAS BASES	201
B.5 RELACIONAMENTO ENTRE OS COEFICIENTES A_k E B_k	202
B.6 DEFINIÇÃO DOS COEFICIENTES A_k	203

NOMENCLATURA

Algumas regras genéricas se aplicam a esta tese:

1. De uma forma geral representa-se a transformada de Fourier de uma função por sua letra maiúscula. Por exemplo, $F(\omega)$ é a transformada de Fourier da função $f(t)$.
2. O conjugado complexo de uma função é representado por um asterisco. Por exemplo, $f^*(t)$ é o conjugado complexo de $f(t)$.
3. A diferenciação no tempo é representada por um (ou mais) ponto(s) sobre a função diferenciada. Por exemplo, $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$.
4. A notação do operador média $(\)_m$ pode ser simplificada apenas pela indicação da letra m subscrita. Por exemplo, $t_m = (t)_m$, $\omega_m = (\omega)_m$.

LETRAS MAIÚSCULAS

$A[\]$	Operador analítico
$A(x)$	Wavelets: função de aproximação da análise de multi-resolução.
B, B_f, B_h	Largura de banda (genérica), da função $f(t)$ e da função $h(t)$, respectivamente. Equivalente a σ_ω .
B_P, B_{SP}	Largura de banda da distribuição tempo-frequência genérica $P(t, \omega)$ e do espectrograma $SP(t, \omega)$.
$C(t, \omega)$	Distribuição tempo-frequência genérica da classe de Cohen.
$C_f(t, \omega)$	Distribuição tempo-frequência (classe de Cohen) da função $f(t)$.
$D_j(x)$	Wavelets: função-detelhe correspondente à escala j da análise de multi-

resolução

E	Energia total de um sinal ou distribuição. Aplicações: módulo de Young.
$F(\omega), F[n]$	Transformada de Fourier contínua e discreta, respectivamente, da função $f(t)$.
$F_t(\omega)$	Transformada de Fourier contínua da função $f_t(\tau)$.
G	Módulo de cisalhamento.
$G(\omega)$	Transformada de Fourier contínua de uma função genérica $g(t)$.
$G(t, \omega)$	Função genérica de tempo e frequência.
$H(\omega)$	Transformada de Fourier contínua da função janela $h(t)$.
L	Comprimento (em pontos) de um sinal.
M, N	Número de pontos no tempo e em frequência, respectivamente.
$P(t, \omega)$	Distribuição tempo-frequência genérica.
\Re	Conjunto dos números reais.
$R_f(t, \tau)$	Tipo de função de auto-correlação específica para o cálculo de distribuições tempo-frequência da classe de Cohen. Referente à função $f(t)$.
$SP(t, \omega)$	Espectrograma.
$SP_f(t, \omega)$	Espectrograma da função $f(t)$.
T, T_f, T_h	Duração (genérica), da função $f(t)$ e da função $h(t)$, respectivamente. Equivalente a σ_t .
$W(t, \omega)$	Transformada wavelet contínua.
$W_f(t, \omega)$	Transformada wavelet contínua da função $f(t)$.
$WD(t, \omega)$	Distribuição tempo-frequência de Wigner-Ville.
$WD_f(t, \omega)$	Distribuição tempo-frequência de Wigner-Ville da função $f(t)$.
Z	Conjunto dos números inteiros.

LETRAS MINÚSCULAS


b	Aplicações: largura (de uma viga).
c	Constante de amortecimento; força de amortecimento por unidade de velocidade.
c_k	Coeficiente de aproximação da transformada wavelet.
$d_{j,k}$	Coeficiente de detalhe referente à escala j da transformada wavelet.
e	Constante neperiana $\cong 2,71828182846$.
f	Frequência (genérica) em Hertz.
$f(t), f(\tau)$	Sinal no tempo. Função a ser analisada, real ou complexa.
$f(t)$	Aplicações: força excitadora aplicada a uma estrutura.
$\tilde{f}(t)$	Aplicações: força excitadora, por unidade de massa, aplicada a uma estrutura.
$f[n]$	Sinal no tempo na forma discreta; sinal digitalizado.
$f_t(\tau)$	Sinal resultante da aplicação de uma janela $h(\tau)$, centrada no instante t , ao sinal original $f(\tau)$.
$f_R(t)$	Função ou sinal real a ser analisado. Parte real da função complexa $f(t)$.
$f_I(t)$	Parte imaginária, associada à função real $f_R(t)$, da função complexa $f(t)$.
$g(t)$	Função genérica do tempo.
h	Aplicações: altura (de uma viga).
$h(t), h(\tau)$	Função-janela genérica; geralmente a janela gaussiana $h(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2}.$
i	Constante imaginária, $\sqrt{-1}$.
j	Escala (forma discreta).
k	Constante real genérica.

k, n, m, p	Implementação computacional: variáveis inteiras utilizadas na discretização das distribuições tempo-frequência.
m	Aplicações: massa.
n_{ω}	Número de pontos de discretização em frequência de uma distribuição tempo-frequência.
s, u	Variáveis auxiliares utilizadas na discretização das distribuições tempo-frequência.
t	Instante no tempo (genérico). Também usado para indicar o tempo no plano tempo-frequência.
t_m	Tempo médio (tendo como função-peso a energia) de um sinal. Instante que localiza o centro de energia de um sinal no domínio do tempo.
$t_{m,j}$	Tempo médio da função de análise (ou wavelet) $\psi_{j,0}(\tau)$.
x	Wavelets: usado para indicar o tempo.
$x, x(t)$	Aplicações: posição ou coordenada.

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

ΔE	Fração de energia de um sinal.
ΔF	Incremento na amplitude da força excitadora por unidade de tempo.
Δt	Intervalo (de discretização) do tempo.
$\Delta \omega$	Intervalo (de discretização) em frequência.
$\Phi(t, \tau)$	Função-janela associada a uma determinada distribuição tempo-frequência pertencente à classe de Cohen.
Ω	Frequência de excitação em radianos.

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α	Constante da função gaussiana $h(t)$. Aplicações: parâmetro de não-linearidade de um sistema UGL não-linear.
χ	Grau de suavização.
$\delta(t), \delta(\omega)$	Funções Delta de Dirac no tempo e em frequência.
δ_{mn}	Delta de Kronecker.
$\phi(\theta, \tau)$	Núcleo de uma distribuição tempo-frequência da classe de Cohen.
$\phi(t), \phi(x)$	Função de escala, também chamada de wavelet-pai.
$\omega(t)$	Frequência instantânea em radianos.
$\hat{\omega}(t)$	Frequência instantânea estimada.
η	Razão entre a energia total de um sinal e a energia total de sua distribuição correspondente. Também usada para indicar o valor mínimo do produto entre a duração de um sinal e sua largura de banda (lei da indeterminação).
λ	Constante real genérica. Wavelets: escala (contínua). 
ν	Aplicações: módulo de Poisson.
π	Constante $\cong 3,14159265359$.
θ	Ângulo de fase em radianos. Especificamente representa frequência quando usado com o núcleo $\phi(\theta, \tau)$ de uma distribuição tempo-frequência da classe de Cohen.
ρ	Amplitude inicial do deslocamento; massa específica.
σ_t	Desvio padrão do tempo (tendo como função-peso a energia) de um sinal em relação a seu tempo médio t_m . Equivalente à duração T .
$\sigma_{t,j}$	Duração da função de análise (wavelet) $\psi_{j,t}(\tau)$.
σ_ω	Desvio padrão da frequência (tendo como função-peso a energia) de um sinal em relação a sua frequência média ω_m . Equivalente à largura de banda B .

$\sigma_{\omega, j}$	Largura de banda da função de análise (wavelet) $\psi_{j,t}(\tau)$.
τ	Indica o tempo no domínio do tempo em contraste com a variável t usada para indicar o tempo no domínio tempo-frequência.
ω	Frequência (genérica) em radianos por segundo.
ω_0	Frequência de referência. Aplicações: frequência natural de um sistema UGL não-linear em repouso.
ω_m	Frequência média (tendo como função-peso a energia) de um sinal. Frequência que localiza o centro de energia de um sinal no domínio da frequência.
$\omega_{m, j}$	Frequência média de uma função de análise (ou wavelet) $\psi_{j,k}(\tau)$.
ξ	Taxa de amortecimento.
$\psi(t), \psi(\tau)$	Função de análise geradora, também chamada de wavelet-mãe.
$\psi_{\omega,t}(\tau)$	Função de análise (wavelet) obtida a partir da geradora (mãe) $\psi(\tau)$ através de translação no tempo e modulação em frequência.
$\psi_{\lambda,t}(\tau)$	Função de análise (wavelet) obtida a partir da geradora (mãe) $\psi(\tau)$ através de translação no tempo e escalamento (contínuo).
$\psi_{j,t}(\tau)$	Função de análise (wavelet) obtida a partir da geradora (mãe) $\psi(\tau)$ através de translação no tempo e escalamento (discreto).
$\psi_{j,k}(x)$	Versão discreta, no tempo, da função $\psi_{j,t}(\tau)$.

ABREVIACÕES

FFT	Transformada rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>).
FWT	Transformada wavelet rápida (<i>Fast Wavelet Transform</i>).
RE	Retângulo de Energia.
STFT	Espectrograma (<i>Short Time Fourier Transform</i>).
TFD	Distribuição tempo-frequência (<i>Time-Frequency Distribution</i>).
UGL	Um Grau de Liberdade.

I INTRODUÇÃO

A utilização de técnicas tempo-frequência em engenharia mecânica e civil tem sido feita de forma tímida nos últimos anos, em muito devido ao desconhecimento dos engenheiros da real utilidade destas ferramentas na prática e também pela falta de cultura estabelecida sobre o assunto neste país. Entretanto em outras áreas, principalmente telecomunicações e reconhecimento de voz, estas técnicas já estão incorporadas ao cotidiano tanto de pesquisadores como de técnicos há bastante tempo.

Com o recente desenvolvimento da teoria das wavelets, um tipo de distribuição tempo-frequência, e da consequente euforia provocada por esta elegante teoria, vieram à reboque até o centro das atenções outras técnicas mais antigas como o espectrograma, a distribuição de Wigner e a classe de Cohen. As wavelets foram o ponto de partida desta tese, cuja expectativa inicial seria apenas passar superficialmente sobre as outras técnicas tempo-frequência de forma a se estabelecer uma comparação. No entanto o que se observou durante todo o desenvolvimento desta tese foi a constante superioridade das demais técnicas tempo-frequência sobre as wavelets *no sentido de fornecer uma alternativa de visualização do comportamento do sinal* além do gráfico no tempo ou do gráfico do espectro em frequência. Em grande parte esta superioridade se dá pelo motivo de que wavelets serem, de fato, técnicas tempo-escala e não tempo-frequência. Devido a isto, resolveu-se centrar o foco das pesquisas nas verdadeiras técnicas tempo-frequência, especialmente nas distribuições da classe geral de Cohen.

Pelo fato de serem duas teorias até certo ponto distintas, preferiu-se relatar o estado da arte das técnicas tempo-frequência e das wavelets no início e também ao longo dos itens que as introduzem, todos no capítulo II.

Esta dissertação foi organizada em seis capítulos e dois apêndices, sendo o primeiro capítulo esta introdução.

Todo o desenvolvimento teórico necessário ao entendimento da tese está contido no capítulo II, escrito de maneira a formar um texto contínuo que inicie discutindo as

características do sinal no tempo, em frequência, passando pelas técnicas tempo-frequência e finalizando com as wavelets. Estão relacionados a este capítulo II os dois apêndices (A e B) que foram desmembrados do texto principal para não quebrar o fluxo da leitura. O conceito de frequência instantânea, necessário durante a passagem para a dimensão tempo-frequência, é mostrado separadamente no apêndice A. O apêndice B mostra a obtenção das wavelets discretas, teoria relativamente extensa e monótona.

O capítulo III dedica-se a desfazer as dúvidas e dificuldades inerentes ao processo de implementação computacional de todas as teorias mostradas no capítulo II. São apresentados fluxogramas das principais rotinas e comentados as estratégias utilizadas para implementação. As melhores formas de apresentação gráfica são discutidas com detalhes, inclusive a utilização de diferentes mapas de cor. O capítulo III termina com um estudo do esforço computacional utilizado no cálculo das diversas técnicas.

O capítulo IV analisa diversos sinais simples com diversas técnicas tempo-frequência, inclusive wavelets. Neste capítulo fica claro que wavelets não devem ser utilizadas para visualização de sinais no domínio tempo-frequência. A função deste capítulo é acostumar o leitor a entender o sinal no domínio tempo-frequência de forma que sinais mais complexos possam ser apresentados no capítulo posterior.

No capítulo V são apresentadas aplicações práticas das distribuições tempo-frequência. Tenta-se destacar principalmente a superior interpretação possibilitada por estas técnicas, entendimento este muitas vezes impossível de se obter tão completamente a partir de gráficos do sinal no tempo ou do espectro em frequência. No entanto consegue-se também demonstrar que distribuições tempo-frequência podem ser utilizadas para se obter, com alta precisão, certas quantidades como amortecimento modal ou o parâmetro α (parâmetro de não-linearidade) de um sistema não-linear.

Finalmente no capítulo VI são apresentadas as conclusões e as idéias mais relevantes para serem desenvolvidas em pesquisas futuras.

II DESENVOLVIMENTO DAS TÉCNICAS DE PROCESSAMENTO DE SINAIS

II.1 Introdução

O presente capítulo tem por objetivo primeiro apresentar os conceitos básicos envolvidos com as técnicas tempo-frequência e tempo-escala para análise de sinais.

Por ser necessário fazer-se algumas definições e analogias importantes antes de entrar a fundo nestes conceitos, revisam-se nas primeira e segunda partes (itens II.2 e II.3) do capítulo as técnicas tradicionais de análise nos domínios do tempo e frequência.

Na terceira parte (item II.4) fala-se sobre técnicas tempo-frequência, apresentam-se em detalhe duas destas técnicas, o espectrograma e a transformada de Wigner, e finalmente mostra-se que todas as técnicas tempo-frequência pertencem a uma única classe geral, a família de Cohen.

Por final (item II.5) apresenta-se a principal técnica de análise tempo-escala, isto é, as wavelets.

II.2 O sinal no domínio do tempo

O sinal no tempo é o início de todo e qualquer tipo de análise. Todo sinal é obtido no domínio do tempo a partir da medição de um fenômeno físico de interesse e então transformado por técnicas variadas para outros domínios (frequência, tempo-frequência, tempo-escala) nos quais certas características que se deseja explicitar no sinal ficarão mais visíveis. Neste trabalho procura-se mostrar que todas as técnicas abordadas de processamento de sinais possuem limitações e algumas vezes poderão levar a interpretações absurdas da realidade. Portanto a única representação totalmente correta da realidade se localiza no domínio do tempo.

No entanto a representação temporal do sinal, ou mesmo seu processamento, pode ser prejudicada pela má aquisição e portanto alguns cuidados devem ser tomados nesta fase. A Figura II-1 mostra um esquema típico de aquisição de sinais usualmente utilizado em engenharia.

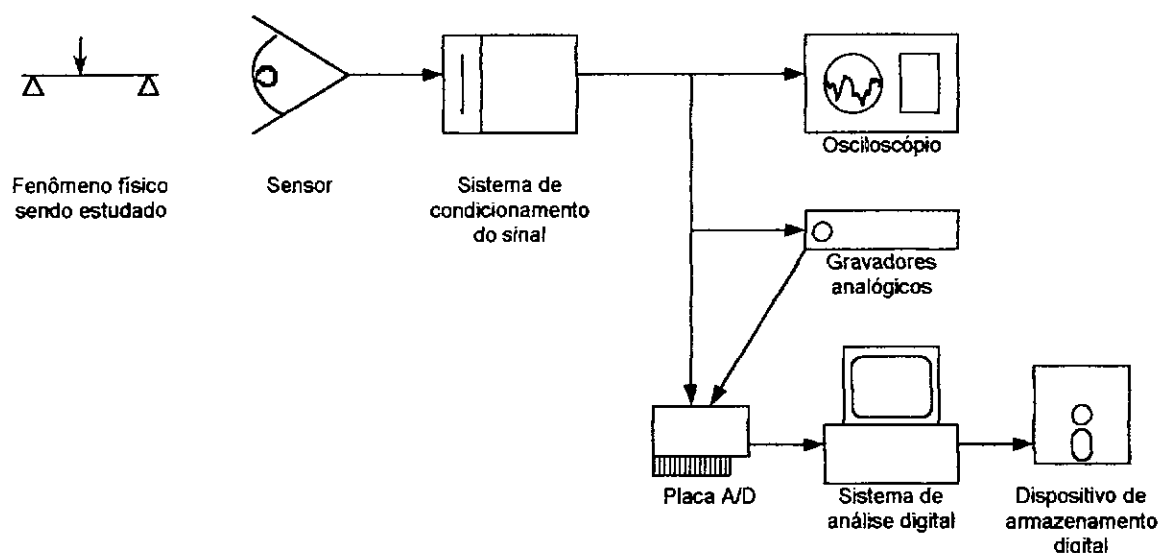


Figura II-1 Esquema típico de aquisição de sinais

O sistema mostrado na Figura II-1 é o básico para estudos experimentais. Uma certa grandeza de interesse é convertida em sinal elétrico pelo sensor, que pode ser um acelerômetro, um geofone, um strain-gage ou qualquer outro dispositivo que tenha como propriedade principal transformar a grandeza física em um sinal elétrico proporcional a esta. A seguir o sistema de condicionamento amplifica e filtra o sinal elétrico permitindo que a amplitude do sinal elétrico seja suficientemente elevada para que possa ser lida com uma melhor precisão. Por outro lado, a filtragem do sinal tem por objetivo retirar do sinal as frequências mais altas que sejam superiores à metade da taxa de digitalização que se deseja converter o sinal através da placa analógico-digital (A/D). Isto previne o efeito conhecido como aliasing. A seguir diversos caminhos podem ser tomados. Pode-se simplesmente visualizar o sinal através de um osciloscópio, o que geralmente é feito para calibrar o sistema de condicionamento. Nos casos onde não é possível levar ao local do experimento um microcomputador portátil pode-se gravar o sinal obtido em um gravador analógico para posterior processamento digital. Finalmente o sinal pode ser

digitalizado para uso com um sistema digital, forma que se tornou padrão com o barateamento dos dispositivos eletrônicos. Tome-se por sistema de análise digital os microcomputadores ou equipamentos digitais de aplicação específica que permitem fazer diversos tipos de análise do sinal, principalmente a transformação para o domínio da frequência.

A intensa automatização dos sistemas de aquisição de sinais, a respectiva facilidade de análise que proporcionaram e a grande quantidade de parâmetros que se pode obter instantaneamente com seu uso tem levado a um progressivo aumento da importância da visualização do sinal no domínio da frequência em detrimento da sua representação no tempo. Esta aparente displicência tem suscitado críticas severas principalmente porque é a partir do sinal no tempo que se verifica o perfeito funcionamento de todos os componentes do sistema de aquisição. Quando se realiza uma transformação de domínio todas as características que possibilitariam a detecção de um mau funcionamento ou mesmo de um comportamento não-linear do fenômeno podem ficar misturados aos componentes normais do sinal, dificultando sua evidênciação. Torna-se mister, portanto, visualizar o sinal em ambos os domínios, simultaneamente ou não.

A análise do sinal no tempo torna-se mais óbvia quando o estudado são sinais transientes, ou quando existe um único componente no sinal, isto é, uma onda, um impacto, um harmônico, etc. Estes sinais também são chamados por alguns autores de sinais monocomponentes (FOUFOULA, GEORGIU, 1994, QIAN, CHEN, 1996, COHEN 1995). Quando existe mais de um componente no sinal a tendência é que se misturem tanto que dificulte a análise. Ao lado da inspeção direta do sinal algumas técnicas de destaque são utilizadas tais como as derivadas da aplicação de funções de autocorrelação e técnicas específicas de análise como os gráficos de Poincaré ou plano-fase.

II.2.1 Energia do sinal no domínio do tempo

A grande ligação entre as técnicas multi-domínio será a energia do sinal. De uma forma ou de outra ela deverá estar, totalmente ou quase, preservada durante as transformações impostas aos sinais. Isto porque a energia do sinal sempre representa uma forma real de

energia relacionada ao fenômeno físico que está sendo estudado e, portanto, a garantia que esta energia é preservada, de certa maneira, garante que não houve alteração no fenômeno físico analisado.

Nos sistemas físicos usuais, observa-se que sempre existe uma forma de energia ou potência associados ao sinal, como por exemplo:

- Em eletricidade, o quadrado do campo elétrico;
- em circuitos elétricos, o quadrado da corrente elétrica;
- em acústica, o quadrado da pressão;
- na flexão de vigas, o quadrado da curvatura;
- na compressão de molas lineares, o quadrado do deslocamento;
- no movimento de corpos rígidos, o quadrado da velocidade, etc.

Apesar de todos os sinais obtidos a partir de medições de grandezas físicas serem reais, será importante no decorrer desta tese que desde já se avie a possibilidade de se trabalhar com um sinal complexo. Não por haverem casos onde seja possível medir sinais complexos mas porque eles simplificam tremendamente certos cálculos intermediários, podendo-se entender estes sinais como simples abstrações matemáticas. Um exemplo é dado por CLOUGH (1993) onde utiliza a forma complexa do deslocamento para obter as constantes básicas que descrevem a dinâmica de um sistema sem amortecimento. Desta forma, um sinal complexo generalizado $f(t)$ pode-se fazer corresponder, num intervalo de tempo Δt , uma fração de energia $|f(t)|^2 \Delta t$. Disto pode-se concluir que $|f(t)|^2$ corresponderá a uma potência, densidade de energia, ou uma energia por unidade de tempo. Então

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (\text{II-1})$$

é a energia total do sinal. Em sistemas físicos esta energia será sempre finita. Por causa disto pode-se sempre, sem perda de generalidade, normalizar o sinal de forma que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 1 \quad (\text{II-2})$$

sendo sempre adotada esta condição, já que no caso contrário deveria ser acrescentado em *todas* as fórmulas deste ponto em diante a constante $1/E$, prejudicando a clareza do texto.

II.2.2 Caracterização estatística do sinal no tempo

A caracterização estatística de um sinal terá grande importância futuramente ao relacionar as formas de representação do sinal. Caracterizar estatisticamente um sinal é obter diversos tipos de parâmetros que assim fornecem uma descrição compacta de certas características de seu comportamento. Dos diversos parâmetros que podem ser utilizados, os de interesse são aqueles em que a energia entra como função-peso, de forma que qualquer média poderá ser definida como:

$$(g)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) |f(t)|^2 dt \quad (\text{II-3})$$

onde $g(t)$ representa qualquer quantidade que seja função do tempo e o operador $()_m$ é chamado de operador média. As quantidades de interesse serão

$$(t)_m = t_m = \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt \quad (\text{II-4})$$

onde $(t)_m$ é o *tempo médio* e localiza no tempo onde a energia está concentrada.

Pode-se obter também o momento de ordem n do sinal

$$(t^n)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n |f(t)|^2 dt. \quad (\text{II-5})$$

A variância, ou seja, o quadrado do desvio-padrão, também conhecido como *duração do sinal*,

$$T_f^2 = \sigma_t^2 = ((t - t_m)^2)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_m)^2 |f(t)|^2 dt = (t^2)_m - t_m^2, \quad (\text{II-6})$$

é uma medida de dispersão da energia em relação ao tempo médio. Fora do intervalo $[t_m - T_f, t_m + T_f]$ existe apenas uma pequena fração de energia do sinal e, portanto, pode-se chamar T_f de *duração* do sinal $f(t)$.

É sempre bom lembrar o fato de que se um sinal não-normalizado for usado, pode-se obter as médias corretas simplesmente dividindo-se o resultado obtido pela energia total do sinal E , isto é,

$$(g)_m = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t)^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt} \quad (\text{II-7})$$

II.3 O sinal no domínio da frequência

A análise do sinal no tempo já possibilita a obtenção de informações úteis, como a carga de ruptura de um corpo de prova durante um ensaio de carregamento lento, o tempo de chegada de uma onda sísmica primária, a temperatura em que certo material se funde, a amplitude mínima e máxima dos sinais, etc. No entanto muito se pode saber a respeito do fenômeno físico que está sendo estudado se este puder ser decomposto em uma série de sinais harmônicos, como proposto por Fourier (GRATTAN-GUINNESS, 1972).

II.3.1 A transformada de Fourier

É necessária uma breve definição da transformada de Fourier pelo fato de existirem umas poucas formas quase idênticas de defini-la, diferenciando-se umas das outras apenas por uma constante.

Em alguns textos mais modernos (BUTKOV, 1988, COHEN, 1995, FOUFOULA-GEORGIU, KUMAR, 1994) é comum definir-se o par de transformadas de Fourier como

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{II-8})$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{II-9})$$

A equação (II-8) é chamada de transformada de Fourier direta enquanto a equação (II-9) é reconhecida como transformada de Fourier inversa. Outros autores como OPPENHEIM e SCHAFFER (1989), QIAN e SHEN (1996), CLOUGH e PENZIEN (1993) preferem retirar a constante $1/\sqrt{2\pi}$ da transformada direta e compensá-la na transformada inversa. São formas análogas e igualmente corretas. As definições (II-8) e (II-9) têm a vantagem de esconder a constante 2π nos desenvolvimentos posteriores, contribuindo muito para manter a clareza no texto.

A transformada discreta de Fourier (DFT) adotada não é totalmente coerente com a definição dada para a transformada contínua. Entretanto já é de uso geral e seria um contratempo alterar sua forma. A DFT fica então definida por

$$F[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} f[k] e^{-i \frac{2\pi nk}{L}} \quad (\text{II-10})$$

e sua respectiva inversa (IDFT),

$$f[n] = \sum_{k=0}^{L-1} F[k] e^{i \frac{2\pi nk}{L}} \quad (\text{II-11})$$

Esta formulação tem a vantagem de que o módulo da DFT de um harmônico tipo $e^{i\omega t}$ é um delta de Kronecker centrado em ω . Um grande número dos aplicativos computacionais utiliza a forma clássica, diferente da atual somente pela permuta da constante multiplicativa $1/L$ da transformada direta para a inversa. Foi necessário, portanto, que os espectros calculados nestes aplicativos fossem multiplicados por $1/L$ para haver coerência com as definições (II-10) e (II-11). Deve-se destacar que nos aplicativos foi utilizado o algoritmo otimizado da DFT conhecido como “Fast Fourier Transform” ou FFT.

II.3.2 Energia no domínio da frequência

O relacionamento da energia entre os domínios tempo e frequência é feita através da

equação de Parseval (OPPENHEIM, SCHAFER, 1993)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (\text{II-12})$$

Este relacionamento mostra que a energia do sinal é preservada totalmente durante a transformação, e é consequência direta da propriedade de ortogonalidade das funções que compõem a base do domínio em frequência.

II.3.3 Caracterização estatística do sinal no domínio da frequência

Da mesma forma como foi caracterizado estatisticamente o sinal no domínio no tempo pode-se caracterizar o sinal no domínio da frequência. A *frequência média*,

$$(\omega)_m = \omega_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{II-13})$$

fornece um indicativo da frequência onde está centrada o espectro do sinal.

Os *momentos* de ordem n ,

$$(\omega^n)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n |F(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{II-14})$$

ajudam a identificar a forma do espectro.

O quadrado do desvio padrão da frequência, também chamado de *largura de banda* (*Bandwidth*),

$$B_f^2 = \sigma_\omega^2 = ((\omega - \omega_m)^2)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_m)^2 |F(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{II-15})$$

é uma medida de dispersão do espectro. Quanto maior a largura de banda mais espalhada está a energia ao longo das frequências.

E, de uma forma geral, tem-se

$$(G)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) |F(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{II-16})$$

É importante notar que o operador média toma formas variadas quando aplicado a funções no tempo e em frequência. Quando aplicado a uma função no tempo a função peso é $|f(t)|^2$ e a integração se dá no tempo. Quando aplicado a uma função da frequência o peso é $|F(\omega)|^2$ e a integração se dá em frequência. A atitude correta seria indicar esta diferença por uma notação mas não existe necessidade de sobrecarregar o texto desde que se verifique o domínio a qual pertence a função da qual está se retirando a média. Este procedimento é usual e utilizado por muitos autores como QIAN e CHEN (1996) e COHEN (1995). Antecipando um pouco a ordem dos capítulos para não perder a linha de raciocínio, o peso para o operador média no domínio tempo-frequência será a distribuição de energia nessa representação e a integral será dupla, a primeira no tempo e a segunda em frequência.

Uma característica particular deve ser notada quando se trata de sinais reais. Tendo a transformada de Fourier $F_R(\omega)$ de um sinal real $f_R(t)$ a propriedade

$$F_R(\omega) = F_R^*(-\omega) \quad (\text{II-17})$$

onde o asterisco representa o complexo conjugado, então a frequência média, definida por (II-13), é

$$\begin{aligned} \omega_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^0 \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega + \int_0^{+\infty} \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega \\ &= -\int_0^{\infty} \omega |F_R(-\omega)|^2 d\omega + \int_0^{+\infty} \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \omega \left[-|F_R^*(\omega)|^2 + |F_R(\omega)|^2 \right] d\omega \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Em outras palavras, sendo a energia (em frequência) $|F_R(\omega)|^2$ simétrica em relação ao zero, a frequência média de um sinal real será sempre nula! Vê-se que neste ponto a noção física se distancia do conceito matemático. Esta dificuldade pode ser contornada

substituindo-se nos cálculos o sinal real $f_R(t)$ pelo *sinal analítico* complexo correspondente

$$f(t) = A[f_R(t)]. \quad (\text{II-19})$$

onde $A[]$ é chamado de *operador analítico*, descrito no apêndice A. Utilizando este sinal dito analítico chega-se à conclusão que a frequência média de um sinal também pode ser escrita como

$$\omega_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t)^2 dt = (\varphi)_m \quad (\text{II-20})$$

onde $\varphi(t)$ é a derivada da fase do sinal analítico associado, sendo comumente chamada de *frequência instantânea média* ou simplesmente *frequência instantânea*. O conceito de frequência instantânea será de grande importância nos desenvolvimentos posteriores.

II.3.4 O princípio da indeterminação

Quando foi feita a caracterização do sinal no tempo e em frequência, foi visto que o desvio padrão é uma boa medida da dispersão em relação à média. Existe uma lei que relaciona os desvios do tempo e da frequência, conhecido como *princípio da indeterminação* (COHEN, 1995), o qual afirma que

$$T_f^2 B_f^2 = \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \quad (\text{II-21})$$

onde, repetindo aqui as equações (II-6) e (II-15),

$$T_f^2 = \sigma_t^2 = \left((t - t_m)^2 \right)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_m)^2 |f(t)|^2 dt = (t^2)_m - t_m^2$$

$$B_f^2 = \sigma_\omega^2 = \left((\omega - \omega_m)^2 \right)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_m)^2 |F(\omega)|^2 d\omega = (\omega^2)_m - \omega_m^2.$$

A prova matemática deste princípio é relativamente longa e pode ser encontrada em COHEN (1995), seção 3-3. A prova parte da desigualdade de Schwarz,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx \right|^2 \quad (\text{II-22})$$

particularizando o resultado para o processamento de sinais usando-se o conceito de frequência instantânea.

Isto quer dizer que nunca será possível obter, ou mesmo construir, um sinal que seja arbitrariamente concentrado em ambos os domínios, tempo e frequência. Um impacto, por exemplo, é uma função altamente concentrada no tempo ($T_f \approx 0$) mas possui um espectro bastante largo ($B_f \rightarrow \infty$). Por outro lado, o seno ocupa todo o domínio no tempo ($T_f \rightarrow \infty$) mas em frequência ocupa apenas um ponto ($B_f \approx 0$). Ao lado destes exemplos extremos tem-se funções intermediárias como a janela gaussiana que ocupa um domínio limitado tanto no tempo como em frequência ($T_f = 1/\sqrt{2\alpha}$, $B_f = \sqrt{\alpha/2}$). Note-se que o princípio da indeterminação fornece apenas um limite inferior, pois não exige a possibilidade de existirem sinais extremamente mal localizados tanto no tempo como em frequência, como o ruído branco ($T_f \rightarrow \infty$, $B_f \rightarrow \infty$).

A igualdade prevista na equação (II-21) só será alcançada quando a função $f(t)$ for a gaussiana normalizada, isto é,

$$h(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2} \quad (\text{II-23})$$

pois

$$T_h^2 = \sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_m)^2 |h(t)|^2 dt = (t^2)_m - t_m^2 = \frac{1}{2\alpha} \quad (\text{II-24})$$

$$B_h^2 = \sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_m)^2 |H(\omega)|^2 d\omega = (\omega^2)_m - \omega_m^2 = \frac{\alpha}{2} \quad (\text{II-25})$$

e, portanto,

$$T_f^2 B_f^2 = \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\alpha} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \quad (\text{II-26})$$

A conclusão que se chega é que nenhum sinal terá maior concentração - no sentido fornecido pela duração e largura de banda - que a função gaussiana em ambos os domínios simultaneamente.

Pode-se representar graficamente o princípio da indeterminação num plano cartesiano onde as abscissas representam o domínio do tempo e as ordenadas, o domínio da frequência, como mostrado na Figura II-2.

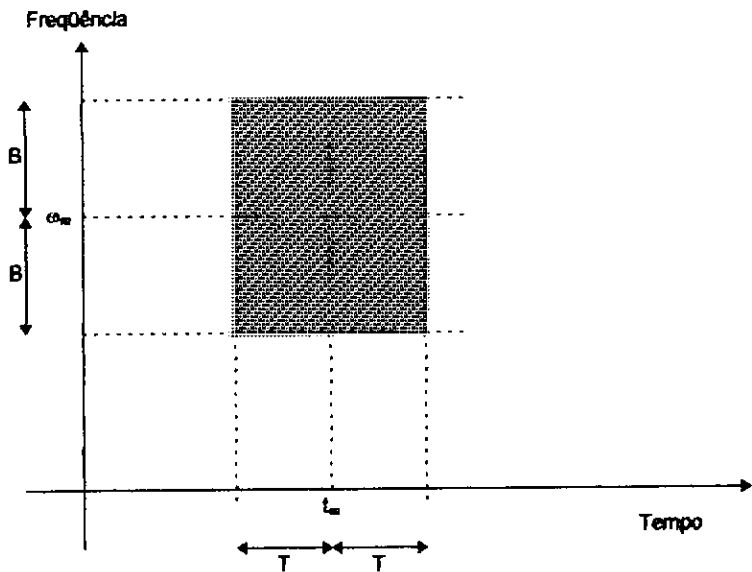


Figura II-2 Representação gráfica do princípio da indeterminação

A Figura II-2 mostra um retângulo centrado no tempo e frequência médios, tendo como lados, respectivamente, duas vezes a duração e a largura de banda do sinal. Este retângulo delimita o intervalo tempo-frequência onde está concentrada cerca de 60% da energia total do sinal e tem área igual a $4TB$. Por delimitar o intervalo em tempo-frequência onde a energia do sinal se localiza, será convencionado denominar tal retângulo por *retângulo de energia* (RE).

Pelo princípio da indeterminação (II-21) deve-se ter que $TB \geq 1/2$. Conclui-se portanto que a área do retângulo de energia (RE) sempre será maior que $4TB = 4 \frac{1}{2} = 2$. Quando o sinal for a gaussiana normalizada a área do retângulo de energia (RE) será exatamente 2.

A Figura II-3 mostra os respectivos retângulos de energia (RE) para dois sinais

conhecidos: um harmônico e um impacto.

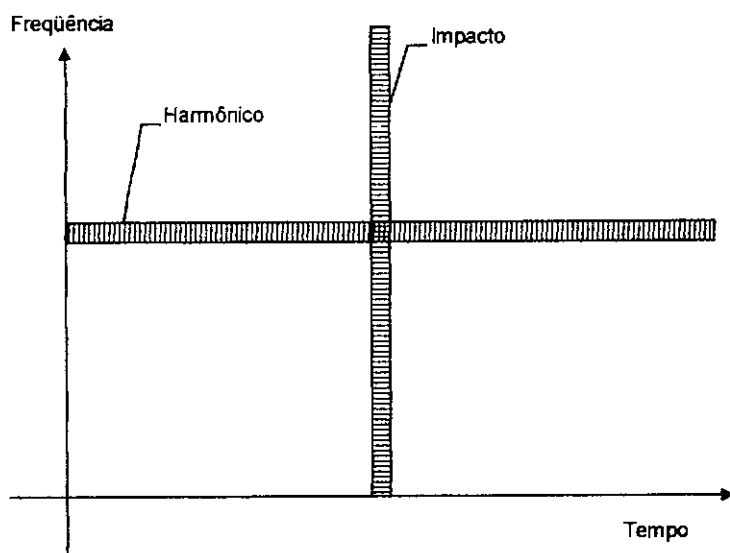


Figura II-3 Localização no plano tempo-frequência de dois sinais

O sinal harmônico concentra-se bem em frequência mas se distribui por uma grande porção de tempo. Isto resulta num retângulo de energia deitado, na horizontal, paralelo ao eixo do tempo, como se percebe na Figura II-3.

Em contrapartida o impacto se localiza bem no tempo mas em frequência ocupa um grande intervalo, o que resulta num retângulo de energia em pé, paralelo ao eixo da frequência. Em ambos os casos o retângulo delimitador terá área maior ou igual a 2, como previsto pelo princípio da indeterminação.

II.4 O sinal no domínio tempo-frequência

Suponha que um engenheiro possua dois gráficos contendo o sinal no tempo e o respectivo espectro de frequências obtidos da monitoração de uma ponte simultaneamente excitada por tráfego e pelo vento. Pode este engenheiro dizer, inspecionando os dois gráficos, quais os modos da estrutura estão sendo excitados e com qual amplitude? A resposta é sim. Pode o engenheiro dizer quando ocorreram as mais altas amplitudes do sinal? A resposta novamente é sim. Pode o engenheiro dizer se determinado modo foi excitado no início ou no fim do sinal ou mesmo durante todo o tempo do monitoramento? A resposta é quase sempre não. Sabe-se através do espectro *quais* frequências ocorreram e não *quando*. Até mesmo a amplitude de vibração será

mascarada pois um modo excitado com uma amplitude pequena durante todo o sinal poderá ter amplitude em frequência maior que um modo excitado com uma altíssima amplitude em um pequeno intervalo de tempo.

O que se precisa então é uma maneira de ver o sinal nos dois domínios *simultaneamente*. Pode-se fazer isso fatiando-se em pedaços menores o sinal no tempo e tomando-se então o espectro de cada um separadamente. Esta abordagem é considerada como uma técnica primitiva de análise tempo-frequência.

A origem das técnicas tempo-frequência remontam à de estudos de mecânica quântica (WIGNER, 1932), na década de 20. Basicamente a motivação de Wigner era calcular a correção a ser aplicada ao segundo coeficiente virial de um gás, o qual indica quanto ele difere do gás ideal. Classicamente o cálculo deste coeficiente envolve uma distribuição bidimensional de posição e momento. Foi aplicada ao processamento de sinais por VILLE (1946) cerca de quinze anos depois quando fez a analogia posição \leftrightarrow tempo e momento \leftrightarrow frequência. Ainda nos anos 40 a idéia do espectrograma foi cristalizada. Nos anos 50 e 60 houve considerável atividade no sentido de se construir distribuições similares à de Wigner, como PAGE (1952), MARGENOU-HILL (1961) e RIHACZEK (1968). COHEN (1966) divisa um método que permite construir de uma simples maneira uma infinita variedade de distribuições tempo-frequência partindo de uma única função chamada *núcleo da distribuição*. Nas duas décadas posteriores vê-se surgir uma grande quantidade de núcleos.

O grande impulso às distribuições tempo-frequência é dado realmente no início dos anos 90 quando são publicados vários trabalhos importantes relatando formas de reduzir a interferência, problema muito comum nas distribuições tempo-frequência (CHOI, WILLIAMS, 1989, ZHAO, ATLAS, MARKS, 1990, JEONG, WILLIAMS, 1991, ATLAS, LOUGHLIN, PITTON, 1992, CUNNINGHAM, WILLIAMS, 1993). Logo após são finalmente lançados dois livros (COHEN, 1995, QIAN, CHEN, 1996) que sintetizam todas estas técnicas até então dispersas em várias publicações técnicas.

Significativos avanços recentes foram feitos no sentido de obter distribuições de alta qualidade (BOASHASH, O'SHEA, 1994, STANKOVIC, 1997), distribuições

adaptativas ao sinal estudado (BARANIUK, JONES, 1996), distribuições estritamente positivas (RODRIGUEZ FONOLLOSA, 1996) e algoritmos eficientes para cálculo de distribuições estritamente positivas (GROUTAGE, 1997).

A contribuição relevante que esta tese oferece ao desenvolvimento das distribuições tempo-freqüência é a implementação de um algoritmo rápido para o cálculo das distribuições da família de Cohen, além, evidentemente, de aplicar estas teorias ao escopo da engenharia civil.

II.4.1 Distribuições tempo-freqüência

O objetivo básico das técnicas tempo-freqüência é construir uma função que descreva o comportamento da energia do sinal nos dois domínios, tempo e freqüência, simultaneamente. Se esta função for construída com sucesso a partir do sinal, pode-se saber a partir dela quais as freqüências estão ocorrendo em cada instante de tempo.

Para concretizar o que se deseja, é lembrado que a energia no domínio do tempo é descrita por

$$|f(t)|^2 \quad = \text{densidade de energia por unidade de tempo ou}$$

$$|f(t)|^2 \Delta t \quad = \text{fração de energia contida no intervalo } \Delta t \text{ centrado no tempo } t.$$

enquanto que, em freqüência,

$$|F(\omega)|^2 \quad = \text{densidade de energia por unidade de freqüência ou}$$

$$|F(\omega)|^2 \Delta \omega \quad = \text{fração de energia contida no intervalo } \Delta \omega \text{ centrado em } \omega.$$

O que se procura é uma distribuição de energia bidimensional $P(t, \omega)$ tal que

$$P(t, \omega) \quad = \text{densidade de energia no tempo } t \text{ e freqüência } \omega, \text{ ou}$$

$$P(t, \omega) \Delta t \Delta \omega \quad = \text{fração de energia contida no intervalo } \Delta t \Delta \omega, \text{ centrado em } (t, \omega).$$

Para que uma distribuição de energia seja coerente em relação à energia do sinal é necessário que algumas condições sejam respeitadas. A primeira refere-se à conservação da energia total do sinal, ou seja,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \omega) d\omega dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (II-27)$$

Como será visto adiante, nem sempre esta condição poderá ser atendida totalmente. A distribuição deve, no entanto, preservar grande quantidade da energia, o que pode ser medido pela razão de energia

$$\eta = \frac{E_P}{E} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \omega) d\omega dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt} \quad (II-28)$$

Quando esta razão encontra-se fora do intervalo (empírico) 80 a 120% a distribuição será de muito baixa qualidade ou algum problema numérico estará ocorrendo na análise.

Mas de nada adianta conservar a energia do sinal se esta energia está mal localizada no plano tempo-frequência. Se, por exemplo, uma frequência que ocorre no início do sinal for representada pela distribuição no final do sinal, ou se a distribuição indicar a existência de uma frequência que nunca ocorre, esta distribuição representará mal o sinal. É possível que tais aberrações ocorram mesmo quando a distribuição conserva totalmente a energia. As próximas duas condições são chamadas de condições marginais de tempo e frequência, respectivamente, e garantem a própria localização da energia dentro da distribuição.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad (II-29)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \omega) dt = |F(\omega)|^2 \quad (II-30)$$

Assim como a conservação de energia, nem todas as distribuições satisfazem estas relações marginais. Algumas *quase* satisfazem, o que será o bastante se pudermos fazer bom proveito de suas propriedades.

II.4.2 Caracterização estatística do sinal no domínio tempo-frequência

Identicamente ao que foi feito para os domínios do tempo e da frequência separadamente, pode-se utilizar o operador média no domínio tempo-frequência para caracterizar estatisticamente o sinal e então obter médias que irão descrever sucintamente o comportamento do sinal neste domínio.

No domínio tempo-frequência o operador média será definido para uma quantidade qualquer $G(t, \omega)$, função simultaneamente do tempo e da frequência, por

$$(G)_m = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} G(t, \omega) P(t, \omega) d\omega dt. \quad (\text{II-31})$$

Definido assim, o tempo médio *da distribuição* é dado por

$$(t)_m = t_m = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} t P(t, \omega) d\omega dt. \quad (\text{II-32})$$

Por outro lado, a frequência média é dada por

$$(\omega)_m = \omega_m = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \omega P(t, \omega) d\omega dt. \quad (\text{II-33})$$

Note-se que estas médias *pertencem à distribuição* e só serão iguais às médias obtidas para o sinal no domínio do tempo, equação (II-4), e da frequência, equação (II-13), se as condições marginais dadas pelas equações (II-29) e (II-30) forem satisfeitas. O mesmo ocorrerá com as variâncias (II-6) e (II-15) em relação às variâncias da distribuição

$$T_p^2 = \sigma_t^2 = \left((t - t_m)^2 \right)_m = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (t - t_m)^2 P(t, \omega) d\omega dt \quad (\text{II-34})$$

$$B_p^2 = \sigma_\omega^2 = \left((\omega - \omega_m)^2 \right)_m = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (\omega - \omega_m)^2 P(t, \omega) d\omega dt \quad (\text{II-35})$$

e também com o princípio da indeterminação, eq. (II-21), em relação ao mesmo princípio aplicado à distribuição

$$T_p^2 B_p^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (\text{II-36})$$

Se as condições marginais (II-29) e (II-30) não puderem ser atendidas pela distribuição, pode-se ainda sempre garantir-se que, se as condições marginais forem satisfeitas, então

$$T_P^2 B_P^2 \geq \eta \quad (\text{II-37})$$

onde η é uma constante característica da técnica sendo usada para calcular a distribuição.

Note que qualquer um pode construir uma distribuição tempo-frequência diretamente que seja infinitamente concentrada nos dois domínios, como por exemplo $\delta(t)\delta(\omega)$, e com isso tentar refutar a afirmação (II-37). No entanto esta distribuição não será uma representação válida para sinal algum, não conservará energia e muito menos atenderá as condições marginais.

II.4.3 O espectrograma

O espectrograma, também chamado *Short Time Fourier Transform* (STFT), foi uma das primeiras técnicas tempo-frequência e até hoje é a mais utilizada na análise de sinais transientes por ser rápida e ter interpretação simples, herdada da transformada de Fourier. Existe uma grave deficiência desta distribuição quanto ao princípio da indeterminação e a consequência disso é uma grande perda de resolução no tempo ou em frequência ou em ambos, dependendo dos parâmetros que se use. Mas como é geralmente mais rápida que outras distribuições mais precisas, aconselha-se a usá-la como uma técnica preliminar para se ter uma idéia do que está ocorrendo no sinal.

A idéia básica do espectrograma é simples. Ao invés de tomar-se a transformada de Fourier de todo o sinal de uma vez, divide-se o sinal em pedaços e então calcula-se o espectro de cada parte em separado. Esta divisão pode ser feita utilizando-se uma função de enjanelamento $h(t)$, centrada num instante t , que irá “fatiar” a função original $f(t)$ em pedaços. A função “fatiada” $f_t(\tau)$ será então

$$f_t(\tau) = f(\tau)h(\tau - t) \quad (\text{II-38})$$

Sua transformada de Fourier é dada por

$$F_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(\tau-t) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II-39})$$

O espectrograma é então o conjunto dos quadrados dos módulos dos espectros de todas estas fatias juntas

$$SP(t, \omega) = |F_i(\omega)|^2 \quad (\text{II-40})$$

Para ilustrar melhor como este enjanelamento, é mostrado um exemplo com um sinal chirp linear que foi fatiado por uma janela retangular de largura total 0,25s, mostrada na Figura II-4.

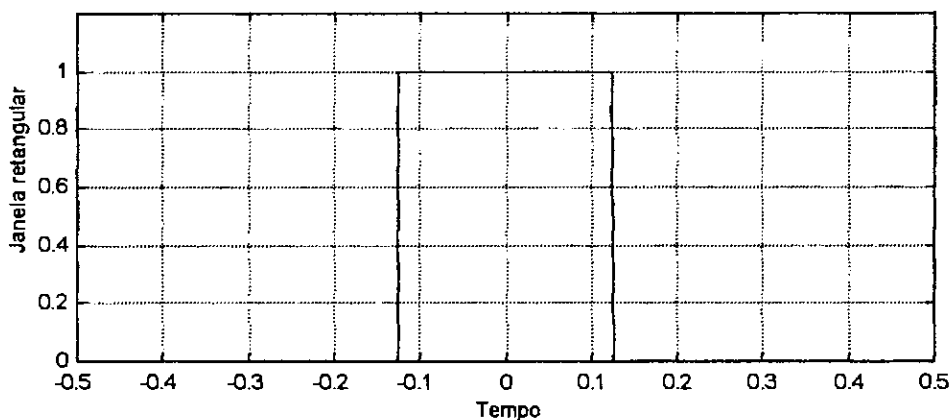


Figura II-4 Janela retangular

Esta janela é muito prática pois o sinal fatiado é simplesmente uma cópia do sinal original no trecho definido pela janela retangular, evitando-se o gasto adicional de tempo com a multiplicação entre a janela e o sinal. Sua desvantagem é que, por ser descontínua, seu espectro tende a ser bastante largo, o que piorará a qualidade do espectrograma conforme será mostrado posteriormente.

A Figura II-5 ilustra o sinal utilizado no exemplo e alguns dos trechos analisados. Este sinal possui 1000 pontos e o enjanelamento reduz o sinal analisado em cada trecho para 250 pontos.

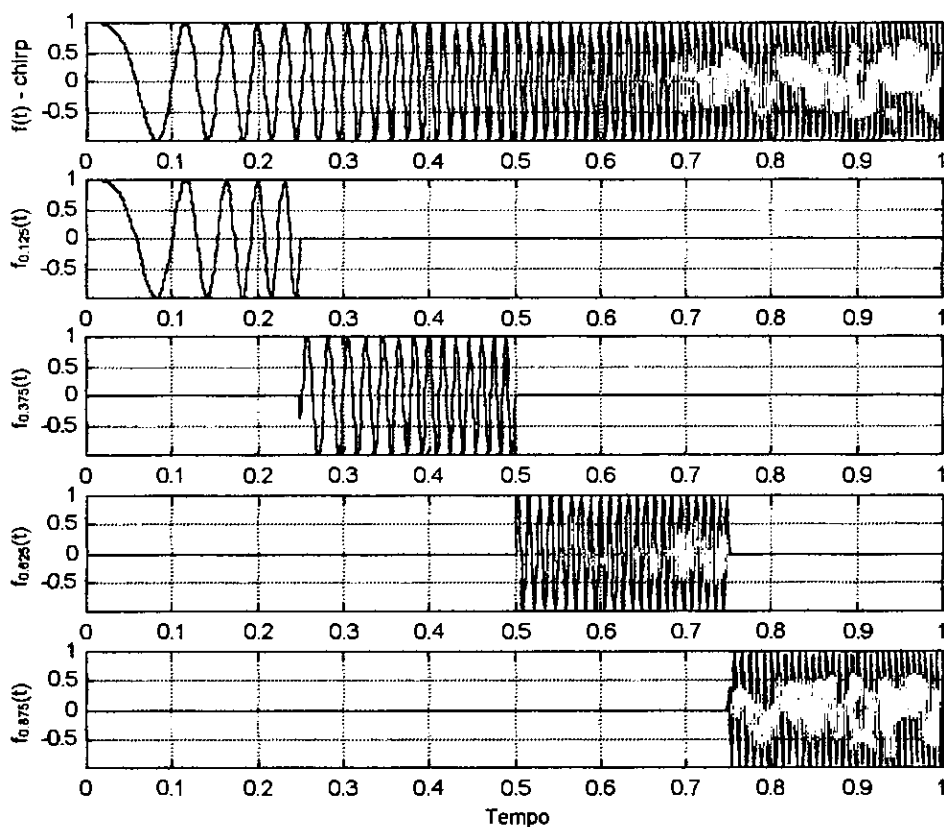


Figura II-5 Sinal decomposto por janela retangular de largura 0,25s.

Na Figura II-5 são mostrados somente fatias não superpostas, o que levaria o leitor a pensar que somente as quatro fatias serão analisadas. É uma conclusão falsa pois geralmente se desloca a janela ponto-a-ponto e portanto o número de fatias obtidas é igual ao número de pontos do sinal menos a largura da janela. Tendo o sinal da Figura II-5 1000 pontos e a janela 250 pontos, logo obtém-se $1000 - 250 = 750$ fatias que devem ser analisadas.

Em certos casos, especialmente quando o número de pontos do sinal é muito grande, pode-se escolher aumentar o espaçamento entre janelas. Se, por exemplo, fosse utilizado um espaçamento de dois pontos no exemplo da Figura II-5, $750/2 = 375$ fatias seriam analisadas. A escolha do espaçamento ideal é ditado pela experiência, mas um valor mínimo de 500 fatias serve para balizar esta escolha. Quanto maior o espaçamento, menor a qualidade visual do espectrograma e menor o tempo de processamento.

O espectrograma possui a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} SP(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt \quad (\text{II-41})$$

a qual indica que se a função de enjanelamento estiver normalizada, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = 1 \quad (\text{II-42})$$

então o espectrograma será uma isometria, isto é, a energia do sinal é preservada na distribuição.

Apesar de conservar energia, o espectrograma não satisfaz corretamente as condições marginais, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} SP(t, \omega) d\omega \neq |f(t)|^2 \quad (\text{II-43})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} SP(t, \omega) dt \neq |F(\omega)|^2 \quad (\text{II-44})$$

A qualidade do espectrograma como distribuição tempo-frequência também pode ser avaliada pelo princípio da indeterminação. Sejam

- T_f e B_f respectivamente a duração e a largura de banda do sinal $f(t)$, definidos anteriormente pelas equações (II-6) e (II-15);
- T_h e B_h respectivamente a duração e a largura de banda da função de enjanelamento $h(t)$;
- T_{SP} e B_{SP} respectivamente a duração e a largura de banda do espectrograma resultante $SP(t, \omega)$, definidos pelas equações (II-34) e (II-35).

Prova-se que

$$T_{SP}^2 = T_f^2 + T_h^2 \quad (\text{II-45})$$

$$B_{SP}^2 = B_f^2 + B_h^2 \quad (\text{II-46})$$

Pelo princípio da indeterminação deve-se ter que

$$T_{SP}^2 B_{SP}^2 = (T_f^2 + T_h^2)(B_f^2 + B_h^2) \geq \frac{1}{4} \quad (\text{II-47})$$

Porém acontece que, pelo mesmo princípio

$$T_f^2 B_f^2 \geq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad T_h^2 B_h^2 \geq \frac{1}{4} \quad (\text{II-48})$$

o que resulta em

$$T_{SP}^2 B_{SP}^2 \geq \frac{1}{2} \quad (\text{II-49})$$

que é uma limitação duas vezes superior ao princípio da indeterminação original. Isto indica que o espectrograma possui uma péssima localização no plano tempo-freqüência. O exemplo a seguir ilustra bem isso.

A Figura II-6 ilustra no tempo e em freqüência o sinal utilizado para exemplificar a técnica do espectrograma. O sinal utilizado foi gerado por uma função matemática e está “digitalizado” a uma taxa de 400 Hz ou, como alguns autores preferem, 400 pontos por segundo. É composto pela soma de dois sinais, um sinal harmônico com freqüência igual a 100 Hz e um impacto com duração total 0.0025 s. Conforme ilustrado pela Figura II-6, o sinal harmônico naturalmente está bem localizado em freqüência e o impacto, bem localizado no tempo. Alternativamente, o seno está mal localizado no tempo e o impacto, mal localizado em freqüência. Por má localização entenda-se que o sinal tem uma grande duração ou largura de banda.

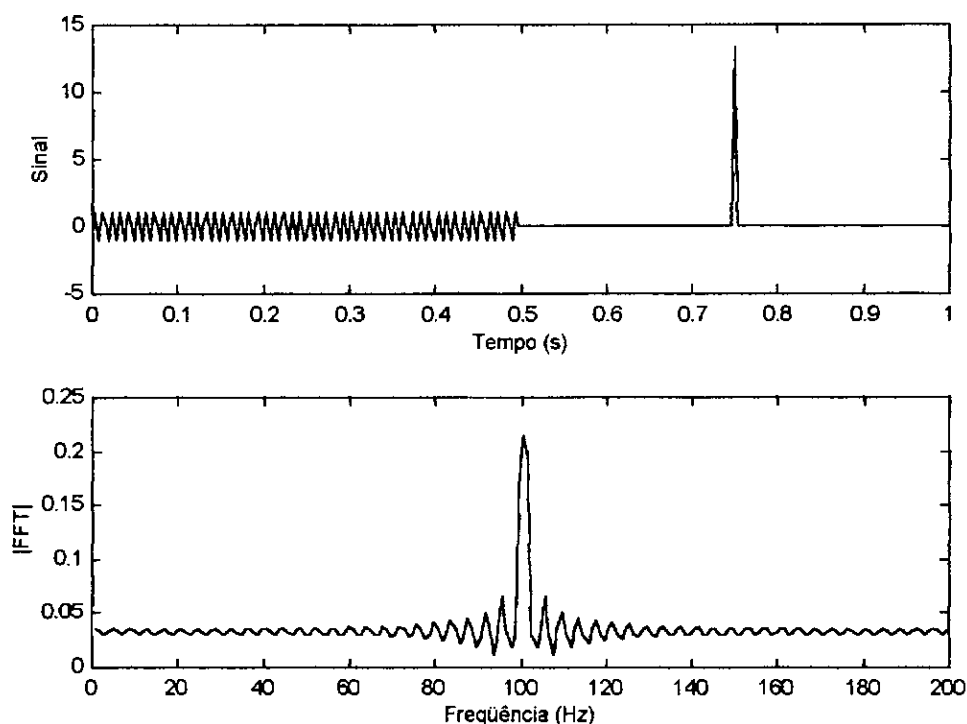


Figura II-6 Sinal utilizado composto por seno e um impacto

Na Figura II-7 é apresentada a transformada tempo-frequência (STFT) do sinal usando-se uma janela de curta duração ($T=0.01$ s). Esta figura apresenta um gráfico 3D onde os eixos são: frequência, tempo e amplitude da distribuição. É interessante indicar também a relação entre a largura da janela e o tempo total do sinal, no caso, 1%.

É de uso corrente (COHEN 1995, QIAN, CHEN, 1996, CUNNINGHAM, WILLIAMS, 1996, STANKOVIC, 1997), não se indicar explicitamente que o eixo vertical corresponde à amplitude da distribuição pois considera-se esta informação redundante já que os outros dois eixos já estão indicados. Isto também evita que o aplicativo gráfico reserve espaço para este texto, o que em certos casos prejudica bastante a visualização. Para isto deve-se explicitar corretamente no texto qual a distribuição tempo-frequência que está sendo apresentada.

Verifica-se na Figura II-7 que a STFT captou perfeitamente a presença do sinal impacto mas o sinal harmônico ficou quase imperceptível. Aumentando-se a duração da janela para 0.16s (16%), espera-se que o sinal harmônico passe a aparecer na distribuição. O resultado obtido é apresentado na Figura II-8.

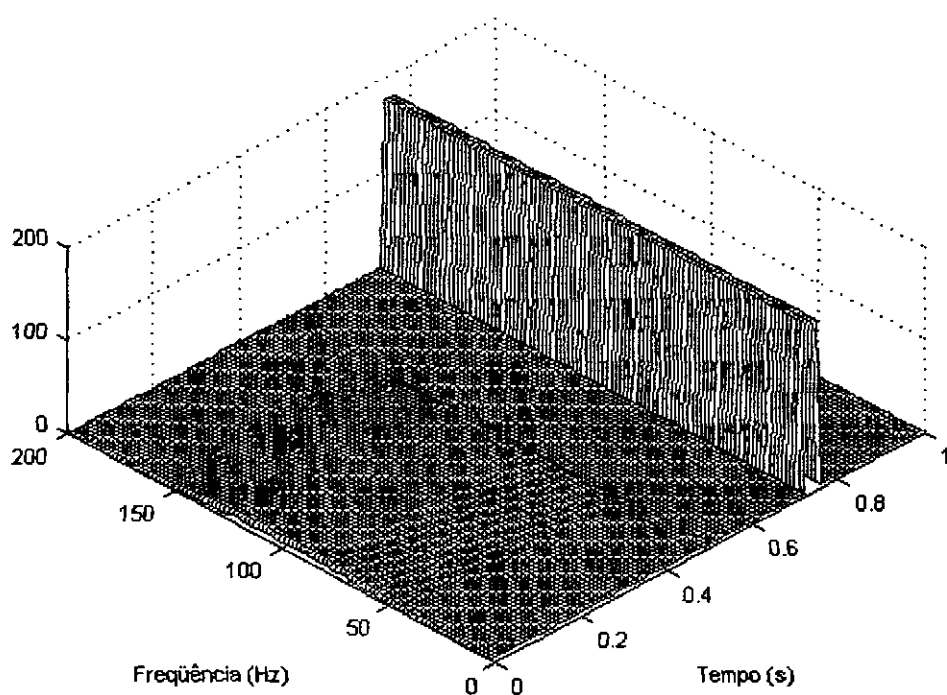


Figura II-7 Espectrograma com janela curta ($T = 0,01s \equiv 1\%$)

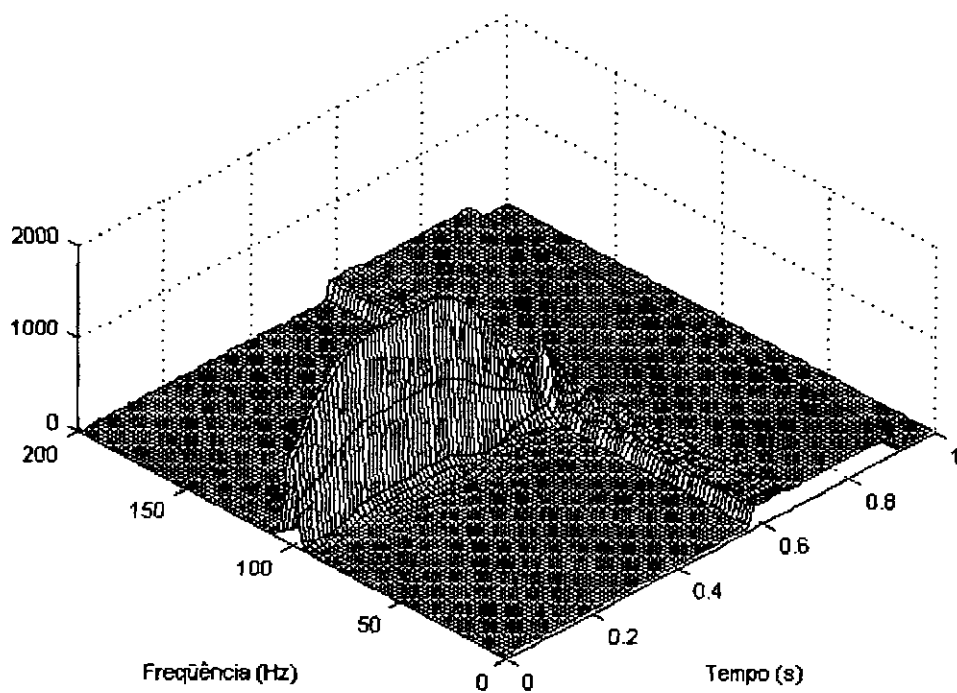


Figura II-8 Espectrograma com janela larga ($T = 0,16s \equiv 16\%$)

Como pode-se observar na Figura II-8 o aumento da janela permitiu que o sinal harmônico aparecesse na distribuição, mas às custas de um grande espalhamento do sinal de impacto. Este é o grande paradigma da STFT. Se a janela usada tem duração grande, perde-se resolução no tempo e ganha-se resolução em frequência. Por outro lado, se a janela é curta, perde-se em frequência e ganha-se no tempo. A regra então é: quanto mais curta a janela, mais perto do domínio no tempo; quanto mais larga, mais perto do domínio da frequência. O ideal então é tentar-se buscar para cada tipo de sinal um meio-termo, de maneira a melhor representar o sinal estudado. Voltando ao exemplo e utilizando agora uma janela de 0,04 s (4%) obtém-se uma melhor representação tanto do sinal harmônico quanto do impacto, conforme pode ser visto na Figura II-9.

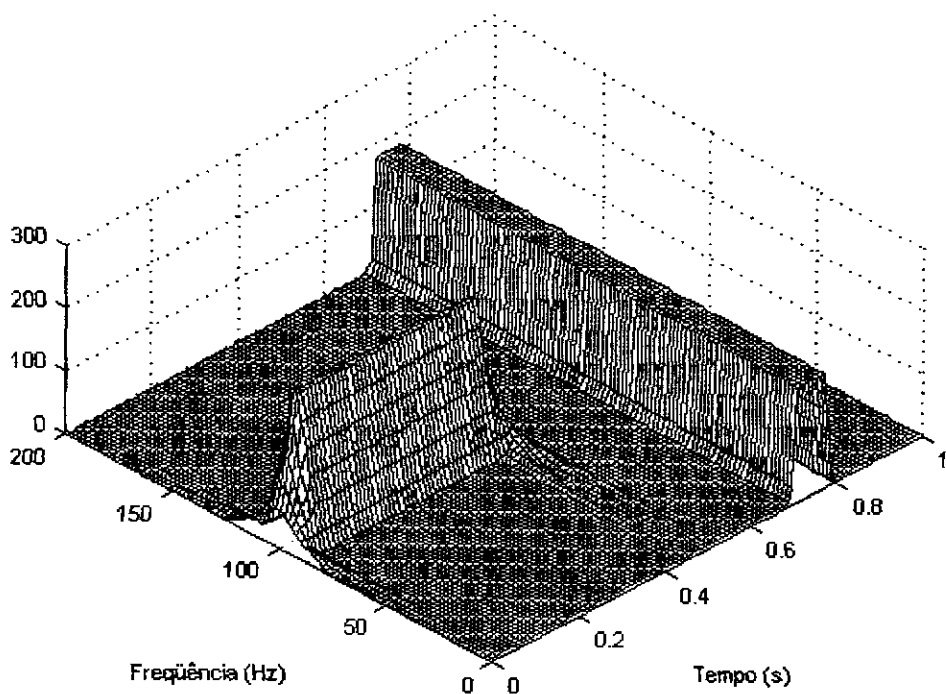


Figura II-9 Espectrograma c/ janela média ($T = 0,04s \equiv 4\%$)

Este exemplo será novamente utilizado posteriormente quando forem apresentados outros tipos de distribuição tempo-frequência.

A grande desvantagem da janela retangular, seu largo espectro, pode ser minorada utilizando-se uma janela mais suave, como a função gaussiana normalizada

$$h(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha t^2}{2}} \quad (\text{II-50})$$

pois ela é a que possui a melhor localização no plano tempo-frequência de acordo com o princípio da indeterminação. Podem ser usados outros tipos de janela como, por exemplo:

Bartlett (triangular),

$$h(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & \text{se } 0 \leq t \leq T/2 \\ 2 - \frac{2t}{T}, & \text{se } T/2 \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{II-51})$$

Hanning,

$$h(t) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{II-52})$$

Hamming,

$$h(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{II-53})$$

Blackman,

$$h(t) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right), & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{II-54})$$

A escolha da janela a ser utilizada é análoga à mesma escolha que deve ser feita ao se projetar um filtro FIR (*Finite Impulse Response*), o que pode ser visto em OPPENHEIM, SCHAFER (1989), seção 7-4. Contudo costuma-se utilizar a janela gaussiana normalizada pois é a que possui melhor localização em ambos os domínios simultaneamente - tempo e frequência -, de acordo com o princípio da indeterminação. A partir dela poderemos tirar conclusões que servirão para qualquer janela que se

escolha.

A duração e a largura de banda da janela gaussiana são

$$T_h^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_m)^2 |h(t)|^2 dt = (t^2)_m - t_m^2 = \frac{1}{2\alpha} \quad (\text{II-55})$$

$$B_h^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_m)^2 |H(\omega)|^2 d\omega = (\omega^2)_m - \omega_m^2 = \frac{\alpha}{2} \quad (\text{II-56})$$

Veja que esta janela alcança o valor mínimo previsto pelo princípio da indeterminação pois

$$T_h^2 B_h^2 = \frac{1}{2\alpha} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \quad (\text{II-57})$$

Já que pela equação (II-47) a precisão do espectrograma é a “soma” da precisão do sinal com a precisão da janela, conclui-se que a janela gaussiana é a que minimizará o princípio da indeterminação, provendo assim a melhor visualização tempo-freqüência.

II.4.4 A transformada de Wigner-Ville

Na procura por um “espectro instantâneo”, VILLE (1946, 1948) queria visualizar a energia de um sinal $f(t)$ no plano tempo-freqüência e obter uma densidade de energia que satisfizesse as condições marginais. Baseado nas conclusões de WIGNER (1932), conseguiu ver a analogia existente entre mecânica quântica e processamento de sinais, de forma que redefiniu a distribuição de Wigner (WD) para o domínio tempo-freqüência como

$$WD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) f\left(t - \frac{1}{2}\tau\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II-58})$$

O entendimento do significado da distribuição de Wigner-Ville poderá ser ilustrada com um exemplo. Observa-se que o sinal $f(t) = e^{i\theta(t)}$ é um tipo de harmônico com amplitude constante tendo como argumento uma função genérica $\theta(t)$, onde a forma complexa foi utilizada para facilitar os cálculos. A distribuição de Wigner-Ville para esta função é, de acordo com a equação (II-58),

$$WD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\theta(t+\frac{\tau}{2}) - \theta(t-\frac{\tau}{2})]} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II-59})$$

O termo da primeira exponencial pode ser reescrito da forma

$$\theta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \tau \hat{\phi}(t, \tau). \quad (\text{II-60})$$

onde

$$\hat{\phi}(t, \tau) = \frac{\theta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \theta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} \quad (\text{II-61})$$

Esta função $\hat{\phi}(t, \tau)$ claramente representa uma estimativa da frequência instantânea $\phi(t)$ - vide apêndice A - no tempo t , usando-se um intervalo τ . Este estimador $\hat{\phi}(t, \tau)$ é portanto uma diferença finita central simples centralizada no instante t .

Substituindo a equação (II-59) em (II-60) tem-se

$$WD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\phi}(t, \tau)\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II-62})$$

Portanto a distribuição de Wigner pode ser interpretada como a transformada de Fourier de um estimador da frequência instantânea. Para o caso particular onde $\theta(t) = \Omega t$, sendo Ω uma constante dada em rad/s, tem-se que

$$\hat{\phi}(t, \tau) = \phi(t) \quad (\text{II-63})$$

pois

$$\hat{\phi}(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \left[\Omega \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \Omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] = \Omega. \quad (\text{II-64})$$

A distribuição, neste caso, será então

$$WD_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\phi(t)\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \Omega)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \Omega) \quad (\text{II-65})$$

ou seja, uma linha de funções delta ao longo da frequência instantânea do sinal. Apesar de este resultado só se aplicar a este caso em particular, felizmente a transformação

tende sempre a concentrar bastante energia em torno das frequências instantâneas para uma grande variedade de sinais. Entretanto aparecerão interferências indesejáveis que, em certos casos, poderão até deixar a distribuição ilegível.

As principais propriedades da distribuição de Wigner-Ville são relacionadas a seguir. As provas destas propriedades podem ser encontradas em COHEN (1995), capítulo 8.

A propriedade de conservação da energia é respeitada pela distribuição de Wigner-Ville,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} WD_f(t, \omega) d\omega dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{II-66})$$

Além disso as condições marginais (II-29) e (II-30) também são satisfeitas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} WD_f(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad (\text{II-67})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} WD_f(t, \omega) dt = |F(\omega)|^2. \quad (\text{II-68})$$

A relação mostrada a seguir é chamada de fórmula de MOYAL (1949) e possui aplicação principalmente teórica, apesar de já ter sido utilizada em problemas reais por FLANDRIN (1988).

$$2\pi \iint WD_f(t, \omega) WD_g(t, \omega) dt d\omega = \left| \int f(t) g^*(t) dt \right|^2 \quad (\text{II-69})$$

Esta relação é a generalização da equação (II-66) e relaciona-se intimamente com a identidade de Parseval generalizada,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt \quad (\text{II-70})$$

Uma propriedade importante da distribuição de Wigner-Ville é que o sinal pode ser reconstruído a partir dela, a menos de uma constante, por

$$f(t) = k \int_{-\infty}^{+\infty} WD_f(t/2, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{II-71})$$

Propriedades adicionais da distribuição de Wigner-Ville são mostradas na Tabela II-1.

Tabela II-1 Propriedades adicionais da distribuição de Wigner-Ville

Função	Transformada de Wigner
$f(t)$	Sempre real
$f(-t)$	$WD_f(-t,-\omega)$
$\lambda f(t)$	$ \lambda ^2 WD_f(t,\omega)$
$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$WD_f(t,\omega-\omega_0)$
$f(t-t_0)$	$WD_f(t-t_0,\omega)$
$\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$	$WD_f\left(\frac{t}{a},a\omega\right)$
$F(\omega)$	$2\pi WD_f(\omega,-t)$

A grande deficiência da distribuição de Wigner-Ville é a ocorrência de termos cruzados, também chamados de interferência. Para exemplificar graficamente o que são os termos cruzados na transformada de Wigner-Ville, usou-se dois sinais, obtidos através do produto de um harmônico por uma janela gaussiana. Os sinais assim obtidos são mostrados na Figura II-10.

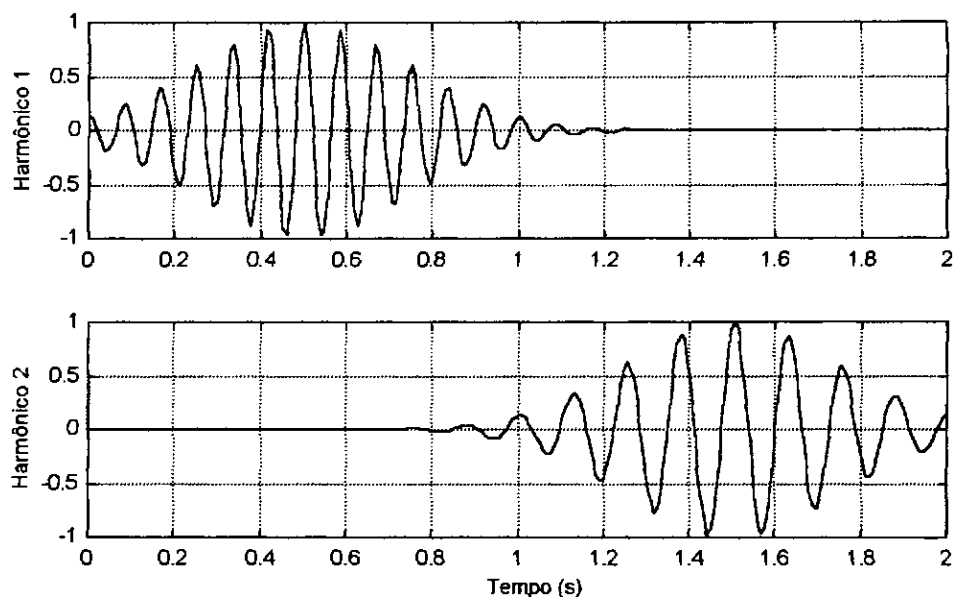


Figura II-10 Harmônicos usados para demonstrar os termos cruzados na distribuição de Wigner-Ville

O primeiro sinal está centrado no instante 0,5s e seu harmônico tem frequência 12Hz. O segundo sinal está centrado em 1,5s e seu harmônico tem frequência 8Hz..

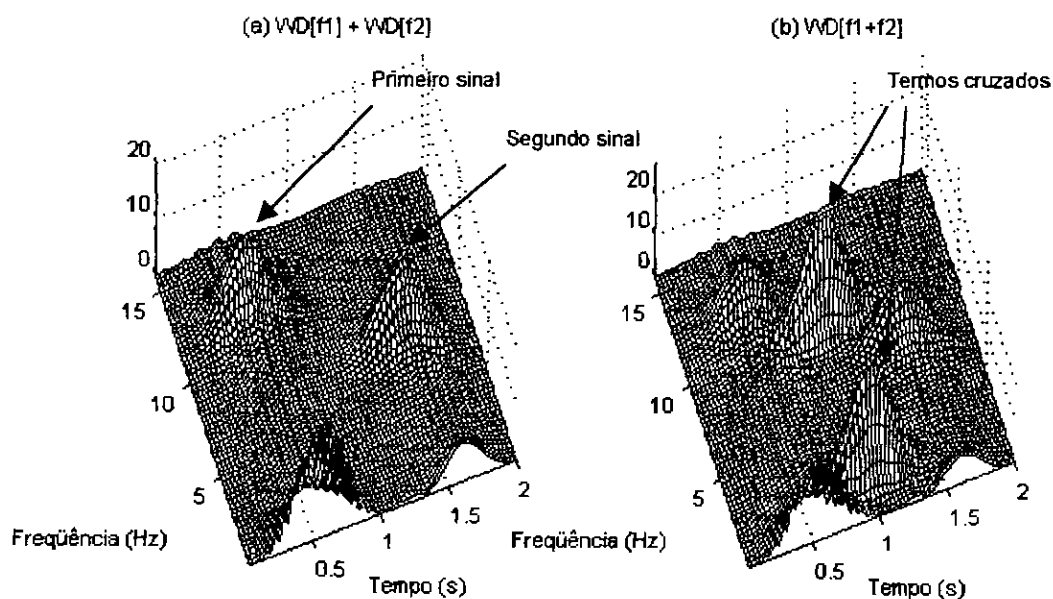


Figura II-11 Distribuições de Wigner-Ville calculadas (a) separadamente para cada sinal e somadas e (b) para os dois sinais somados no tempo.

Na primeira etapa obtiveram-se as transformadas de cada sinal separadamente, sendo os resultados obtidos então somados. Numa segunda etapa somaram-se os dois sinais no tempo e a partir deste novo sinal foi calculada a transformada de Wigner-Ville. As duas

transformadas obtidas desta forma são mostradas na Figura II-11.

Como esperado aparecem na Figura II-11a duas elevações separadas correspondentes aos dois sinais analisados. Próximo ao eixo do tempo aparecem elevações que também podem ser consideradas como interferência, sendo no entanto de mais difícil compreensão pois devem-se à interferência entre a parte positiva do espectro do sinal com sua parte negativa (simétrica).

Os termos cruzados são os dois picos adicionais indicados na Figura II-11b. A localização dos picos de interferência será sempre dada pelas coordenadas

$$\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \text{ e } \left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \quad (\text{II-72})$$

Neste exemplo da Figura II-11, as coordenadas serão

$$\left(\frac{0.5 + 1.5}{2}, \frac{12 + 8}{2} \right) = (1.0s, 10Hz) \text{ (localização do primeiro pico de interferência)}$$

$$\left(\frac{0.5 + 1.5}{2}, \frac{12 - 8}{2} \right) = (1.0s, 2Hz) \text{ (localização do segundo pico de interferência)}$$

Os termos cruzados que aparecem na Figura II-11b podem ser previstos analiticamente tomando-se a transformada do sinal total

$$\begin{aligned} WD[f_1(t) + f_2(t)](t, \omega) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + f_2\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right] \left[f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + f_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= WD_1(t, \omega) + WD_2(t, \omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= WD_1(t, \omega) + WD_2(t, \omega) + WD_{12}(t, \omega) + WD_{21}(t, \omega) \end{aligned} \quad (\text{II-73})$$

Vê-se que na transformada do sinal total aparecem os termos cruzados WD_{12} e WD_{21} responsáveis pela interferência indesejada. Estes termos não tendem a zero quando

separam-se mais os harmônicos no tempo ou em frequência. O pior ainda é que estes termos cruzados gerarão valores negativos para a distribuição, o que é uma incorreção física desde que a transformada de Wigner-Ville pretende fornecer uma distribuição de energia.

A versão discreta da distribuição de Wigner-Ville (assim como todas as da classe geral apresentadas na próxima seção) apresenta aliasing se o sinal contiver frequências superiores a um quarto da frequência de digitalização, ou metade da taxa de Nyquist. Isto se deve ao termo $t \pm \tau/2$ que, discretizado da forma $\tau = m\Delta t$ e $t = n\Delta t$, permitirá que m assumia apenas valores pares pois deve-se garantir que $f(t \pm \tau/2) = f[n \pm m/2]$. Desta forma apenas metade da informação estará sendo efetivamente utilizada para calcular a distribuição.

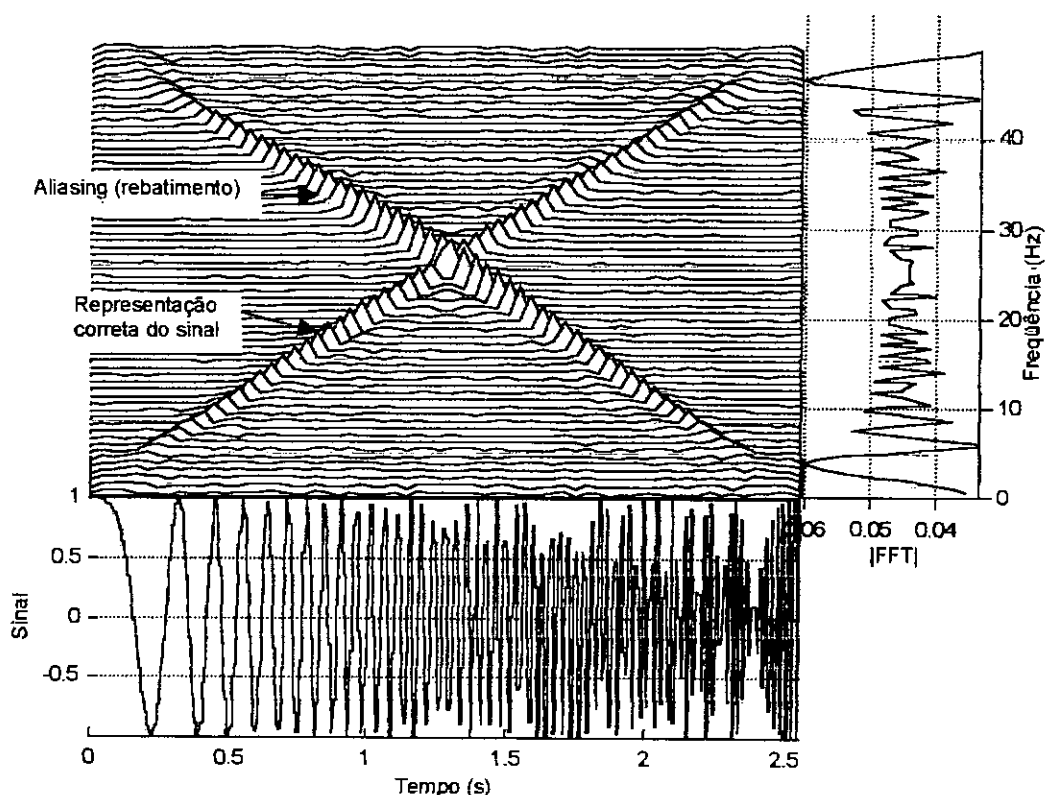


Figura II-12 Aliasing na distribuição de Wigner-Ville

O sinal mostrado na Figura II-12 é um chirp linear que possui frequência instantânea zero em $t=0s$ e frequência 50Hz em $t=2.56s$, instante final do sinal. A frequência de digitalização é de 100Hz e, portanto, a taxa de Nyquist não é violada. Apresenta-se

também no mesmo gráfico o módulo da FFT e a distribuição de Wigner-Ville. Esta forma de apresentação conjunta dos três gráficos (sinal no tempo, módulo do espectro e distribuição tempo-freqüência) facilita bastante a visualização e será bastante empregada neste trabalho deste ponto em diante. Pode-se observar na Figura II-12 que existe um rebatimento da onda no sentido das freqüências, caracterizando completamente a existência de aliasing. Conclui-se que a distribuição de Wigner-Ville deverá ser calculada a partir de sinais para os quais o espectro é nulo para freqüências maiores que um quarto da taxa de digitalização.

II.4.5 Generalização - a técnica do núcleo

COHEN (1966) percebeu que todas as distribuições tempo-freqüência podem ser generalizadas de forma a pertencerem a uma única família, chamada por homenagem ao seu criador de *família de Cohen*. Também é comumente conhecida como *Generalized Time-Frequency Distribution* (GTFD). A generalização proposta por Cohen afirma que *qualquer* distribuição tempo-freqüência $C_f(t, \omega)$ pode ser escrita como a transformada de Fourier[†] de um tipo de função de autocorrelação $R_f(t, \tau)$ da função $f(t)$,

$$C_f(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II-74})$$

onde

$$R_f(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u + \frac{1}{2}\tau\right) f^*\left(u - \frac{1}{2}\tau\right) \cdot \Phi(t - u, \tau) du \quad (\text{II-75})$$

A função $\Phi(t, \tau)$ é a janela utilizada, sendo a transformada de Fourier[†] da função $\phi(\theta, \tau)$, denominada *núcleo da distribuição*, que tem importância fundamental para se definir as propriedades da distribuição. Portanto,

$$\Phi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t} d\theta \quad (\text{II-76})$$

[†] A menos de uma constante de proporcionalidade.

A Tabela II-2 apresenta uma relação de alguns núcleos e os respectivos trabalhos de onde se originaram.

Tabela II-2 Exemplos de núcleos de distribuições conhecidas

Distribuição	Núcleo: $\phi(\theta, \tau)$
WIGNER (1932)	1
MARGENOU-HILL (1961)	$\cos\left(\frac{1}{2}\theta\tau\right)$
RIHACZEK (1968)	$e^{i\frac{\theta\tau}{2}}$
COHEN (1966)	$\frac{\text{sen}\frac{1}{2}\theta\tau}{\frac{1}{2}\theta\tau}$
PAGE (1952)	$e^{i\theta \tau }$
CHOI-WILLIAMS (1989)	$e^{-\frac{(\theta\tau)^2}{2}}$
Espectrograma [†]	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h^*\left(u-\frac{1}{2}\tau\right)h\left(u+\frac{1}{2}\tau\right)e^{-i\theta u}du$
ZHAO-ATLAS-MARKS (1990)	$g(\tau) \tau \frac{\text{sena}\theta\tau}{\alpha\theta\tau}$

Existem quatro razões muito fortes para representar uma distribuição tempo-frequência através de seu respectivo núcleo (ou, equivalentemente, de sua janela), as quais são listadas a seguir:

- I. Se existe uma propriedade especial que se deseja que a distribuição atenda, quase sempre será possível exigí-la diretamente de seu núcleo. E via de regra a equação é

mais simples.

2. Dada uma distribuição, todas as suas propriedades podem ser avaliadas por simples inspeção de seu núcleo.
3. Dado um núcleo, a distribuição é fácil de ser calculada.
4. Pode-se criar uma rotina computacional genérica para o cálculo das distribuições, implementado-se um ou outro núcleo com poucas alterações no código.

A seguir serão listadas as possíveis restrições a serem aplicadas ao núcleo com as respectivas propriedades que resultam na distribuição. Deve-se ter em mente que uma distribuição nunca poderá atender a todas as propriedades listadas pois algumas são incompatíveis entre si.

1) Preservação da energia

Para que seja preservada a energia do sinal, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_f(t, \omega) d\omega dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{II-77})$$

é suficiente exigir-se que o núcleo atenda a condição

$$\phi(0,0) = 1 \quad (\text{II-78})$$

ou, integrando-se (II-76) com respeito a t e então exigindo-se (II-78),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,0) dt = 1 \quad (\text{II-79})$$

2) Satisfação da condição marginal de tempo

Para que a condição marginal no tempo (II-29)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_f(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad (\text{II-80})$$

[†] $h(t)$ é a gaussiana normalizada.

seja atendida é suficiente que

$$\phi(\theta, 0) = 1 \quad (\text{II-81})$$

ou, substituindo (II-81) em (II-76),

$$\Phi(t, 0) = \delta(t) \quad (\text{II-82})$$

3) Satisfação da condição marginal de frequência

Da mesma forma, para que a condição marginal em frequência (II-30)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_f(t, \omega) dt = |F(\omega)|^2 \quad (\text{II-83})$$

seja atendida é suficiente que

$$\phi(0, \tau) = 1, \quad \forall \tau \in \mathfrak{R}. \quad (\text{II-84})$$

ou, integrando-se (II-76) com respeito a t e então exigindo-se (II-84),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, \tau) dt = 1, \quad \forall \tau \in \mathfrak{R} \quad (\text{II-85})$$

4) Distribuição real

Para que a distribuição seja real, isto é, $C_f(t, \omega) \in \mathfrak{R}$, é suficiente exigir-se do núcleo que

$$\phi(\theta, \tau) = \phi^*(-\theta, -\tau). \quad (\text{II-86})$$

ou, substituindo cada lado de (II-86) em (II-76) separadamente e depois igualando,

$$\Phi(t, \tau) = \Phi^*(t, -\tau) \quad (\text{II-87})$$

5) Invariância ao translado no tempo e em frequência

Apesar de ter sido adotado como premissa que o núcleo é função somente de θ e τ , conforme mostrado na Tabela II-2, não há motivo para que o núcleo não possa ser função também do tempo e da frequência. Efetivamente existem casos onde $\phi = \phi(t, \omega, \theta, \tau)$. Se for garantido que o núcleo não é função do tempo ou frequência,

$\phi = \phi(\theta, \tau)$ apenas, a distribuição será invariante a um translado no tempo ou em frequência.

Para exemplificar o que foi dito, seja uma função qualquer $f(t)$ da qual se fez um translado no tempo e em frequência para obter uma nova função $f_s(t)$ “transladada” (*shifted*)

$$f_s(t) = e^{i\omega_0 t} f(t - t_0) \quad (\text{II-88})$$

Se o núcleo é independente do tempo ou da frequência, $\phi = \phi(\theta, \tau)$ apenas, como é geralmente o caso, então

$$C_{f_s}(t, \omega) = C_f(t - t_0, \omega - \omega_0) \quad (\text{II-89})$$

Esta propriedade também pode ser tomada por partes. Se o núcleo é independente do tempo e dependente da frequência a distribuição será invariante a um translado no tempo mas não em frequência e vice-versa.

6) Invariância ao escalamento

Se o núcleo for independente do tempo e puder-se escrever para este núcleo uma nova função ϕ_2 tal que

$$\phi_2(\theta\tau) = \phi(\theta, \tau) \quad (\text{II-90})$$

então a distribuição será invariante ao escalamento. Por escalamento entenda-se modificar o sinal original $f(t)$ de forma que

$$f_e(t) = \sqrt{a} f(at) \quad (\text{II-91})$$

é uma versão “escalada” da original. Portanto a distribuição cujo núcleo obedece a (II-90) terá a seguinte propriedade

$$C_{f_e}(t, \omega) = C_f(at, \omega/a) \quad (\text{II-92})$$

Esta invariância não ocorre com a transformada de Fourier, pois

$$F_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} F(\omega) \quad (\text{II-93})$$

7) Termos cruzados

Foi visto anteriormente que a distribuição de Wigner possui uma grande tendência a apresentar termos cruzados, também chamados de interferência. Esta não é uma propriedade somente da transformada de Wigner. *Todas* as distribuições tempo-frequência, algumas mais, outras menos, apresentam esta característica por serem *bilineares*, termo cunhado pelo próprio Wigner para indicar que o sinal aparece duas vezes na expressão da distribuição.

Suponha-se que o sinal seja composto por dois harmônicos de frequências ω_1 e ω_2 , tal que

$$f(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} \quad (\text{II-94})$$

Substituindo diretamente nas equações (II-74) e (II-75), prova-se que os termos cruzados serão proporcionais a

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega_1 - \omega_2, \tau) e^{-i\left[\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right]\tau} d\tau \quad (\text{II-95})$$

Sendo $K(\omega)$ uma transformada de Fourier com respeito a τ , é necessário que o núcleo $\phi(\theta, \tau)$ seja uma função altamente concentrada em relação a τ para que sua transformada de Fourier seja relativamente dispersa.

Fazendo

$$f(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) \quad (\text{II-96})$$

e seguindo o mesmo procedimento prova-se que o núcleo também deve ser altamente concentrado em relação a θ . Condensando estes resultados, para que a interferência seja reduzida deveremos requerer do núcleo que

$$\phi(\theta, \tau) \ll 1 \text{ para } |\theta\tau| \gg 0 \quad (\text{II-97})$$

A distribuição de Wigner possui núcleo constante, $\phi(\theta, \tau) = 1$, e por isso é tão sensível à interferência. Esta é a idéia principal das técnicas anti-interferência sugeridas por uma série de autores, tais como CHOI, WILLIAMS, 1989, ZHAO, ATLAS, MARKS, 1990,

8) Aliasing

O mesmo que foi dito para a transformada de Wigner se aplica a toda família de Cohen com respeito ao aliasing. Toda distribuição tempo-frequência, ao ser discretizada *da forma padrão*, estará sujeita a aliasing se existirem no sinal frequências maiores que um quarto da frequência de digitalização. Entenda-se pelo grifo que o problema do aliasing está relacionado com a forma inicialmente escolhida por muitos autores (forma padrão) para discretizar a expressão da classe geral. Esta discretização torna imediatamente inutilizável metade dos pontos do sinal durante o cálculo.

Uma forma não tão elegante mas que erradica completamente o aliasing da distribuição foi desenvolvida por JEONG e WILLIAMS (1991), que denominaram a técnica por *Aliasing - Free Generalized Discrete Time Frequency Distribution* (AF-GDTFD). No mesmo trabalho que definem a AF-GDTFD os autores sugerem um núcleo baseado numa janela Hamming que provou ser realmente eficiente. No entanto é preciso diferenciar a técnica anti-aliasing sugerida pelos autores da distribuição baseada na janela Hamming. Por isso se denominará esta distribuição particular, baseada na janela Hamming, agora por diante de *alias-free*, como simples referência ao trabalho que a originou.

Apresenta-se na Figura II-13 a distribuição alias-free calculada para o sinal do exemplo dado na página 25, quando se fala no espectrograma.

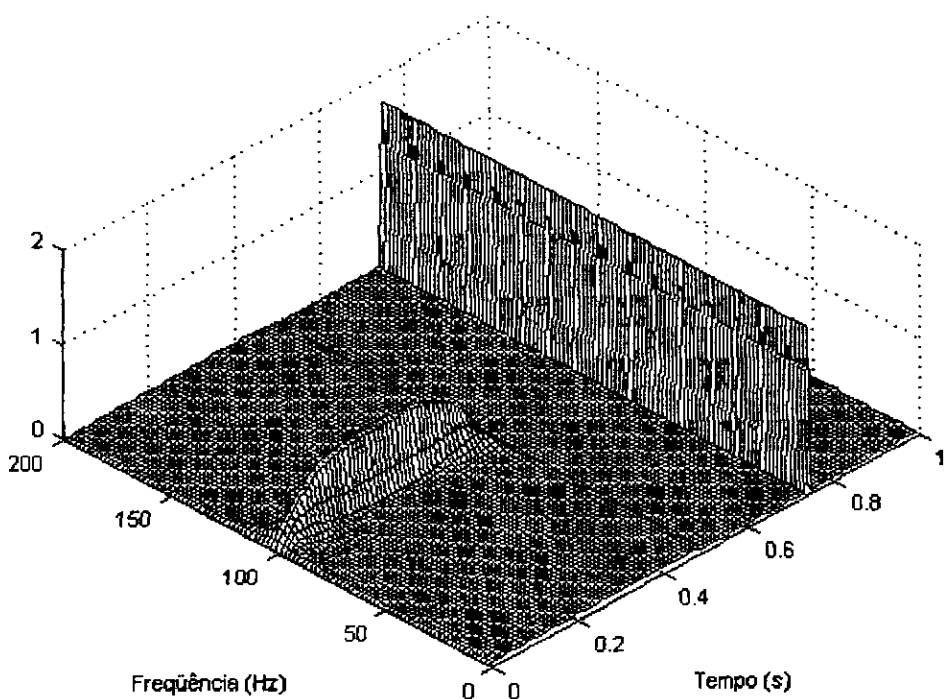


Figura II-13 Distribuição alias-free de Jeong e Williams

Vê-se na figura Figura II-13 que a distribuição alias-free tem excelente comportamento em comparação com o espectrograma - vide Figura II-9. Além de boa resolução no tempo e em frequência, erradicação completa do problema de aliasing, possui baixa sensibilidade à interferência, principal problema da distribuição de Wigner-Ville. Logicamente o limite do princípio da indeterminação também se aplica a esta distribuição, mas ela está bem mais próxima do mínimo que a maioria das distribuições.

Como curiosidade vê-se também linhas paralelas ao impacto localizadas no início e no final do sinal harmônico. Isto não é interferência. Como o sinal harmônico foi gerado a partir de uma função matemática, termina abruptamente, sem amortecimento, e a distribuição entende esta descontinuidade final (e inicial) do sinal harmônico como um tipo de impacto, não consistindo, portanto, de interferência.

A distribuição alias-free será discutida com detalhes no capítulo III quando será apresentada sua implementação computacional.

II.4.6 Relacionamento entre distribuições tempo-frequência

Pode ser mostrado (COHEN, 1966, 1976) que qualquer distribuição pode ser obtida por uma convolução do espectrograma com uma determinada função. Este fato é útil porque o espectrograma é simplesmente uma seqüência de cortes do sinal e FFTs, coisa que os analisadores mais baratos são perfeitamente capazes de realizar. Portanto, uma pequena modificação no hardware destes analisadores ou nos algoritmos dos sistemas de processamento de sinais pode fazê-los capazes de calcular qualquer distribuição tempo-frequência que se queira. Uma implementação desta idéia foi realizada por CUNNINGHAM e WILLIAMS (1996). Acredita-se que será apenas uma questão de tempo para que analisadores tempo-frequência baseados nesta técnica estejam disponíveis no mercado.

Mais do que isso, Cohen prova que qualquer distribuição pode ser obtida por uma convolução de qualquer outra distribuição com uma função específica. Sejam $C_1(t, \omega)$ e $C_2(t, \omega)$ duas distribuições calculadas *a partir do mesmo sinal*. A equação que expressa o relacionamento entre ambas é

$$C_2(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12}(t' - t, \omega' - \omega) C_1(t', \omega') d\omega' dt' \quad (\text{II-98})$$

onde $g_{12}(t, \omega)$ é função apenas do núcleo das duas distribuições,

$$g_{12}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi_1(\theta, \tau)}{\phi_2(\theta, \tau)} e^{i(\theta t + \omega \tau)} d\theta d\tau \quad (\text{II-99})$$

II.5 O sinal no domínio tempo-escala

Técnicas tempo-escala têm sido geralmente confundidas com wavelets. Isto se deve ao fato de que dentre as técnicas tempo-escala as wavelets são as mais conhecidas e utilizadas pela esmagadora maioria dos pesquisadores. O conceito de análise tempo-escala, recentemente reformulado por COHEN (1996), engloba todas as técnicas relacionadas à aplicação de um determinado operador-escala. A wavelet pode ser considerada como uma destas técnicas pois utiliza um escalamento como pedra fundamental de sua teoria.

O termo *wavelet* ou *ondelette* foi idealizado há cerca de quatorze anos por pesquisadores franceses, incluindo MORLET (1982, 1983) e GROSSMAN (1984). A existência de funções tipo wavelets é conhecida desde o início do século e se originaram de trabalhos em *subband coding* em engenharia, estados coerentes e teoria de renormalização de grupo em física e do estudo de operadores de Calderon-Zygmund em matemática. Entretanto foi só recentemente que estes conceitos foram unificados em uma teoria geral das wavelets, fato conseguido por pesquisadores como STROMBERG (1982), MEYER (1985), MALLAT (1986), BATTLE (1987), DAUBECHIES (1988) e LEMARIÉ (1988). Desde então, o crescimento das pesquisas sobre wavelets em matemática foi explosivo, com numerosos autores contribuindo significativamente.

Uma excelente visão geral da teoria das wavelets é encontrada em WILLIAMS e AMARATUNGA (1993). Teoricamente bem aprofundado, e por isso mesmo um tanto hermético, é o trabalho de CHUI (1992). Uma leve aplicação experimental em vigas é vista em INOUE, KISHIMOTO e SHIBUIA (1996). Aplicações à geofísica podem ser vistas em FOUFOULA-GEORGIOU e KUMAR (1994). MEYER (1993) é bem eclético; traz um histórico detalhado das wavelets, aplicações à cibernética, estudo de galáxias distantes, turbulência, fractais e processamento de imagens. DONOHO (1993) traz uma enérgica afirmação da superioridade das wavelets como técnica de eliminação de ruído. Um importante desdobramento da teoria das wavelets, que no entanto não será abordado nesta tese, é a teoria das wavelet-packets que pode ser encontrada em WICKERHAUSER (1991).

Desde já o leitor deve-se manter atento ao tipo de aplicação a que se destinam as wavelets. Alguns trabalhos, como por exemplo em INOUE, KISHIMOTO e SHIBUIA (1996), insistem em utilizar as wavelets como geradoras de distribuições tempo-frequência. Embora seja perfeitamente possível, este tipo de aplicação utiliza somente a análise wavelet do tipo contínua, que tem muito pouco a oferecer em termos de propriedades úteis. Será visto mais adiante que as boas qualidades das wavelets somente surgem quando se utiliza a análise do tipo discreta, que não gera distribuições tempo-frequência.

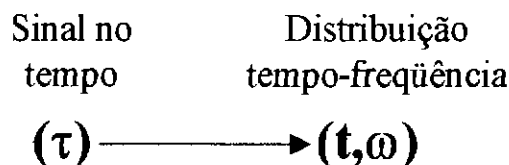
A análise discreta, a despeito de seu potencial, e talvez por seu grau de complexidade, tem sido ainda pouco explorada em casos práticos, limitando-se ao círculo acadêmico. Infelizmente também não foram encontradas boas aplicações em engenharia civil para a análise wavelet discreta durante a elaboração desta tese, conforme a expectativa inicial, mas o autor acredita que a despeito deste aparente fracasso o obstáculo inicial do completo desconhecimento da teoria foi ultrapassado. Se ainda não se conhece uma ótima aplicação, pelo menos já se sabe onde as wavelets não devem ser aplicadas.

Portanto pode-se utilizar wavelets para produzir distribuições tempo-frequência mas é utilizar mal uma ferramenta que tem outro tipo de aplicação. A despeito de suas fracas propriedades, deve-se explorar bem a análise tipo contínua pois ela é o ponto de partida essencial à compreensão da teoria das wavelets.

II.5.1 Transição tempo-frequência para tempo-escala

A análise wavelet tipo contínua possui uma forte relação com as técnicas tempo-frequência, especialmente com o espectrograma. Esta proximidade será explorada em forma de analogia para que o conceito de escala seja apresentado.

O cálculo das distribuições tempo-frequência envolve a transformação do sinal no tempo para o domínio tempo-frequência. Dado que o tempo se repete nos dois domínios, é necessário indicá-lo usando notações distintas. Serão utilizadas portanto as letras τ e t para indicar o tempo nos dois diferentes domínios, de forma que a transformação fica representada por



Foi mostrado no item II.4.3 que a forma geral do espectrograma é

$$SP(t, \omega) = |F_t(\omega)|^2 \quad (\text{II-100})$$

onde $F_t(\omega)$ é dado pela equação

$$F_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II-101})$$

Pode-se interpretar a integral da equação (II-101) se for observado que a função $h(\tau - t)$ tem a propriedade de extrair da função $f(\tau)$ somente um trecho do sinal centrado no instante t para análise. Desta forma a transformada $F_t(\omega)$ fornecerá um indicativo da composição em freqüência do sinal em torno do instante t . É usual no jargão técnico denominar esta propriedade de *localização*. Desta forma diz-se que a função $h(\tau)$ tem a propriedade de localizar (no tempo) a função analisada $f(\tau)$. A função $h(\tau)$ usualmente é a gaussiana normalizada $h(\tau) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha\tau^2/2}$, podendo no entanto ser qualquer função tal que

$$h(\tau) \approx 0 \text{ para } |\tau| \gg 0. \quad (\text{II-102})$$

A propriedade de localização em freqüência é fornecida pelo harmônico $e^{-i\omega\tau}$, já que os sinais harmônicos são a base da transformada de Fourier.

Estas duas propriedades, localização no tempo e em freqüência, podem ser concentradas em uma única função $\psi_{\omega,t}(\tau)$, que será chamada por enquanto de *função de análise*

$$\psi_{\omega,t}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h(\tau - t) e^{-i\omega\tau} \quad (\text{II-103})$$

de tal forma que a equação (II-101) fica reescrita como

$$F_t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_{\omega,t}(\tau) d\tau \quad (\text{II-104})$$

No gráfico apresentado na Figura II-16 será mostrada a forma da função de análise $\psi_{\omega,t}(\tau)$ para uma determinada janela $h(\tau)$, mantendo-se $t = 0$ e variando-se a frequência de localização ω . A função-janela $h(\tau)$ é representada pela linha tracejada. A parte real da função de análise $\psi_{\omega,t}(\tau)$ é representada pela linha contínua; a parte imaginária, pela linha pontilhada.

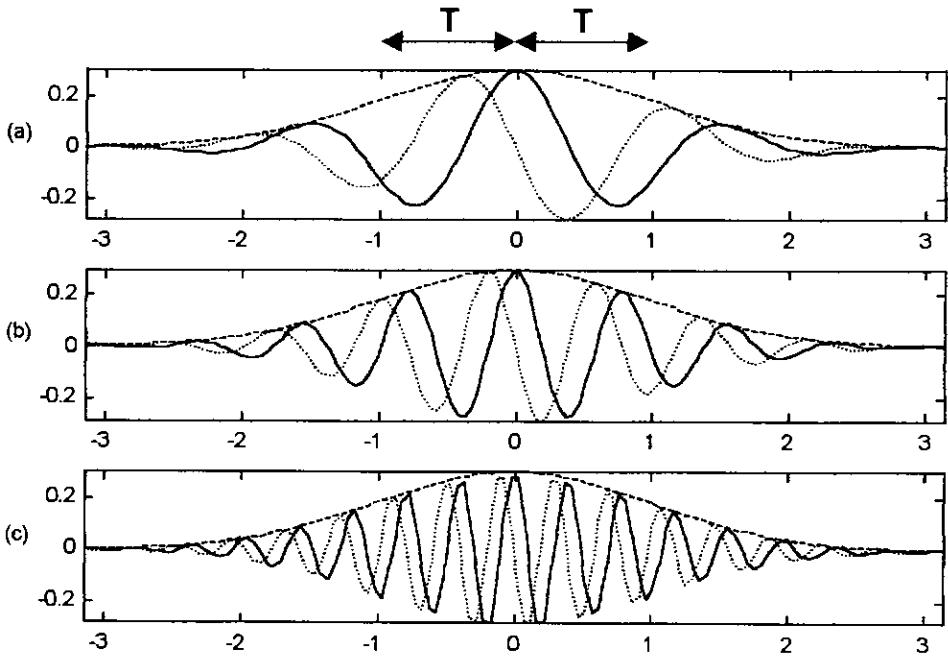


Figura II-16 Funções de análise para o espectrograma, $T=1$.

(a) $\omega=4$; (b) $\omega=8$; (c) $\omega=16$.

Nota-se na Figura II-16 que a duração T da janela é a mesma para qualquer frequência pois a função $h(\tau)$ é independente da frequência de análise ω . Por um simples algebrismo prova-se que a largura de banda B da função $\psi_{\omega,t}(\tau)$ também é independente da frequência de análise ω . Desta forma, *para o expectrograma*, T e B serão os mesmos, constantes, sejam quais forem os valores de t e ω .

O domínio efetivo de uma função de análise $\psi_{\omega,t}(\tau)$ qualquer pode ser representado da forma mostrada na Figura II-17, onde T é a duração e B a largura de banda da função de

análise. Nesta figura as abcissas representam o tempo e as ordenadas, frequências. O plano formado pelos dois eixos é denominado plano tempo-frequência.

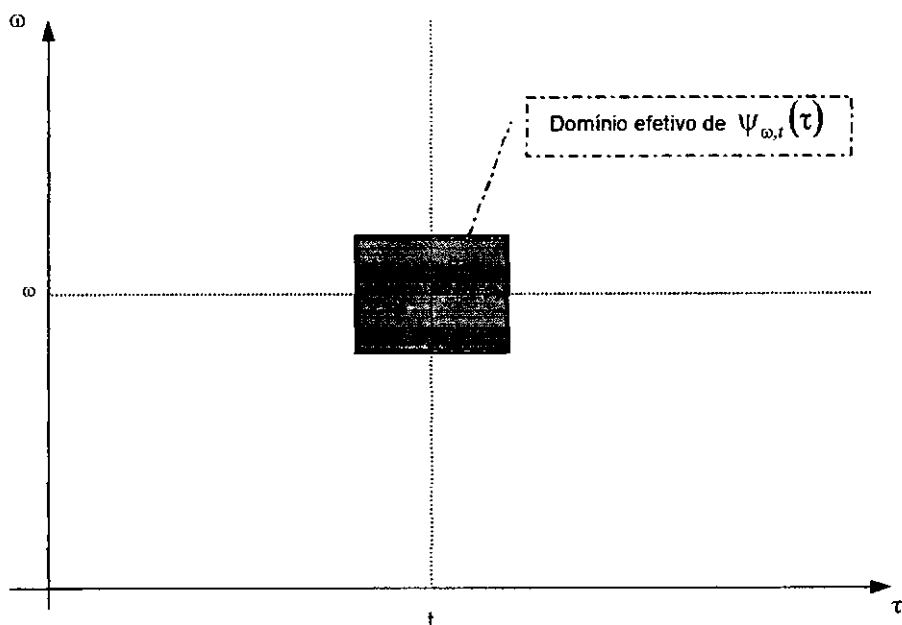


Figura II-17 Domínio efetivo (retângulo de energia, RE) de uma função de análise qualquer $\psi_{\omega,t}(\tau)$

O retângulo hachurado apresentado na Figura II-17 é o mesmo retângulo de energia (RE) definido anteriormente com o princípio da indeterminação. Deve-se lembrar que o RE delimita a região onde se concentra a maior parte da energia de um sinal. Portanto pode-se dizer que o retângulo hachurado da Figura II-17 *representa e localiza* no plano tempo-frequência a função de análise $\psi_{\omega,t}(\tau)$.

Utilizando esta forma de representação gráfica apresenta-se na Figura II-18 os RE da função de análise $\psi_{\omega,t}(\tau)$ para vários valores de ω e t . Lembra-se que, como T e B são independentes de ω e t , os RE terão tamanho (e forma) constantes.

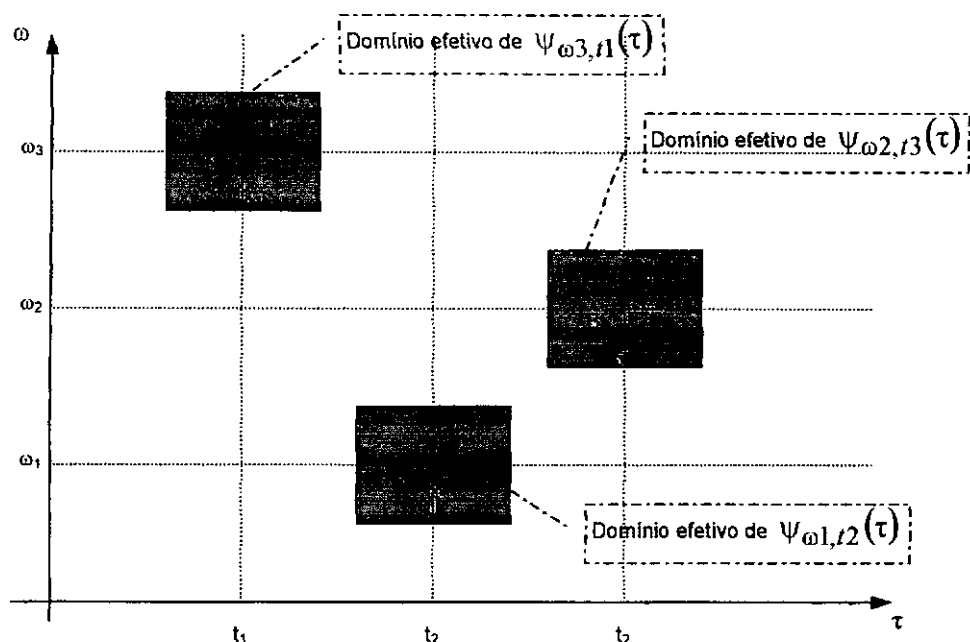


Figura II-18 Retângulos de energia (RE) das funções de análise do espectrograma para vários valores de ω e t

Os REs da Figura II-18 representam a função $\psi_{\omega,t}(\tau)$ no momento em que é utilizada para calcular os valores de $SP(t_1, \omega_3)$, $SP(t_2, \omega_1)$ e $SP(t_3, \omega_2)$, respectivamente. Isto pode ser melhor esclarecido através de uma analogia. Analisar um sinal utilizando o espectrograma corresponde a visualizar o sinal utilizando-se uma máscara, conforme ilustrado na Figura II-19. A função de análise $\psi_{\omega,t}(\tau)$, vista em primeiro plano, funciona como uma máscara que permite visualizar somente uma parte do sinal - mostrado em segundo plano. Esta máscara é movimentada pelas variáveis t e ω sempre com as suas dimensões B e T constantes para cobrir toda a faixa de análise.

A utilidade do sensor da Figura II-19 é totalizar toda a energia que ele visualiza através da máscara, retornando desta análise uma quantidade de energia ΔE que, formando a trinca de valores $(t, \omega, \Delta E)$ comporá finalmente o espectrograma $SP(t, \omega)$. A maior qualidade de representação possível é portanto alcançado fazendo-se com que o RE da função de análise - o orifício através do qual o sensor enxerga o sinal - seja do menor tamanho possível.

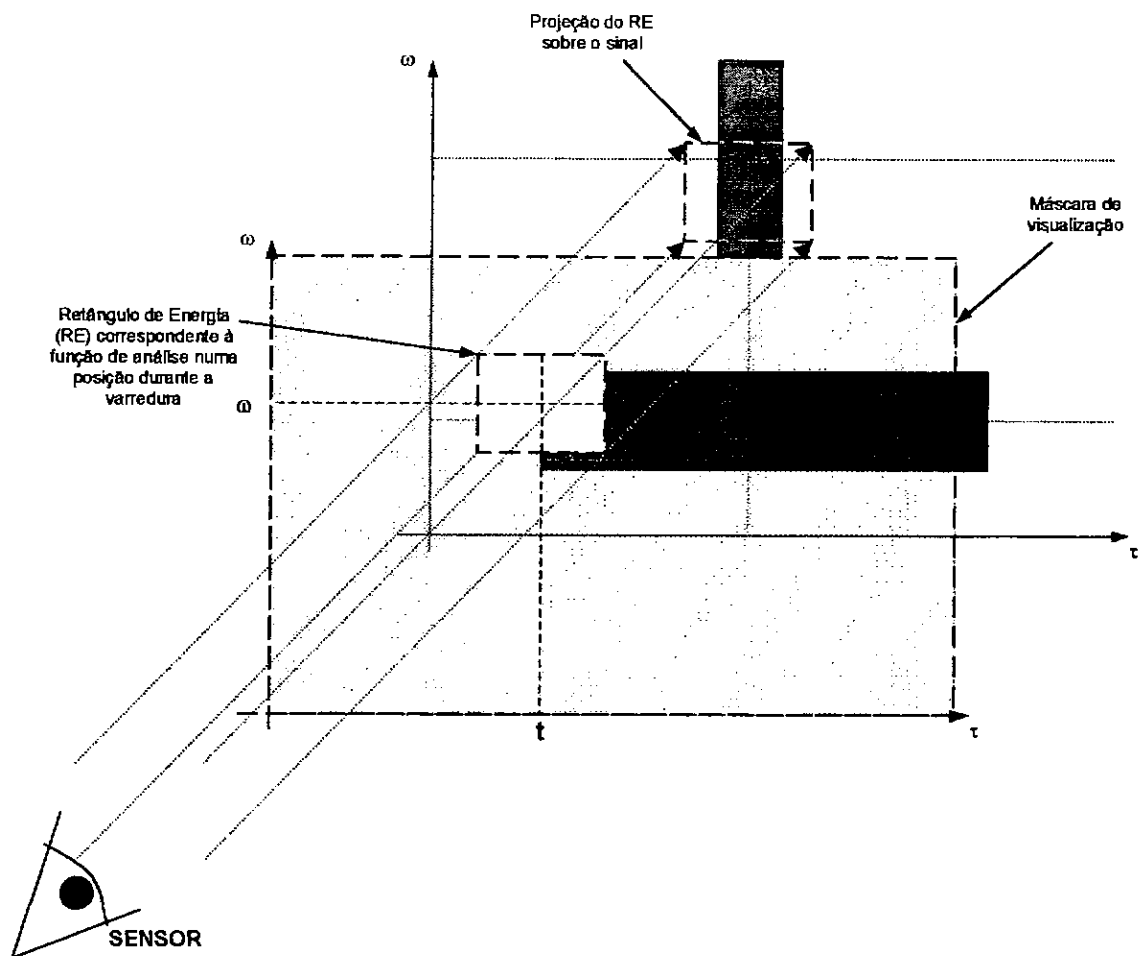


Figura II-19 Analogia entre função de análise e máscara de visualização

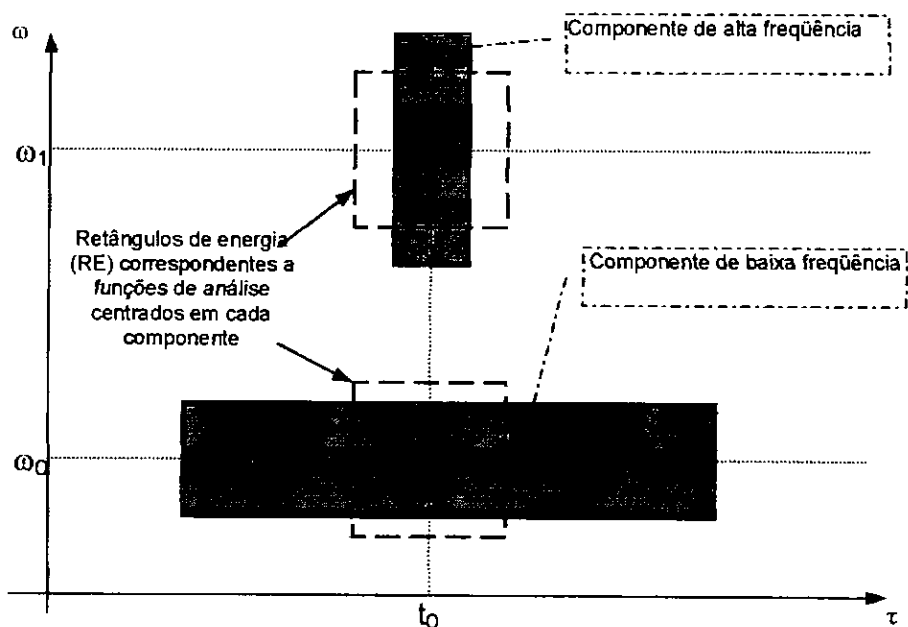


Figura II-20 Componentes de um sinal arbitrário sendo analisados pelo espectrograma

O fato do espectrograma utilizar funções de análise com duração T e largura de banda B constantes se constitui um problema muito grave. A Figura II-20 exemplifica esta situação. Nesta figura é mostrado um sinal composto por dois componentes distintos, um de alta e outro de baixa frequência. Adicionalmente mostram-se dois RE - tracejados - correspondentes a $\psi_{\omega 0, t 0}(\tau)$ e $\psi_{\omega 1, t 0}(\tau)$.

O melhor resultado obtido pelo processo de análise ocorrerá se o RE da função de análise for menor ou igual ao RE do componente do sinal pois então os componentes poderão ser desmembrados da melhor maneira possível. No entanto observa-se na Figura II-20 que isto não acontece em nenhum dos dois casos pois os componentes de alta frequência têm a tendência de ter uma largura de banda B grande e uma duração T pequena, acontecendo o inverso com os de baixa frequência, e no entanto a função de análise do espectrograma analisa a todos com uma função de análise cujo RE tem tamanho constante. Isto resultará em uma má representação dos componentes do sinal. O ideal é que a função de análise seja de tal forma construída que o tamanho de seu RE varie com a frequência de análise, imitando a geometria dos RE dos componentes do sinal.

Pode-se contornar o problema fazendo um relacionamento entre a frequência de análise ω e a largura T da janela de tal forma que quanto maior a frequência ω , menor a duração da janela e vice-versa, ou seja,

$$T \propto \frac{1}{\omega} \quad (\text{II-105})$$

Esta ligação é feita através da constante de escalamento λ . Tomando-se como referência uma função qualquer $\psi(\tau)$ (com duração T_0), a versão modificada da função de análise (II-103) de forma a satisfazer a relação (II-105) é

$$\psi_{\lambda, t}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h\left(\frac{\tau - t}{\lambda}\right) e^{-i\omega_0 \frac{\tau - t}{\lambda}} \quad (\text{II-106})$$

As frequências ω e durações T ficarão então ligadas pela constante de escalamento através das relações

$$\omega = \frac{\omega_0}{\lambda} \quad (\text{II-107})$$

$$T = \lambda T_0 \quad (\text{II-108})$$

O efeito deste escalamento é mostrado na Figura II-21, que mostra três funções de análise escaladas $\psi_{1,0}(\tau)$, $\psi_{1/2,0}(\tau)$ e $\psi_{1/4,0}(\tau)$.

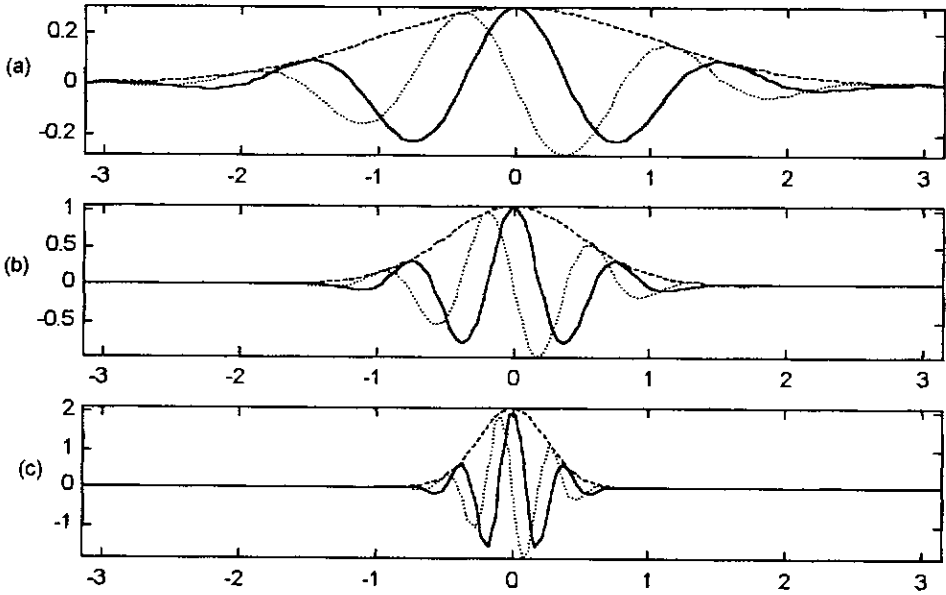


Figura II-21 Funções de análise escaladas. (a) $\lambda=1$; (b) $\lambda=0.5$; (c) $\lambda=0.25$.

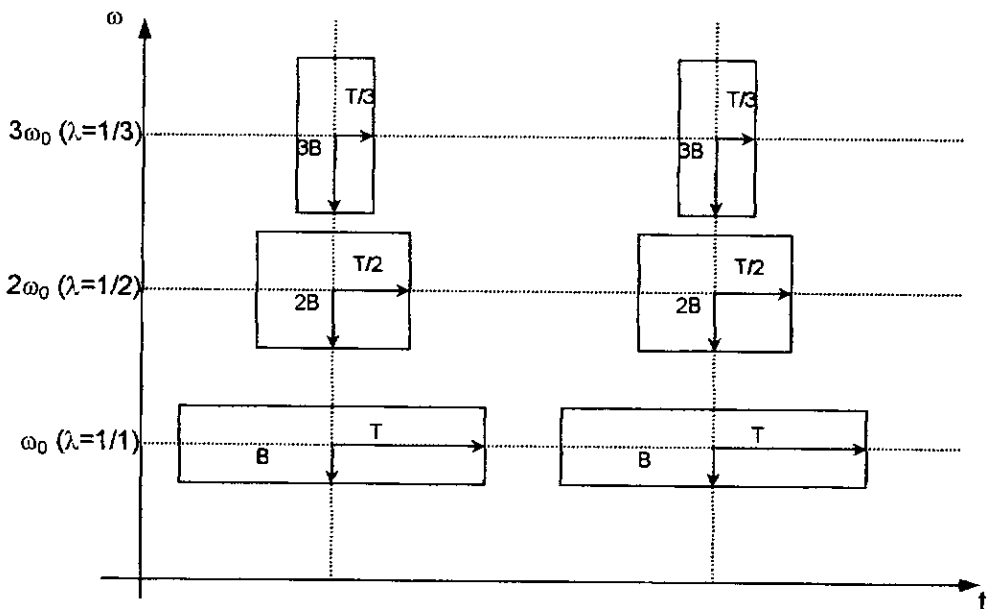


Figura II-22 Retângulos de energia (RE) de uma função de análise à qual foi aplicada o escalamento

Observa-se na Figura II-21 que o efeito do escalamento é manter o mesmo número de ciclos seja qual for a frequência sendo analisada. A Figura II-22 mostra REs para vários valores de t e ω de uma função de análise à qual foi aplicado o escalamento.

Vê-se na Figura II-22 que os retângulos de energia tendem a diminuir sua largura quanto maiores forem as frequências porém mantendo a mesma área (4TB). Esta abordagem leva ao conceito das wavelets e possui prós e contras que serão vistos em detalhe na próxima seção.

II.5.2 A transformada wavelet

Da necessidade de se dar um nome distinto para esta nova classe de funções de análise escaladas surgiram as denominações “ondelette” e “wavelet”. Num sentido amplo pode-se chamar *wavelet* qualquer função $\psi(\tau)$ que:

- Seja bem concentrada em ambos os domínios, tempo e frequência, isto é, possua um RE com área próxima ao valor mínimo 2;
- Tenha seu primeiro momento nulo, isto é, a área abaixo do gráfico da função seja zero.

À análise realizada utilizando-se wavelets como funções de análise dá-se o nome de *transformada wavelet*. No jargão próprio da teoria das wavelet as funções de análise $\psi_{\lambda,t}(\tau)$ são chamadas *wavelets* e, particularmente, a função $\psi(\tau) = \psi_{1,0}(\tau)$ é chamada de *wavelet-mãe*.

Alguns exemplos de wavelets já são conhecidos. Quando são usados a janela gaussiana $h(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2}$ em conjunto com o harmônico complexo $e^{-i\omega t}$, a wavelet-mãe $\psi(\tau) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha \tau^2/2} e^{-i\omega \tau}$ é chamada *wavelet de GABOR* (1946). Neste sentido amplo a própria transformada de Fourier pode ser considerada uma transformada wavelet degenerada quando $h(t) = 1$ e $\psi(\tau) = e^{-i\omega \tau}$.

Portanto a transformada wavelet é definida como

$$W_f(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_{\lambda, t}(\tau) d\tau. \quad (\text{II-109})$$

A reconstrução do sinal original $f(\tau)$ a partir de sua transformada $W_f(\lambda, t)$ é feita através da relação

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(\lambda, t) \psi_{\lambda, t}(\tau) d\lambda dt \quad (\text{II-110})$$

Sendo assim definidas as transformadas contínuas direta e inversa, as wavelets podem ser relacionadas à wavelet-mãe por uma simples regra de escalamento e translação

$$\psi_{\lambda, t}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{\tau - t}{\lambda}\right). \quad (\text{II-111})$$

A constante $\sqrt{\lambda}$ adicionada permite que a seguinte normalização seja automaticamente satisfeita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\lambda, t}(\tau)|^2 d\tau. \quad (\text{II-112})$$

isto é, a energia de todas as wavelets originadas da mesma wavelet-mãe é igual.

No capítulo IV será mostrada uma série de exemplos de transformadas contínuas de alguns sinais simples ao lado de análises utilizando técnicas tempo-freqüência. Poder-se-á então comparar a superioridade das técnicas tempo-freqüência sobre a transformada wavelet contínua em gerar representações tempo-freqüência, conforme comentado no início da seção II-5.

II.5.3 Wavelets ortogonais para análise discreta

Até este ponto nenhuma restrição foi feita ao domínio da variável de escala λ , podendo esta ser positiva, negativa, real ou até complexa. Particularmente, quando a variável de escala λ é real e positiva, diz-se que a respectiva transformada wavelet é *contínua*.

No entanto existem fortes motivos, que serão mostrados logo adiante, para que a variável escala esteja relacionada com uma variável inteira de acordo com a relação

$$\lambda = \frac{1}{2^j}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (\text{II-113})$$

Quando existe este tipo de relacionamento da variável de escala λ com uma variável discreta diz-se que a respectiva transformada é *discreta*. A wavelet passa então a seguir a notação $\psi_{j,t}(\tau)$ ao invés de $\psi_{\lambda,t}(\tau)$ para evidenciar o caráter discreto da análise.

A razão para discretizar a transformada reside em ortogonalidade. Quando a transformada é discreta, é fácil obter um conjunto de wavelets $\psi_{j,t}(\tau)$ que formam uma base ortogonal para o espaço real unidimensional. A série de Fourier, encarada como uma série wavelet degenerada, é um exemplo conhecido deste tipo de base ortogonal.

A série wavelet é obtida a partir da discretização da transformada contínua inversa (II-110)

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (\text{II-114})$$

onde as funções $\psi_{j,t}(\tau)$ que formam a base são relacionadas à wavelet-mãe por um escalamento e uma translação da forma

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k) \quad (\text{II-115})$$

Repare-se que isto corresponde a aplicar um escalamento $\lambda = 1/2^j$. Os coeficientes da série são obtidos pelo produto interno

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (\text{II-116})$$

As funções $\psi_{j,t}(\tau)$ que compõem a base serão ortogonais entre si quando atenderem à condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{m,n}(t) dt = \delta_{jm} \delta_{pn} \quad (\text{II-117})$$

que é atendida por quase a totalidade das famílias de wavelets, exceto algumas como as

biortogonais B-splines.

A principal consequência da ortogonalidade é a conservação de energia durante a transformação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_{j,k}|^2 \quad (\text{II-118})$$

Mesmo nos casos onde a base não é ortogonal garante-se que a energia calculada pelos coeficientes nunca excederá uma determinada percentagem da energia total do sinal.

Conforme já foi dito, a série de Fourier apresenta uma grande semelhança com a série wavelet e pode ser encarada como uma série wavelet degenerada. A Tabela II-1 resume as características semelhantes entre as duas séries. Observe que foi utilizada a notação

$$s_j(t) = e^{i \frac{j\pi t}{L}} \quad (\text{II-119})$$

somente para evidenciar o escalamento natural $s_j(t) = s(jt)$ existente na série de Fourier.

Vê-se que a analogia é quase completa, excetuando-se o fato de que a série wavelet apresenta, além do escalamento, uma translação na formação da base para compensar o domínio restrito no tempo. A série de Fourier não precisa disso pois é formada por uma base que não tem localização no tempo, isto é, o domínio do harmônico $e^{i j\pi t/L}$ é toda a extensão do eixo real. As wavelets, ao contrário, quando não possuem domínio finito no tempo, ou seja,

$$\psi(t) = 0 \text{ para } t < t_0 \text{ e } t > t_1 \quad (\text{II-120})$$

apresentam domínio *quase* finito

$$\psi(t) \approx 0 \text{ para } t < t_0 \text{ e } t > t_1 \quad (\text{II-121})$$

sendo t_0 e t_1 duas constantes características da família da wavelet em questão.

Tabela II-1 Comparação entre a série de Fourier e a série wavelet

Característica	Série de Fourier (forma complexa)	Série wavelet
Forma da série	$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j s_j(t)$	$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$
Funções da base	$s_j(t) = e^{i \frac{j\pi t}{L}}$	$\psi_{j,k}(t)$
Função geradora da base (mãe)	$s(t) = e^{i \frac{\pi t}{L}}$	$\psi(t)$
Relação da função geradora com as demais funções da base	$s_j(t) = s(jt)$	$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$
Cálculo dos coeficientes	$d_j = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) s_j(-t) dt$	$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt$
Condição de ortogonalidade da base	$\int_{-\infty}^{+\infty} s_j(t) s_m(t) dt = \delta_{jm}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{m,n}(t) dt = \delta_{jm} \delta_{pn}$
Conservação da energia	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) ^2 dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j ^2$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) ^2 dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} ^2$

Visto que o sinal geralmente é finito no tempo, a série (II-114) não poderá ser levada ao infinito. No apêndice B mostra-se que esta série deve tomar a forma

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(t-k) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (\text{II-122})$$

onde o termo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(t-k) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (\text{II-123})$$

pode ser considerado como uma aproximação grosseira da função $f(t)$, que é então detalhada pelos coeficientes de detalhe da segunda parcela de (II-122). Por causa disso os coeficientes c_k são chamados *coeficientes de aproximação* e os coeficientes $d_{j,k}$ são os *coeficientes de detalhe*.

A função $\phi(t)$, também chamada de wavelet-pai por analogia à wavelet-mãe, tem a seguinte propriedade de recorrência

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi(2t-k) \quad (\text{II-124})$$

Os coeficientes a_k são uma espécie de impressão digital e agrupam todas as propriedades das wavelets.

A demonstração destes resultados foi realizada sem qualquer tipo de prova no intuito de preservar a clareza do texto. Um estudo mais aprofundado pode ser visto no apêndice B ou nas bibliografias já citadas. Entretanto o que se deseja passar ao leitor é que todos os cálculos, provas, propriedades, levarão à obtenção de um conjunto finito de coeficientes a_k , $0 \leq k \leq N-1$. É através destes coeficientes que podem ser montados filtros FIR (Finite Impulse Response) que possibilitarão a Fast Wavelet Transform (FWT), ou seja, a análise rápida com wavelets. A execução da FWT resultará então nos coeficientes de aproximação c_k e de detalhe $d_{j,k}$. A FWT é discutida com detalhes no capítulo III (implementação computacional).

II.5.4 Análise de multi-resolução

A abordagem de multi-resolução foi inicialmente descrita por MEYER (1986a, 1986b) e

fornece uma forma rápida e coerente de análise multi-frequencial quando usada em conjunto com o algoritmo de Mallat (FWT). A aplicação prática é um tanto limitada, como se verá nos exemplos do capítulo IV, mas traz grande compreensão acerca do significado das wavelets.

A partir dos coeficientes de aproximação c_k e de detalhe $d_{j,k}$ já calculados pode-se finalmente fazer a análise de multi-resolução calculando as funções

$$A(x) = \sum_k c_k \phi(x - k) \quad (\text{II-125})$$

$$D_j(x) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (\text{II-126})$$

que são chamadas de *funções de aproximação e detalhe* ou, simplesmente, *aproximação e detalhes* da função original $f(t)$. A seguir serão discutidas três propriedades esclarecedoras relacionadas à este enfoque de multi-resolução.

Propriedade a) Composição em frequência

Cada nível de detalhe possui características próprias quanto sua composição em frequência, relacionadas às características da wavelet-mãe. Uma certa wavelet-mãe $\psi(t)$ tem sua energia centrada em uma determinada frequência ω_m , com um desvio σ_ω , e centrada no tempo em t_m com respectivo desvio σ_t . A wavelet-mãe de Morlet, por exemplo, é definida de tal forma que possui uma frequência média de 5 rad/s ($0,8 \text{ Hz}$), como se pode verificar na Figura II-23.

As versões escaladas

$$\psi_{j,0}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x) \quad (\text{II-127})$$

possuem as características

$$\omega_{m,j} = 2^j \omega_m \quad \sigma_{\omega,j} = 2^j \sigma_\omega \quad (\text{II-128})$$

$$t_{m,j} = \frac{t_m}{2^j} \quad \sigma_{t,j} = \frac{\sigma_t}{2^j} \quad (\text{II-129})$$

As versões escaladas da wavelet de Morlet, por exemplo, para os níveis $j = 1, 2$ e 3

possuirão, respectivamente, frequências médias de 10, 20 e 40 rad/s .

Observando o fato de que o detalhe $D_j(x)$ é uma combinação linear de funções transladadas $\psi_{j,k}(x)$ da wavelet-mãe e levando-se em conta que um translado no tempo não altera o espectro e também que as funções transladadas são ortogonais entre si, prova-se que a função detalhe também terá a energia de seu espectro centrada em $\omega_{m,j} = 2^j \omega_m$ com desvio $\sigma_{\omega,j} = 2^j \sigma_{\omega}$.

Propriedade b) Adição simples

Como consequência direta da ortogonalidade das bases $\psi_{j,k}(x)$, tem-se que

$$f(x) = D_1(x) + D_2(x) + D_3(x) + \dots + D_{n-1}(x) + A(x) \quad (II-130)$$

Propriedade c) Preservação da energia entre os níveis

Uma outra grande propriedade é que, sendo uma combinação linear de versões transladadas e escaladas da wavelet-mãe, as aproximações e detalhes serão todas ortogonais entre si. Desta conclusão se deriva que a energia total do sinal pode ser tomada como a soma das energias de cada nível, isto é,

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} |D_1(t)|^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} |D_2(t)|^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} |D_3(t)|^2 + \dots \quad (II-131)$$

As propriedades (b) e (c) é que fornecem à análise de multi-resolução com wavelets a grande coerência que lhe dá superioridade a análise análoga feita com filtros digitais convencionais pois estes destroem a energia do sinal durante a filtragem. Para os filtros digitais convencionais o lado direito da equação (II-131) sempre resultará em um valor maior que a energia total do sinal. No entanto as propriedades (b) e (c) não são totalmente válidas para as wavelets biortogonais B-spline por não serem ortogonais entre si, sendo porém a energia ainda quase totalmente preservada.

II.6 Classificação das famílias de wavelets

Durante o desenvolvimento desta tese muitas informações foram coletadas de diversas

fontes. Em nenhuma, porém, foi apresentado um resumo completo das várias famílias de wavelets. O objetivo desta seção é suprir esta deficiência e compor um quadro mais claro, ilustrado com exemplos, desta árida teoria. Naturalmente serão mostradas apenas as famílias clássicas pois o desenvolvimento rápido das wavelets adiciona, mensalmente, um punhado de novas famílias ao repositório conhecido.

Com esta finalidade agrupou-se as wavelets em quatro grandes classes: pré-wavelets, Meyer, ortogonais e biortogonais. Cada classe compartilha uma série de propriedades que serão mostradas em forma de tabela logo após um texto de apresentação da classe. Logo após são dados exemplos de algumas famílias da classe, representadas por sua wavelet-mãe e respectiva FFT (módulo) e pela wavelet-pai com respectiva FFT, quando existir.

Finalmente conclui-se este item com um resumo comparativo entre as propriedades das várias famílias.

Classe a) Pré-Wavelets

As pré-wavelets são funções de análise já há muito conhecidas que têm pouquíssimas propriedades. São usadas principalmente em análises contínuas. As wavelets que compõem esta classe são a de Morlet e a Sombrero, também conhecida como *mexican hat*. A Figura II-23 mostra a forma da wavelet-mãe de Morlet e a Figura II-24 a wavelet-mãe Sombrero.

Tabela II-2 Principais propriedades das pré-wavelets

Propriedades	<ul style="list-style-type: none">• Simetria;• $\phi(x)$, a wavelet-pai, não existe;• Análise não é ortogonal;• $\psi(x)$ não tem domínio finito no tempo;• Reconstrução não é garantida..
Análises possíveis	<ul style="list-style-type: none">• Contínua somente.
Principais desvantagens	<ul style="list-style-type: none">• Não existe um algoritmo de análise rápida.

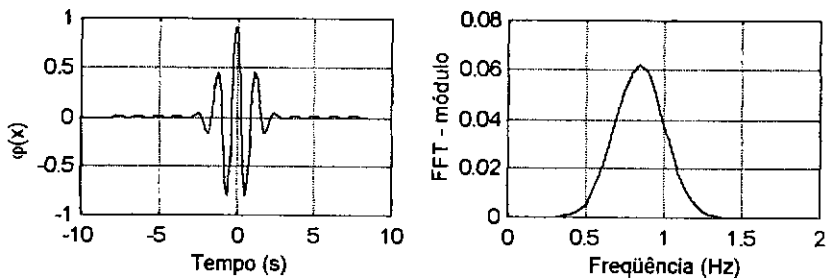


Figura II-23 Wavelet (mãe) de Morlet

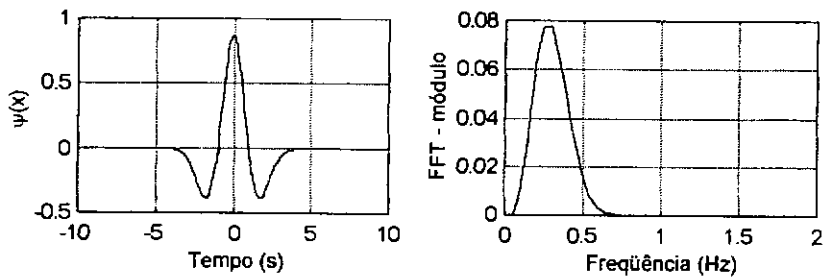


Figura II-24 Wavelet (mãe) Sombrero

Classe b) Meyer

Esta classe consta de uma única wavelet, a wavelet de MEYER (1985, 1986a, 1986b). A wavelet-mãe tem como principal característica ser infinitamente diferenciável no tempo. Por não resultar em filtros FIR, não é utilizada para análise discreta. A Figura II-25 apresenta as wavelets, mãe e pai, de Meyer.

Tabela II-3 Principais propriedades da wavelet de Meyer

Propriedades	<ul style="list-style-type: none">• $\phi(x)$ existe e a análise é ortogonal;• $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são indefinidamente deriváveis;• $\phi(x)$ e $\psi(x)$ não têm domínio finito no tempo.
Análises possíveis	<ul style="list-style-type: none">• contínua;• discreta, mas não como filtro FIR.
Principais desvantagens	<ul style="list-style-type: none">• não existe um algoritmo de análise rápida.

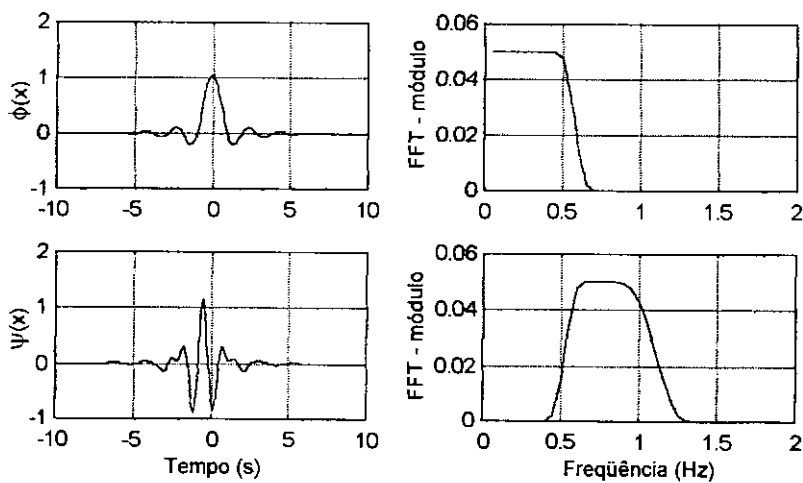


Figura II-25 Wavelet de Meyer

Classe c) Wavelets ortogonais

As famílias que compõe esta classe (Haar, Daubechies, Symmlets e Coiflets) são as que possuem o conjunto mais extenso de propriedades. Possuem uma forma de análise rápida (FWT). Cada família possui um conjunto de wavelets-mãe, identificadas por uma sigla composta por suas iniciais mais sua ordem N. Por exemplo, a família de Daubechies possui as wavelets-mãe DB2, DB4, DB6 e assim por diante.

Tabela II-4 Principais propriedades da classe de wavelets ortogonais

Propriedades	<ul style="list-style-type: none">• $\phi(x)$ existe e a análise é ortogonal;• $\phi(x)$ e $\psi(x)$ têm domínio finito no tempo;• $\psi(x)$ tem um dado número de momentos nulos;• Associam-se a filtros FIR.
Análises possíveis	<ul style="list-style-type: none">• contínua;• discreta, usando a <i>Fast Wavelet Transform</i> (FWT).
Principais desvantagens	<ul style="list-style-type: none">• Regularidade fraca.
Propriedades específicas	<ul style="list-style-type: none">• Daubechies: assimetria.• Simmlets: quase simetria;• Coiflets: quase simetria; $\phi(x)$ possui momentos nulos.

Por se associarem a filtros FIR - possibilitando a FWT - serão apresentados, juntamente com os exemplos, seus respectivos coeficientes. As Figuras II-26 a II-32 apresentam exemplos de wavelets da classe ortogonal.

HAAR: $a_k = [1 \ 1]$

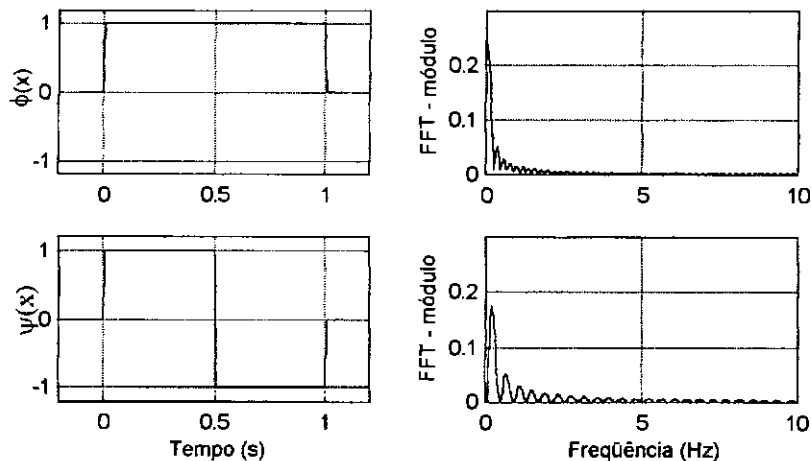


Figura II-26 Wavelet de Haar

DB2: $a_k = [0.68301270189244 \quad 1.18301270189174 \quad 0.31698729810756 \quad -0.18301270189174]$

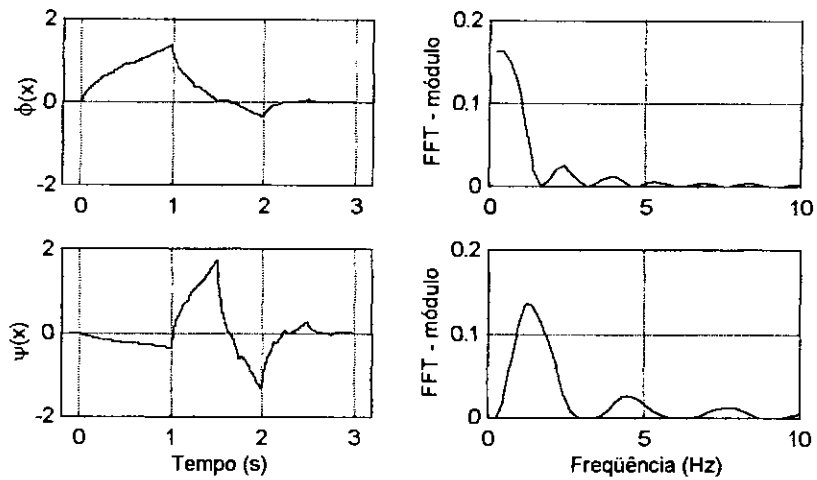


Figura II-27 Wavelet Daubechies ordem 2

DB6: $a_k = [0.15774243200286 \quad 0.69950381407514 \quad 1.06226375988242 \quad 0.44583132293010$
 $-0.31998659889174 \quad -0.18351806406006 \quad 0.13788809297440 \quad 0.03892320970792$
 $-0.04466374833096 \quad 0.00078325115206 \quad 0.00675606236302 \quad -0.00152353380516]$

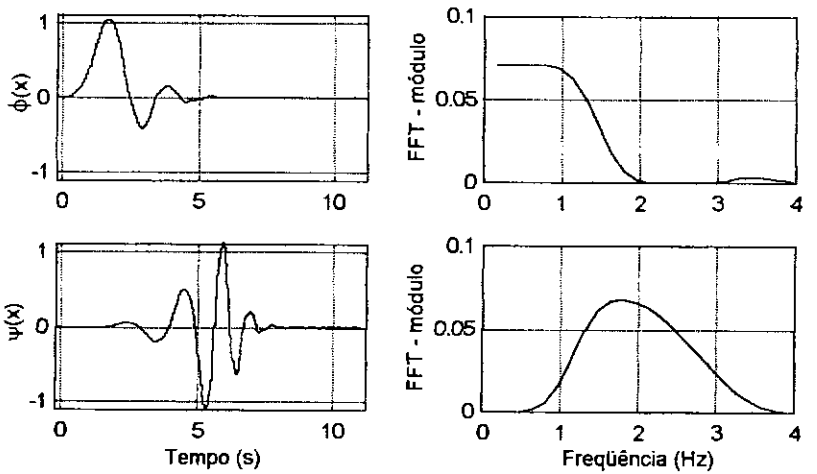


Figura II-28 Wavelet Daubechies ordem 6

SYM2: $a_k = [0.68301270189244 \quad 1.18301270189174 \quad 0.31698729810756 \quad -0.18301270189174]$

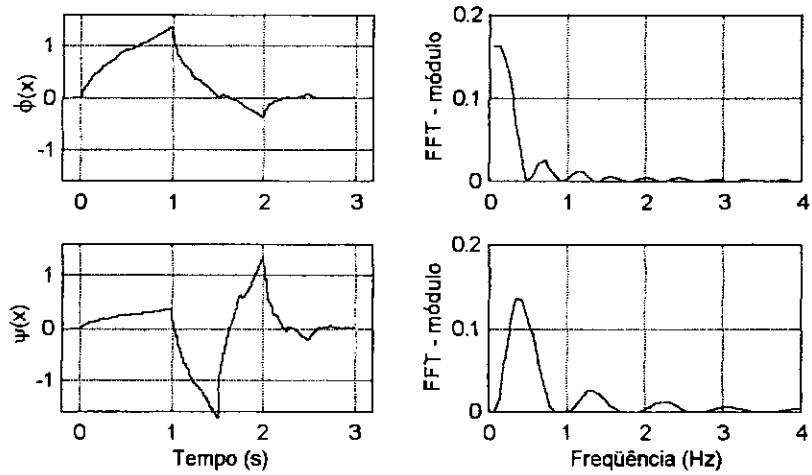


Figura II-29 Wavelet Symmlet ordem 2

SYM8: $a_k = [0.00267279339280 \quad -0.00042839430024 \quad -0.02114568652836 \quad 0.00538638875376$
 $0.06949046591118 \quad -0.03849352126334 \quad -0.07346250876076 \quad 0.51539867037308$
 $1.09910663053802 \quad 0.68074534718878 \quad -0.08665361540564 \quad -0.20264865528564$
 $0.01075861175048 \quad 0.04482362304362 \quad -0.00076669089622 \quad -0.00478345851150]$

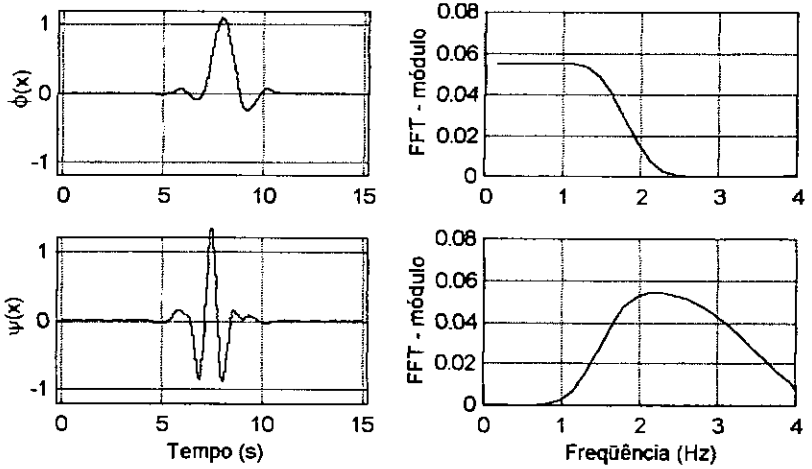


Figura II-30 Wavelet Symmlet ordem 8

COIF2: $a_k = [0.02317519347800 \quad -0.05864027596000 \quad -0.09527918062000 \quad 0.54604209307000$
 $1.14936478771400 \quad 0.58973438739200 \quad -0.10817121418400 \quad -0.08405296092200$
 $0.03348882032600 \quad 0.00793576722600 \quad -0.00257840671200 \quad -0.00101901079800]$

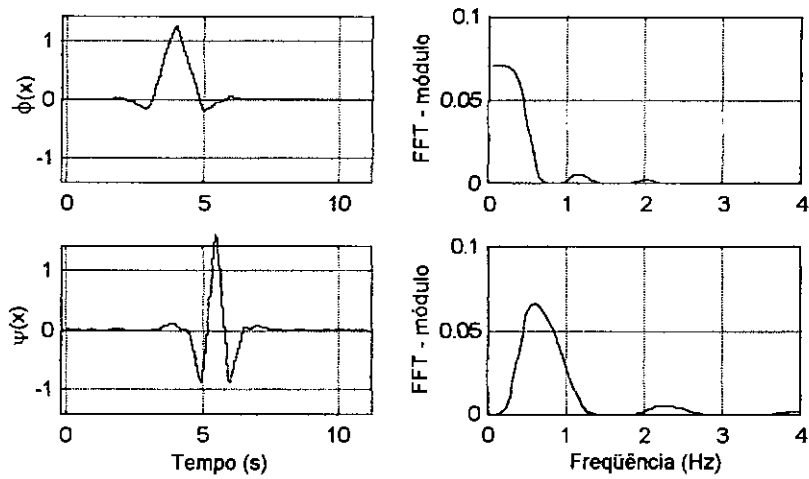


Figura II-31 Wavelet Coiflet ordem 2

COIF5: $a_k = [-0.00029992760000 \quad 0.00050712240000 \quad 0.00308049140000 \quad -0.00588222160000$
 $-0.01432756380000 \quad 0.03310413280000 \quad 0.03983560860000 \quad -0.12999452560000$
 $-0.07360014720000 \quad 0.59618464700000 \quad 1.09501085880000 \quad 0.61941369800000$
 $-0.08773210160000 \quad -0.14930447780000 \quad 0.05839175900000 \quad 0.04622155400000$
 $-0.02794737580000 \quad -0.01296018000000 \quad 0.00956600280000 \quad 0.00344130940000$
 $-0.00235164440000 \quad -0.00090245400000 \quad 0.00042745960000 \quad 0.00019875520000$
 $-0.00005846420000 \quad -0.00003014400000 \quad 0.00000528160000 \quad 0.00000291860000$
 $-0.00000023680000 \quad -0.00000013460000]$

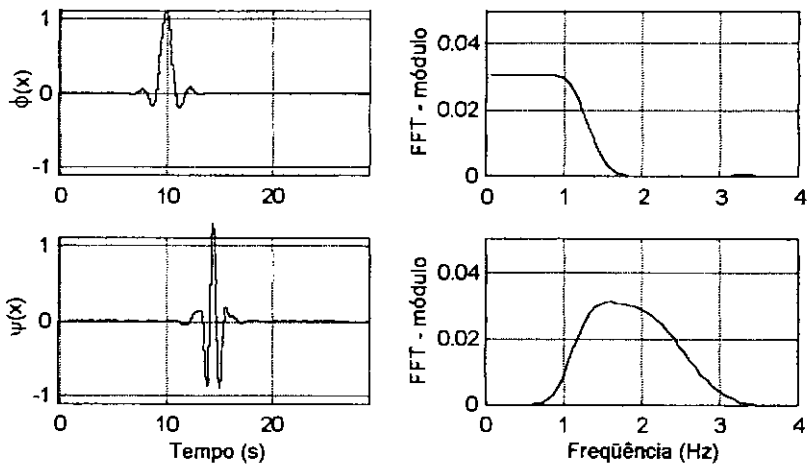


Figura II-32 Wavelet Coiflet ordem 5

Classe d) Biortogonais B-Splines

As B-splines são wavelets chamadas biortogonais por apresentarem semi-ortogonalidade, ou quase ortogonalidade. Têm a característica de serem perfeitamente simétricas ou totalmente anti-simétricas, propriedades úteis quando se deseja identificar pontos de curvatura máxima (simetria) ou pontos de transição (anti-simetria) no sinal. Também podem realizar análises utilizando a FWT. Um estudo aprofundado pode ser visto em DAUBECHIES (1992).

Tabela II-5 Principais propriedades da classe de wavelets B-Splines

Propriedades	<p>Análise:</p> <ul style="list-style-type: none">• $\phi(x)$ existe e a análise é biortogonal;• $\phi(x)$ e $\psi(x)$ têm domínio finito no tempo;• $\phi(x)$ e $\psi(x)$ têm momentos nulos. <p>Reconstrução:</p> <ul style="list-style-type: none">• $\phi(x)$ existe;• $\phi(x)$ e $\psi(x)$ têm domínio finito no tempo;• $\phi(x)$ e $\psi(x)$ têm regularidade conhecida.
Análises possíveis	<ul style="list-style-type: none">• Transformada contínua;• Discreta, usando FWT.
Principais desvantagens	<ul style="list-style-type: none">• Ortogonalidade é perdida.

A wavelet B-Spline 1.3, como todas as biortogonais, possui um conjunto diferente de coeficientes para a análise e reconstrução, mostrados a seguir. É a wavelet de menor ordem dentro desta classe. A Figura II-33 apresenta a wavelet B-Spline 1.3 para reconstrução (síntese). A Figura II-34 mostra a mesma wavelet para análise (decomposição).

A wavelet B-Spline 6.8 é, dentro desta classe, a de maior tamanho prático. Além desta ordem a análise torna-se quase impraticável pois o tamanho dos filtros torna-se muito grande, como pode-se ver pelos coeficientes a seguir. A Figura II-35 mostra a wavelet B-Spline 6.8 para síntese (reconstrução) e a Figura II-36 mostra a mesma wavelet para análise (decomposição).

Bior1.3 - Síntese (ordem 1)

$a_k=[\quad 1 \quad 1]$

Bior1.3 - Decomposição (ordem 3)

$a_k=[\quad -0.125000000000000 \quad 0.125000000000000 \quad 1.00000000000000 \quad 1.00000000000000$
 $0.125000000000000 \quad -0.125000000000000]$

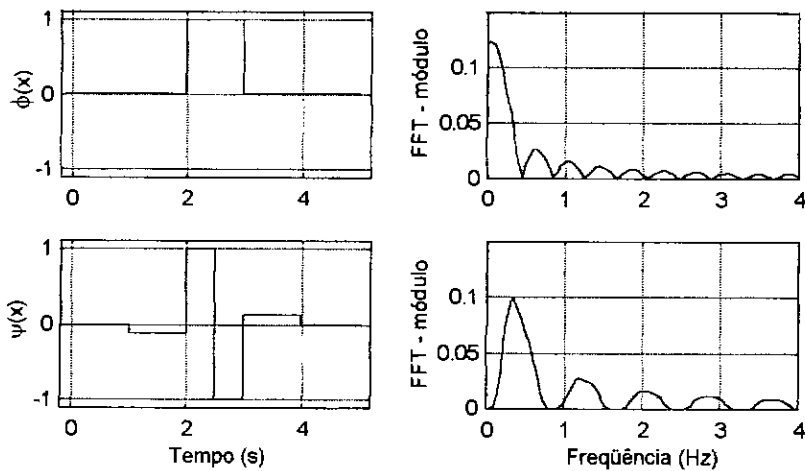


Figura II-33 Wavelet B-spline ordem 1.3 - síntese

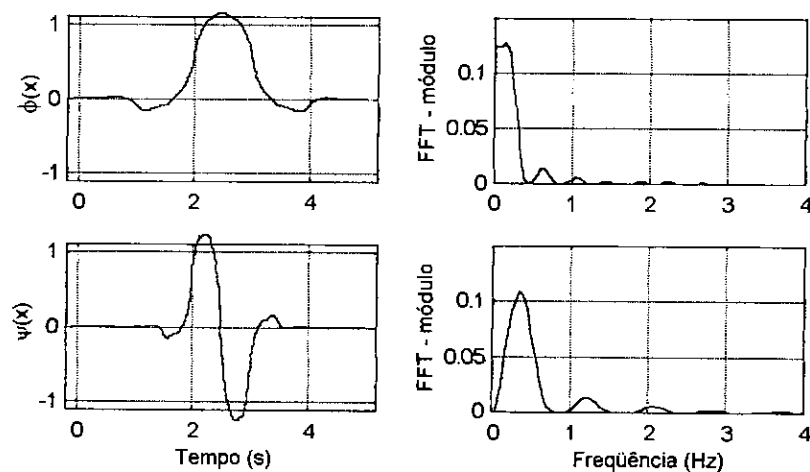


Figura II-34 Wavelet B-spline ordem 1.3 - decomposição

Bior6.8 - Síntese (ordem 6)

$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} -0.02040184437408 & -0.02046014163874 & 0.11132972155992 & 0.05708894343030 \\ -0.59092787718584 & -1.07325760358314 & -0.59092787718584 & 0.05708894343030 \\ 0.11132972155992 & -0.02046014163874 & -0.02040184437408 & \end{bmatrix}$$

Bior6.8 - Reconstrução (ordem 8)

$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} 0.00269949573002 & -0.00270720940602 & -0.02402839333416 & 0.01687802407962 \\ 0.07033294661308 & -0.10926662736504 & -0.13301980124968 & 0.59509581269142 \\ 1.16803150448150 & 0.59509581269142 & -0.13301980124968 & -0.10926662736504 \\ 0.07033294661308 & 0.01687802407962 & -0.02402839333416 & -0.00270720940602 \\ 0.00269949573002 & \end{bmatrix}$$

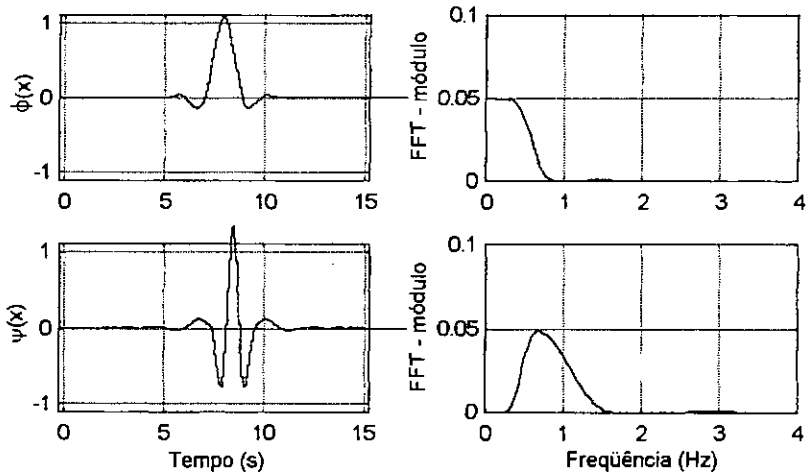


Figura II-35 Wavelet B-spline ordem 6.8 - síntese

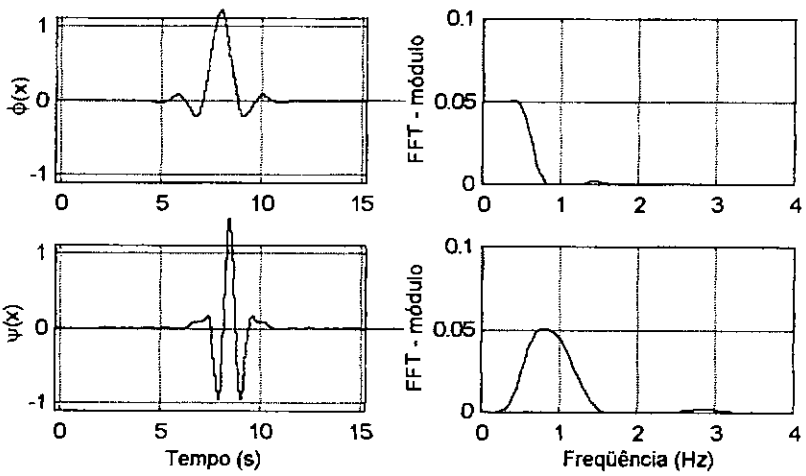


Figura II-36 Wavelet B-spline ordem 6.8 - decomposição

Desde que já foram apresentadas as principais classes de wavelets é interessante fazer uma comparação elas.

A Tabela II-6, dividida para melhor visualização em partes a e b, compara propriedades das principais famílias de wavelets.

Tabela II-6a Comparação entre as propriedades das famílias de wavelets

Família	Morlet	Sombrero	Meyer	B-Spline
Mom. Nulos para $\psi(x)$	0	0	0	0
Mom. nulos para $\phi(x)$	0	0	0	Nr-1 (Análise)
Suporte no tempo	$[-4, +4]^1$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	$[0, 2Nd-1]$ (Análise) $[0, 2Nr-1]$ (Reconstr.)
Simetria	S	S	S	S
CWT	S	S	S	S
FWT	N	N	S	S
Biortogonal	N	N	S	S
Ortogonal	N	N	S	N
Ordem (N)	-	-	-	² Nr=1, Nd=1,3,5 Nr=2, Nd=2,4,6,8 Nr=3, Nd=1,3,5,7,9 Nr=4, Nd=4 Nr=5, Nd=5 Nr=6, Nd=8
Obs.		Derivada segunda da função de densidade gaussiana	Regularidade infinita.	

¹ Efetivo.

² Ordem "Nd" para decomposição (análise); Ordem "Nr" para reconstrução (síntese).

Tabela II-6b Comparação entre as propriedades das famílias de wavelets

Família	Haar	Daubechies	Symmlets	Coiflets
Mom. Nulos para $\psi(x)$	0	0	0	2N
Mom. nulos para $\phi(x)$	1	N	N	2N-1
Suporte no tempo	[0,1]	[0, 2N-1]	[0, 2N-1]	[0, 6N-1]
Simetria	S	N	N ³	N
CWT	S	S	S	S
DWT	S	S	S	S
Biortogonal	S	S	S	S
Ortogonal	S	S	S	S
Ordem (N)	-	>1 (1 = Haar)	2 a 8	1 a 5
Obs.	A mais simples e mais antiga.	Filtros FIR associados são <i>minimum-phase</i> .	Quase simétrica. Filtros FIR associados são quase <i>linear-phase</i> .	

A escolha da família de wavelet a ser usada em determinada análise depende principalmente do tipo de informação que se quer evidenciar. A bibliografia disponível, principalmente a coletânea de trabalhos em FOUFOULA-GEORGIOU, KUMAR (1994), não é clara o bastante para fornecer uma indicação segura neste sentido. Estes trabalhos via de regra são omissos quanto à razão da escolha da wavelet utilizada e esta discussão ainda está longe de ser concluída.

³ Quase simétrica.

III IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

III.1 Introdução

Entre o desenvolvimento teórico e a efetiva implementação computacional de todas as técnicas presentes nesta tese uma grande distância houve que ser percorrida. Não propriamente pela dificuldade de escrever rotinas adequadas mas pelos diversos caminhos que podem ser tomados a cada instante, inúmeros parâmetros que devem ser ajustados para prover um resultado satisfatório. Este capítulo tem por objetivo, portanto, mostrar da maneira mais clara e detalhada possível estas dificuldades encontradas desde a escolha das ferramentas computacionais até a melhor forma de apresentação gráfica dos resultados.

Neste sentido o software MatLab®, da MathWorks Inc.®, foi fundamental por incorporar em um único aplicativo uma linguagem de programação eficiente e concisa, capaz de interagir com outras linguagens como FORTRAN e C de forma transparente. Além disso este software possui algoritmos prontos como FFT, filtros digitais, manipulação de matrizes, estatística, etc., e um sub-sistema gráfico que permite visualizar os resultados imediatamente de diversas formas. No entanto, por ser uma linguagem interpretada é lenta em algumas situações como, por exemplo, em rotinas com grande número de *loops* internos. Por isso utilizou-se também o compilador Borland C++ 5.2 © para traduzir certas rotinas do MatLab para a linguagem C, tendo como consequência um aumento significativo da velocidade de execução.

III.2 Implementação das rotinas

III.2.1 O espectrograma

A teoria associada ao espectrograma foi apresentada no item II.4.3 e sua implementação é bastante simples principalmente quando é utilizada a janela retangular. O uso desta janela evita que se tenha que fazer um produto da janela com o sinal antes da transformada de Fourier.

A Figura III-1 mostra o fluxograma de cálculo para o espectrograma usando uma janela genérica $h(t)$. Observe que com a janela retangular uma multiplicação entre dois vetores pode ser evitada.

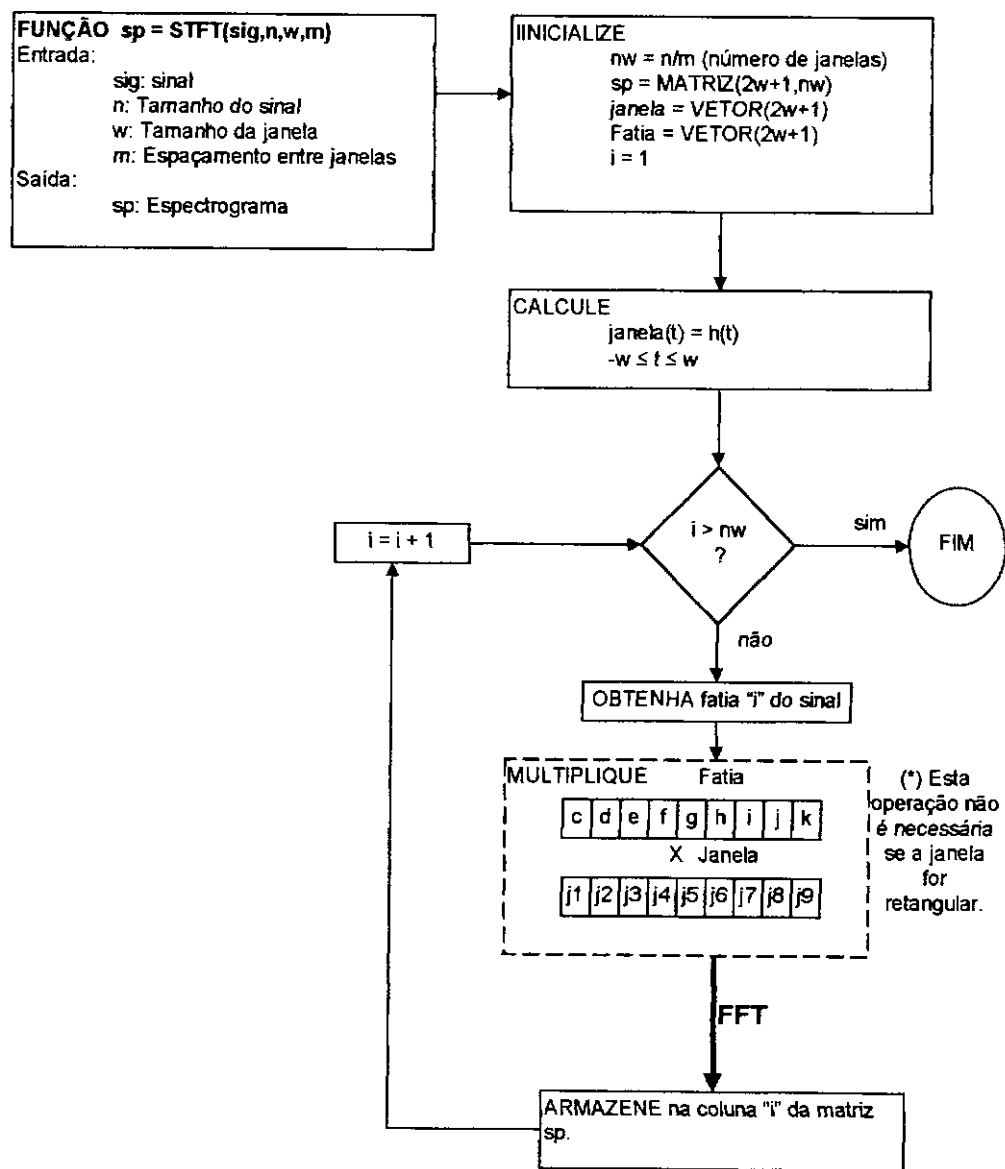


Figura III-1 Fluxograma de cálculo para o espectrograma

Neste fluxograma da Figura III-1 já está previsto o espaçamento entre janelas, dado pela variável m . A variável w a que chama-se tamanho da janela é exatamente a duração T da janela.

A rotina inicializa os vetores auxiliares e então entra no loop de cálculo. Cada ciclo é responsável por uma coluna da matriz de resultado sp , isto é, uma posição no tempo. O

primeiro passo do ciclo é obter uma fatia do sinal, operação que necessita algum cuidado com os contornos (primeiro e último elementos) do sinal. A posição do ponto a partir do qual deve ser tomada a fatia é dada por $P = (i-1)m - w + 1$. Se esta variável P for menor que zero ou maior que $n - 2w - 1$ existirá uma incompatibilidade nos contornos pois a fatia se estenderá além do domínio do sinal. A maneira mais simples de resolver isto é completar a fatia com zeros. Pode-se também fazer um decaimento suave para não gerar discontinuidades fortes, o que no entanto exige um pouco mais de esforço computacional. A Figura III-2 adota o completamento com zeros.

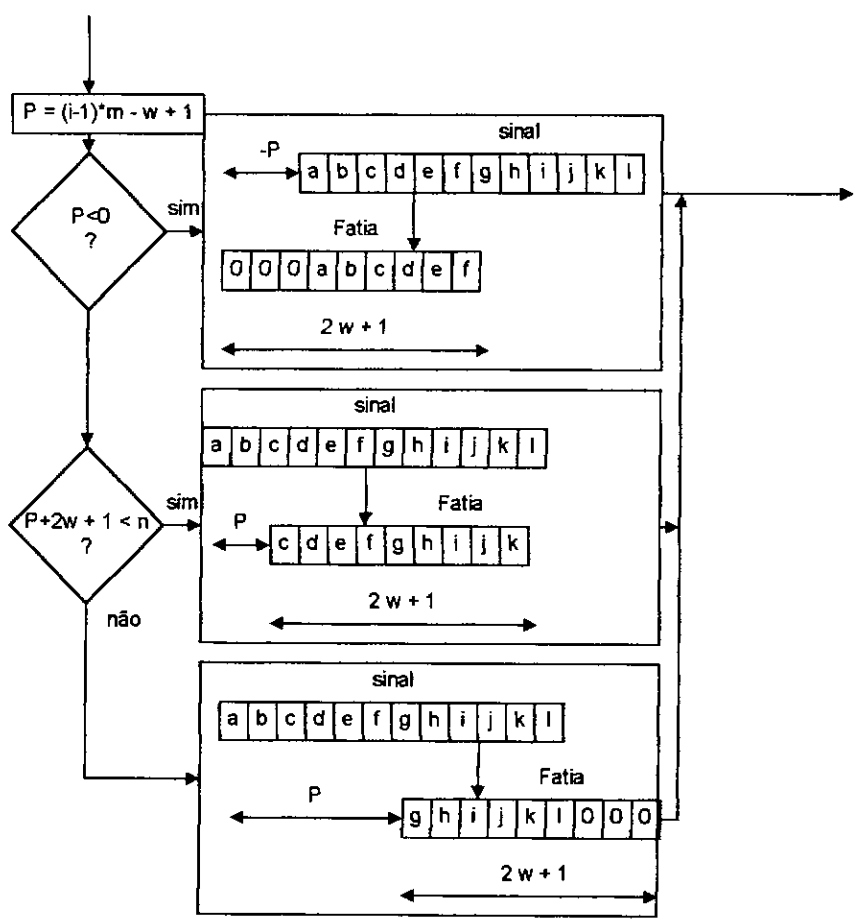


Figura III-2 Obtenção da fatia do sinal para cálculo

Para melhor exemplificar, usou-se do artifício de representar os valores do sinal em cada ponto por letras. Dois quadrados com a mesma letra representam dois pontos - do sinal ou da fatia - com o mesmo valor. Como dito anteriormente, três casos distintos podem ocorrer, e são representados por três retângulos na Figura III-2. O caso representado pelo retângulo superior é quando a fatia inicia antes do primeiro ponto do sinal. O

retângulo intermediário é o caso sem problemas. O retângulo inferior acontece quando a fatia excede o último ponto do sinal.

O cálculo do espectrograma é simples como parece e a única dificuldade surge quando da escolha do tamanho w da janela a ser utilizada. O usual é calcular três espectrogramas com uma janela curta, uma janela média e uma janela longa e apresentar os três resultados lado-a-lado. O conceito de curto e longo é empírico e varia de acordo com o que está se estudando, mas como referência inicial pode-se começar com janelas de 1%, 5% e 10% do tamanho (em pontos) do sinal.

III.2.2 A distribuição de Wigner-Ville

Esta distribuição, cuja teoria é apresentada no item II.4.4, é igualmente fácil de calcular. Em adição ao espectrograma existe apenas o trabalho de obter duas fatias do sinal e não apenas uma como antes. Em contrapartida inexistente a necessidade de multiplicar as fatias por uma janela, conforme pode ser observado na Figura III-3 que mostra o fluxograma de cálculo da distribuição de Wigner-Ville.

Observe na Figura III-3 que duas fatias são obtidas do sinal, ambas como o comprimento $n/2+1$, onde n é o tamanho do sinal (em pontos). A primeira fatia termina exatamente no i -ésimo elemento do sinal. A segunda fatia começa no i -ésimo elemento do sinal. Ambas as fatias devem ser completadas com zeros quando não estiverem totalmente contidas no sinal, como foi feito para o espectrograma. A seguir a primeira fatia é invertida e multiplicada elemento-a-elemento com a segunda fatia. O vetor resultante então é processado por uma FFT e o resultado armazenado na i -ésima coluna da matriz de resultado wvd .

A distribuição de Wigner-Ville não exige que nenhum parâmetro seja ajustado como no espectrograma e sua saída é única. Porém esta distribuição pode apresentar uma série de problemas. Uma forma de contornar estes problemas e melhorar os resultados obtidos com este tipo de abordagem é multiplicar a(s) fatia(s) por uma função-janela antes da FFT. Esta é, de certa forma, a operação que falta para se chegar na classe geral de distribuições tempo-frequência, mostrada no item II.4.5, cuja implementação será apresentada na seção a seguir.

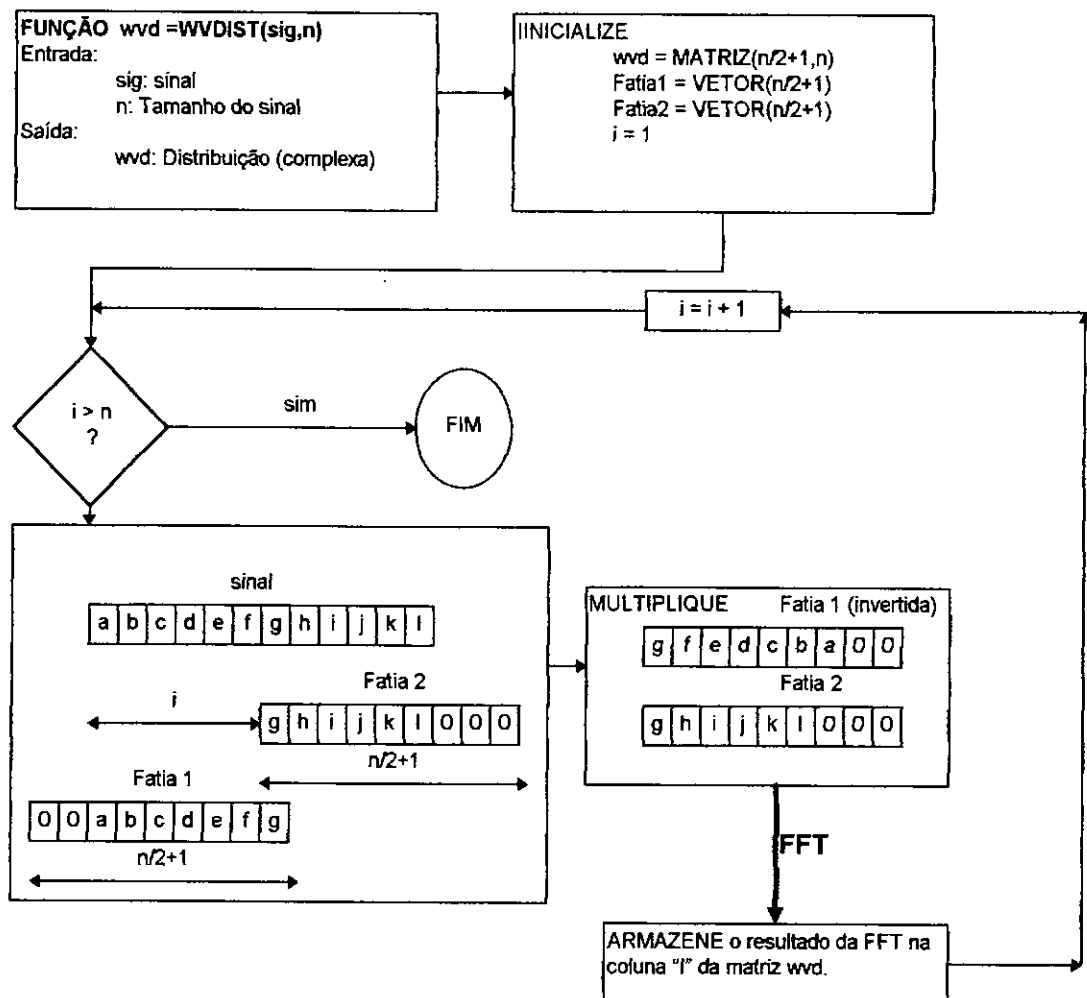


Figura III-3 Fluxograma de cálculo para a distribuição de Wigner-Ville

III.2.3 Implementação anti-aliasing da classe geral de distribuições tempo-freqüência (versão 1 do autor)

A implementação da classe geral infelizmente não é tão trivial de ser feita como o é para o espectrograma e Wigner-Ville. Existe uma série de problemas que se não forem corretamente resolvidos acabam por inserir aliasing na distribuição, mesmo quando a taxa de Nyquist é respeitada na aquisição do sinal. Um dos trabalhos que corretamente resolve este problema é JEONG, WILLIAMS (1992), trabalho do qual se origina a distribuição *alias-free*, utilizada em grande parte desta tese. A forma que os autores implementam esta distribuição, no entanto, leva a uma rotina complexa, além de muito lenta. Apesar de ter sido largamente utilizada, esta distribuição não será comentada. A razão disso reside num algoritmo simples e extremamente rápido desenvolvido durante a elaboração desta tese, que será denominado apenas por versão 1 do autor. Esta versão

suplanta com facilidade a distribuição alias-free original tanto em velocidade de processamento quanto em simplicidade.

Para que a implementação da versão 1 seja feita, é necessário inicialmente modificar a expressão da classe geral, equação (II.75), reescrita na equação (III-2), de tal forma que se pareça com uma convolução do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)G(t-s)ds \quad (III-1)$$

Para isto parte-se da expressão da função de autocorrelação da classe geral, aqui reescrita,

$$R_f(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + \tau/2)f(u - \tau/2)\Phi(t - u, \tau)du \quad (III-2)$$

e faz-se a substituição

$$s = u - \tau/2 \quad (III-3)$$

onde deve-se ter em mente que a variável τ comporta-se como uma constante dentro desta integração. Desta forma as seguintes expressões se seguirão

$$\begin{aligned} u &= s + \tau/2 \rightarrow du = ds \\ u + \tau/2 &= s + \tau \\ t - u &= t - s - \tau/2 \end{aligned} \quad (III-4)$$

Substituindo as equações (III-4) na expressão da função de autocorrelação (III-2), vem

$$R_f(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s + \tau)f^*(s)\Phi(t - s - \tau/2, \tau)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\tau(s)G_\tau(t - s)ds \quad (III-5)$$

onde

$$\begin{aligned} F_\tau(s) &= f(s + \tau)f^*(s) \\ G_\tau(s) &= \Phi(s - \tau/2, \tau) \end{aligned} \quad (III-6)$$

e a expressão geral da classe de Cohen está transformada em uma convolução que pode ser computacionalmente implementada de uma forma eficiente. Se a janela for tal que

$\Phi(t, \tau) = 0$ se $|t| > |\tau|/2$, a função $G(s)$ será não-nula apenas no intervalo $s \in [0, \tau]$, o que é ótimo computacionalmente, como se verá a seguir.

A discretização da convolução (III-5) é feita a partir de

$$s = m\Delta t, \quad t = n\Delta t, \quad \tau = k\Delta t \quad (\text{III-7})$$

de tal forma que

$$R_f[n, k] = \sum_m F_k[m] G_k[n - m] \quad (\text{III-8})$$

$$\begin{aligned} F_k[m] &= f[m + k] f^*[m] \\ G_k[m] &= \Phi(m - k/2, k) \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

Se a janela tem a restrição de domínio citada acima, isto terá a consequência de que $G_k[m]$ somente será não-nula no intervalo $0 \leq m \leq k$. O fluxograma correspondente a esta implementação é mostrado na Figura III-4.

Após inicializar a matriz de resultado Cf , a rotina entra em um loop cuja variável contadora k é o tamanho da janela (em pontos). Definido o tamanho k da janela, são inicializados dois vetores $Fatia1$ e $Fatia2$ que conterão duas fatias distintas retiradas do sinal e dois vetores auxiliares Fk e Gk , argumentos da convolução, todos os vetores com tamanho $L-k$. O vetor Gk é então calculado a partir da expressão da função-janela $\Phi(t, \tau)$ escolhida.

O próximo passo é obter as duas fatias do sinal. A primeira fatia inicia no primeiro elemento do sinal e a segunda fatia inicia no elemento $k+1$. Ambas as fatias têm comprimento $L-k$. Após serem multiplicadas elemento-a-elemento, dando origem ao vetor Fk , é calculada a convolução com o vetor Gk . Existem algoritmos prontos que executam de forma muito rápida esta convolução. No presente caso foi utilizada a função intrínseca *conv* do MatLab. Se não se dispuser deste tipo de rotina à mão pode-se calcular a convolução da forma clássica como indicado na Figura III-4. O resultado é armazenado na coluna k da matriz-resultado Cf . Tendo o loop terminado é executada a FFT linha-por-linha da matriz Cf .

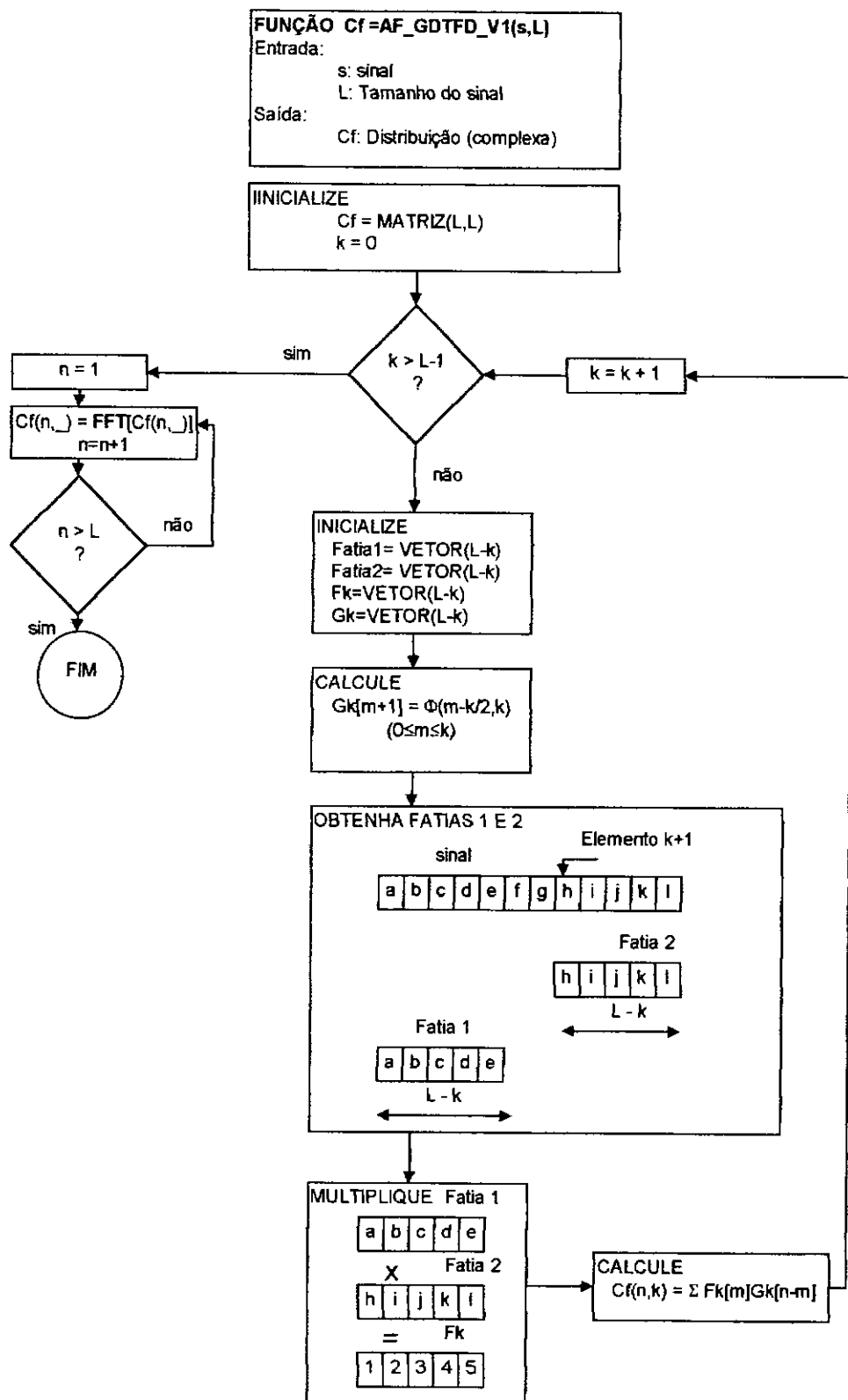


Figura III-4 Fluxograma de cálculo da forma anti-aliasing da classe geral (versão 1 do autor)

Adicionalmente pode-se desejar calcular a convolução utilizando-se a FFT, aproveitando-se do fato que uma convolução no tempo equivale a uma multiplicação em frequência. Esta é a única diferença entre a versão 1 e a versão 2 que será apresentada a seguir.

III.2.4 Implementação anti-aliasing da classe geral de distribuições tempo-frequência (versão 2 do autor)

O cálculo da convolução através da FFT gera um algoritmo muitas vezes mais rápido que todas as implementações anteriores. No entanto deve-se ter em mente que a convolução calculada usando-se a FFT é uma *convolução periódica*, isto é, valores do fim do sinal passam a influenciar o início da distribuição e vice-versa. Esta influência é tanto maior quanto menor for a frequência (na distribuição).

Apesar de teoricamente a diferença ser pequena, alguns ajustes necessários tornam a implementação da versão 2 um tanto diferente da versão 1. A Figura III-5 mostra o fluxo de cálculo para esta implementação.

Ao contrário da versão 1, esta rotina inicializa os vetores correspondentes às duas fatias *Fat1* e *Fat2*, os vetores auxiliares *Fk* e *Gk* e a matriz de resultados *Cf* logo no princípio da execução. Todos os vetores têm o mesmo tamanho L do sinal. Pelo fato de que a FFT será calculada diretamente sobre os vetores auxiliares, também se exige que o tamanho do sinal seja uma potência de dois ou então que se complete com zeros até se atingir esta potência.

A seguir entra-se em um loop cuja variável contadora é a mesma k da versão 1, o tamanho da janela. Definido o tamanho k da janela, calcula-se o vetor auxiliar Gk a partir da expressão da janela $\Phi(t, \tau)$ escolhida. As duas fatias são obtidas exatamente da mesma forma que a versão 1, com a única diferença que devem ser zerados os elementos além da posição $L-k$. Estas duas fatias são multiplicadas elemento-a-elemento dando origem ao vetor auxiliar Fk .

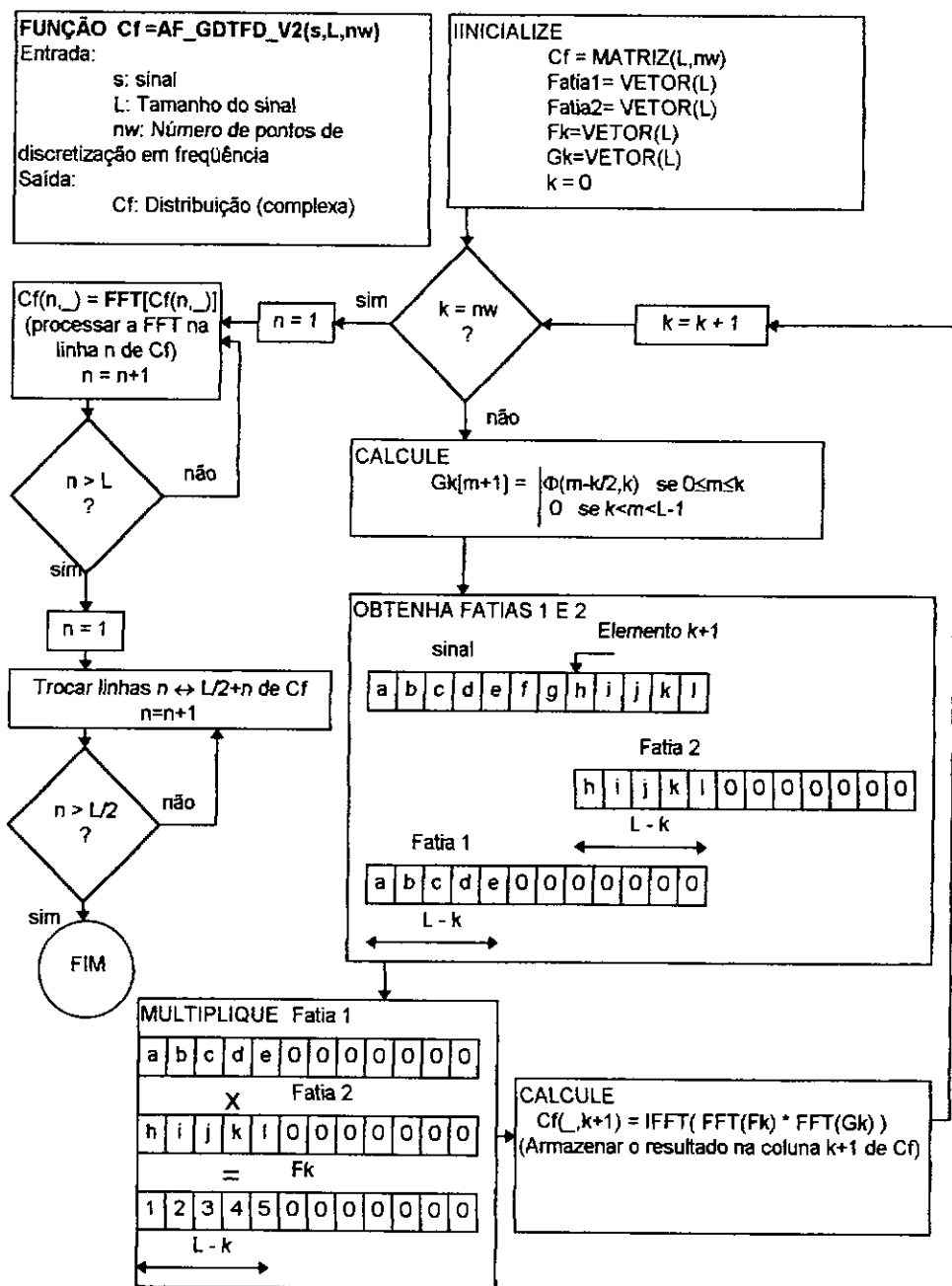


Figura III-5 Fluxograma de cálculo da forma anti-aliasing da classe geral (versão 2 do autor)

A convolução começa a ser calculada executando-se a FFT sobre os dois vetores auxiliares Fk e Gk . Estes vetores, já no domínio da frequência, são então multiplicados elemento-a-elemento. Sobre o resultado desta multiplicação é executada a transformada inversa, a IFFT. O vetor resultante é então armazenado na k -ésima coluna da matriz-resultado Cf .

Terminado o loop controlado pela variável k , é executada a FFT linha-a-linha na matriz-resultado Cf . Por fim, trocam-se as linhas da matriz Cf conforme indicado na Figura III-5. Estas linhas devem ser trocadas ao final da rotina pois as implementações computacionais da FFT colocam as frequências negativas no final do vetor, trocando-se a ordem natural no tempo.

Nesta implementação optou-se por permitir um número arbitrário $m\omega$ de pontos de discretização em frequência. Em todas as implementações anteriores é possível fazê-lo, porém nunca tão simplesmente como nesta. Diminuindo-se este valor $m\omega$, aumenta-se o intervalo de frequência $\Delta\omega$, ficando a frequência máxima (metade da frequência de digitalização) inalterada, no entanto. Se é desejável obter somente uma visão sem compromisso do que está acontecendo no sinal, pode-se iniciar com um valor baixo para $m\omega$, tipicamente 64 pontos. Se tudo estiver satisfatório, calcula-se então a distribuição total com o máximo número de pontos de discretização em frequência, isto é, $m\omega=L$.

No entanto nem sempre é possível calcular a distribuição total pois o número de elementos da matriz-resultado Cf é $m\omega \times L$. Se o sinal tem pontos demais pode-se chegar num valor satisfatório de $m\omega$, menor que L , que permita que a distribuição seja calculada sem exceder o limite de memória do computador. Por fim, a redução do número de pontos em frequência não altera a conservação da energia ou das marginais desde que a janela $\Phi(t, \tau)$ seja construída para tal.

III.2.5 A Transformada Wavelet Contínua

Esta distribuição, apresentada no item II.5.2, não apresenta problemas para o cálculo pois é composta por apenas uma simples integral, vista na equação (II-109) e repetida aqui na equação (III-10).

$$W_f(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \psi_{\lambda, t}(\tau) d\tau. \quad (\text{III-10})$$

Como a transformada está em função da variável escala λ , o único cuidado a ser tomado é obter-se convenientemente a frequência associada através da equação

$$\omega = \frac{\omega_0}{\lambda} \quad (\text{III-11})$$

onde ω_0 é a frequência média da wavelet-mãe $\psi(\tau)$ sendo utilizada.

III.2.6 A Fast Wavelet Transform

O algoritmo rápido de decomposição para wavelets, chamado de *Fast Wavelet Transform* (FWT), se deve a MALLAT (1987) e resulta na obtenção de dois filtros para decomposição $h_d(x)$ (passa-baixa) e $g_d(x)$ (passa-alta) e dois filtros para a síntese $h_s(x)$ (passa-baixa) e $g_s(x)$ (passa-alta), relacionados com os coeficientes a_k da forma

$$h_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_{N-1}, a_{N-2}, \dots, a_2, a_1, a_0] \quad (\text{III-12})$$

$$g_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-a_0, a_1, -a_2, \dots, a_{N-3}, -a_{N-2}, a_{N-1}] \quad (\text{III-13})$$

$$h_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-2}, a_{N-1}] \quad (\text{III-14})$$

$$g_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_{N-1}, -a_{N-2}, a_{N-3}, -a_{N-4}, \dots, a_2, a_1, a_0] \quad (\text{III-15})$$

O algoritmo para decomposição pode ser resumido na Figura III-6.

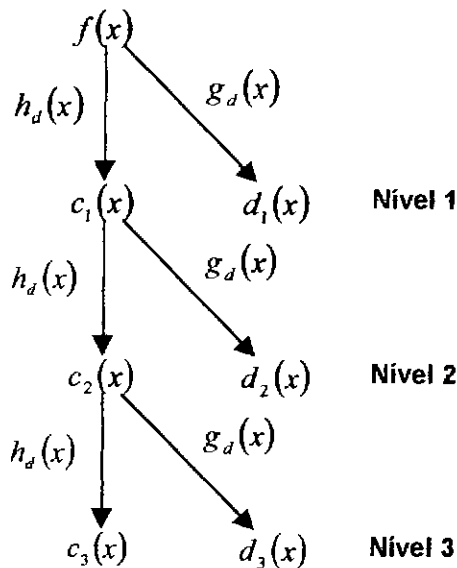


Figura III-6 Esquema da análise (decomposição) usando a FWT

Observe que os sinais objeto da análise são discretos e, portanto, o índice x é um inteiro positivo, ou seja, $x \in \mathbb{N}$. Evidentemente a análise rápida só poderá ser realizada com wavelets que possuam coeficientes a_k discretos, o que exclui as pré-wavelets e a wavelet de Meyer, descritas no item II.6.

O processo indicado na Figura III-6 pelas setas é descrito por

1. Fazer uma convolução entre $f(x)$, ou $c_{j-1}(x)$, com $h_d(x)$ e do resultado obtido manter somente os índices ímpares, processo conhecido como *decimação*, obtendo os *coeficientes de aproximação* $c_j(x)$ correspondentes ao nível j de análise. Desta forma a aproximação obtida terá somente metade do tamanho do sinal anterior.
2. fazer uma convolução entre $f(x)$, ou $c_{j-1}(x)$, com $g_d(x)$ e do resultado obtido manter somente os índices ímpares, obtendo os *coeficientes de detalhe* $d_j(x)$ correspondentes ao nível j de análise. Igualmente o detalhe terá somente metade do tamanho do sinal anterior.

O processo se repete indefinidamente até que a aproximação tenha o tamanho mínimo dos filtros, a ordem N da wavelet que está sendo usada, ou até que um grau satisfatório de detalhe seja alcançado. Por causa desta estrutura intrinsecamente binária da análise, a FWT deve ser aplicada somente em sinais cujo comprimento seja uma potência de dois, o que não é uma grande restrição visto que as implementações mais populares da FFT também a exige. Ao final da análise ter-se-á um conjunto de detalhes $d_j(x)$ e uma aproximação final $c_J(x)$. No caso da Figura III-6 serão gerados os detalhes d_1, d_2, d_3 e a aproximação final c_3 .

A síntese, chamada de *Inverse Fast Wavelet Transform* (IFWT), é análoga à decomposição e pode ser melhor entendido com a ajuda da Figura III-7

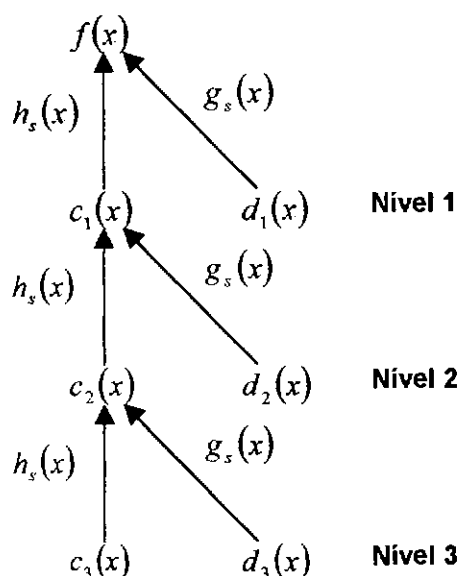


Figura III-7 Esquema da síntese (reconstrução) usando a IFFT

O processo indicado na Figura III-7 pelas setas é descrito por

1. Inserir zeros entre os coeficientes de aproximação $c_j(x)$ e de análise $d_j(x)$.
2. fazer uma convolução entre $c_j(x)$ e $h_s(x)$.
3. fazer uma convolução entre $d_j(x)$ e $g_s(x)$.
4. somar elemento-a-elemento os vetores resultantes dos passos 2 e 3 para obter os coeficientes de aproximação do nível anterior $c_{j-1}(x)$.

A FWT não reserva problemas para ser implementada e leva a um algoritmo extremamente simples. Se as convoluções puderem ser calculadas com uma rotina específica - como indicado na implementação da versão 1 - o algoritmo também será muito rápido. Como o tamanho dos filtros geralmente é pequeno - no máximo 20 elementos - o cálculo das convoluções utilizando a FFT revela-se improdutivo.

Por fim deve-se notar que a FWT nunca leva a uma distribuição tempo-frequência, mas a um conjunto finito de coeficientes relacionados com níveis de uma escala. Por este motivo a FWT é inútil para visualizar o sinal no plano tempo-frequência, porém tem aplicações como compressão de sinais ou eliminação de ruídos.

III.3 Análise de custo computacional

Muitas vezes a utilização de uma determinada técnica tempo-frequência pode ser inviabilizada pelo seu longo tempo de execução. De fato, algumas implementações, como a alias-free, são inviáveis em determinados tipos de aplicações, quando geralmente se usa o espectrograma por ser mais rápido. Desta forma, este item tem por objetivo apresentar uma análise do desempenho das rotinas implementadas. São usados como quantificadores o tempo de execução e o número de operações matemáticas - flops (*FLOating Point operationS*). A transformada wavelet discreta, FWT, não foi analisada pois não gera distribuições tempo-frequência, objetivo final desta análise.

O flop é uma unidade já consagrada no contexto de *benchmarking* de computadores de alto desempenho. A Tabela III-1 apresenta a quantidade de flops para as operações matemáticas mais utilizadas ao se processar uma TFD.

Tabela III-1 Flops utilizados em operações aritméticas comuns

<i>Operação</i>	<i>Real</i>	<i>Complexa</i>
Soma/subtração	1 flop	2 flops
Multiplicação/divisão	1 flop	6 flops
Exponenciação	1 flop	8 flops

No MatLab, cada função intrínseca encarrega-se de incrementar uma variável estática com o número de flops executados. Quando uma função do usuário escrita em outra linguagem for utilizada, esta função deve responsabilizar-se por atualizar esta variável com o número correto de flops executados.

A Tabela III-2 apresenta os resultados para o processamento de um sinal discreto padrão. Variando-se o número de pontos do sinal obtém-se seis medições: a memória ocupada por cada uma das cinco distribuições e a quantidade de operações matemáticas exigida por cada uma. Adicionalmente inclui-se como comparação a quantidade de operações matemáticas exigidas por uma FFT de um sinal de mesmo tamanho.

Foram analisadas cinco distribuições: a wavelet contínua, o espectrograma, a distribuição de Wigner-Ville, a distribuição alias-free de JEONG, WILLIAMS (1992) e a versão 2 do autor desta tese.

Tabela III-2 Resumo do número de operações matemáticas (flops) realizadas por cada técnica

<i>Sinal (pontos)</i>	<i>Memória exigida pela distri buição</i>	<i>FFT (flops)</i>	<i>Wavelet contínua (flops)</i>	<i>Espectro -grama (flops)</i>	<i>Wigner- Ville (flops)</i>	<i>Versão 2 do autor (flops)</i>	<i>Alias- Free (flops)</i>
16	4 Kb	0,3 k	2 k	5 k	6 k	27 k	21 k
32	16 Kb	0,6 k	32 k	21 k	52 k	127 k	127 k
64	64 Kb	1,4 k	111 k	93 k	226 k	570 k	873 k
128	256 Kb	3,0 k	327 k	404 k	975 k	2,5 M	6,4 M
256	1 Mb	6,6 k	1,2 M	1,8 M	4,2 M	10,9 M	48.7M
512	4 Mb	14,3 k	5,4 M	7,6 M	18,2M	47,5M	380 M

Inicialmente pode-se observar na Tabela III-2 que todas as distribuições implementadas apresentam um custo computacional bem superior ao necessário para uma análise através da FFT. Dentre as distribuições, a wavelet contínua e o espectrograma são os que exigem menos recursos computacionais. A distribuição de Wigner-Ville necessita de aproximadamente duas vezes mais operações matemáticas que o espectrograma. A versão 2 do autor e a alias-free, esta última uma verdadeira devoradora de recursos computacionais, são as mais caras, porém são as de melhor qualidade. Para a versão 2, particularmente, obteve-se uma boa correlação estatística e observa-se que executa exatamente $30N^2 \log N$ flops.

Além disso o espectrograma e a distribuição de Wigner-Ville exibiram comportamento N^2 em relação ao número de pontos do sinal enquanto a distribuição alias-free teve

comportamento N^3 . Estas relações podem ser melhor visualizadas através da Figura III-8, a qual apresenta estes resultados em gráficos desenhados em escala logarítmica.

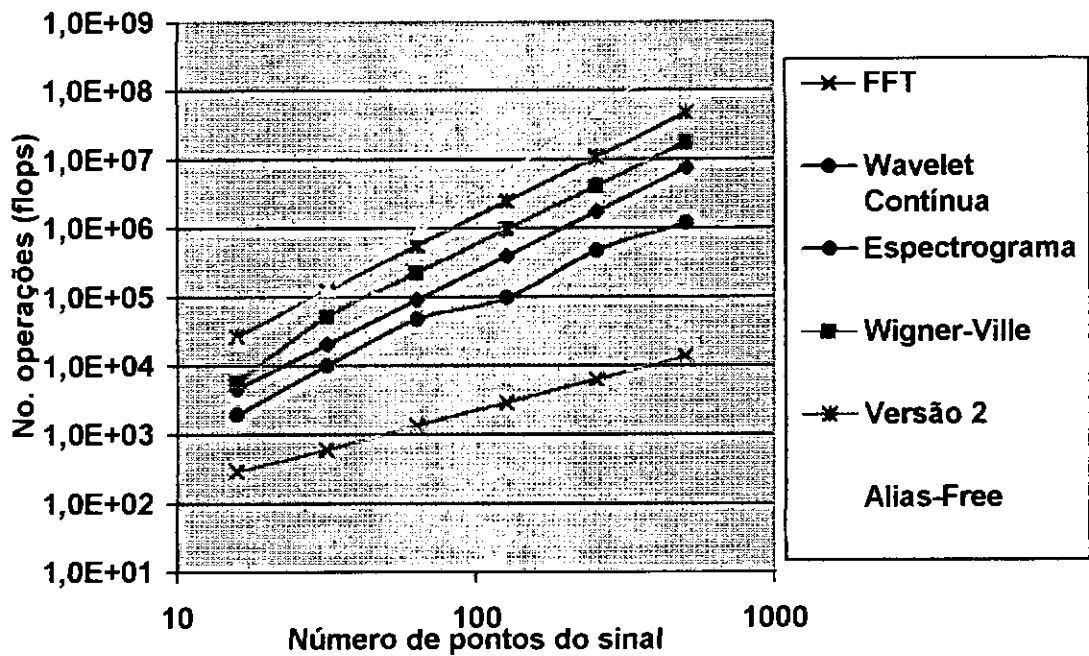


Figura III-8 Número de operações matemáticas utilizadas por cada técnica

Pode-se observar na Figura III-8 que existe realmente um comportamento linear, para todas as distribuições, entre o número de flops e o número de pontos do sinal quando ambos são plotados em escala logarítmica.

Na segunda parte do teste avaliou-se o tempo gasto no cálculo das distribuições. Sendo o tempo total a soma dos tempos gastos com as operações matemáticas mais outras operações como gerenciamento de memória, loops internos, chamadas de subrotinas, o resultado não é proporcional à avaliação anterior (flops). Neste teste foi utilizado um microcomputador tipo PC-486 DX2 66MHz com 16Mb de memória RAM rodando sob o sistema operacional Windows© 95 da Microsoft©. Em todos os testes a memória virtual foi desabilitada de forma a não interferir nos resultados. Os resultados estão compilados na Tabela III-3.

Tabela III-3 Comparação de tempos de execução para várias técnicas tempo-frequência

<i>Sinal (pontos)</i>	<i>Espectro- grama (s)</i>	<i>Wavelet contínua (s)</i>	<i>Wigner- Ville (s)</i>	<i>Versão 2 do autor (s)</i>	<i>Alias- Free (s)</i>
16	0,66	0,95	2,08	1,86	3,08
32	0,70	1,22	3,40	1,95	6,09
64	0,88	2,53	6,43	3,12	14,61
128	1,54	5,28	12,19	5,99	49,52
256	3,08	9,39	24,88	13,47	209,26
512	8,02	22,24	58,17	25,60	1098,77

Na Tabela III-3 observa-se o excelente comportamento da versão 2 do autor, reduzindo o tempo de execução em 97% em relação à distribuição similar alias-free, para o caso do sinal com 512 pontos. Para sinais de maior tamanho a diferença relativa é ainda maior. Esta redução tão drástica, não percebida na avaliação anterior (flops), deve-se principalmente à simplicidade da implementação que reduz o número de loops internos, operações lógicas, aritmética de inteiros, chamada de subrotinas, em suma, todas as operações que não são computadas como cálculos de ponto-flutuante mas que têm grande peso no tempo total de execução. Uma forte correlação indica que o tempo de execução desta técnica é, para as condições deste teste, $N/20$ segundos, ou três vezes o tempo de cálculo do espectrograma.

Apreende-se da Tabela III-3 que a distribuição de Wigner-Ville tende a ser cerca de oito vezes mais lenta que o espectrograma, enquanto a distribuição alias-free tem um comportamento proporcional a N^3 , tornando-se impraticável utilizá-la mesmo para sinais curtos. A Figura III-9 mostra um gráfico plotado em escala logarítmica a partir das informações da Tabela III-3.

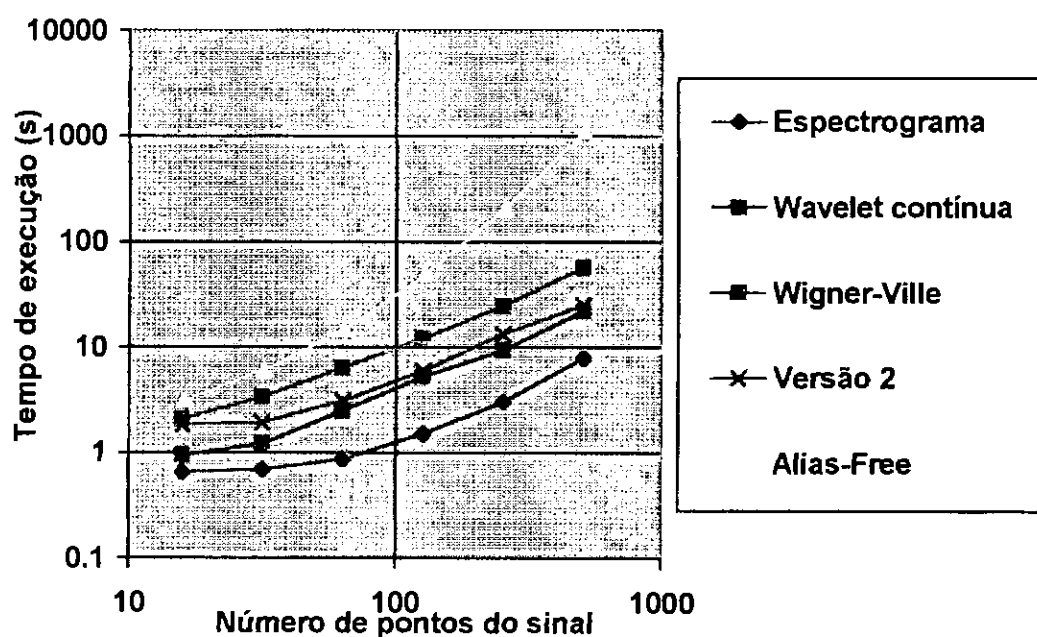


Figura III-9 Comparação do tempo de execução de diversas técnicas tempo-freqüência

Em todos os testes foram utilizadas as versões *full* das rotinas, isto é, se o sinal possui 512 pontos usa-se uma discretização de 512 pontos em freqüência. No entanto tal discretização é desnecessária pois para visualização é suficiente usar 64 ou 128 pontos, desde que não se deseje fazer um *zoom* na distribuição. Assim como se mostrou para a versão 2, foram desenvolvidas para esta tese versões modificadas de todas as técnicas que permitem esta discretização parcial e o resultado é que reduzem drasticamente o tempo de execução, o número de operações matemáticas necessárias e a quantidade de memória exigida mantendo-se o aspecto geral da distribuição.

III.4 Apresentação gráfica

Para uma perfeita análise qualitativa das distribuições tempo-freqüência é essencial ter-se associado aos algoritmos de cálculo, aplicativos capazes de gerar diversos tipos de gráficos tridimensionais.

A forma de visualização não é de menor importância que a forma de cálculo. Uma apresentação gráfica incorreta pode vir a invalidar o cálculo ou mesmo impedir que certos detalhes dos resultados sejam percebidos. A questão essencial é que determinados

gráficos são apropriados para se ver detalhes, outros são apropriados para dar uma visão global do que está ocorrendo. Alguns permitem ver com clareza pontos de máximo, outros destacam regiões de grandes gradientes. Todas estas características devem ser evidenciadas ao se analisar um sinal desconhecido, visto que não se sabe o que nele ocorre. Por isso deve-se ter em mãos um arsenal de formas gráficas e utilizá-las da forma mais adequada.

A seguir apresentam-se alguns tipos de gráfico utilizados para a visualização dos resultados obtidos, excetuando-se os gráficos bidimensionais clássicos (X-Y) que são perfeitamente conhecidos.

III.4.1 Gráficos 3D

São chamados gráficos 3D as formas gráficas bidimensionais de apresentação que representam explicitamente todos os eixos de um sistema tridimensional, geralmente através de projeção ou perspectiva.

Ao se calcular uma perspectiva existem seis graus de liberdade referentes à localização e à direção da visão do observador que devem ser fixados: três translações e três rotações. Não é preciso determinar todos. Requerendo-se que a projeção da superfície seja representada no seu máximo tamanho dentro das bordas do gráfico eliminam-se três graus de liberdade. Adotando-se o observador em pé, paralelo e no sentido do terceiro eixo (z) do sistema, elimina-se mais um grau. Restam portanto dois graus de liberdade referentes a uma rotação no sentido do terceiro eixo (z) e uma elevação. Uma elevação zero corresponde a uma pessoa vendo uma cidade da rua. Por outro lado, uma elevação de 90 graus corresponde a uma visão da cidade a partir de um avião. Elevações baixas têm a vantagem de aumentar a visualização das coordenadas z mas tendem a esconder grande parte do sinal atrás das elevações. São apropriadas para serem usadas com distribuições de sinais monocomponentes, isto é, que contenham somente uma superfície de interesse. Quanto menor a elevação maior parte do sinal ficará visível mas as variações de altura das superfícies ficarão escamoteadas. Um meio termo portanto é essencial e elevações de 60 a 70 graus são boas escolhas.

A rotação relativa ao eixo z foi padronizada nesta tese como 20 graus, partindo-se da posição do eixo x paralelo à horizontal mas em alguns casos foram usadas rotações maiores como 45 ou 60 graus. Como esta tese discute distribuições tempo-frequência, sempre o eixo x estará associado ao tempo, o eixo y à frequência e o eixo z às amplitudes das distribuições. A figura seguinte mostra a posição padronizada para estes eixos.

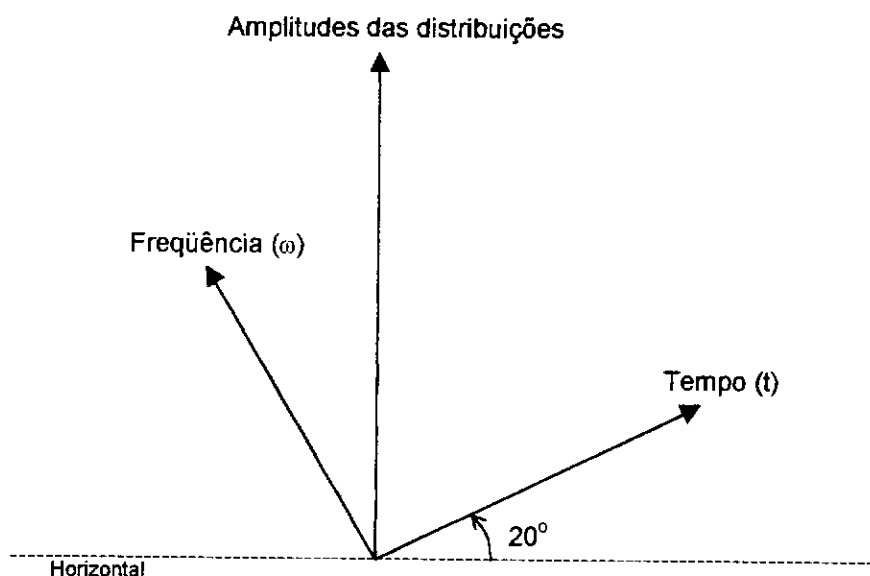


Figura III-10 Posicionamento padrão de eixos para distribuições tempo-frequência

Além da posição dos eixos é fundamental levar em consideração a maneira de apresentar os resultados. Dentre as formas existentes, a mais utilizada nesta tese é a malha. Um exemplo é mostrado na Figura III-11, na qual está escrita a sigla “COPPE”, em relevo.

Este gráfico permite uma grande percepção dos gradientes nas duas direções, dados pela inclinação das linhas que o compõe. Observe que a noção de altitude não é dada por nenhuma outra informação que não seja a inclinação das linhas. Para isto precisa-se adicionar ao gráfico mais uma fonte de informação para suprir esta deficiência. Comumente se faz isso acrescentando-se cores, associadas a uma escala correspondente às alturas, conforme ilustrado na Figura III-12.

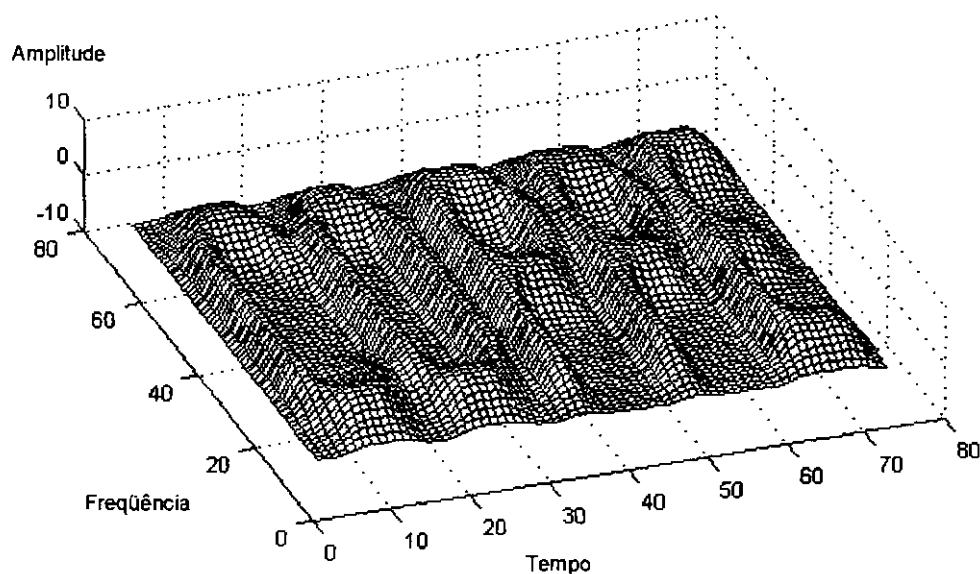


Figura III-11 Gráfico de malha monocromático

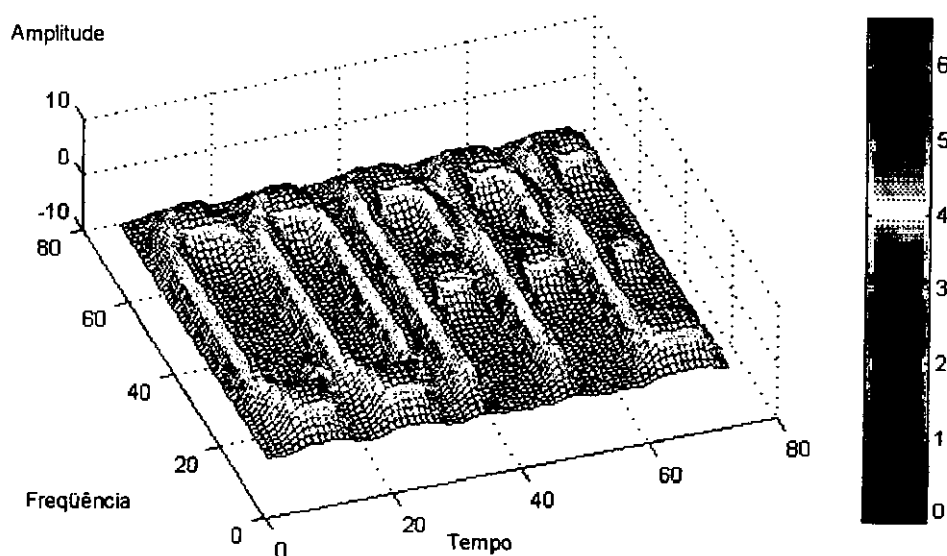


Figura III-12 Gráfico de malha em cor

Com a utilização de cores, conforme mostrado na Figura III-12, as amplitudes do gráfico ficam melhor representadas do que pela simples inclinação das linhas. A desvantagem deste método é que a continuidade das linhas é quebrada pela variação de cores, prejudicando a compreensão dos gradientes. A solução seguinte contorna esta dificuldade associando as cores ao interior da malha e não mais às linhas, conforme pode ser visto na Figura III-13.

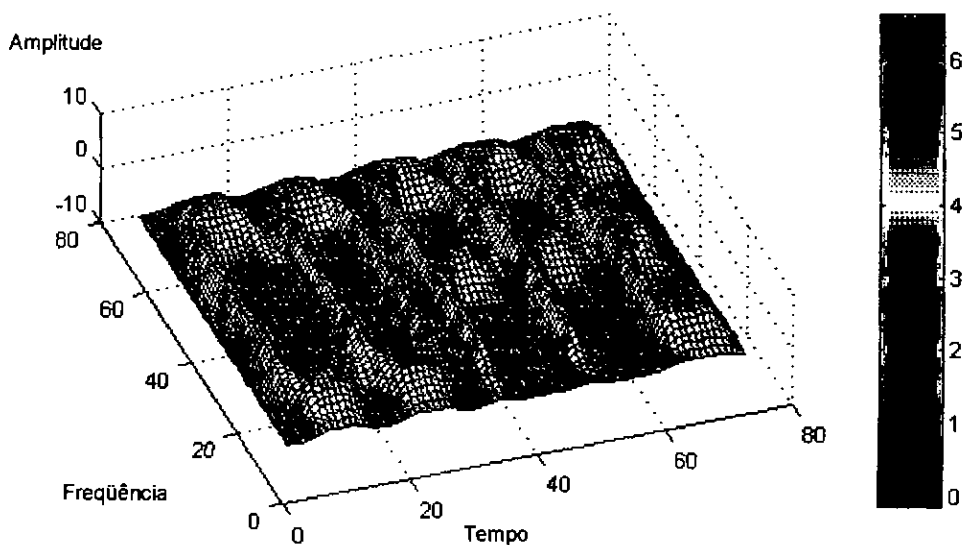


Figura III-13 Gráfico de malha em cor (interna)

A desvantagem deste tipo de solução (vide Figura III-13) é que as cores mais escuras tendem a se confundir com as linhas (cor preta) e portanto deve-se utilizar sempre que possível uma escala de cores mais clara.

Deve-se destacar que, de um modo geral, todos os gráficos tipo malha têm uma grande limitação quanto à resolução. Se for usada baixa densidade de linhas o gráfico ocultará os detalhes da figura. Por outro lado, se for usada grande densidade de linhas o gráfico esconderá as cores até o limite em que se tornará totalmente negro. O gráfico da Figura III-13 está claramente no limite e este limite é dado pela visão humana tanto quanto pela qualidade do dispositivo gráfico de impressão, seja plotter ou impressora. Normalmente as distribuições comuns têm seu tamanho limitado pelo número de pontos do sinal, tipicamente 512x128 ou 1024x256 pontos. Para se construir um gráfico tipo malha e imprimi-lo à densidade usual das impressoras laser ou jato de tinta (600 dpi), é essencial não ultrapassar-se o tamanho 150x150 pontos. A distribuição da Figura III-13, por exemplo, possui 70x60 pontos. Devido a isto precisa-se invariavelmente diminuir o tamanho da distribuição.

Isto pode ser feito simplesmente descartando-se pontos intermediários, o que pode gerar efeitos de aliasing bidimensional. Contorna-se este problema aplicando-se um filtro 2D

passa-baixa, e então efetuar o *resampling*¹, o que equivale a suavizar a distribuição. Como a principal qualidade das distribuições tempo-frequência é a resolução em ambos os domínios, a suavização estará trabalhando contra o algoritmo de cálculo da distribuição. Se o caso é suavizar no final, não é necessário usar portanto uma distribuição de alta resolução como a alias-free, que demanda um gasto de tempo excessivo, bastando para isto uma distribuição de baixa resolução como o espectrograma, que é simples e rápido.

Uma outra solução para este problema é usar formas gráficas de grande resolução como o gráfico tipo *surface* mostrado na Figura III-14 ou usar gráficos tipo 2-1/2D apresentados no próximo item.

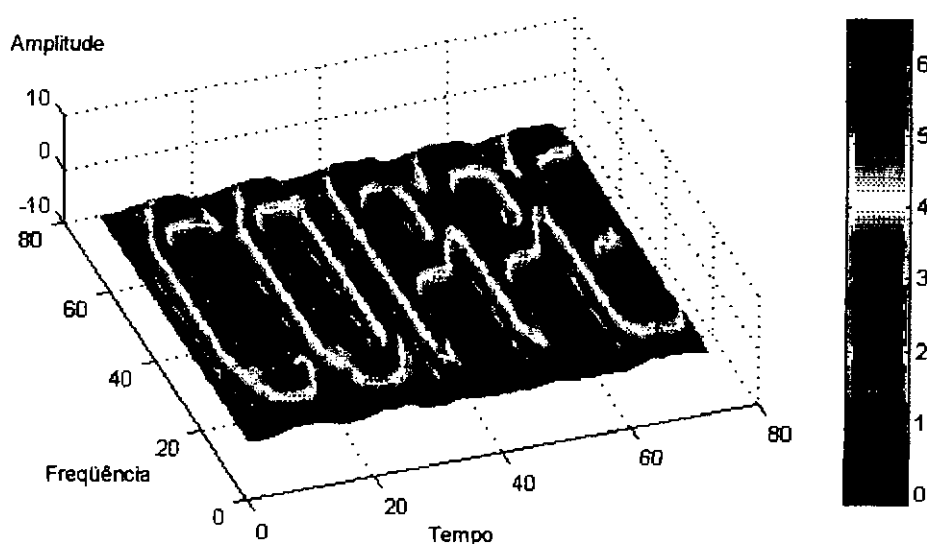


Figura III-14 Gráfico *surface*

No gráfico tipo *surface* (vide Figura III-14) não é apresentada a grade e o desenho fica mais claro. Nas condições de impressão desta tese (600 dpi) pode-se mostrar distribuições de até 400x400 pontos.

¹ Em processamento digital de sinais, o aumento ou diminuição do número de pontos de um sinal mantendo-se o mesmo domínio no tempo. No caso, a diminuição do número de pontos por interpolação.

III.4.2 Gráficos 2-1/2D

Gráficos 2-1/2D são formas gráficas de apresentação puramente bidimensionais que através de alguma característica particular levam ao leitor à abstração de uma superfície tridimensional. São eles os gráficos de imagem e os gráficos de contorno.

A principal vantagem desta família de gráficos é poder-se localizar exatamente um ponto de interesse no plano x-y. Os gráficos 3D, por estarem em perspectiva, dificultam a localização com precisão de um ponto. Outra grande vantagem deste grupo de gráficos é mostrar integralmente todos os pontos pertencentes ao domínio, ao contrário dos gráficos 3D que em perspectiva podem esconder parte do domínio atrás de elevações. São úteis, por exemplo, quando se quer obter as coordenadas dos pontos de máximo de uma determinada superfície ou delimitar com precisão uma determinada região importante. São também geralmente renderizados² em um tempo muito mais curto por não utilizarem algoritmos de superfícies escondidas como o zbuffer.

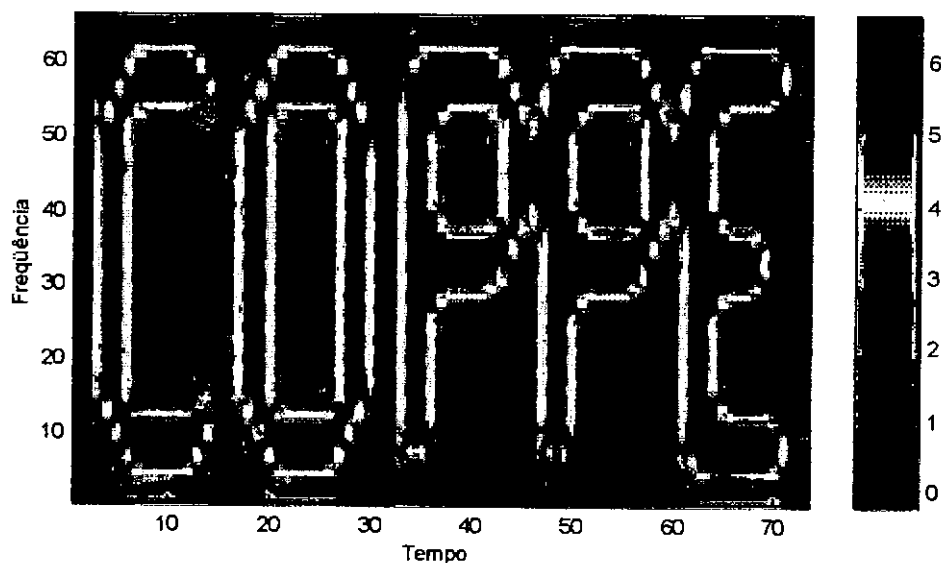


Figura III-15 Gráfico tipo imagem

O gráfico da Figura III-15 é chamado de imagem porque é como uma fotografia da

² Em processamento de imagens, todo o processo de cálculo realizado desde o modelo matemático até a imagem pronta.

distribuição. A noção de amplitude é dada pelas cores e o fato de ser uma projeção direta no plano X-Y adiciona facilidade à localização de determinado ponto. Note-se que este gráfico exibe claramente o grão³ da figura, indicando que ele aceita uma densidade de pontos muito maior que a utilizada nesta figura.

Se é desejável acentuar a localização pode-se acrescentar linhas verticais e horizontais na cor preta, como mostrado na Figura III-16.

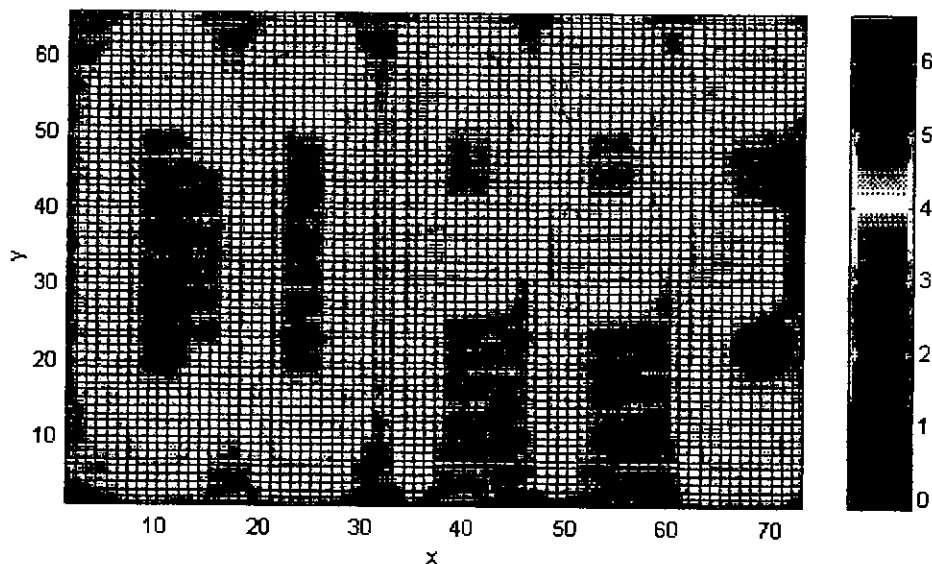


Figura III-16 Gráfico tipo imagem com grid auxiliar

Observe-se na Figura III-16 que neste caso não existe a necessidade de efetuar-se o “resampling” da distribuição, podendo as linhas serem acrescentadas a intervalos regulares independentemente dos que originaram os resultados.

Uma outra forma de apresentação dos resultados é através do gráfico do tipo contorno, também chamado de gráfico de curvas de nível por analogia à topografia. A Figura III-17 mostra um exemplo deste tipo de gráfico que combina resolução, localização e acentuação de detalhes. Geralmente é através do gráfico de contorno que se evidencia a individualidade dos componentes de um sinal multicomponente. O número de curvas de nível pode ser variado de 5, 10 (atual) até 20. Por acompanhar linhas de mesma amplitude a noção de gradiente é fornecida pela proximidade das linhas.

³ Em fotografia, a menor unidade de cor de uma imagem. Equivalente ao pixel em informática.

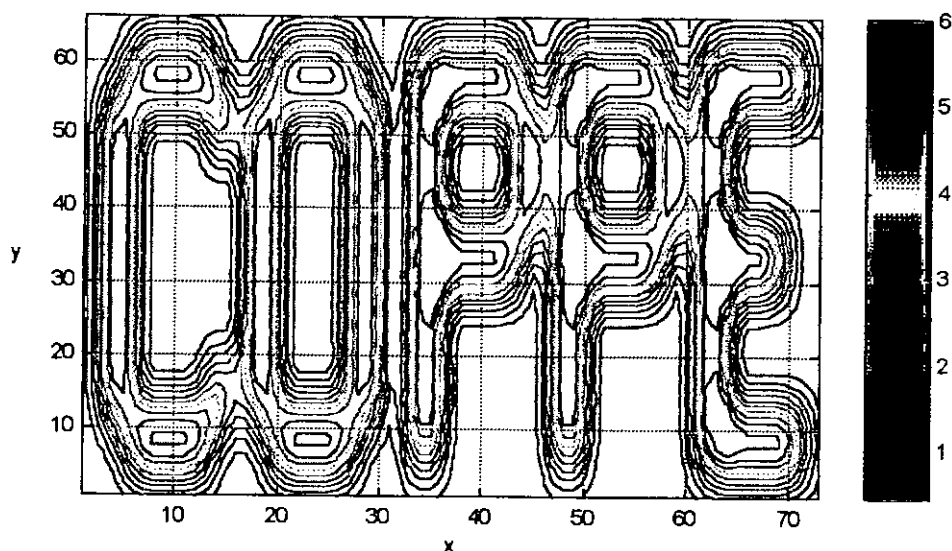


Figura III-17 Gráfico tipo contorno

III.4.3 Escalas de cor

A escala de cores utilizada nos gráficos antecedentes, variando do azul ao vermelho, é chamada de *jet* (jato) por ser muito utilizada em estudos do comportamento do escoamento de fluidos. É apropriada quando se deseja evidenciar e diferenciar regiões de máximo e de mínimo. Entretanto outras escalas de cores podem ser utilizadas e aqui serão mostrados mais três, evidenciando suas propriedades.

Uma das exigências mais comuns ao se publicar trabalhos em congressos ou revistas especializadas é a impressão de gráficos em preto-e-branco ao invés de em cores. Isto se faz necessário tanto para diminuir o custo da impressão como o da reprodução, além de permitir a utilização de impressoras mais rápidas como as *laser* que usualmente não são coloridas. Desta forma faz-se necessário adotar a escala de cinza como um padrão de edição.

Na Figura III-18 é mostrado um exemplo de escala de cinza no qual apresenta-se uma distribuição explicitamente calculada por

$$f(t, \omega) = \cos(2t)\cos(2\omega)e^{-\frac{3}{2}(t^2 + \omega^2)} + 0.01\cos 20(t + \omega) \quad (\text{III-16})$$

Como pode-se observar na Figura III-18, a grande desvantagem deste tipo de gráfico é a

baixa qualidade de visualização quando impressa. Isto fica mais claro quando este gráfico é comparado ao da Figura III-19 que adota o padrão *jet* utilizado nos itens anteriores.

A próxima escala a ser testada é chamada de *Hue Saturation Value* (HSV) pois varia o componente cor (hue) do modelo HSV⁴. Devido ao fato deste padrão começar e terminar no vermelho é útil para a identificação de funções periódicas. Efetivamente ficam claros os pontos de inclinação nula (cristas e depressões). Este padrão é mostrado na Figura III-20 com a distribuição expressa pela equação (III-16).

Observando-se o resultado obtido com esta nova escala de cores HSV (Figura III-20) e também o obtido com a escala *jet* (Figura III-19) pode-se observar que somente a primeira parcela da equação (III-16) está visível, por ter maior amplitude. Uma forma de contornar esta dificuldade é variar muito rapidamente as cores dentro da escala. Isto é mostrado na Figura III-21 a qual utiliza uma escala chamada de *flag* por conter as cores da bandeira norte-americana: vermelho, azul e branco. Quaisquer outras cores podem ser utilizadas mas por ser o azul a cor contrária ao vermelho no círculo cromático e o preto o contrário do branco, o contraste fica mais acentuado.

Com este novo padrão de cores evidentemente se perde a visão da primeira parcela da equação (III-16) mas a segunda parcela ficou bem acentuada. Desta forma esta escala de cores pode ser utilizada quando os componentes maiores de um sinal já foram identificados e procura-se então por subcomponentes de muito menor amplitude.

⁴ Ao lado do modelo RGB (Red,Green,Blue), uma forma de representação das cores através de números.

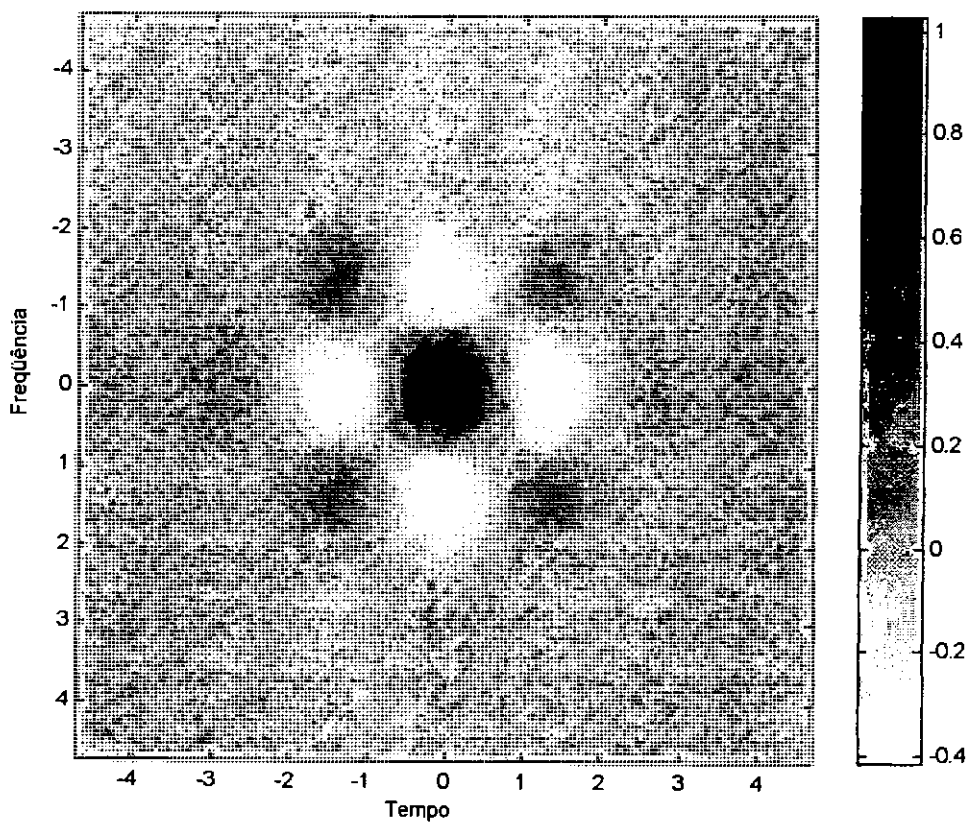


Figura III-18 Exemplo de escala de cor cinza

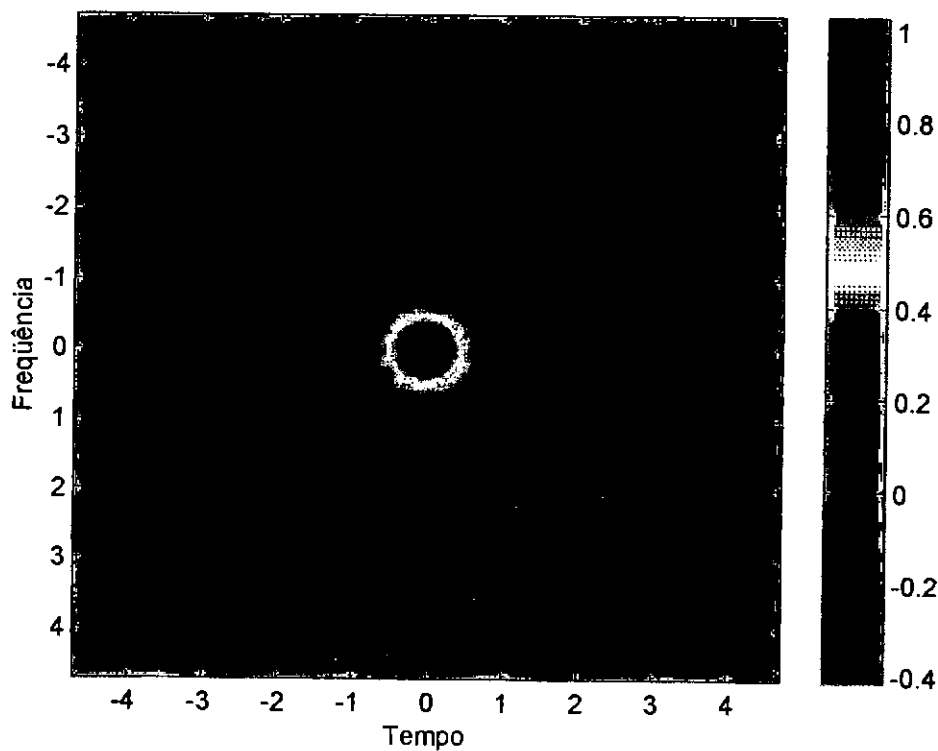


Figura III-19 Exemplo de escala de cor *jet*

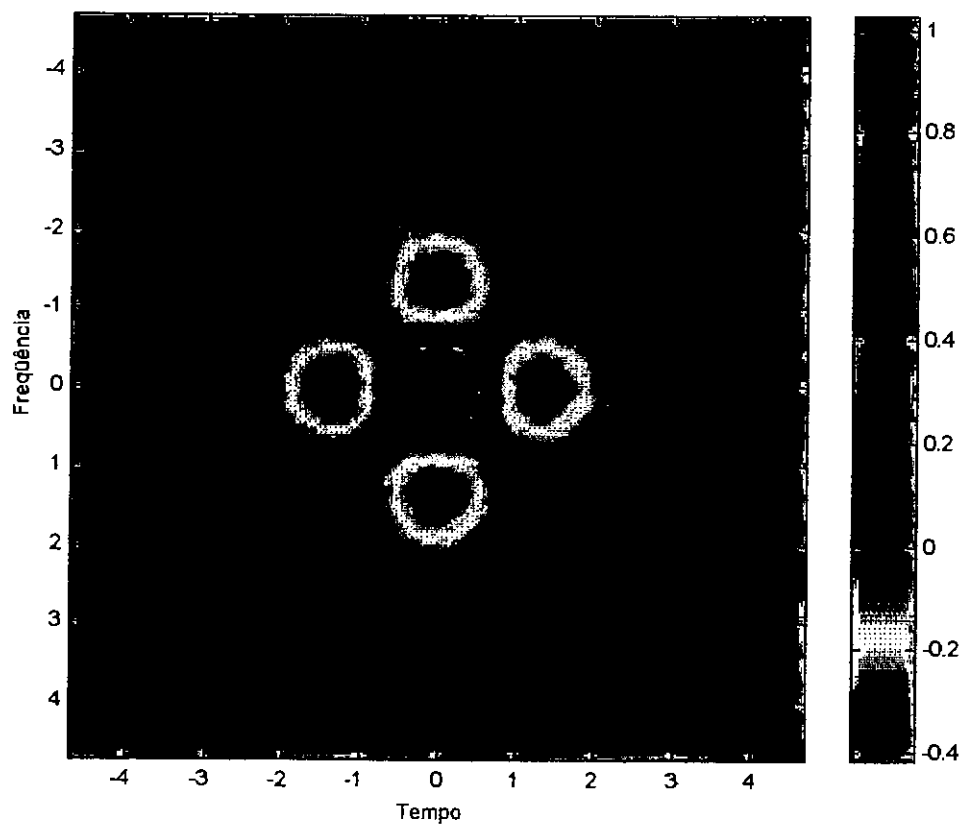


Figura III-20 Exemplo de escala de cor HSV

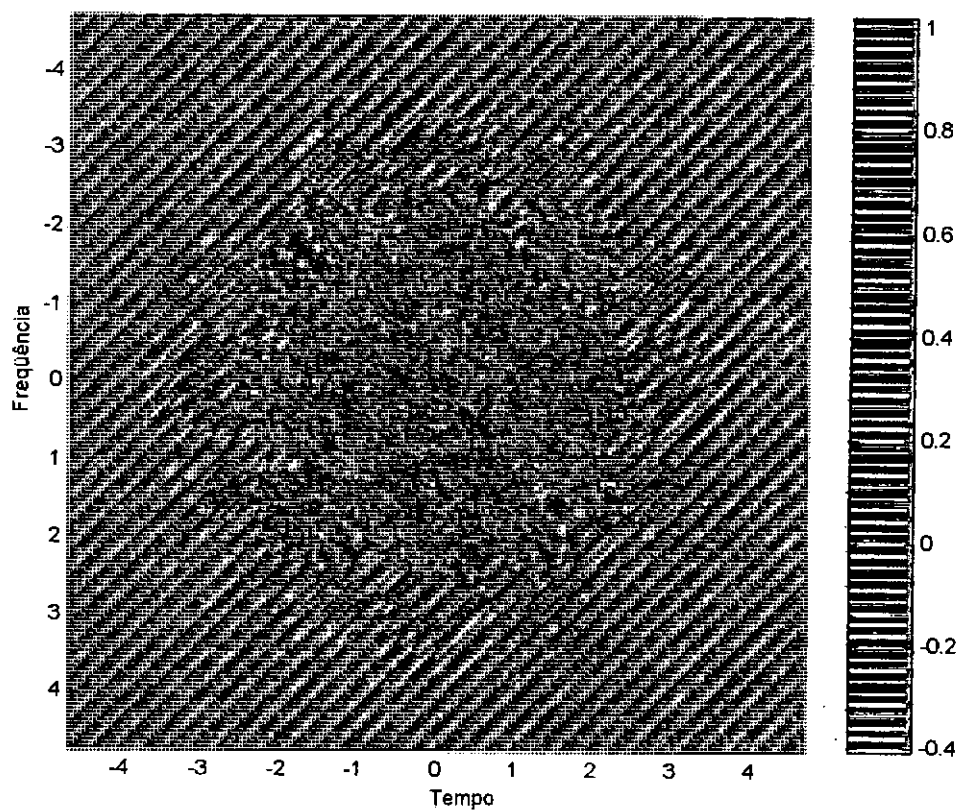


Figura III-21 Exemplo de escala de cor *flag*

III.5 Refinamento da visualização

A aplicação pura e simples das técnicas gráficas mostradas anteriormente leva geralmente a uma difícil visualização dos resultados. Para melhorar o aspecto ou mesmo destacar porções importantes das distribuições são necessárias ferramentas adicionais tais como as mostradas por YEN (1987) para interpretação da distribuição de Wigner-Ville, CARTWRIGHT (1976) que sugere a técnica de suavização e WAHL, BOLTON (1993) que resume algumas técnicas de visualização.

III.5.1 Suavização

As distribuições tempo-frequência usualmente apresentam picos muito agudos ou mesmo descontinuidades muito fortes. Estas descontinuidades estão ligadas à interferência (termos cruzados) e via de regra não têm significado especial. Além disso as distribuições podem também apresentar valores negativos em determinados pontos, incompatíveis com o conceito de distribuição de energia. Todos os dois intrusos, picos agudos sem significado e valores negativos, podem ser quase totalmente eliminados suavizando-se a distribuição tempo-frequência (TFD).

Existem várias formas de suavizar uma TFD. Uma delas é simplesmente fazer uma convolução da TFD com um núcleo $K(t, \omega)$ como mostrado a seguir.

$$C_f^S(t, \omega) = \iint C_f(t - u, \omega - v) K(u, v) du dv, \quad (\text{III-17})$$

onde $C_f(t, \omega)$ é a distribuição original, $C_f^S(t, \omega)$ é a distribuição suavizada e $K(t, \omega)$ pode ser qualquer função que tenha no mínimo as seguintes propriedades:

- Preserve a energia da distribuição;
- Funcione como um filtro 2D passa-baixa;
- Seja normalizada.

CARTWRIGHT (1976) foi o primeiro a utilizar uma forma de suavização numa TFD usando a função de densidade gaussiana,

$$K(t, \omega) = \frac{\pi}{2} \sigma_t \sigma_\omega e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma_t^2} + \frac{\omega^2}{2\sigma_\omega^2}\right)} \quad (\text{III-18})$$

onde σ_t e σ_ω são intervalos tais que o domínio da janela (núcleo) é dado pelos intervalos $[t - \sigma_t, t + \sigma_t]$ e $[\omega - \sigma_\omega, \omega + \sigma_\omega]$. Quanto maiores forem σ_t e σ_ω , maior será a área sujeita à janela e, portanto, maior grau de suavização será aplicado à distribuição. Para quantificar este grau de suavização usa-se o índice $\chi = 2\sigma_t \sigma_\omega$. Se χ for maior ou igual a 1 garante-se que nenhum ponto da distribuição terá valor negativo.

Para o caso discreto tem-se as seguintes equações:

$$t = m\Delta t, \quad \omega = n\Delta\omega, \quad \sigma_t = M\Delta t, \quad \sigma_\omega = N\Delta\omega \quad (\text{III-19})$$

$$K(m, n) = \frac{\pi}{2} \sigma_t \sigma_\omega e^{-\left(\frac{m^2 \Delta t^2}{2\sigma_t^2} + \frac{n^2 \Delta\omega^2}{2\sigma_\omega^2}\right)} \quad (\text{III-20})$$

$$C_f^S(m, n) = \Delta t \Delta\omega \sum_{k=-M}^{m+M} \sum_{l=n-N}^{n+N} C_f(m-k, n-l) K(k, l) \quad (\text{III-21})$$

Para desenvolver rotinas computacionais a partir destas fórmulas, será mais útil reescrevê-las na forma:

$$K(m, n) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{M^2} + \frac{n^2}{N^2}\right)} \quad (\text{III-22})$$

$$C_f^S(m, n) = \frac{1}{Sg} \sum_{k=-M}^{m+M} \sum_{l=n-N}^{n+N} C_f(m-k, n-l) K(k, l) \quad (\text{III-23})$$

$$Sg = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=-N}^N K(k, l) \quad (\text{III-24})$$

$$\chi = \frac{\pi MN}{n_\omega}, \quad (\text{III-25})$$

onde n_ω é o número de pontos de discretização em frequência da distribuição. A Figura III-22 mostra o efeito da suavização em dois graus distintos.

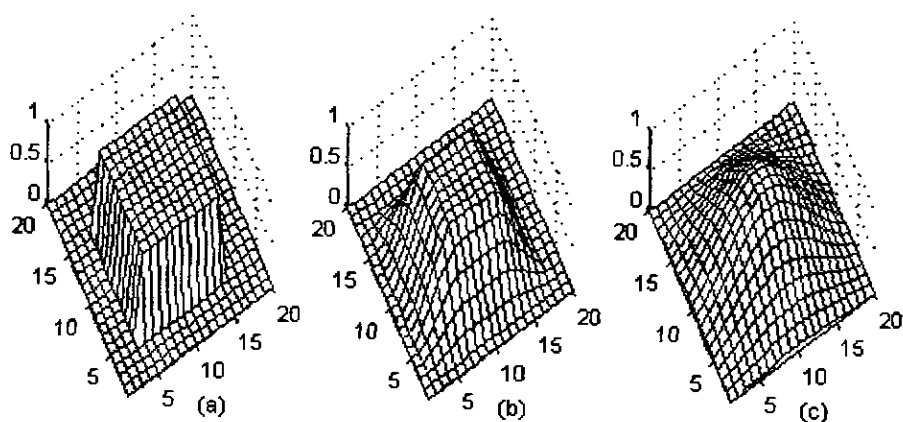


Figura III-22 Exemplo de suavização (a) original (b) $\chi=1.25$ (c) $\chi=5.02$

Pode-se observar na Figura III-22 que a suavização se dá às custas de uma perda significativa de resolução, sendo a dosagem da quantidade de suavização imposta χ um parâmetro significativo a ser avaliado cuidadosamente para cada caso.

III.5.2 Escalamento

Uma das grandes vantagens das distribuições tempo-frequência é justamente fornecer uma visualização simultânea do sinal nos dois domínios. Em certas ocasiões as curvas mais acentuadas nestas distribuições são realmente as mais importantes, caso no qual não há necessidade de nenhum tratamento adicional, como mostrado no item anterior.

No entanto existem casos onde componentes de frequência de baixíssima intensidade são essenciais ao estudo do fenômeno em questão. No estudo do comportamento de ondas dispersivas é comum que as as frequências baixas eclipsem as frequências mais altas pela sua maior intensidade, ficando estas últimas invisíveis nos gráficos. Neste caso existe uma grande perda de informação pois muitas vezes as características mais importantes se revelam nas altas frequências. Existe a necessidade então de aumentar estas baixas amplitudes para que fiquem visíveis. Este tratamento é usualmente denominado de escalamento.

O escalamento pode ser global ou local. Por escalamento global entende-se a aplicação direta de fórmulas matemáticas indistintamente a toda a distribuição. Em contrapartida, o escalamento local envolve o cálculo de uma média local que será usada como fator de

escala.

O escalamento global pode ser feito, por exemplo, utilizando-se

$$C_f^E(t, \omega) = \log C_f(t, \omega) \quad (\text{III-26})$$

$$C_f^E(t, \omega) = C_f(t, \omega)^\alpha \quad (\text{III-27})$$

O escalamento logarítmico (III-26) é útil somente quando se quer avaliar componentes separados por várias ordens de grandeza. Por outro lado, o escalamento em potência (III-27) traz geralmente bons resultados.

O escalamento local pode ser realizado de duas formas: ou no tempo ou em frequência. O escalamento local em frequência é o mais comum e o mais útil e é feito tomando-se a simples fórmula:

$$C_f^E(t, \omega) = \frac{C_f(t, \omega)}{s(\omega)}, \quad (\text{III-28})$$

sendo

$$s(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T C_f(t, \omega) dt \quad (\text{III-29})$$

Este é o escalamento por média. É via de regra menos eficiente que o escalamento por desvio, isto é,

$$C_f^E(t, \omega) = \frac{C_f(t, \omega)}{\sigma(\omega)}, \quad (\text{III-30})$$

sendo

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T (C_f(t, \omega) - s(\omega))^2 dt \quad (\text{III-31})$$

O escalamento local puro é muito radical e gera descontinuidades fortíssimas. Recomenda-se por isso ajustar $s(\omega)$ ou $\sigma(\omega)$ (conforme o tipo de escalamento sendo usado) a um polinômio de baixa ordem, 1, 2 ou 3, e usar o polinômio para fazer o escalamento.

Adicionalmente pode acontecer de $s(\omega)$ ou $\sigma(\omega)$, ou suas respectivas versões polinomiais, sejam iguais a zero ou assumam valores negativos. Ambos devem ser evitados por razões óbvias. Recomenda-se para isso verificar se $s(\omega)$ ou $\sigma(\omega)$ não caiam abaixo de um valor mínimo, por exemplo, um décimo do valor máximo.

O escalamento temporal, menos usado, pode ser obtido simplesmente trocando-se t por ω nas equações (III-28) a (III-31)..

Para ilustrar este ponto será mostrado um exemplo prático de como o escalamento pode ser usado em conjunto com a suavização para ajudar na visualização de uma distribuição tempo-frequência. O exemplo utilizado é a distribuição correspondente à resposta de uma viga infinita tipo Euler-Bernoulli sujeita a um impulso instantâneo em $t=0$, $x=0$, sendo a resposta lida a uma distância $x=x_0$ da origem do impulso. Esta distribuição é mostrada na Figura III-23.

A suavização apresentada no item III.5.1 com $\chi=1$ tem o efeito de harmonizar a distribuição, retirando o ruído do resultado, como mostrado na Figura III-24.

Também pode-se observar na Figura III-24 que a suavização provoca uma perda de resolução da distribuição original, o que se verifica por um certo espalhamento dos picos. Portanto o grau de suavização deve ser cuidadosamente escolhido para que se evitem erros de análise. O próximo passo que pode ser executado é o escalamento. Foi utilizado neste exemplo o escalamento local em frequência do tipo desvio, cujo resultado é mostrado na Figura III-25.

Comparando-se a distribuição original (Figura III-23) com a final (Figura III-25) pode-se notar a superioridade de visualização proporcionada por estes dois métodos.

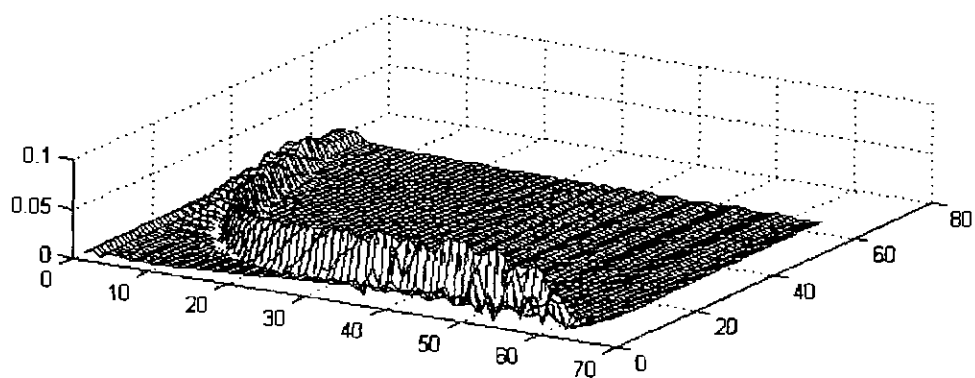


Figura III-23 TFD original

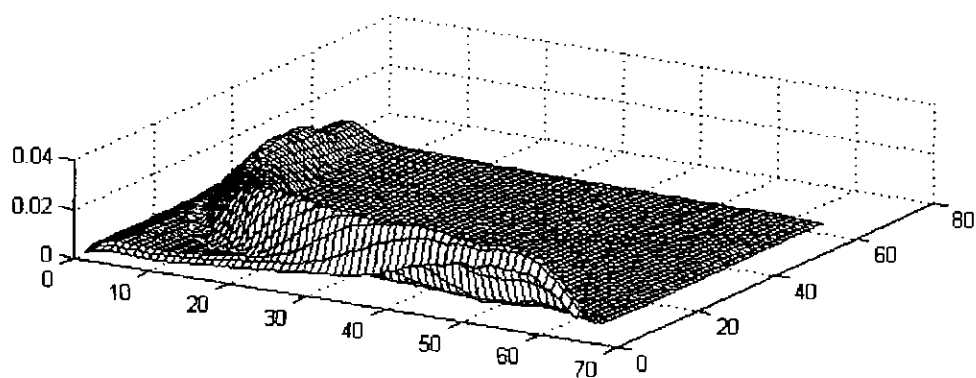


Figura III-24 TFD suavizada

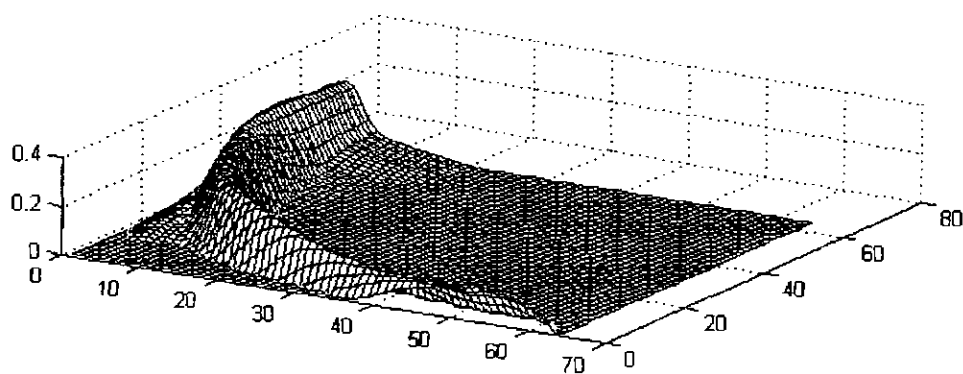


Figura III-25 TFD suavizada e escalada

III.5.3 Corte

O corte é uma técnica desenvolvida nesta tese e vem da eliminação de trechos do histograma de uma distribuição tempo-frequência com a finalidade de melhorar a aparência de gráficos do tipo contorno. O corte é feito de forma a eliminar uma certa percentagem inicial e final do histograma da distribuição, mantendo-se o trecho mais significativo. Isto é importante pois os aplicativos gráficos associam a escala de cores linearmente em relação ao valor máximo e mínimo que encontram. Se, por exemplo, um único ponto tiver valor 100 e o resto da distribuição tiver amplitude menor que 1, nada será visto.

Para esclarecer este método será apresentado um exemplo constituído da distribuição tempo-frequência do mesmo sinal do item anterior ao qual foi adicionado ruído branco da ordem de 25% do desvio do sinal. A distribuição com ruído é mostrada na Figura III-26.

Observa-se na Figura III-26 que o ruído adicionado atrapalha a visualização do sinal. A Figura III-27 apresenta o histograma das amplitudes obtido a partir da distribuição. Repare que a grande parte dos pontos está concentrada entre -0.05 e +0.02 e correspondem em sua maioria ao ruído. Entretanto, o aplicativo gráfico irá interpretá-los como pontos importantes e os associará a uma faixa de cores.

As linhas verticais no histograma delimitam a região de interesse para a análise. Portanto os pontos abaixo do limite inferior (0.008) foram simplesmente zerados, enquanto os de amplitudes superior a 0.031 (limite superior da região de interesse) foram igualados. Isto elimina picos e depressões indesejáveis, bem como torna a distribuição toda positiva. O efeito do corte pode ser visto na Figura III-28.

Comparando-se esta figura com a situação original (Figura III-26) pode-se verificar que esta técnica é muito efetiva para eliminar os ruídos e permitir que as informações mais relevantes sejam realçadas.

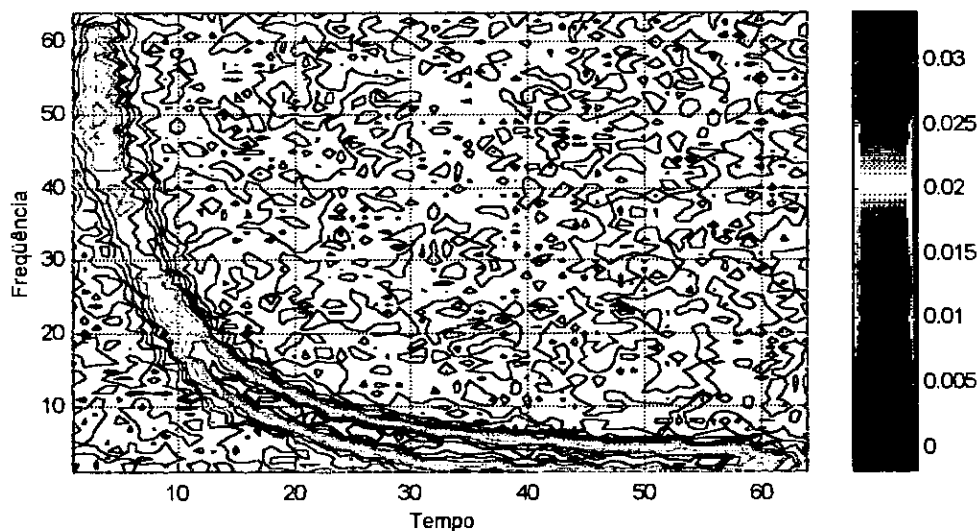


Figura III-26 Distribuição tempo-frequência - impacto em viga de Bernoulli-Euler com adição de ruído

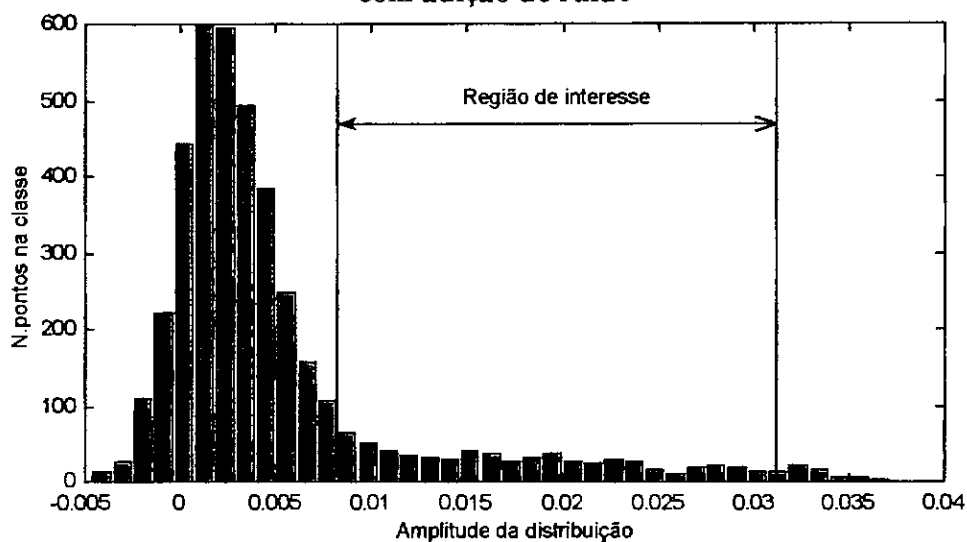


Figura III-27 Histograma da distribuição do exemplo da viga de Bernoulli-Euler com ruído

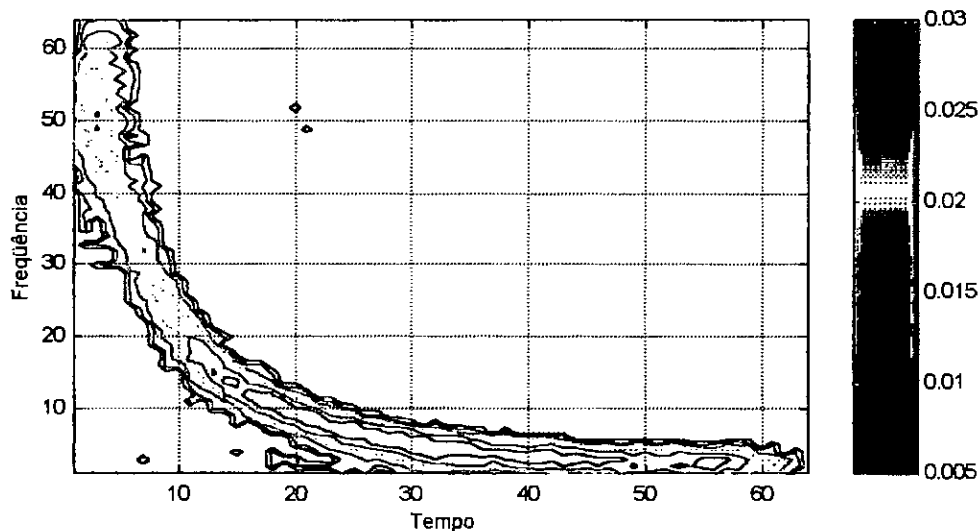


Figura III-28 Distribuição com corte aplicado

Deve-se destacar finalmente que todas as técnicas apresentadas neste capítulo podem (e devem) ser utilizadas em conjunto permitindo uma melhor visualização dos resultados. No entanto, devem ser corretamente dosadas para que o resultado final não conduza a uma interpretação enganosa do fenômeno físico observado.

IV APLICAÇÕES SIMPLES

IV.1 Introdução

Existem formas de se realizar análises quantitativas usando-se distribuições tempo-frequência e exemplos serão mostrados posteriormente nesta tese. Entretanto a principal utilidade de uma distribuição tempo-frequência é a rica alternativa de visualização do sinal que oferece. No entanto, para que uma perfeita interpretação do sinal seja realizada, deve-se ter intimidade com as idéias básicas das distribuições tempo-frequência como também conhecer profundamente as características da distribuição que está sendo utilizada. Nas próximas seções serão apresentados alguns sinais conhecidos dos quais serão obtidos distribuições tempo-frequência, distribuições wavelet contínuas e análises multi-resolução usando wavelets.

A distribuição tempo-frequência utilizada para esta análise é a versão 1 do autor, apresentada no capítulo III, por apresentar comportamento menos sujeito a interferência de termos cruzados, estar livre de aliasing e ser suficientemente rápida. A versão 2 não foi utilizada pois exige o cuidado adicional de interpretação do início e o fim do sinal devido ao caráter periódico intrínseco ao método de cálculo desta versão.

As distribuições wavelet contínuas foram obtidas usando a pré-wavelet de Morlet que para o caso contínuo é a que oferece geralmente os melhores resultados pois é infinitamente diferenciável e tem uma boa localização em frequência. Geralmente para análises contínuas utilizam-se pré-wavelets pois geralmente elas têm uma expressão analítica fechada, mais fácil de submeter ao escalamento contínuo exigido por esta análise.

Como as distribuições wavelet contínuas são definidas por uma transformada que não pretende fornecer uma distribuição de energia, os valores desta distribuição vão ser negativos ou positivos alternadamente. Por causa disso existem duas formas diversas de visualizar-se uma distribuição wavelet contínua: uma utilizando-se a própria

transformada sem nenhuma modificação ou então tomando-se seu módulo. Esta última alternativa foi adotada pois se aproxima muito da forma como são apresentadas as distribuições tempo-frequência.

Os gráficos referentes à análise de multi-resolução com wavelets são compostos da seguinte maneira: primeiramente os detalhes, iniciando com a primeira escala (maiores frequências) até a escala máxima (menores frequências), seguida pela aproximação final. Ao lado de cada detalhe/aproximação apresenta-se sua respectiva FFT (módulo). Apesar de a escolha da wavelet usada na análise de multi-resolução ser um fator decisivo para a correta visualização do sinal, utilizou-se para todos os casos a Symmlet de ordem 8, exceto para o sinal impacto para o qual utilizou-se a biortogonal spline de ordem 2.4, mais indicada para o caso por ser simétrica e assim captar melhor regiões de grande curvatura do sinal.

IV.2 Três harmônicos

O sinal harmônico é certamente o tipo de excitação mais usada em laboratório. Neste exemplo foram usados três sinais harmônicos, o primeiro a 60Hz, o segundo a 120Hz e o terceiro a 180Hz, cada um ocupando um espaço definido no tempo. A Figura IV-1 mostra os três sinais separadamente, antes de serem somados.

Cada um dos sinais harmônicos tem duração de 0.5 segundos, sendo usada uma simples janela retangular para limitá-los. A Figura IV-2 mostra os três sinais já somados e seu respectivo espectro.

O espectro da Figura IV-2 mostra claramente os picos correspondentes a cada sinal em 60Hz, 120Hz e 180Hz. Como seria de se esperar, existe um certo espalhamento em torno dos picos pois os sinais são limitados no tempo. A partir do sinal no tempo apresentado na Figura IV-2 passa-se a calcular a distribuição tempo-frequência através do algoritmo alias-free, esperando que esta efetivamente separe as três ondas visualmente e que também não gere interferência como geralmente ocorre na distribuição de Wigner-Ville. A distribuição obtida é apresentada na Figura IV-3.

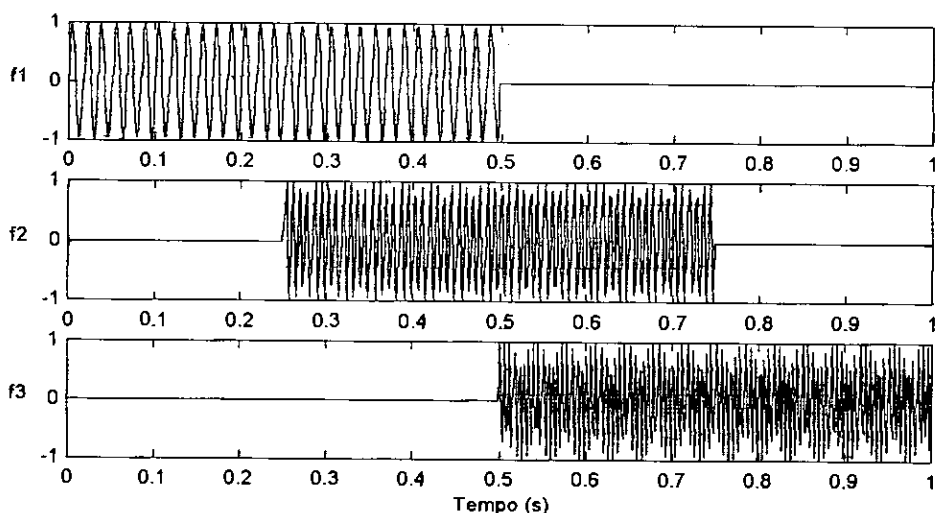


Figura IV-1 Três harmônicos com frequências de 60Hz, 120Hz e 180Hz.

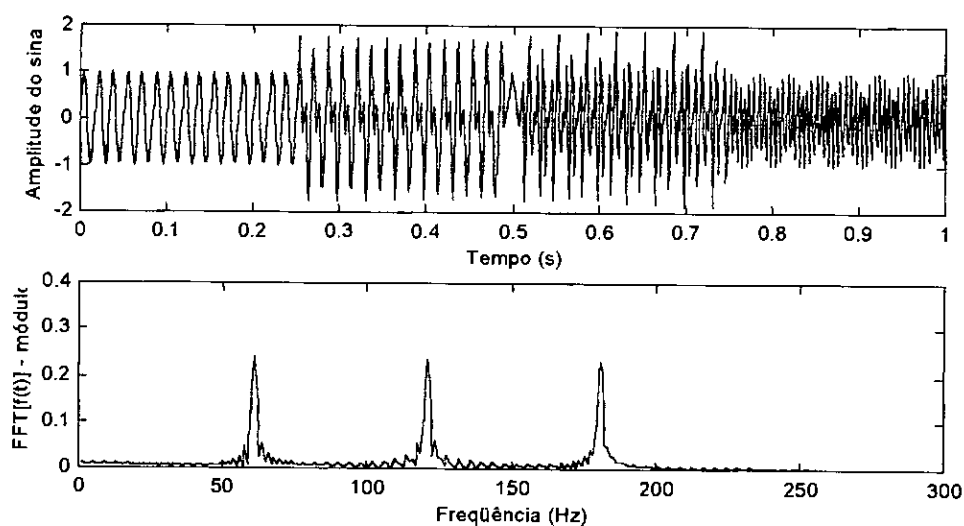


Figura IV-2 Harmônicos somados e FFT

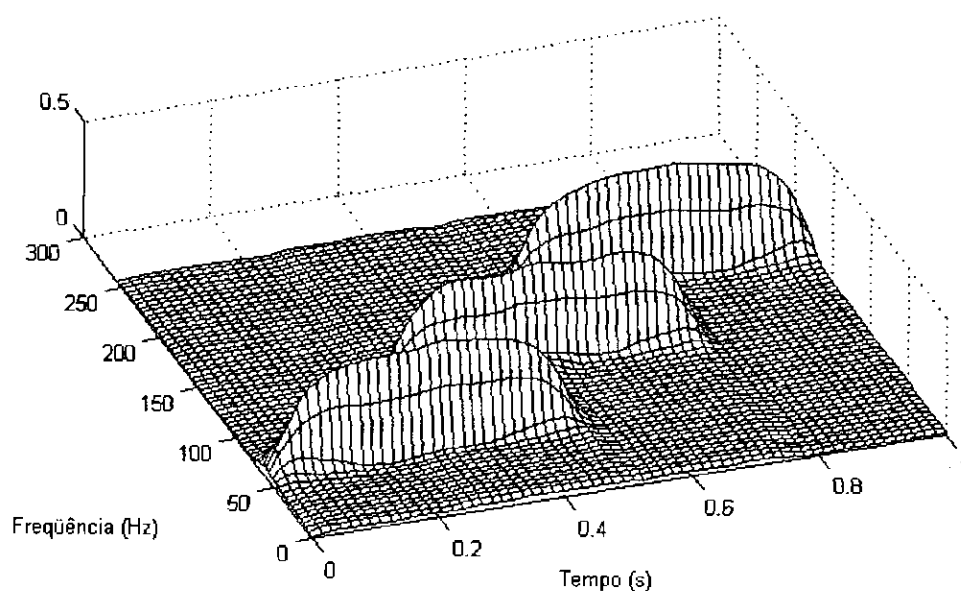


Figura IV-3 TFD de três harmônicos

Pode-se observar na Figura IV-3 que os três sinais harmônicos estão perfeitamente separados visualmente. É justamente esta capacidade de separar visualmente os componentes de um sinal que gera a qualidade de representação das distribuições tempo-frequência. Também nota-se que existe um abaulamento das extremidades de cada um dos sinais. Este efeito é conhecido como efeito de borda e tende a ser mais forte quanto maior for o número de pontos de discretização em frequência e a duração da janela.

Para melhor visualizar o espaço entre as ondas, a Figura IV-3 foi girada em 60 graus para a direita e o resultado é mostrado na Figura IV-4.

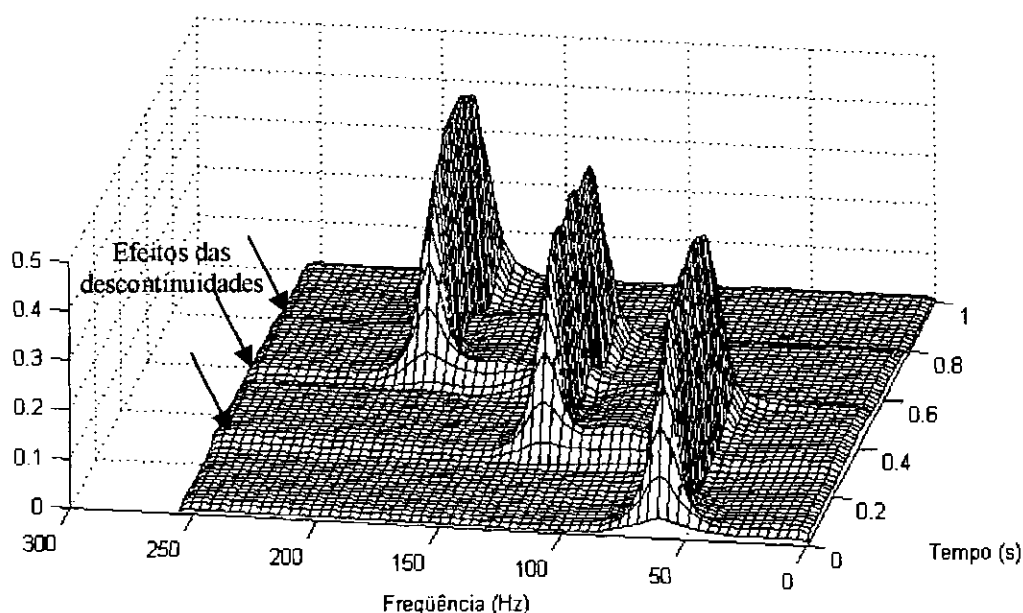


Figura IV-4 TFD rotacionada

Observa-se, como indicado na Figura IV-4, que no início e fim de cada sinal forma-se uma elevação paralela ao eixo das frequências. Este é resultado do enjanelamento das ondas senoidais usando-se uma simples janela retangular. Devido a isto as extremidades das ondas apresentam descontinuidades e estas irão se manifestar em toda a faixa de frequências, como se fosse um impacto. Entretanto nenhuma interferência é notada entre as ondas em si, resultado da priorização desta propriedade quando da construção do núcleo da distribuição alias-free.

A Figura IV-5 mostra a distribuição wavelet contínua do sinal utilizando como função de análise a wavelet de Morlet.

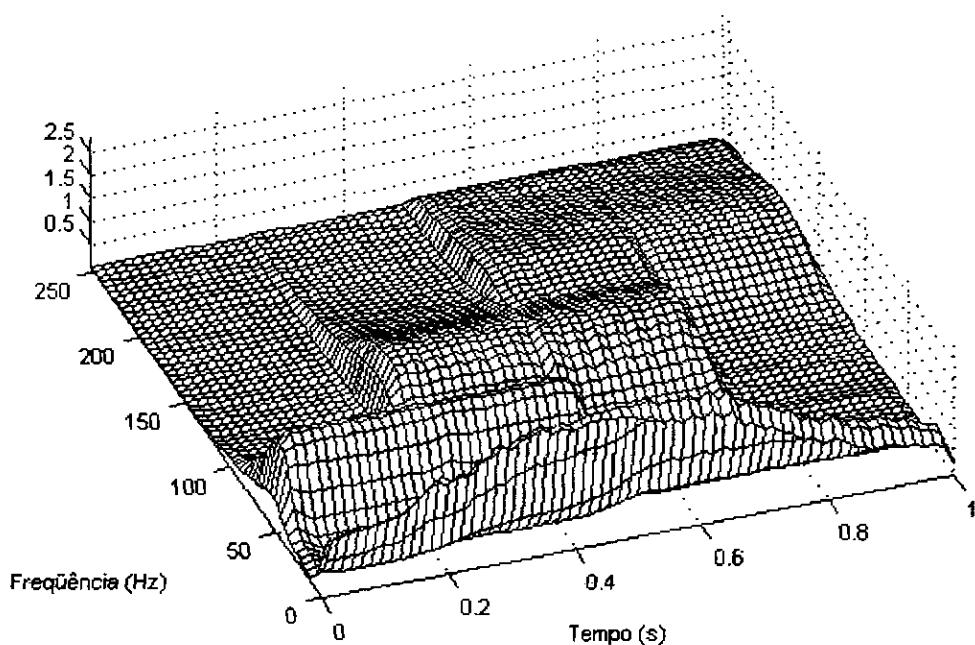


Figura IV-5 Distribuição wavelet contínua dos três harmônicos

Observa-se na Figura IV-5 que a distribuição wavelet contínua é muito menos precisa em frequência que a respectiva distribuição alias-free mostrada na Figura IV-3. No entanto ela conseguiu captar com maior precisão as descontinuidades de início e fim de cada seno.

A Figura IV-6 mostra a análise de multi-resolução usando-se wavelets. Nesta figura pode-se observar que as wavelets, por possuírem boa resolução no tempo, não possuem boa localização em frequência, principalmente para as frequências mais altas.

O detalhe 3 da Figura IV-6 conseguiu captar bem o harmônico a 60Hz, enquanto o detalhe 2 já mistura bastante os dois harmônicos de 120 e 180Hz, bem como o primeiro detalhe. O detalhe 4 parece apontar para a localização das descontinuidades e ainda possui restos do harmônico de 60Hz, enquanto o detalhe 5 e a aproximação somente adicionam para completar a função original mas suas amplitudes já são bem pequenas. Como pode-se observar o uso deste tipo de ferramenta não acrescenta informações adicionais para a análise do sinal.

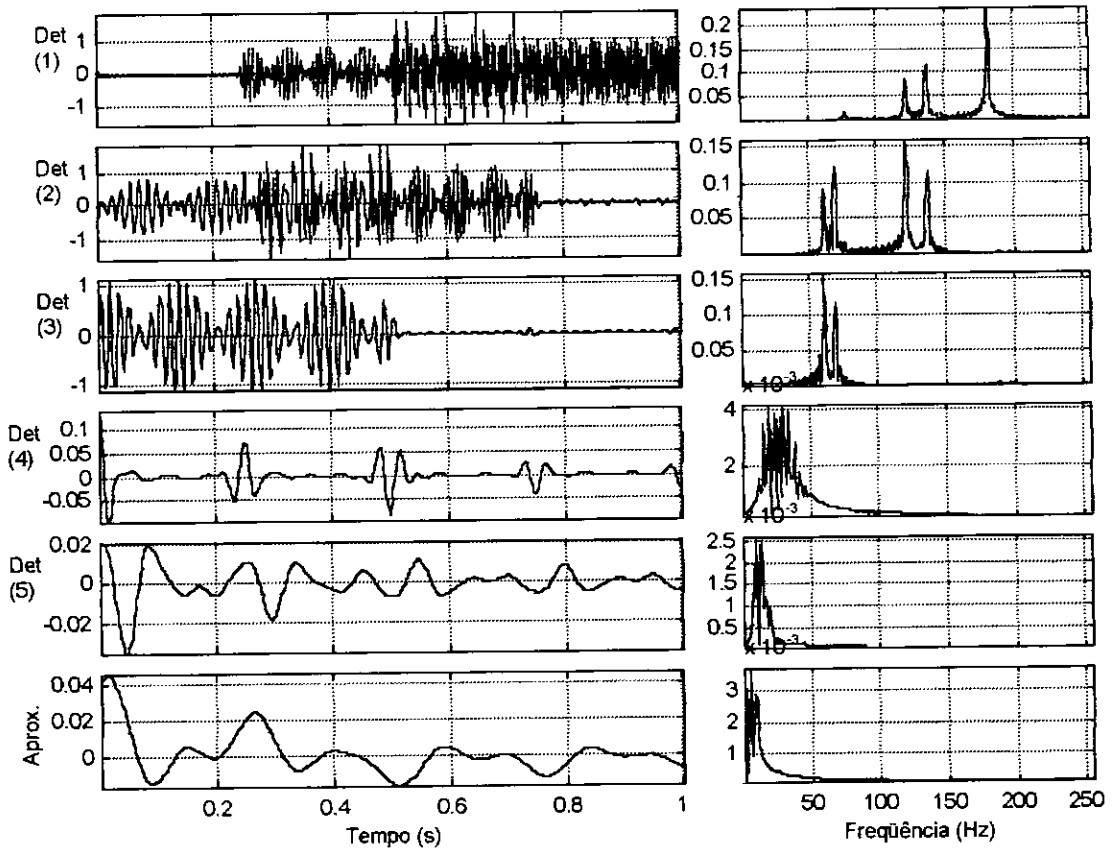


Figura IV-6 Análise de multiresolução com wavelets - três harmônicos

IV.3 Harmônico variando amplitude

Para exemplificar como todas estas técnicas reagem a uma variação de amplitude do sinal, será analisado um sinal harmônico que varia continuamente sua amplitude. As distribuições tempo-frequência apresentam a seguinte propriedade quanto à multiplicação do sinal por uma constante: se $g(t) = k \cdot f(t)$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$C_g(t, \omega) = |k|^2 C_f(t, \omega).$$

Para mostrar este efeito é utilizado um exemplo, o qual é construído utilizando-se o produto de duas funções: rampa e sinal harmônico com frequência igual a 120Hz, que são mostradas, no domínio do tempo, na Figura IV-7.

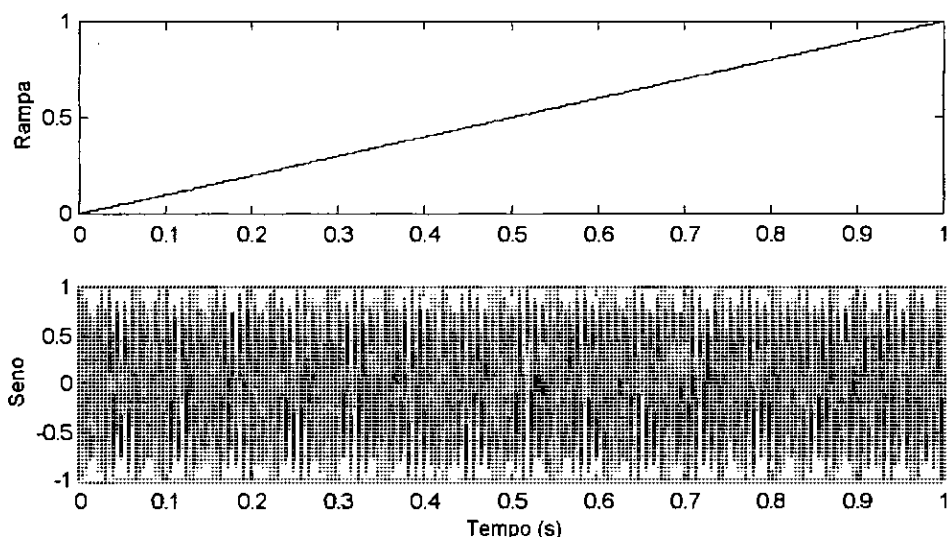


Figura IV-7 Componentes do seno variando de amplitude

Na Figura IV-8 é apresentado o sinal resultante nos domínios do tempo e da frequência. Observa-se no espectro da Figura IV-8 o esperado pico a 120Hz e o espalhamento provocado pela variação de amplitude. A distribuição tempo-frequência alias-free desta função é apresentada na Figura IV-9, onde indica-se a forma quadrática da distribuição com uma linha espessa.

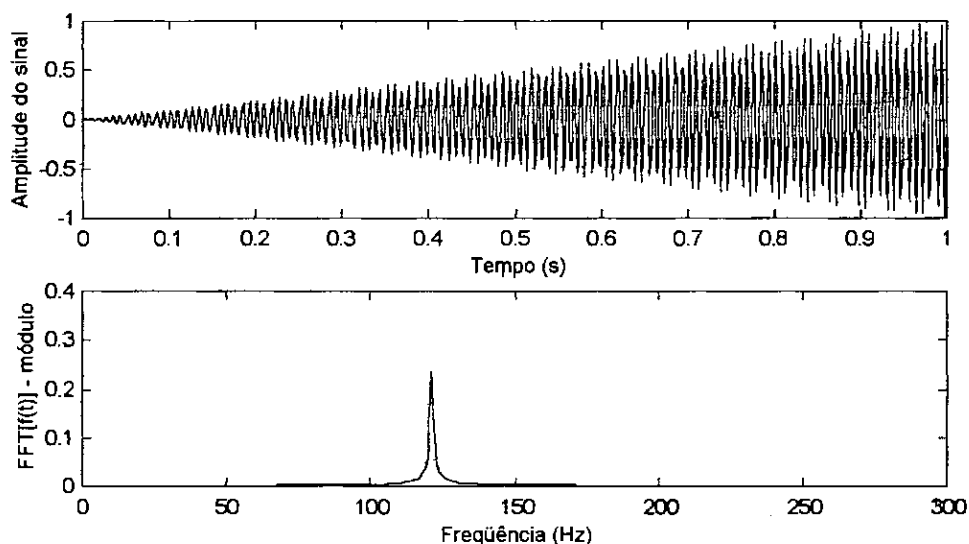


Figura IV-8 Seno variando amplitude e respectiva FFT

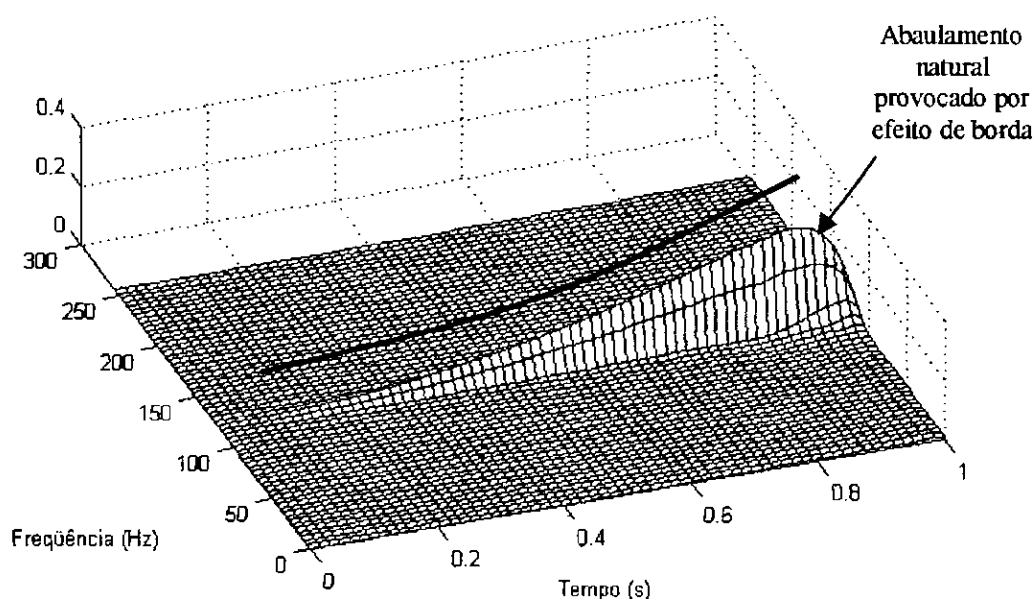


Figura IV-9 TFD do sinal

Pode-se reparar na Figura IV-9 a não-linearidade da curva, demonstrada pela sua forma quadrática que confirma a previsão. Este efeito pode ser eliminado simplesmente tomando-se a raiz quadrada da distribuição ponto-a-ponto, cujo resultado é mostrado na Figura IV-10. Entretanto deve-se precaver de que não existam pontos de valor negativo na distribuição e garante-se isto somente executando-se uma suavização suficientemente forte ($\chi > 1$), utilizando-se a técnica apresentada no item III.5.1.

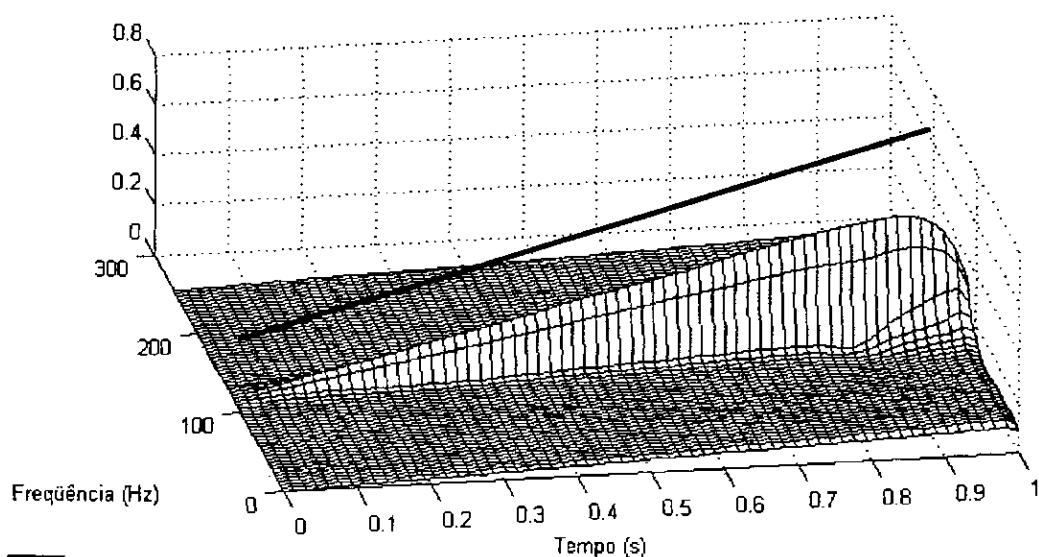


Figura IV-10 TFD linearizada

A linha espessa indicada na Figura IV-10 acompanha a crista da distribuição, mostrando a linearidade alcançada.

A Figura IV-11 mostra a distribuição wavelet contínua calculada para este mesmo sinal.

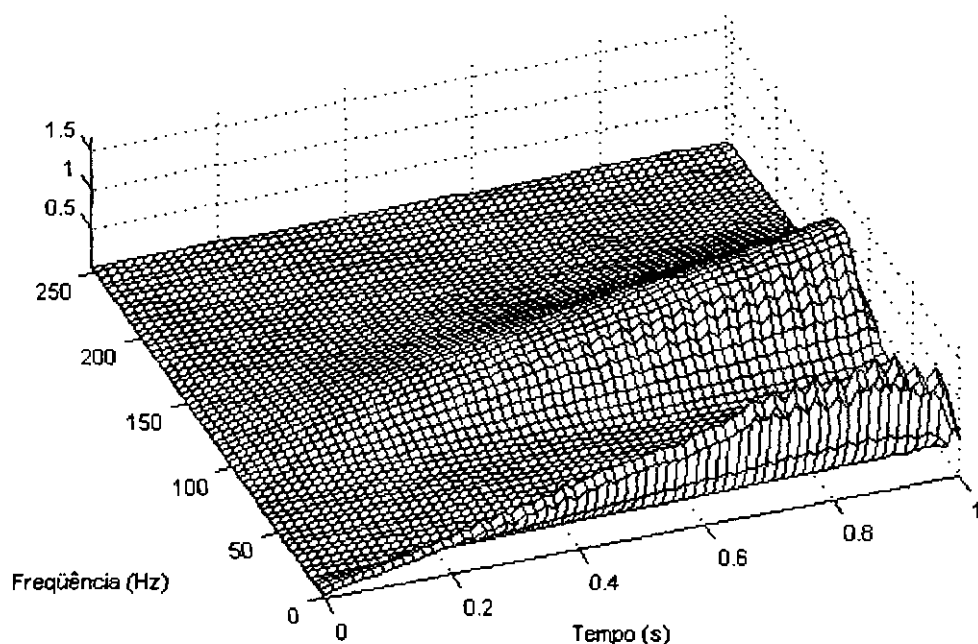


Figura IV-11 Distribuição wavelet contínua do harmônico variando amplitude

Pode-se observar na Figura IV-11 que a distribuição wavelet contínua apresenta pouca precisão em frequência pois a largura de banda de uma wavelet aumenta em proporção direta da frequência de análise, ao contrário das distribuições tempo-frequência que analisam com largura de banda constante. Nota-se adicionalmente uma certa interferência para valores próximos à frequência zero.

A Figura IV-12 apresenta a análise de multi-resolução usando wavelets.

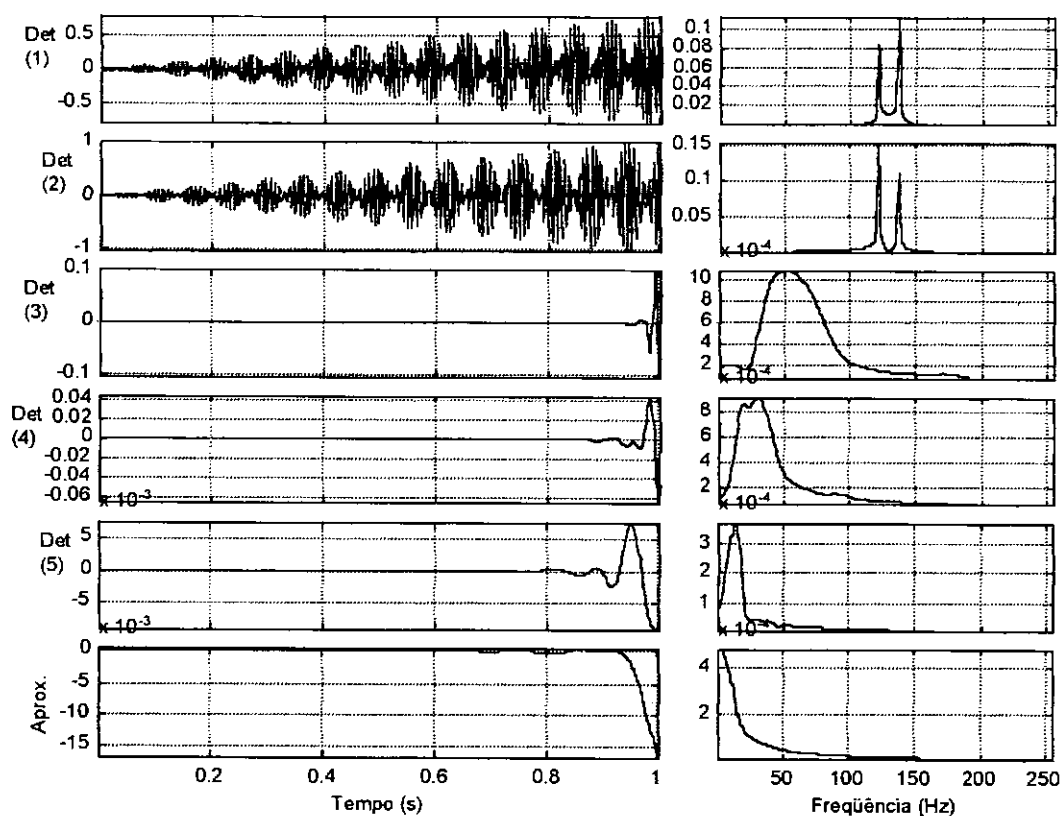


Figura IV-12 Análise de multiresolução com wavelets - harmônico variando amplitude

Pela análise da Figura IV-12 observa-se que os detalhes 1 e 2 aparentemente repetem o sinal original. Isto pode ser explicado pelo fato de que o harmônico está localizado numa posição intermediária entre os espectros dos dois detalhes, influenciando a ambos. Como a FWT é uma ferramenta de análise periódica, assim como a FFT, valores diferentes no início e no fim do sinal são interpretados como descontinuidades. Por isso os detalhes 3, 4, 5 e a aproximação fazem somente completar esta descontinuidade mas suas amplitudes são desprezíveis.

IV.4 Chirp linear

O próximo sinal analisado é um chirp cuja frequência instantânea varia linearmente com o tempo, sendo 0Hz em 0s e igual a metade da taxa de digitalização no instante final. Este sinal é mostrado na Figura IV-13.

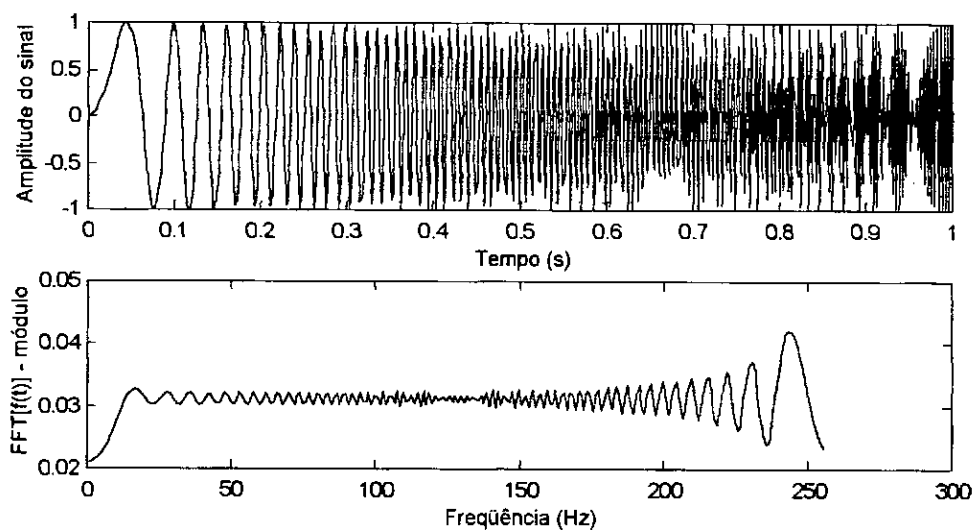


Figura IV-13 Chirp linear e FFT

A partir do sinal apresentado na Figura IV-13 calcula-se sua distribuição alias-free que é mostrada na Figura IV-14.

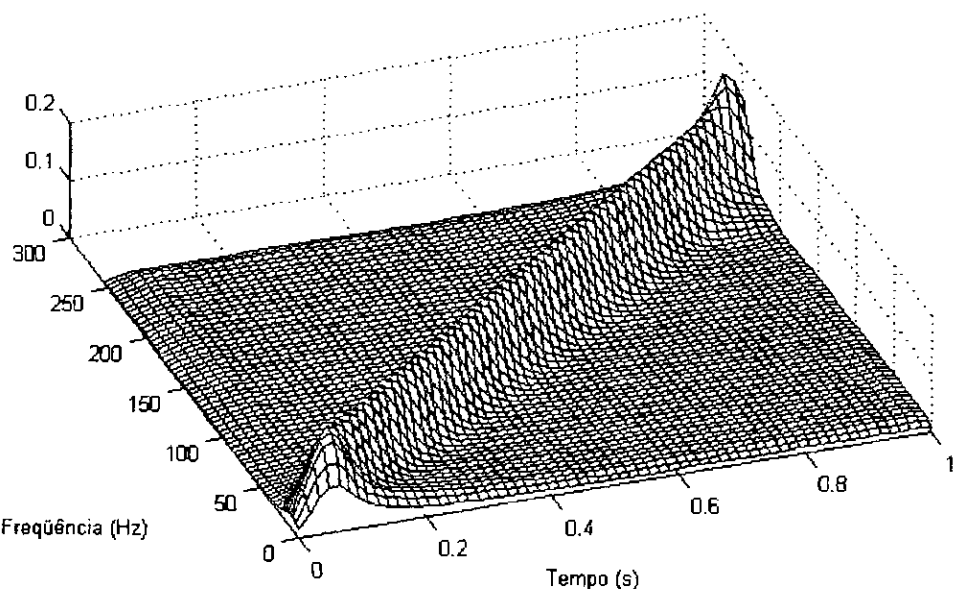


Figura IV-14 TFD - chirp linear

Observa-se na que a distribuição alias-free concentra toda a energia nos pontos onde se localizam as frequências instantâneas. Nos instantes inicial e final parece haver um certo desvio da curva mas este é um efeito causado pela perspectiva do desenho, aliada ao natural abaulamento das bordas.

A distribuição wavelet contínua para este sinal é apresentada na Figura IV-15.

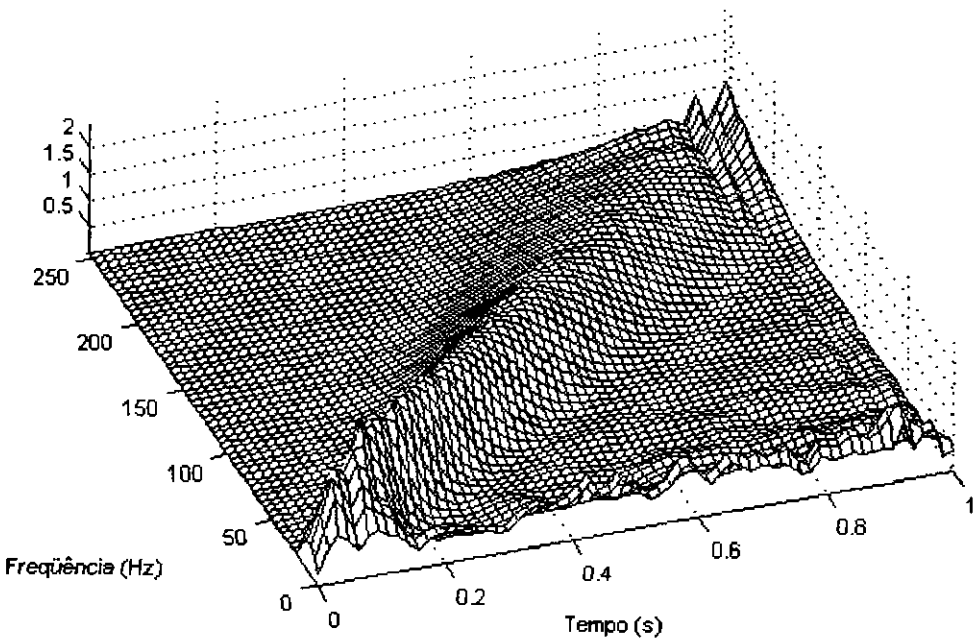


Figura IV-15 Distribuição wavelet contínua para o chirp linear

Observa-se na Figura IV-15 que, ao contrário da distribuição tempo-frequência, a distribuição wavelet apresenta grande interferência em outras frequências, além de quase se anular nos instantes finais do sinal. Adicionalmente se verificam descontinuidades fortes nas altas frequências em torno do instante 0,9s, talvez devida à sensibilidade característica das wavelets aos contornos do domínio.

A análise de multi-resolução para o chirp linear é mostrada na Figura IV-16.

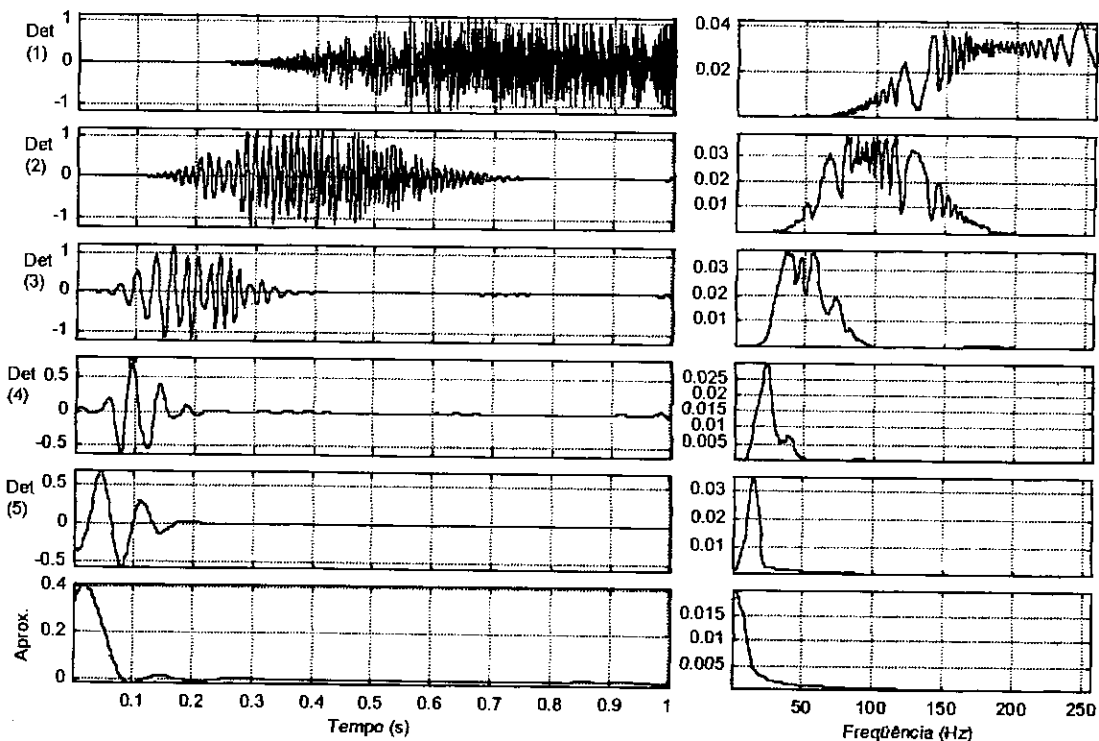


Figura IV-16 Análise de multiresolução com wavelets - chirp linear

Destaca-se na Figura IV-16 uma grande propriedade das wavelets: a localização no tempo. Observe que nos trechos fora do espectro da escala o detalhe/aproximação é exatamente zero, isto é, a wavelet não é influenciada de nenhuma forma por frequências longe do seu espectro.

A escolha da ordem da wavelet a ser usada parte essencialmente desta questão. A duração da wavelet aumenta (ou diminui) com sua ordem. Por isso utilizam-se wavelets de menor ordem para analisar sinais que tenham transições muito fortes, como um impacto ou uma onda quadrada, e wavelets de maior ordem com sinais conhecidamente mais suaves.

IV.5 Impacto

O impacto se apresenta muito comum em aplicações de engenharia estrutural e por isto foi incluído nesta lista de exemplos. Geralmente o impacto é obtido do sinal da força atuante num corpo, e esta força depende da interação entre os dois corpos durante o tempo de contato. É usual representar o impacto pela forma triangular, conforme ilustrada na Figura IV-17. Nesta figura também é mostrado o espectro obtido para o impacto adotado. A partir do sinal mostrado na Figura IV-17 calcula-se a distribuição alias-free que é mostrada na Figura IV-18.

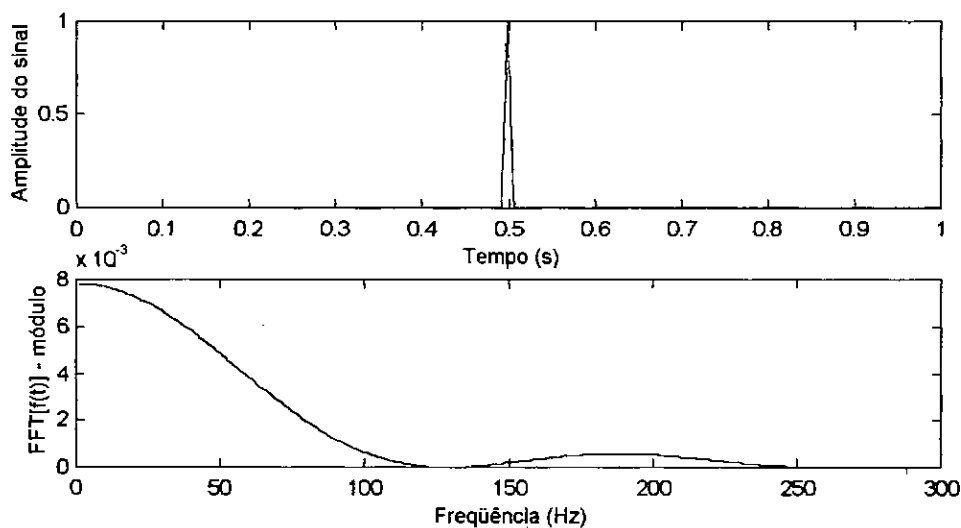


Figura IV-17 Sinal impacto e FFT

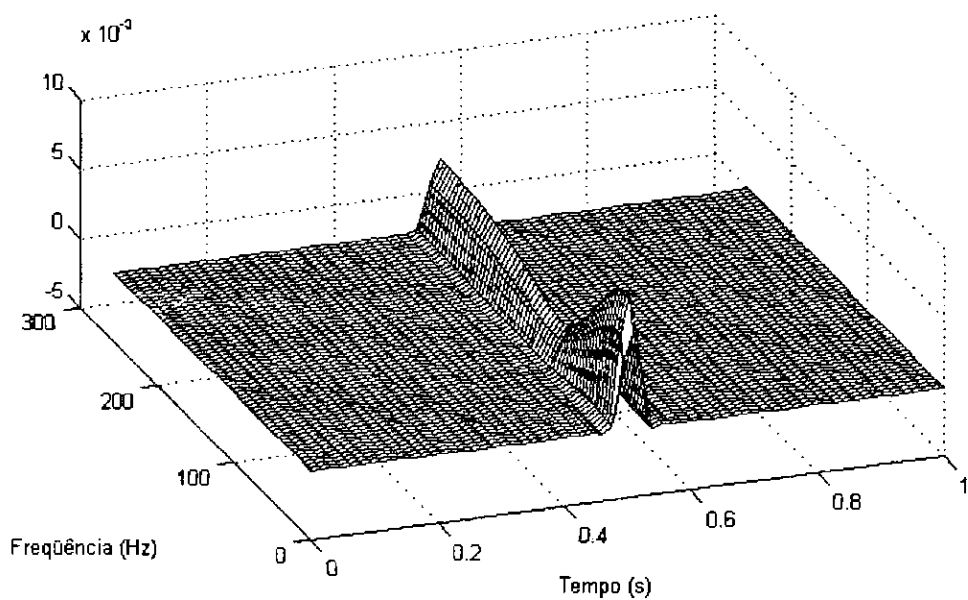


Figura IV-18 TFD - Impacto

Vê-se na Figura IV-18 que as amplitudes dos picos não coincidem exatamente com os picos da FFT. As frequências mais altas têm quase a mesma amplitude que as mais baixas na distribuição, enquanto na FFT as altas frequências apresentam amplitudes quase nulas. Isto é causado pela escolha das prioridades do núcleo usado na transformação. No núcleo usado neste caso não foi priorizada a propriedade de frequência marginal, que é dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_f(t, \omega) dt = |F(\omega)|^2 \tag{IV-1}$$

e, por isso, a distribuição não é capaz de repetir os resultados da FFT. É bom enfatizar que isto não é um erro da distribuição. Assim como a transformada de Fourier, a distribuição tempo-frequência é uma representação, em um domínio diverso, de um mesmo fenômeno inicialmente representado no domínio do tempo. Portanto a disparidade vem somente da diversidade de domínios e das transformações utilizadas para representar o sinal. O mesmo também ocorre com a distribuição wavelet apresentada na Figura IV-19.

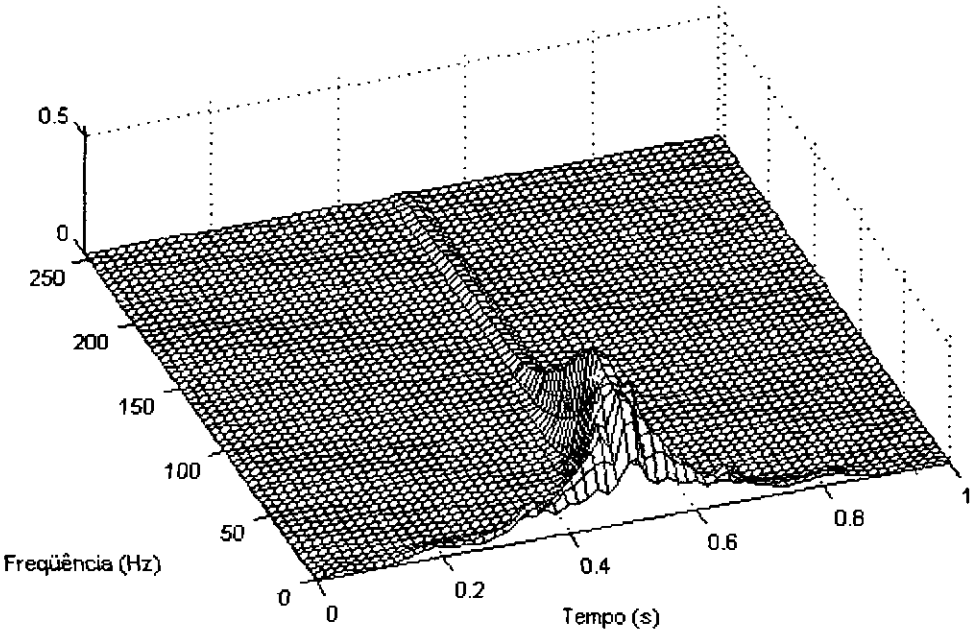


Figura IV-19 Distribuição wavelet contínua para o sinal impacto

Na Figura IV-19 nota-se que as wavelets realmente são bem aproveitadas na análise de descontinuidades, verificando-se este fato pela boa resolução da distribuição no tempo.

A Figura IV-20 mostra a análise de multi-resolução utilizando-se wavelets.

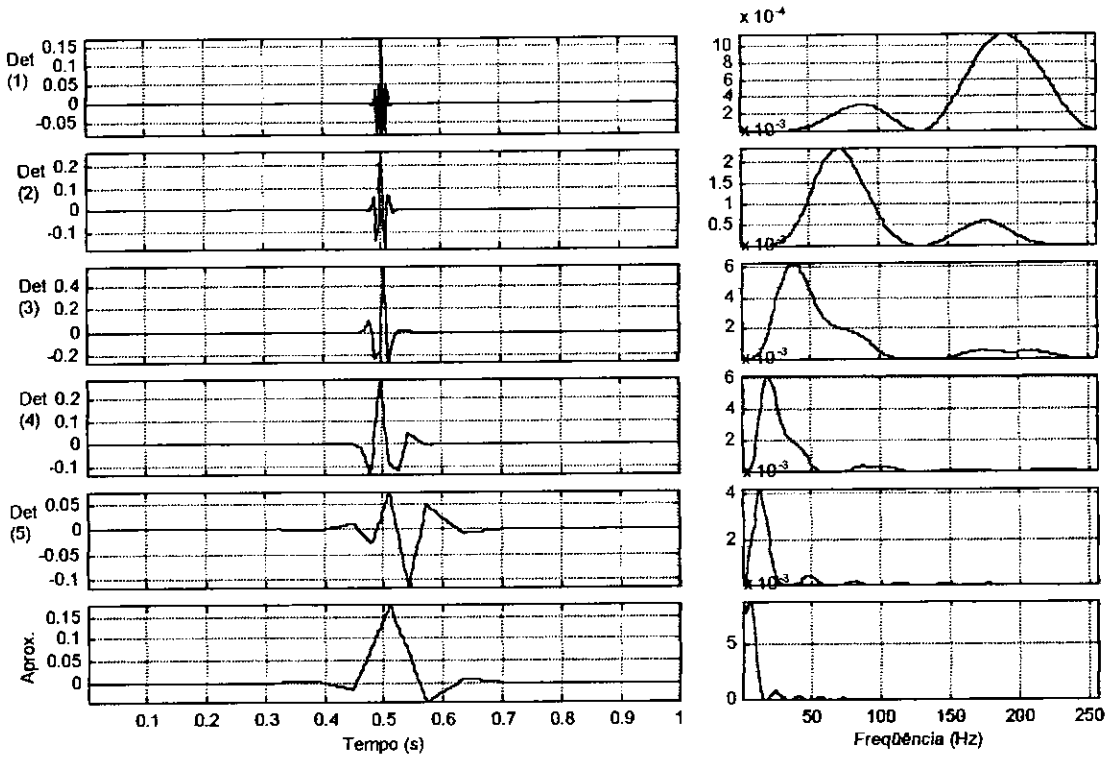


Figura IV-20 Análise de multiresolução com wavelets - impacto

Para calcular o gráfico da Figura IV-20 utilizou-se uma wavelet de baixa ordem (spline biortogonal 2.4) propositadamente para evidenciar ainda mais a grande facilidade das wavelets em detectar fortes transições. Observa-se que a wavelet parece “entender” o impacto, muito embora sua localização em frequência seja péssima. Esta é a regra: a análise reflete sempre a adequação das propriedades da wavelet ao sinal. Se o sinal é simétrico, como um seno, a utilização de famílias de wavelets não-simétricas como Daubechies resultará numa representação pobre. Se o sinal possui grandes transientes e for utilizada uma wavelet de alta ordem o resultado será igualmente ruim.

IV.6 Onda quadrada

Esta onda faz parte deste rol de exemplos por ser muito comum em algumas aplicações, principalmente na área digital, e também por oferecer descontinuidades muito fortes. A Figura IV-21 apresenta uma onda quadrada periódica com período bem baixo, de forma a se visualizar bem os detalhes das descontinuidades. Ainda nesta figura pode-se observar que o espectro desta função é caracterizado por um pico na frequência dominante do sinal, e seus super-harmônicos decrescentes. A Figura IV-22 mostra a distribuição tempo-frequência para a onda quadrada.

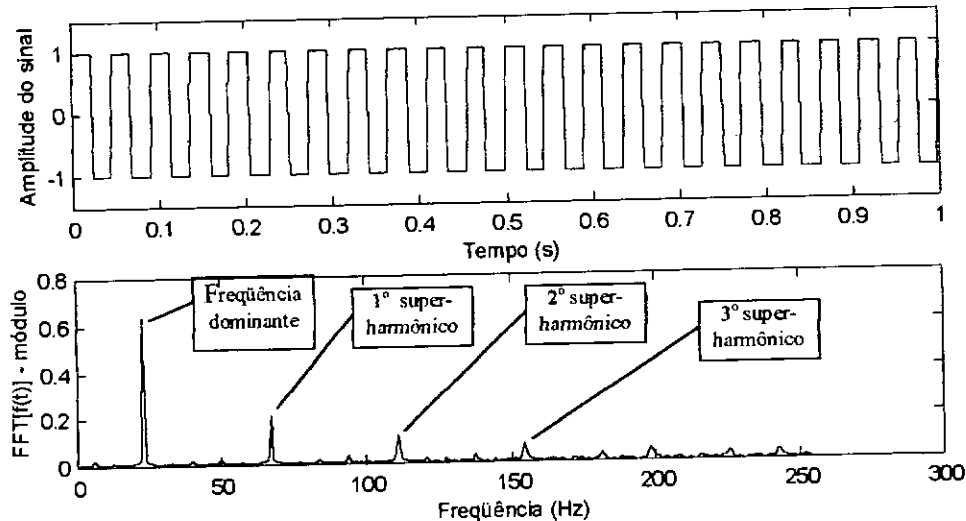


Figura IV-21 Onda quadrada e FFT

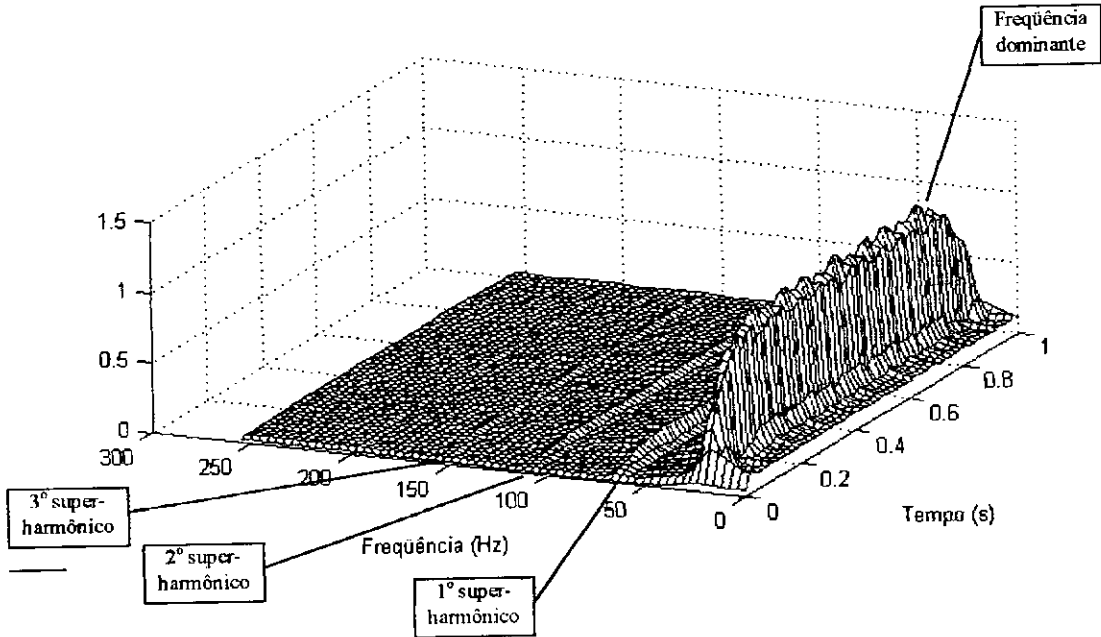


Figura IV-22 TFD - onda quadrada

Nota-se na Figura IV-22 que os picos que aparecem na FFT também se repetem neste gráfico e se estendem por todo o domínio no tempo. À figura foi aplicada uma rotação adicional para que este efeito fosse evidenciado.

A Figura IV-23 mostra a distribuição wavelet contínua do sinal onda quadrada.

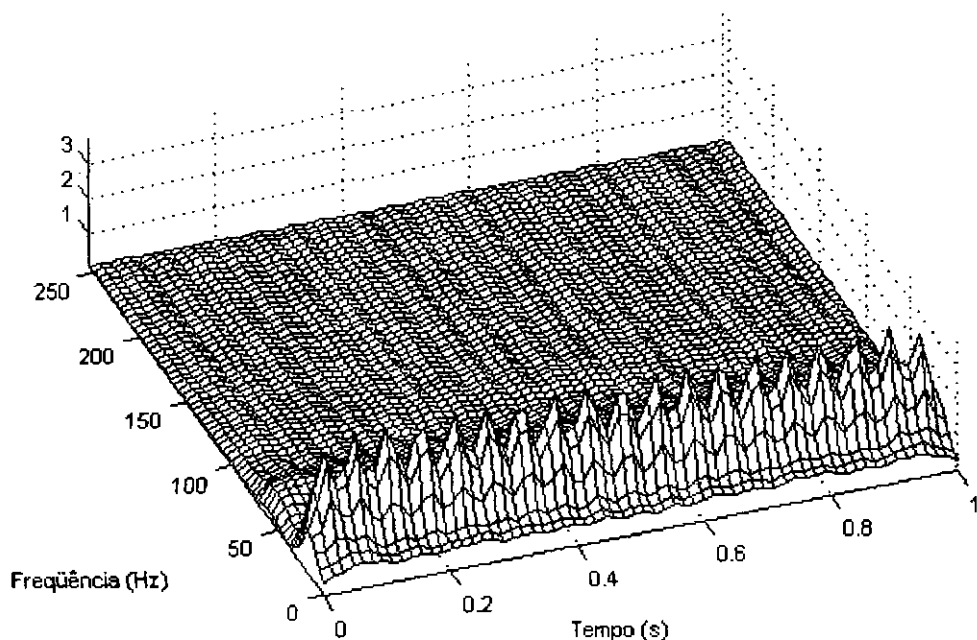


Figura IV-23 Distribuição wavelet contínua do sinal onda quadrada

Pode-se notar na Figura IV-23 que a tendência da distribuição wavelet contínua é agregar um pouco mais de amplitude nos pontos centrais dos picos da onda quadrada. Também observa-se que não existe a ocorrência de outros picos para frequências mais altas como se percebe na FFT.

A análise de multi-resolução com wavelets é mostrada a seguir na Figura IV-24.

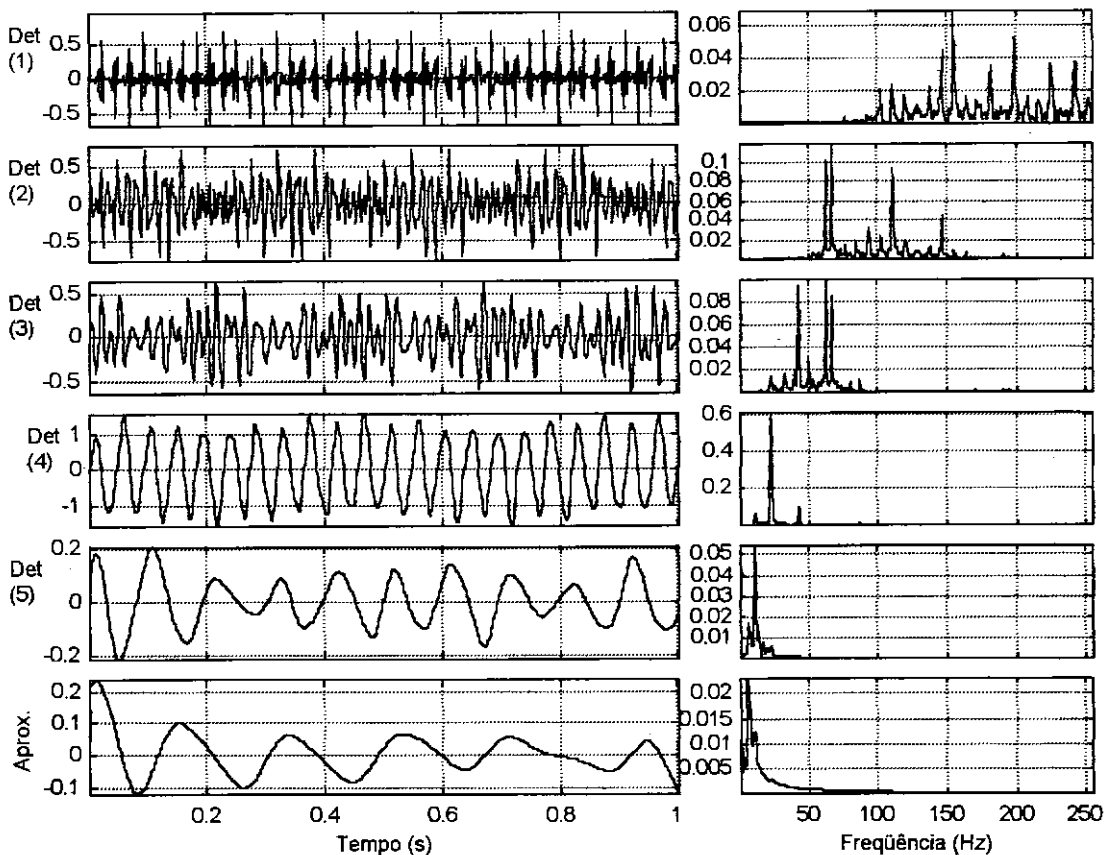


Figura IV-24 Análise de multiresolução com wavelets - onda quadrada

A notar-se na análise de multi-resolução da Figura IV-24 são os níveis 1 e 4. O nível 4 persegue os picos enquanto o nível 1 consegue captar bem as transições do sinal. Uma wavelet de menor ordem certamente iria evidenciar mais estas transições. Pode-se dizer que a Symmlet 8 não é a mais adequada para se detectar as transições deste sinal.

IV.7 Ruído branco

Resolveu-se adicionar a esta lista de exemplos o ruído branco, de forma que se possa identificar através de um gráfico tempo-frequência se o sinal está sujeito ou não a ruídos.

O ruído branco tende a ter amplitude constante em frequência quando o número de médias tomadas tende a ser grande. Aqui não se fará este tipo de média, somente será mostrado um único sinal, na Figura IV-25, e seu respectivo espectro.

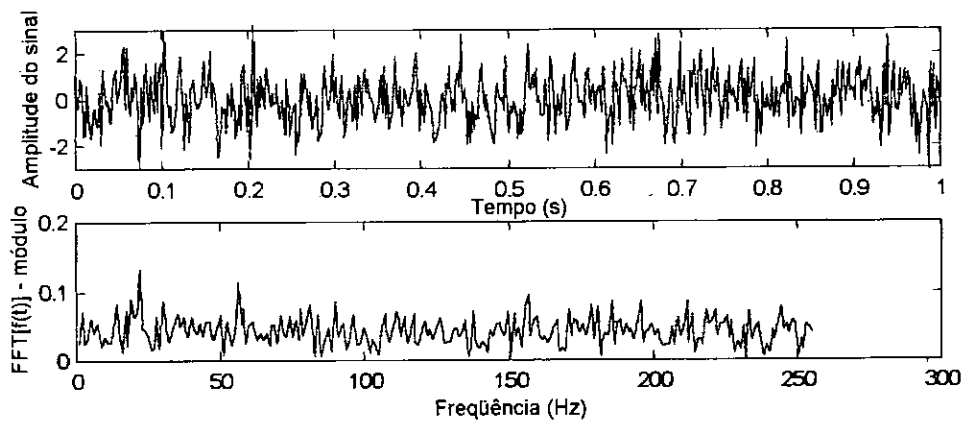


Figura IV-25 Ruído branco e FFT

Repara-se na Figura IV-25 a tendência de amplitudes do ruído no domínio da frequência ficarem constantes. Este mesmo fato pode ser também observado pela distribuição tempo-frequência mostrada na Figura IV-26. Na Figura IV-26 observa-se claramente que o ruído é bem disperso em ambos os domínios, tempo e frequência.

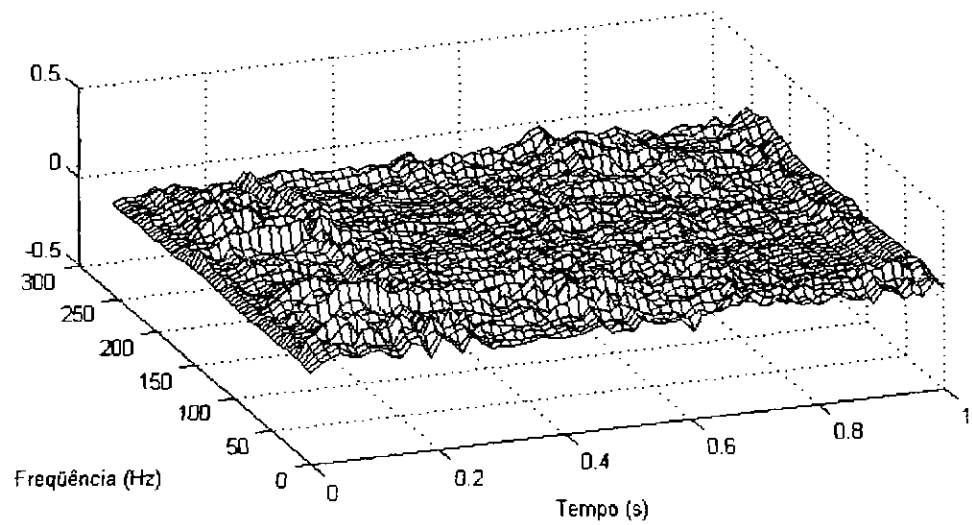


Figura IV-26 TFD - Ruído branco

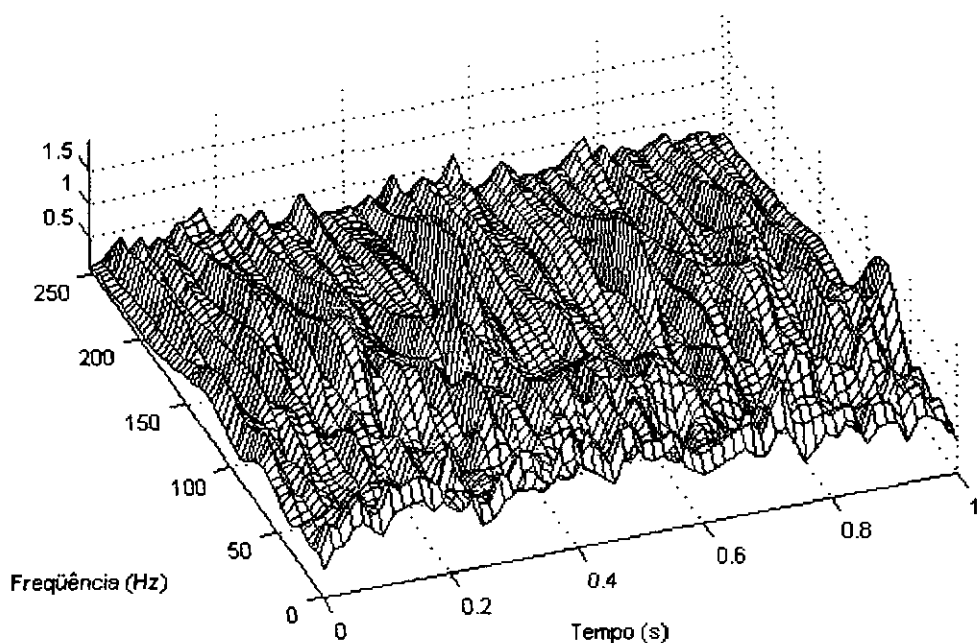


Figura IV-27 Distribuição wavelet contínua do ruído branco

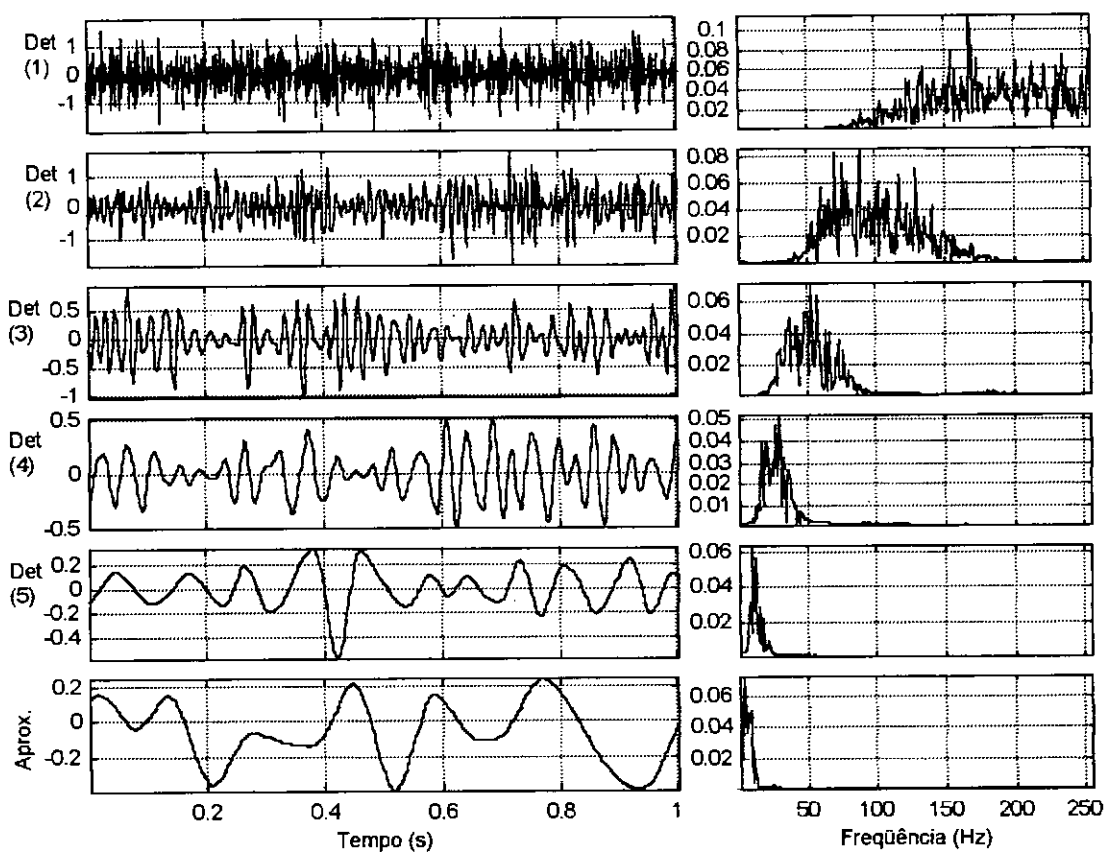


Figura IV-28 Análise de multiresolução com wavelets - ruído branco

A distribuição wavelet contínua da Figura IV-27 repete o mesmo resultado. A análise de multi-resolução é mostrada na Figura IV-28. Apreende-se da Figura IV-28 que o ruído branco, por ter um espectro quase constante, tem representação em todos níveis de detalhe da análise de multi-resolução. Este fato pode ser bem utilizado na supressão de ruído de um sinal e este aparentemente é o campo mais promissor das wavelets. Donoho publicou uma série de trabalhos sobre o assunto e em (DONOHO, 1993) demonstra a superioridade do uso das wavelets sobre várias técnicas avançadas para supressão de ruídos, inclusive dentro da faixa de frequências do sinal que se está analisando. Além de poderosas neste sentido, os métodos de supressão de ruído baseados em wavelets não necessitam de mais que pequenos acréscimos à rotina apresentada nesta tese, tal a sua simplicidade.

Neste capítulo pôde-se observar como sinais simples são representados no plano tempo-frequência e como as qualidades e defeitos dos diversos tipos de distribuição interferem no resultado final. É imprescindível que a representação destes sinais esteja clara para que a interpretação de sinais mais complexos possa ser feita sem enganos.

V APLICAÇÕES EM ENGENHARIA

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos em que as técnicas tempo-frequência podem ser utilizadas para melhor analisar problemas clássicos de engenharia civil. Deve-se levar em conta que os exemplos aqui apresentados são uma pequena demonstração da eficiência das técnicas e foram explorados de forma superficial em virtude da extensão da parte teórica e da inexistência de cultura estabelecida sobre elas. No entanto os bons resultados obtidos demonstram que com pouco esforço adicional pode-se desenvolver métodos que realmente resolvam problemas cotidianos de análise de estruturas.

Foram selecionadas, dentre um conjunto de aplicações realizadas, quatro que julgou-se mais interessantes. A primeira utiliza as distribuições para estimar simultaneamente a taxa de amortecimento de quatro modos de vibração em um sistema estrutural utilizando um método semelhante ao decaimento logarítmico. Esta é uma aplicação interessante pois com o método do decaimento logarítmico geralmente só é possível determinar a taxa de amortecimento do primeiro modo de vibração. No entanto será mostrado que as técnicas tempo-frequência permitem estender este método a diversos modos de vibração sem se perder a simplicidade e a precisão.

A segunda aplicação pretende determinar o parâmetro não-linear de um sistema de um grau de liberdade governado pela equação de Duffing e observa-se que este parâmetro é estimado com excelente grau de precisão. No entanto verifica-se que para aplicar esta técnica são necessárias formas especiais de excitação. Evidentemente um certo esforço deverá ser feito para estender este método no sentido de analisar sistemas de vários graus de liberdade mas se tal for conseguido uma ferramenta realmente útil deverá surgir.

A terceira aplicação pretende tão somente estudar o comportamento de ondas de flexão em uma viga biapoiada governada pela teoria de Timoshenko. O comportamento destas ondas é muito difícil, se não impossível, de ser analisado no domínio do tempo ou da frequência pelo seu caráter dispersivo. Vê-se que com técnicas tempo-frequência este comportamento fica facilmente caracterizado, inclusive a localização de reflexões das ondas. Aplicações práticas podem surgir através da observação de padrões onde o

desvio destes padrões pode ajudar a identificar falhas estruturais.

A quarta e última aplicação utiliza dados coletados em ensaios sísmicos de um solo que geralmente são realizados simultaneamente a ensaios de piezocone (CPTU), também conhecido como cone holandês. Neste caso particular as técnicas tempo-frequência permitiram observar falhas no método que servirão para corrigir a forma de execução do ensaio. Adicionalmente realiza-se uma filtragem usando wavelets discretas.

Deve-se ter em mente que, por ser uma técnica diferente, as distribuições tempo-frequência também exigem procedimentos diferentes para realização dos ensaios. Como será constatado, a manutenção das formas de ensaio geralmente levam a fracos resultados na análise com as distribuições. Desde que o método de análise (as distribuições) está suficientemente robusto para ser utilizado na prática, é importante que pesquisas se concentrem em novos procedimentos de ensaio de forma a aproveitar as qualidades do método, ainda pouco exploradas em nossa opinião.

V.1 Utilização de distribuições tempo-frequência para estimar amortecimento em estruturas com comportamento linear

Esta aplicação consiste em determinar a taxa de amortecimento de um suposto sistema estrutural ao qual foi imposto um deslocamento inicial e em seguida liberado.

Se for usada superposição modal pode-se dizer, sem perda de generalidade, que a coordenada generalizada $v_j(t)$ correspondente ao modo j terá seu comportamento ditado pela equação (CLOUGH, 1993)

$$v_j(t) = \rho_j e^{i(\omega_j t + \theta_j)} e^{-\xi_j \omega_j t} \quad (V-1)$$

onde ρ_j e θ_j são constantes dependentes das condições iniciais do movimento e se supôs que a taxa de amortecimento é suficientemente pequena para que não haja mudança significativa na frequência de vibração. A resposta do deslocamento no tempo é dada pela expressão

$$x(t) = \sum_j v_j(t) X_j \quad (\text{V-2})$$

onde X_j é o valor da forma modal j no ponto de leitura. Se somente um modo, diga-se o primeiro, estiver presente na resposta, pode-se obter a taxa de amortecimento ξ_1 diretamente da resposta no tempo através do método do decaimento logarítmico (CLOUGH, 1993) o qual fornece a expressão

$$\xi_1 = \frac{x(t_n) - x(t_{n+1})}{x(t_{n+1})} \quad (\text{V-3})$$

onde t_n e t_{n+1} são os instantes correspondentes a dois picos - ou depressões - adjacentes no sinal. Se, no entanto, dois ou mais modos estiverem significativamente presentes na resposta a equação (V-3) perde a validade.

Este problema pode ser contornado utilizando-se distribuições tempo-frequência. Para utilizá-las neste caso precisa-se estudar o comportamento da energia (do sinal) de cada modo, que pode ser obtida da equação (V-1) e dada por

$$|v_j(t)|^2 = \rho_j^2 e^{-2\xi_j \omega_j t} \quad (\text{V-4})$$

Pela condição marginal de tempo, a distribuição tempo frequência deverá refletir esta energia com a propriedade

$$C_f(t, \omega_j) \Delta\omega = |v_j(t)|^2 \quad (\text{V-5})$$

onde $\Delta\omega$ é o intervalo da discretização em frequência. Igualando as duas expressões, (V-4) e (V-5), e aplicando o logaritmo à equação resultante, chega-se à seguinte expressão

$$\log C_f(t, \omega_j) + \log \Delta\omega = 2 \log \rho_j - 2\xi_j \omega_j t \quad (\text{V-6})$$

Pode-se então aplicar uma regressão linear a esta equação e obter a taxa de amortecimento ξ_j e o módulo inicial do deslocamento ρ_j . Para ilustrar a forma de estimar a taxa de amortecimento foi simulado, a partir da equação (V-1), a resposta de uma estrutura cujos parâmetros são apresentados na Tabela V-1. Nesta simulação foram incluídos somente quatro modos de vibração.

Tabela V-1 Parâmetros da simulação

Modo	Frequência (rad/s)	Massa modal m	Módulo inicial ρ	Taxa de amorteci mento ξ (%)	Amortecimento $c=2m\xi\omega$
1	128π (64 Hz)	1	0,5	0,13	1
2	154π (77 Hz)	1	0,7	0,20	2
3	180π (90 Hz)	1	1,0	0,36	4
4	384π (192 Hz)	1	1,0	0,25	6

Deve-se destacar que para este exemplo as três primeiras frequências foram propositalmente colocadas bem próximas para se demonstrar a eficiência do método mesmo para estruturas que apresentem pouca esparsidade entre suas frequências naturais. A Figura V-1 mostra a TFD calculada com a versão 2 na qual foi utilizado o núcleo de Margenau-Hill, juntamente com a resposta no tempo e em frequência. É interessante notar nesta figura o efeito de periodicidade provocado pelo cálculo da convolução utilizando a FFT. Este efeito pode ser notado principalmente no quarto modo (192Hz) no qual a energia do início da distribuição espalha-se pelo fim da distribuição.

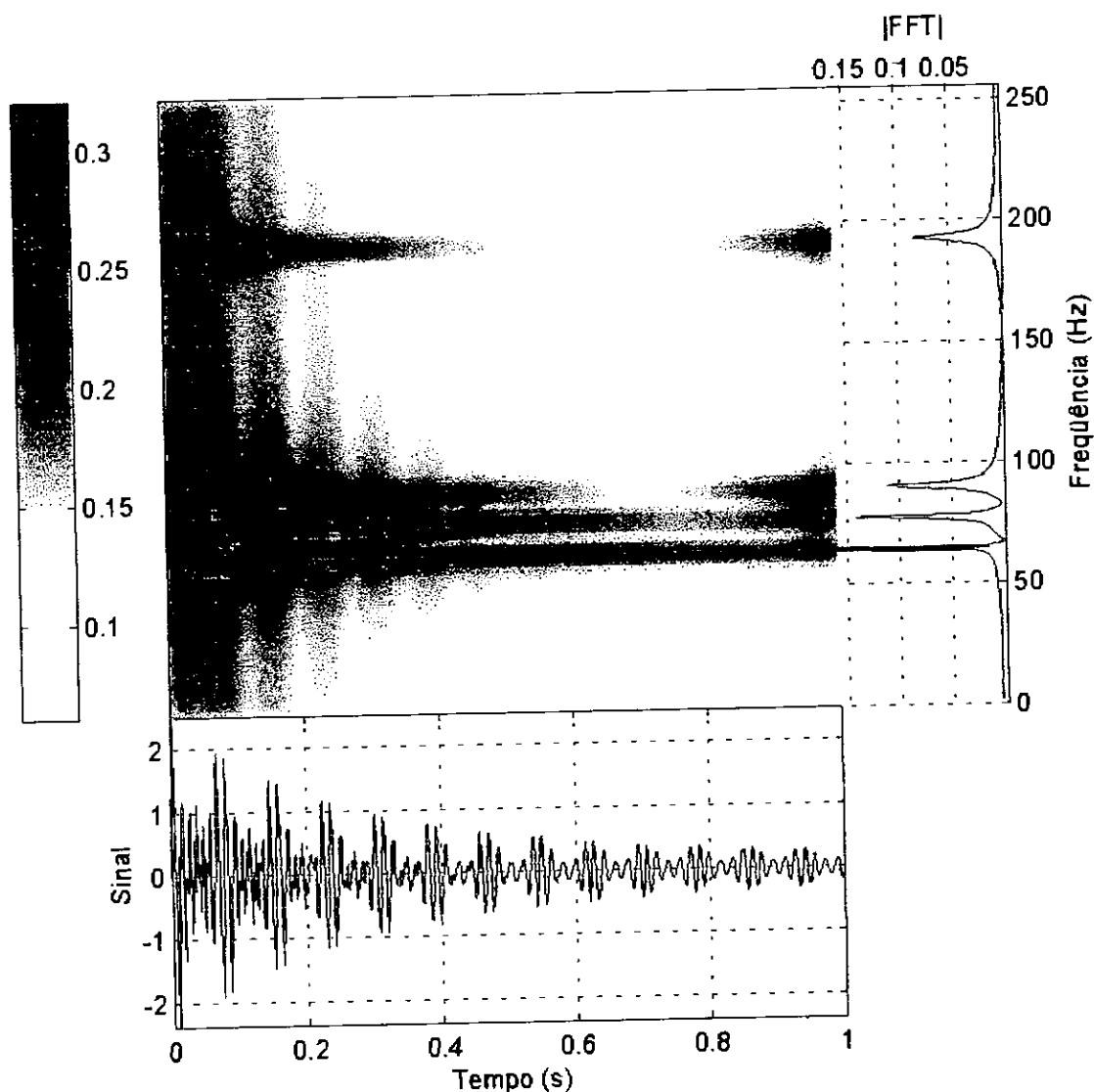


Figura V-1 Distribuição tempo-freqüência, sinal e FFT

Pode-se observar na distribuição tempo-freqüência apresentada na Figura V-1 a existência de uma certa interferência principalmente nos primeiros instantes. Com o objetivo de evitar estas interferências a análise foi refeita utilizando-se agora a técnica do espectrograma com uma janela de duração bastante grande, 0,125s, o que trará uma maior resolução em freqüência. O resultado desta nova análise é mostrado na Figura V-2.

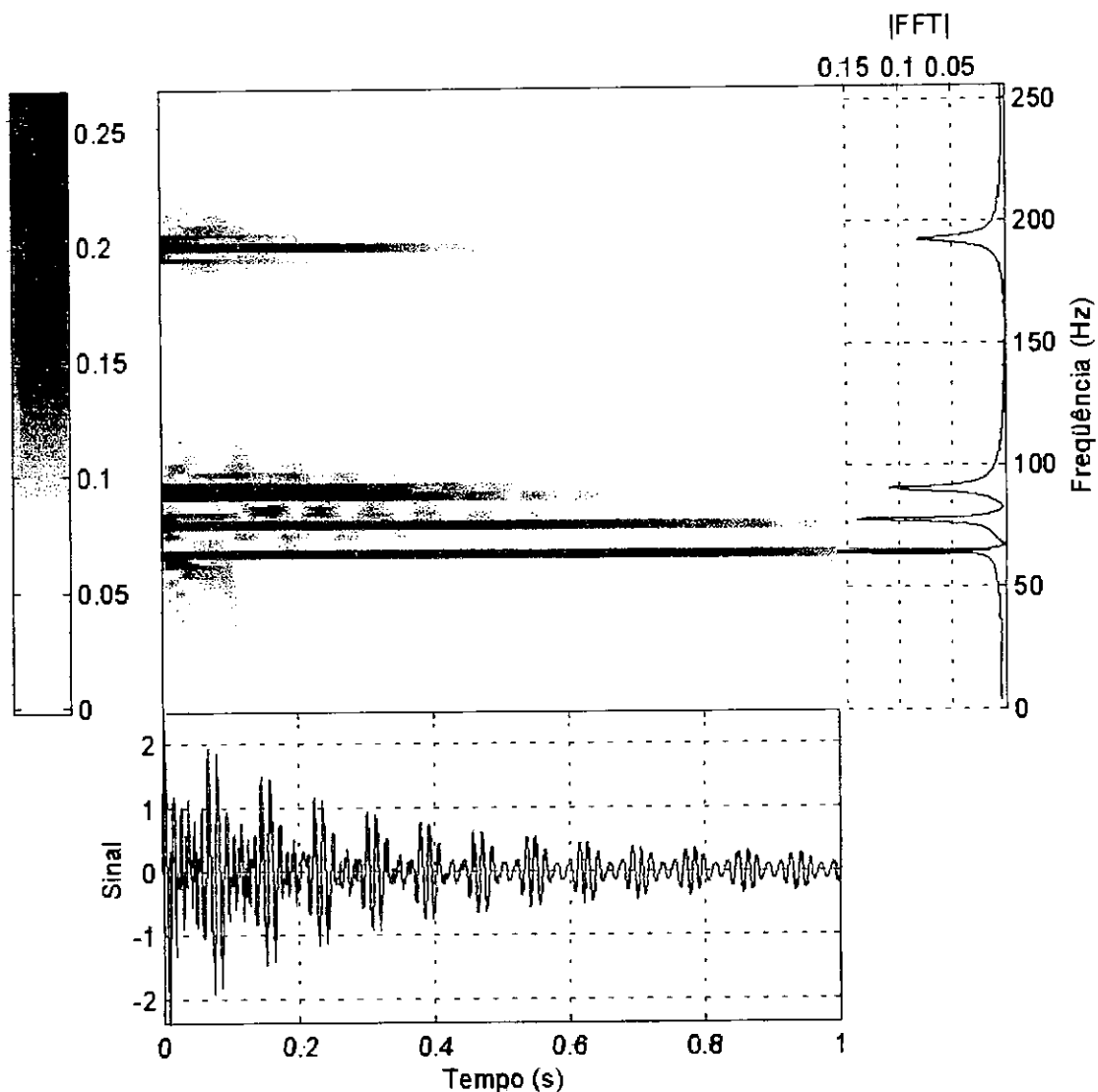


Figura V-2 Espectrograma, sinal e FFT

Pode ser visto na Figura V-2 que o espectrograma, apesar de possuir menor resolução no tempo que a versão 2, não apresenta interferências de nenhum tipo. Este fator será decisivo para a análise que será feita a seguir.

A partir das duas distribuições foram calculadas as estimativas dos amortecimentos usando a equação (V-6) como entrada numa rotina de regressão linear. Para este cálculo tomou-se o cuidado de retirar da análise as porções inicial e final (no tempo) da distribuição pois estão bastante sujeitos a efeitos de borda. Os resultados obtidos usando-se a versão 2 são mostrados na Figura V-3.

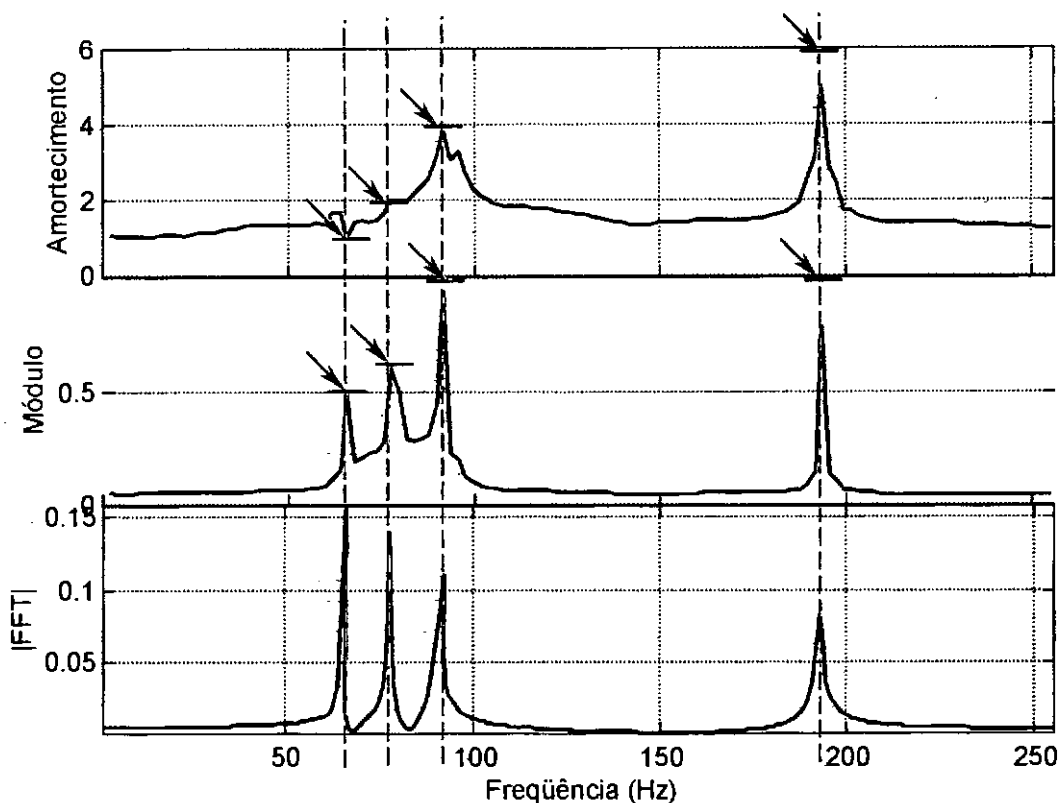


Figura V-3 Estimativas da taxa de amortecimento e módulo inicial usando-se a versão 2

A Figura V-3 apresenta três gráficos superpostos. O gráfico superior mostra a estimativa do amortecimento $c = 2m\xi\omega$ como função da frequência ω enquanto o gráfico intermediário apresenta a estimativa do módulo inicial p . O gráfico inferior é o espectro do sinal. Os valores esperados estão evidenciados por uma seta e reforçados com uma pequena barra horizontal. As frequências correspondentes aos modos de vibração estão marcadas com uma linha tracejada vertical.

Pode-se observar na Figura V-3 que a distribuição versão 2 foi eficaz em determinar tanto o amortecimento quanto o módulo inicial dos três primeiros modos, exceto o quarto modo que apresentou valores mais baixos que os esperados.

Para avaliar se o tipo de distribuição tempo-frequência realmente define a qualidade da estimativa, utilizou-se o espectrograma como comparação. A Figura V-4 mostra os resultados obtidos com o espectrograma usando-se a mesma metodologia utilizada com a versão 2.

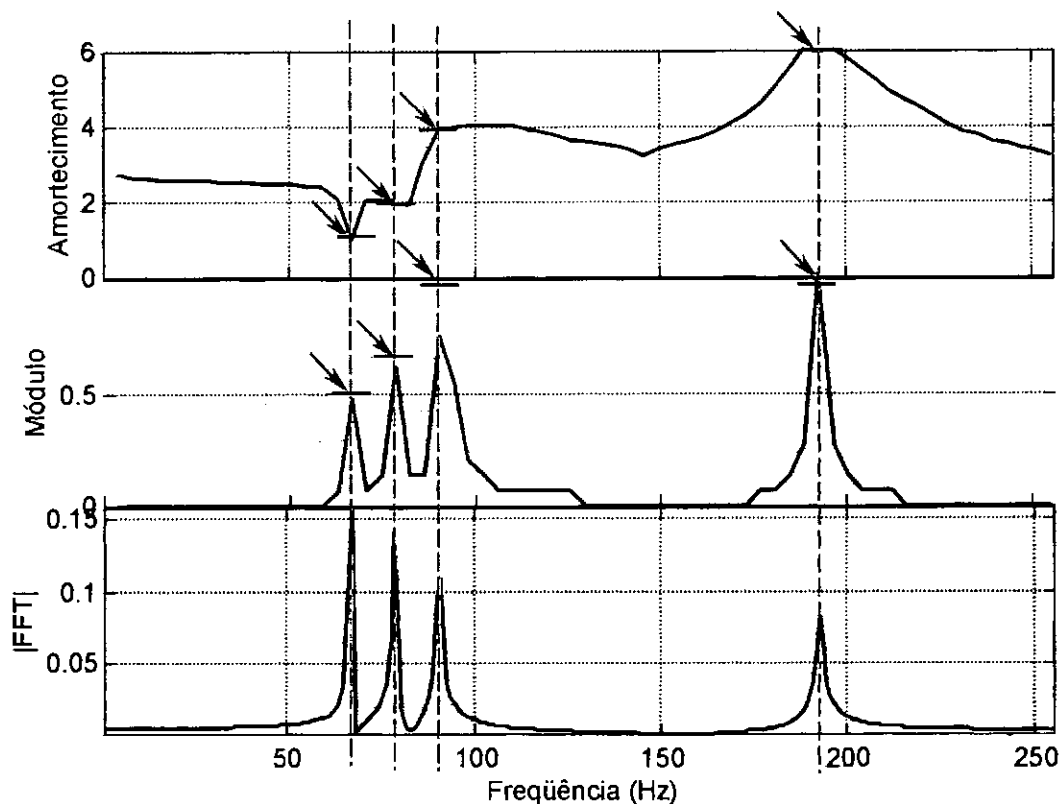


Figura V-4 Estimativas de amortecimento e módulo inicial usando o espectrograma

Percebe-se na Figura V-4 a notável precisão do espectrograma em avaliar o amortecimento. Os valores obtidos da análise foram exatamente os usados para o cálculo das funções e apresentados na Tabela V-1, ou seja, 1,2,4 e 6. Entretanto o módulo inicial não logrou os mesmos resultados, principalmente para o segundo e terceiro modos.

A distribuição de Wigner-Ville também foi utilizada. Resultados medíocres foram obtidos, consequência da grande susceptibilidade desta distribuição à interferência.

A conclusão a ser retirada deste exemplo é que a distribuição a ser usada no cálculo efetivamente define a qualidade da estimativa, sendo a precisão no tempo um parâmetro secundário na análise. Devido à qualidade apresentada pelo espectrograma e à indiferença à precisão no tempo revelada pela análise, recomenda-se portanto utilizá-lo associado a uma janela bastante larga para fornecer suficiente número de pontos em frequência.

V.2 Sistemas de um grau de liberdade não-lineares

No intuito de estabelecer a aplicabilidade do uso de distribuições tempo-frequência no estudo de sistemas estruturais não-lineares, inicia-se por analisar os casos mais simples de que se possa dispor inicialmente, sistemas de um grau de liberdade (UGL) não lineares.

Uma boa parte de sistemas físicos UGL recaem na mesma equação diferencial, chamada de *equação de Duffing*, que será mostrada adiante. Apesar de esta equação constar de quase todos os livros sobre dinâmica estrutural e de ser aparentemente simples, as soluções clássicas resultantes não levam a uma fácil caracterização deste sistema a partir de observações experimentais. Neste item será mostrado como as distribuições tempo-frequência podem ser utilizadas como uma ferramenta para estudar este tipo de sistema.

A equação diferencial deste tipo de sistema pode ser obtida através da seguinte análise. Seja o sistema da Figura V-1, um conjunto massa-mola-amortecedor submetido a uma força de excitação $f(t)$, cuja rigidez é função da posição x da massa, fato responsável pela não-linearidade do sistema.

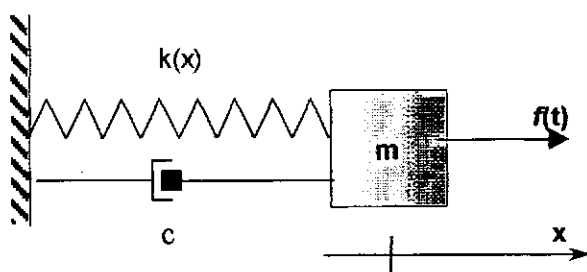


Figura V-5 Sistema massa-mola

Adotando a rigidez como função quadrática da posição tal que $k(x) = k_0 + \Delta k \cdot x^2$, dois casos qualitativamente distintos podem ocorrer: com ganho e com perda de rigidez, conforme ilustrado na Figura V-6.

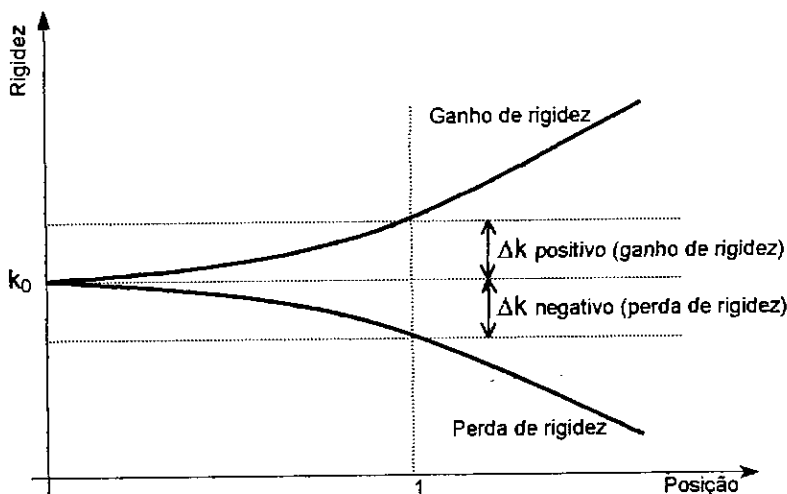


Figura V-6 Relacionamento não-linear entre rigidez e deslocamento

Observa-se na Figura V-6 que k_0 é a rigidez do sistema para a posição de equilíbrio sem a força excitadora e Δk é a variação de rigidez por unidade ao quadrado do deslocamento.

A força de restauração da mola será dada por

$$f_s(x) = \int_0^x (k_0 + \Delta k \cdot u^2) du = k_0 x + \frac{\Delta k}{3} x^3 \quad (\text{V-7})$$

Sendo assim tem-se que a equação diferencial para o sistema é dado por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_0 x + \frac{\Delta k}{3} x^3 = f(t) \quad (\text{V-8})$$

Dividindo-se por m , e fazendo-se as substituições $\omega_0^2 = k_0/m$, a frequência natural do sistema na posição zero, $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$, a taxa de amortecimento, $\tilde{f}(t) = \frac{f(t)}{m}$, a força de excitação externa por unidade de massa, e $\alpha = \frac{\Delta k}{3m}$, o parâmetro não-linear, vem

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + (\omega_0^2 + \alpha x^2)x = \tilde{f}(t), \quad (\text{V-9})$$

As respostas em frequência são apresentadas na Figura V-7 para ganho (α positivo) e perda de rigidez (α negativo).

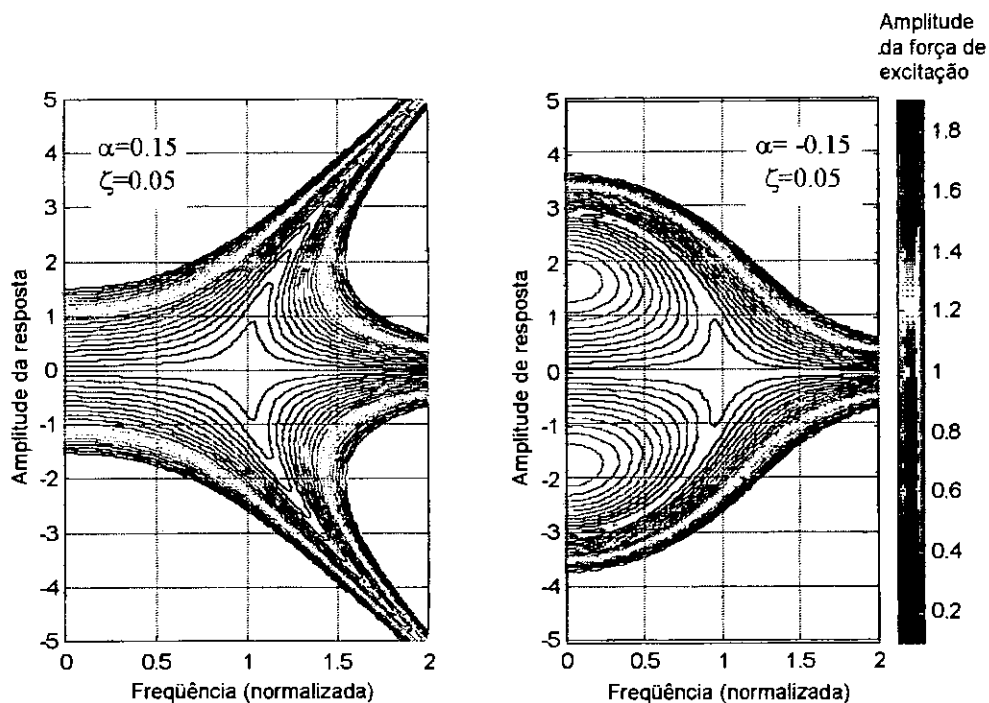


Figura V-7 Respostas em frequência para o sistema sob vibração forçada

Deve-se ter em conta que as respostas descritas pela Figura V-7 partem de uma solução em série da equação (V-8) e utiliza apenas os dois primeiros termos desta série, como descrito em RAO (1995). Isto quer dizer que estas respostas são válidas apenas para sistemas fracamente não-lineares. Para sistemas altamente não-lineares, como se propõe a estudar neste item, os termos de mais alta ordem da série passam a ser significativos e os resultados deste tipo de análise não serão mais numericamente válidos. Apesar disso continuarão a servir como referenciais do comportamento do sistema.

Pretende-se, portanto, sobrepujar esta restrição utilizando distribuições tempo-frequência como ferramenta de análise. Deve-se enfatizar que as distribuições serão usadas como ferramenta de análise de resultados e não como parte de uma dedução matemática do comportamento de sistemas não-lineares. Para tanto foram feitas simulações partindo da equação (V-8), utilizando o Simulink Toolbox do aplicativo MatLab. Foram usados nesta série de simulações os seguintes parâmetros:

Excitação : variável conforme o caso

$$\text{Condições iniciais} \begin{cases} \dot{x}_0 = 0m/s \\ x_0 = 0m \end{cases}$$

$$\text{Modelo} \begin{cases} \left. \begin{aligned} k &= 1.0N/m \\ m &= 1kg \end{aligned} \right\} \omega_0 = 1.0rad/s \\ \Delta k = 1.38N/m^3 (\alpha = 0.46) \\ c = 0.10N.s/m (\xi = 0.01) \end{cases}$$

$$\text{Simulação} \begin{cases} t_{total} = 102.4s \\ \Delta t = 0.05s (f_d = 20Hz) \\ \text{Solver ordem 4 (Runge - Kutta)} \end{cases}$$

As duas primeiras simulações são comuns em análises experimentais. A primeira usa uma força excitadora com amplitude constante e frequência variável, também conhecida como *sweep*. Ao contrário, a segunda usa uma força excitadora com amplitude variável e frequência constante. Os resultados de ambas as simulações necessitam ser esclarecidas à luz da Figura V-7 pois o resultado não é óbvio. Em ambas as simulações analisadas os sistemas possuem ganho de rigidez.

As duas últimas simulações são resultado do esforço em perceber qual o melhor tipo de força excitadora que aproveite mais as qualidades das distribuições tempo-frequência. Chegou-se à conclusão que forças excitadoras de frequência baixa e constante (se comparadas à frequência de digitalização) e amplitude também constante oferecem excelentes resultados, pois levam diretamente à determinação do parâmetro não-linear α da equação de Duffing. A penúltima simulação usa um sistema com ganho de rigidez e a última, perda de rigidez, para comprovar a eficiência do método proposto.

V.2.1 Excitação com amplitude constante e frequência variável (sweep)

Esta forma de excitação tem a expressão da força externa expressa por

$$f(t) = F \operatorname{sen} \left\{ \omega_1 t + \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \left(t_1 t + \frac{t^2}{2} \right) \right\} \quad (\text{V-10})$$

Esta expressão fornece uma força de excitação com amplitude constante e cuja frequência inicia em ω_1 no instante t_1 variando linearmente até atingir a frequência ω_2 no instante t_2 . Neste caso utilizou-se $F=120\text{N}$, $\omega_1=0\text{rad/s}$ para $t_1=0\text{s}$ e $\omega_2=31.4\text{rad/s}(5\text{Hz})$ para $t_2=100\text{s}$. Deve-se observar que a amplitude da força (120N) é bastante superior à amplitude máxima mostrada no gráfico da Figura V-7 e por isso deve-se trabalhar com uma faixa de frequências bem superiores a 2rad/s.

Como a amplitude da força excitadora é constante, o sistema deve se comportar mantendo-se sobre uma das curvas da Figura V-7. Este comportamento pode ser melhor esclarecido com a ajuda da Figura V-8.

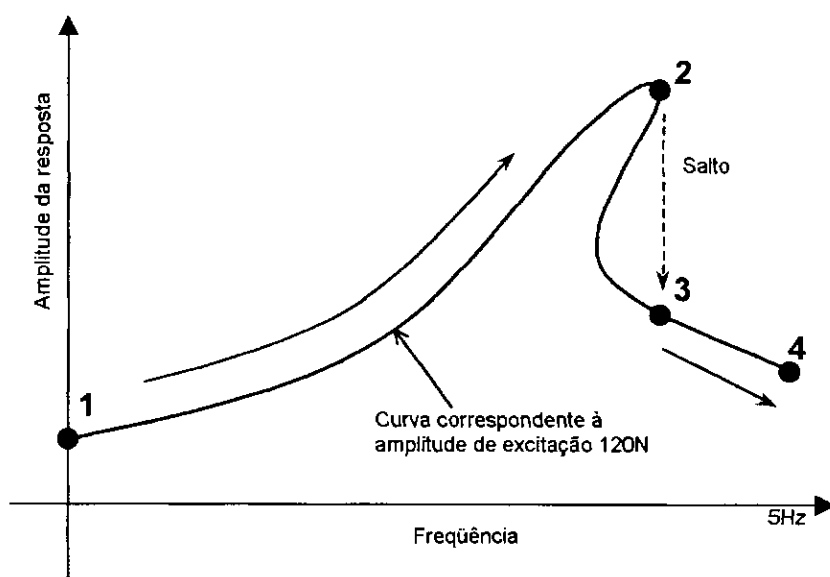


Figura V-8 Comportamento esperado em frequência do sistema UGL não-linear sob força excitadora de amplitude constante e frequência variável

Como a força excitadora inicia com amplitude constante, espera-se que o sistema mantenha-se sobre a curva indicada em linha espessa na Figura V-8. Iniciando com frequência zero (ponto 1), o sistema caminha sobre a curva até atingir o ponto 2, que é um ponto de ambiguidade. Como a frequência tende sempre a aumentar, o sistema salta

instantaneamente da posição 2 para a posição 3 como única forma de manter-se sobre a curva. A partir desta posição segue normalmente até a posição 4, correspondente à frequência final 5Hz.

Da simulação realizada utilizou-se a velocidade como sinal objeto para o cálculo da distribuição tempo-frequência pois o deslocamento tende a privilegiar demasiadamente as baixas frequências mantendo as altas frequências quase imperceptíveis. O resultado do cálculo da distribuição tempo-frequência é mostrado em conjunto com as respostas no tempo e em frequência na Figura V-9.

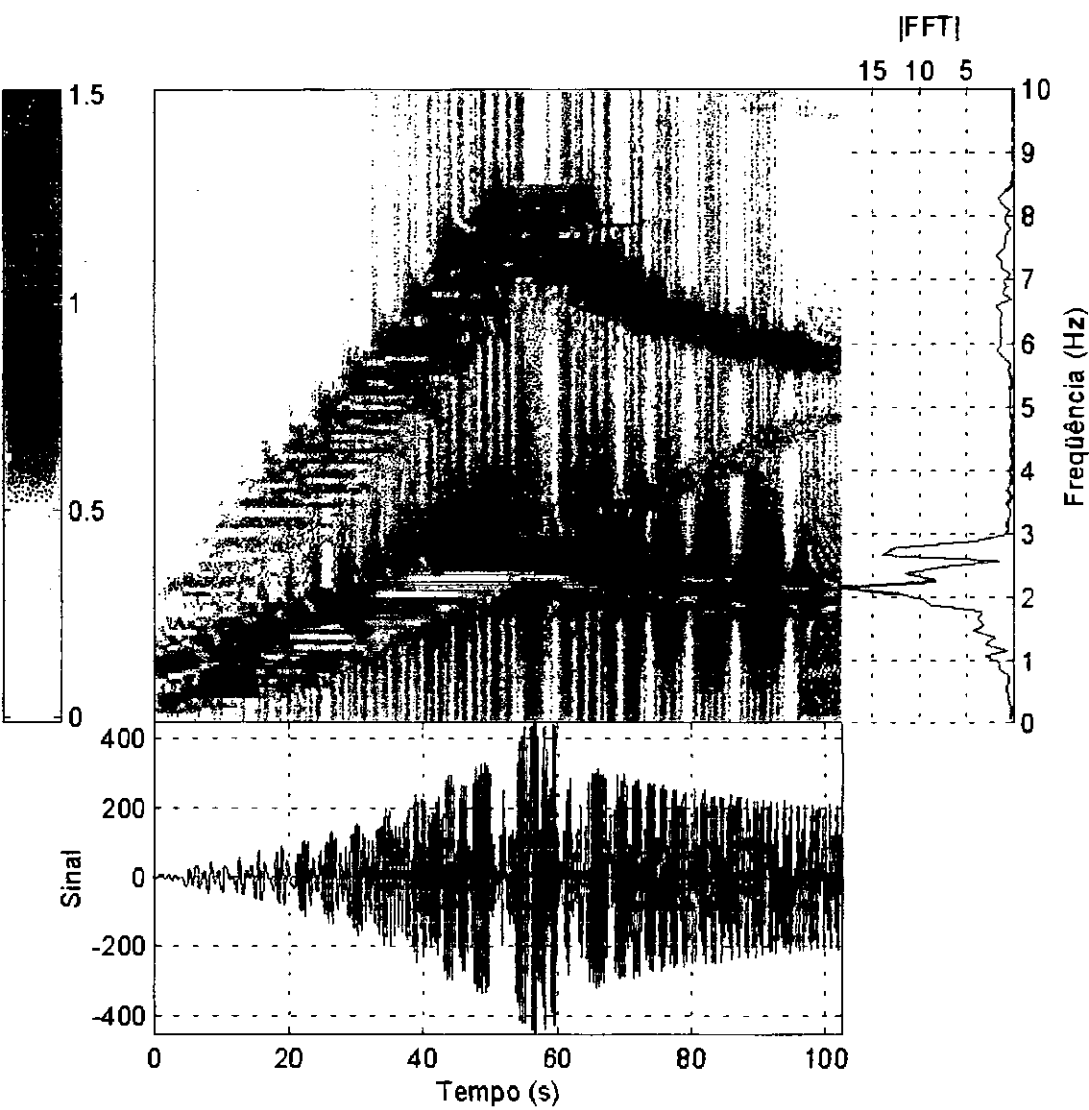


Figura V-9 Respostas no tempo e em frequência e distribuição tempo-frequência da simulação com força de excitação com amplitude constante e frequência variável

Na distribuição tempo-frequência da Figura V-9 três curvas devem ser cuidadosamente observadas. A primeira é uma reta referente à força de excitação partindo do ponto (0s,0Hz) até (102s,5Hz), como era de se esperar, já que esta é a resposta do sistema à força de excitação.

A segunda curva indica o comportamento dominante do sistema pois se encontra em cor escura que, de acordo com a escala de cores, indica maior energia. Esta curva parte da posição (0s,1Hz) variando sobre uma curva (aparentemente) quadrática até a posição (60s,2.6Hz). A seguir, declina monotonicamente até a posição (102s,2Hz). Este comportamento brusco no instante 60s indica claramente o ponto em que ocorre o salto indicado na Figura V-8. Este salto também pode ser facilmente observado na resposta no tempo.

A terceira curva é certamente um super-harmônico. Isto pode ser provado obtendo-se a frequência correspondente ao salto nesta curva, aproximadamente 8.3Hz. Esta frequência é praticamente o triplo da frequência de salto da segunda curva, 2.6Hz, fato comprovado teoricamente em RAO (1995) que indica a existência de super-harmônicos em frequências múltiplas de número ímpar da frequência básica.

Embora a forma das duas curvas seja muito parecida com a forma das curvas presentes na Figura V-7 e na Figura V-8, a ligação entre elas não é óbvia. Isto porque o gráfico da Figura V-9 é na verdade um gráfico do tipo frequência de excitação *versus* frequência de resposta, desde que a frequência de excitação varia linearmente com o tempo. Já os gráficos da Figura V-7 e da Figura V-8 são gráficos do tipo frequência de excitação *versus* amplitude de resposta.

Desta forma poderia-se pensar que a semelhança é mera casualidade, o que não é verdade. Nas duas últimas simulações constata-se que a amplitude e a frequência da resposta estão intimamente relacionadas e este relacionamento pode ser previsto com um bom grau de precisão através das fórmulas que regem o caso linear. Desta forma a semelhança deixa de ser casualidade para tornar-se objeto de estudo, o que será feito nas duas últimas simulações.

V.2.2 Excitação com amplitude variável e frequência constante

Esta forma de excitação tem a expressão da força excitadora dada por

$$f(t) = \Delta F \cdot t \cdot \sin(\Omega t) \quad (V-11)$$

onde ΔF é o acréscimo de amplitude da força por unidade de tempo e Ω é a frequência de excitação. Na presente simulação utilizou-se $\Delta F=50\text{N/s}$ e $\Omega=15,7\text{rad/s}$ (2,5Hz).

Para esta forma de excitação o sistema deve comportar-se como indicado na Figura V-10.

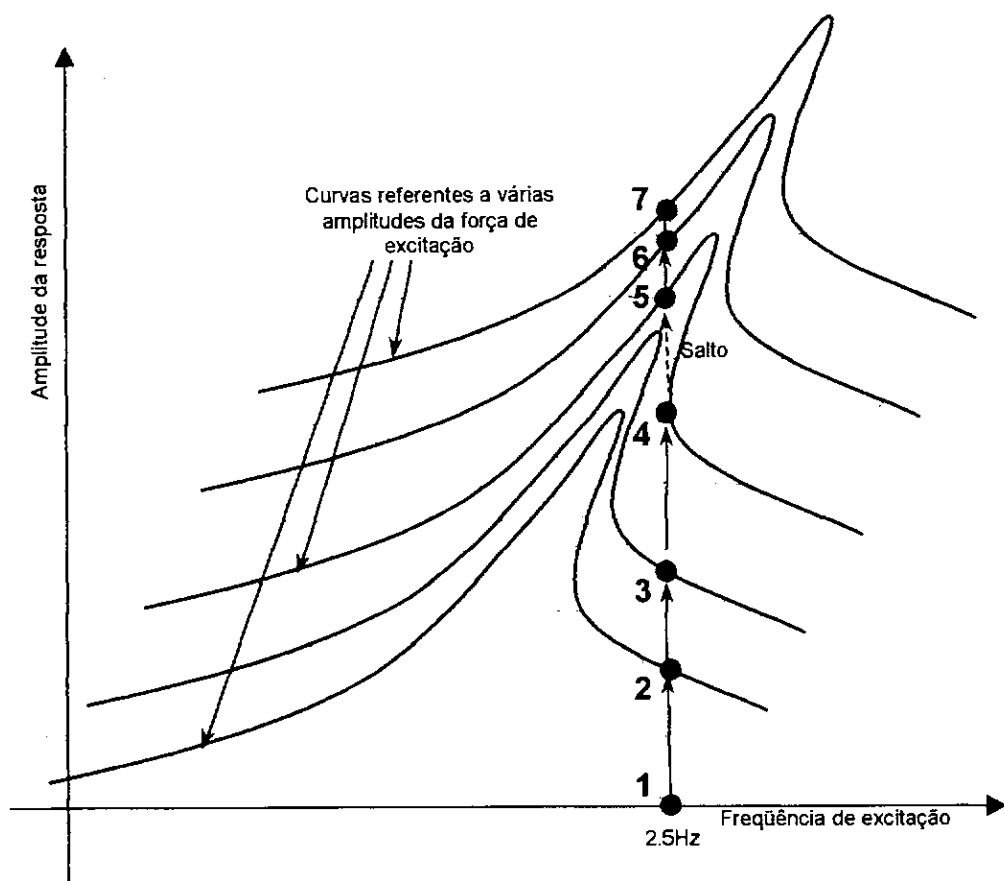


Figura V-10 Comportamento esperado em frequência do sistema UGL não-linear sob força excitadora de amplitude variável e frequência constante

Desde que a frequência de excitação é constante (2.5Hz), espera-se que o sistema se mantenha sobre uma linha vertical como indicado no gráfico da Figura V-10. Iniciando a simulação num ponto de amplitude de excitação nula (posição 1), a amplitude de excitação varia linearmente levando o sistema a deslocar-se verticalmente procurando a curva referente à sua amplitude de excitação. Assim passa gradativamente pela posição

2 e 3 chegando finalmente à posição 4, que é um ponto de singularidade pois o ponto de equilíbrio referente à próxima curva está distante. Por este motivo ocorre um salto repentino até a posição 5, indicado na Figura V-10 por uma linha tracejada. A partir deste ponto segue sem sobressalto passando pela posição 6 até a posição 7.

Novamente, utilizou-se nesta simulação a velocidade como sinal-objeto para o cálculo da distribuição tempo-frequência. A Figura V-11 mostra esta distribuição em conjunto com as respostas no tempo e em frequência.

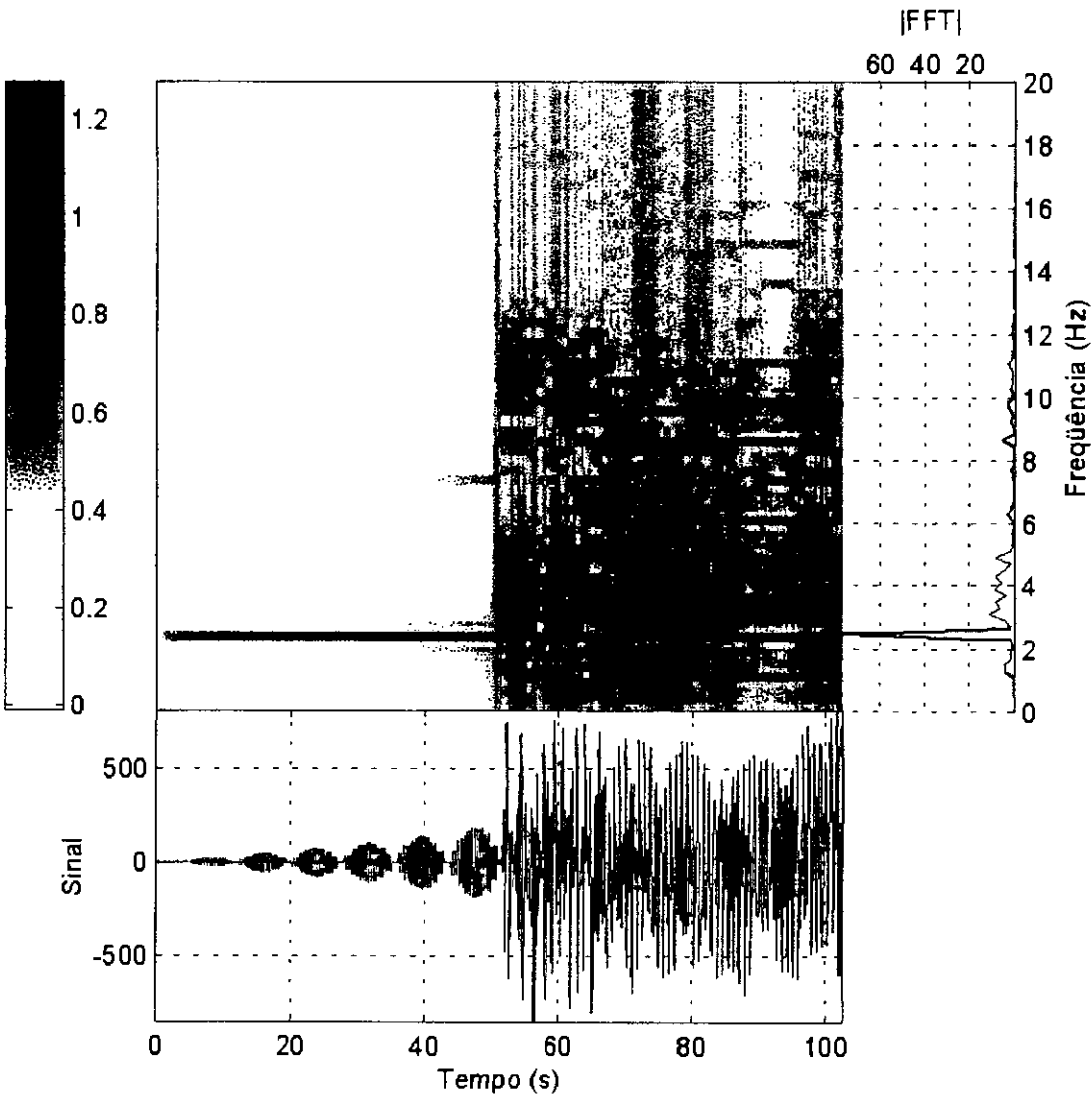


Figura V-11 Respostas no tempo e em frequência e distribuição tempo-frequência da simulação com força de excitação com amplitude variável e frequência constante

Se torna evidente na Figura V-11 o instante em que ocorre o salto, por volta de 52s.

Este fato pode ser notado tanto na resposta no tempo quanto na distribuição tempo-frequência onde duas regiões completamente distintas surgem à esquerda e à direita do instante do salto. A região à esquerda caracteriza-se pela existência da reta representando a força excitadora a 2,5Hz e pelo super-harmônico esperado a 7,5Hz. Após o salto surgem tanto um sub-harmônico a metade da frequência de excitação (1,25Hz) como vários super-harmônicos situados a frequências múltiplas de 1,25Hz. Esta diferença parece ser um diferencial claro do comportamento do sistema em cada lado das curvas da Figura V-10.

Não é objetivo final desta tese entrar a fundo na interpretação destes sistemas não-lineares mas simplesmente indicar como as técnicas tempo-frequência podem ser úteis neste sentido. Tornou-se evidente, no entanto, que o comportamento do sistema é extremamente sensível à forma como é excitado e algumas destas formas de excitação parecem ser mais indicadas para análise com distribuições tempo-frequência. Nos dois itens seguintes são apresentadas simulações que tiram bastante proveito das qualidades destas distribuições.

V.2.3 Excitação constante a baixa frequência com ganho de rigidez

Usando um harmônico de baixa frequência e amplitude constante, procura-se identificar os ganhos ou perdas de rigidez do sistema e seu relacionamento com as variações da frequência com que o sistema vibra em certo instante.

A excitação é feita por um harmônico de amplitude F constante e frequência Ω também constante, cuja expressão da força excitadora é

$$f(t) = F \sin(\Omega t) \quad (V-12)$$

Sendo a frequência de excitação baixa, é possível relacionar-se a frequência instantânea de vibração, a partir da distribuição tempo-frequência, com a amplitude do deslocamento, retirada do sinal no tempo. Toma-se para a excitação frequência tal que $\Omega \ll \omega_0$ de forma que não se ative o fenômeno de salto durante esta simulação. A Figura V-12 mostra o resultado da simulação usando-se este tipo de excitação, onde se observam o deslocamento e velocidade da massa. A Figura V-13 mostra as FFTs

respectivas.

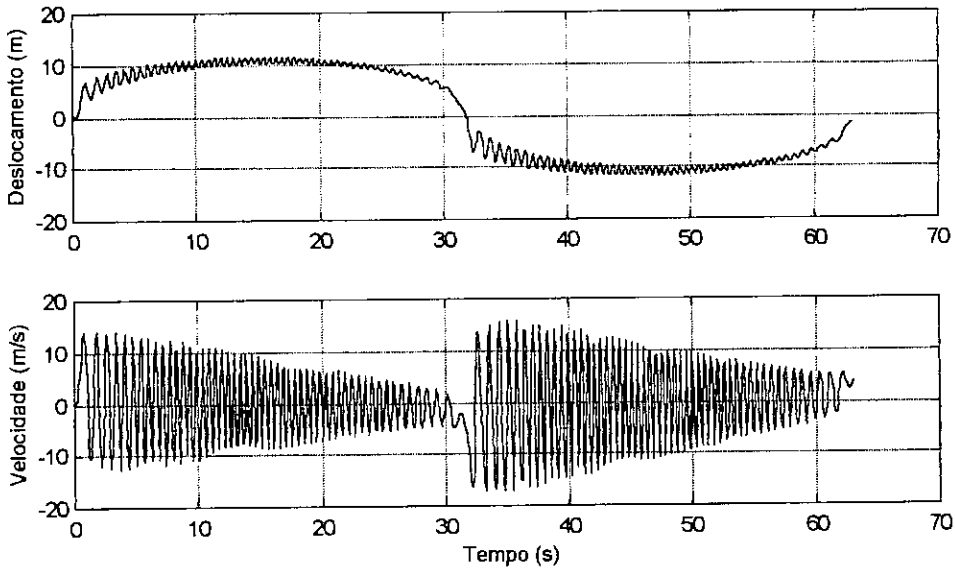


Figura V-12 Respostas com ganho de rigidez

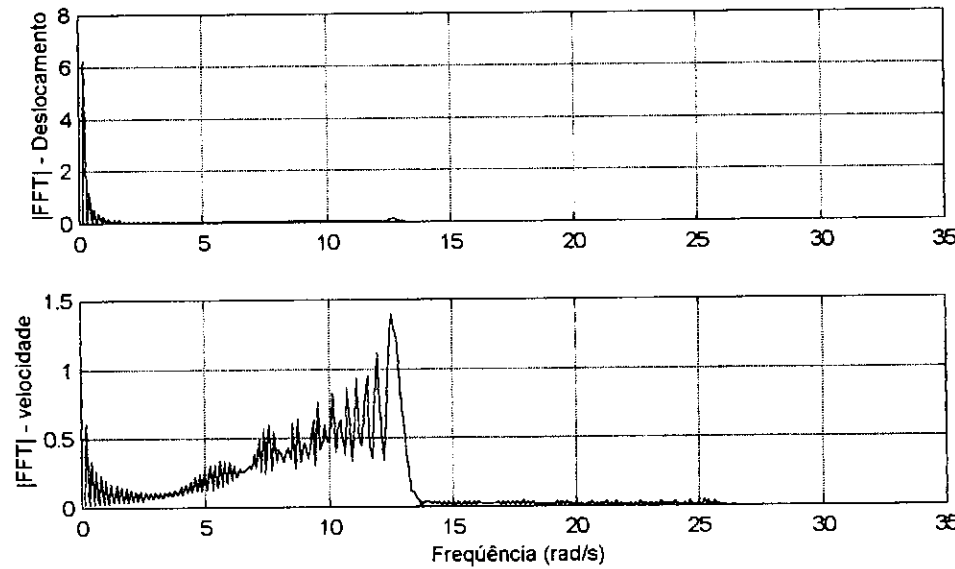


Figura V-13 FFT das respostas com ganho de rigidez

Deve-se observar que excitação a baixa frequência quer dizer principalmente, excitar o sistema com uma frequência muito abaixo à *frequência de digitalização*, e não muito abaixo da frequência natural do sistema linearizado.

A seguir calcula-se a distribuição tempo-frequência a partir da resposta da velocidade. A distribuição é mostrada de duas formas diferentes na Figura V-14 e na Figura V-15.

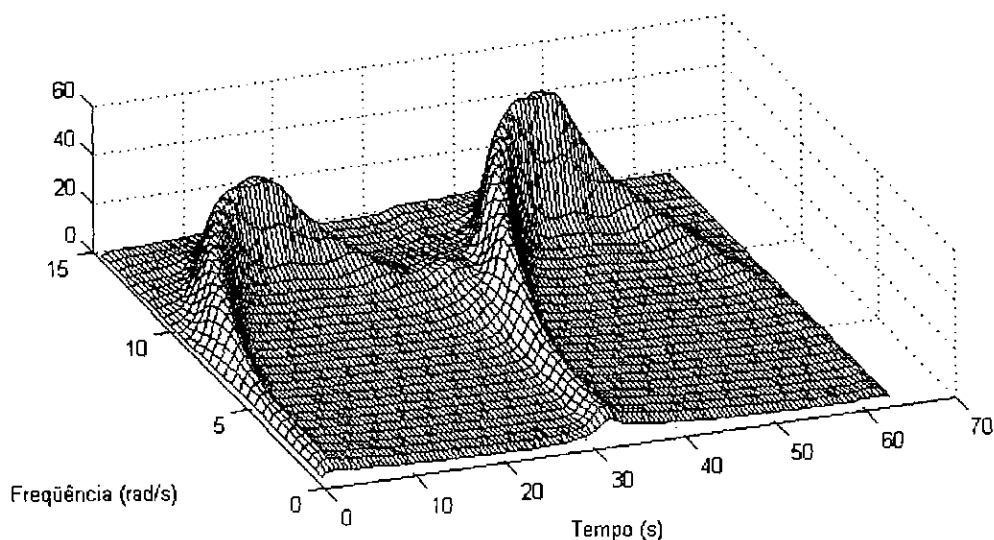


Figura V-14 Gráfico de malha da distribuição tempo-frequência da resposta da velocidade com ganho de rigidez.

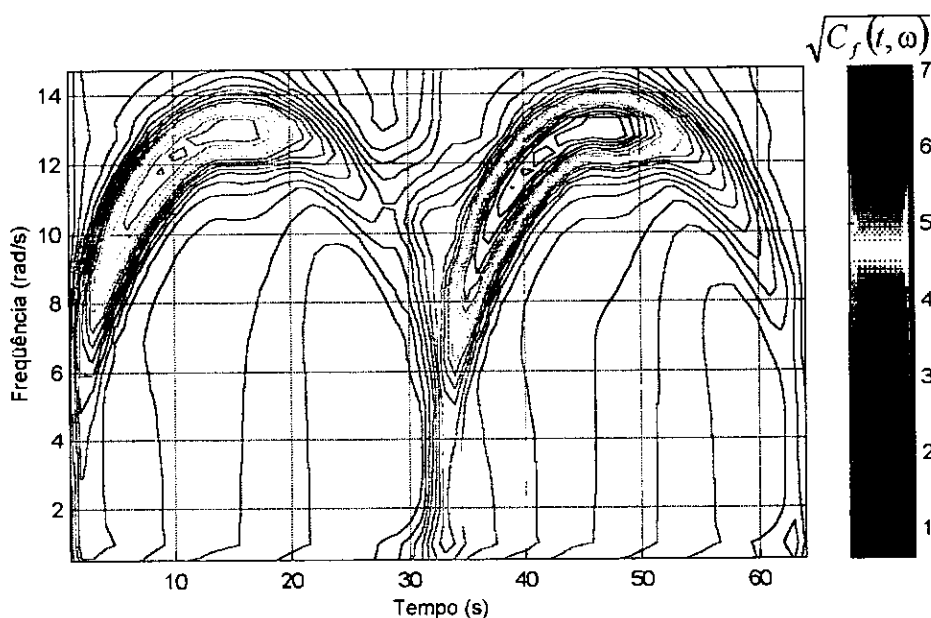


Figura V-15 Gráfico de contorno da distribuição tempo-frequência da resposta da velocidade com ganho de rigidez.

Na Figura V-14 a frequência de excitação, por ser muito baixa, ficou mal representada próximo ao eixo do tempo. Observam-se duas ondas bem definidas, variando sua frequência com o tempo. Estas ondas não podem ter nada em comum com a frequência de excitação pois esta é constante. A conclusão que se pode chegar é que o sistema está

adotando, a cada instante, uma frequência diferente de acordo com um certo padrão não definido ainda. A Figura V-15 é um gráfico de contorno que permite uma melhor visualização deste comportamento.

Seguindo o caminho da crista destas duas ondas poderão ser obtidos pares de valores (tempo,frequência). A partir da resposta do deslocamento pode-se obter um outro conjunto de valores (tempo,deslocamento). Da mesma forma com que se constrói um gráfico plano-fase pode-se, a partir destes dois conjuntos, formar um terceiro que terá valores (deslocamento,frequência). O resultado desta operação é mostrado na Figura V-16.

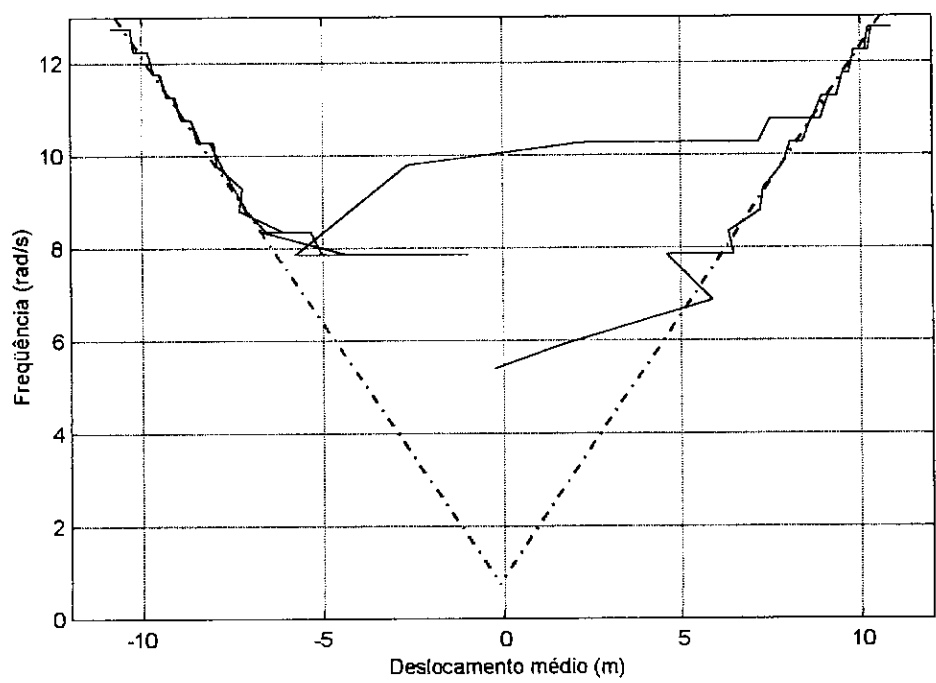


Figura V-16 Relacionamento do deslocamento com a frequência de vibração

Pela Figura V-16 acima pode-se concluir que a frequência tem uma relação linear com o deslocamento. Esta correlação, porém, só acontece para as frequências mais altas, pela própria forma de excitação que privilegia pouco as baixas amplitudes (onde ocorrem as baixas frequências).

De fato, se a frequência natural do sistema linear é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{V-13}$$

e que, neste caso,

$$k = k(x) = k_0 + \Delta k \cdot x^2 \quad (V-14)$$

Suponha-se, sem provas, que estas relações do caso linear podem ser aplicadas no caso não-linear. Portanto,

$$\omega = \omega(x) = \sqrt{\frac{k_0 + \Delta k \cdot x^2}{m}} \approx \sqrt{\Delta k} \cdot |x|. \quad (V-15)$$

Obtém-se uma relação mais simples rearranjando os termos da forma

$$\omega^2 = \frac{k_0}{m} + \frac{\Delta k}{m} \cdot x^2 \quad (V-16)$$

O gráfico da Figura V-17 reflete que estas equações continuam fazendo sentido para este sistema não-linear, muito embora estas sejam fórmulas emprestadas do caso linear.

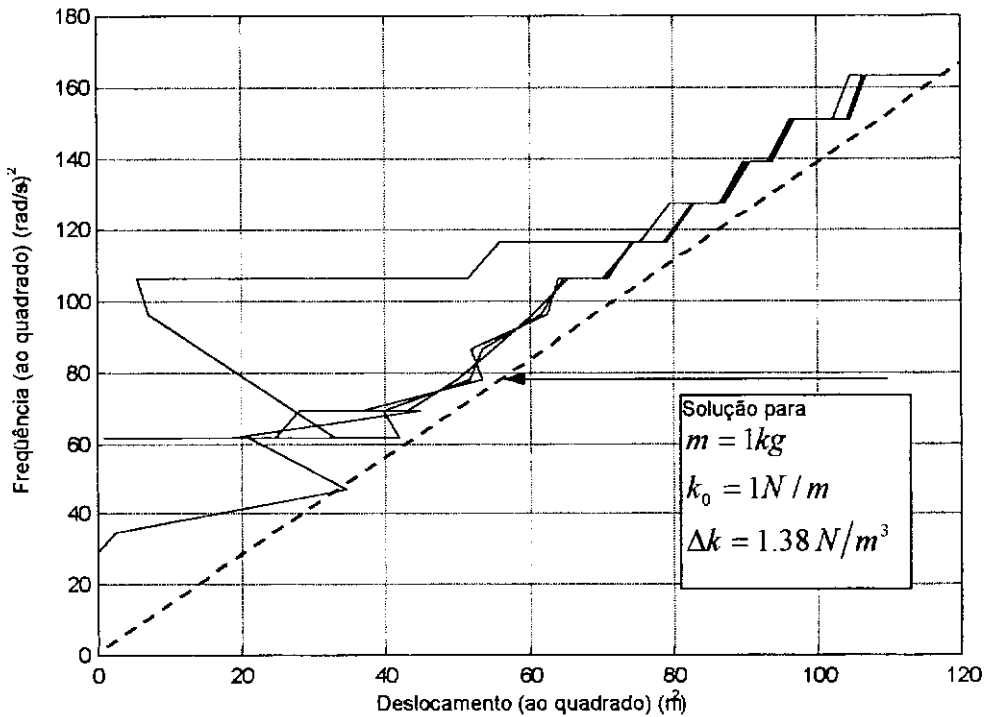


Figura V-17 Relacionamento proporcional entre deslocamento e frequência

Na Figura V-17 a linha azul pontilhada representa a curva dada pela equação (V-16) usando-se os parâmetros da simulação. Feita uma correlação estatística com a curva do gráfico foram obtidos os seguintes resultados: $\Delta k = 1.32 N/m^3$, $k_0 = 22 N/m$ e

$m = 1kg$. Prova-se desta forma que a hipótese formulada é muito eficaz para se determinar o parâmetro de não-linearidade do sistema, muito embora a rigidez inicial tenha apresentado uma grande disparidade com o valor esperado ($1 N/m$).

V.2.4 Excitação a baixa frequência com perda de rigidez

Nesta simulação se aplicou uma excitação a baixa frequência num sistema com perda de rigidez. Os parâmetros da simulação são os mesmos do item anterior, exceto o parâmetro de não-linearidade que tem seu sinal invertido para proporcionar perda de rigidez.

O resultado da simulação é mostrado na Figura V-18. A FFT das respostas, deslocamento e velocidade, são mostradas na Figura V-19.

A seguir calcula-se a distribuição tempo-frequência obtida a partir da resposta da velocidade, mostrada em gráficos diferentes na Figura V-20 e na Figura V-21. Repara-se na Figura V-20 a excitação constante a baixa frequência e uma onda variando como uma parábola mais acima. Novamente assume-se que esta onda corresponda a vibrações intermediárias do sistema como se estivesse em vibração livre, independente da excitação. Como a posição está sendo lentamente alterada, o sistema tenta vibrar de acordo com sua nova “frequência natural”, função da rigidez que varia a cada instante.

O gráfico contorno da Figura V-21 ilustra um pouco melhor esta variação.

A sequência de operações é a mesma da simulação anterior. Seguindo o caminho da crista da onda da Figura V-21 pode-se obter uma sequência de pontos (tempo,frequência). Como já se possui o sinal (tempo,amplitude) pode-se obter uma nova relação (amplitude,frequência) de maneira semelhante à construção de um gráfico plano-fase. O resultado é mostrado na Figura V-22.

A Figura V-22 mostra em linha sólida os pontos obtidos da análise. A linha tracejada representa a equação obtida para o caso linear. Traçando este gráfico em uma escala quadrática conforme a equação (V-16), tem-se uma relação de proporcionalidade como se observa na Figura V-23.

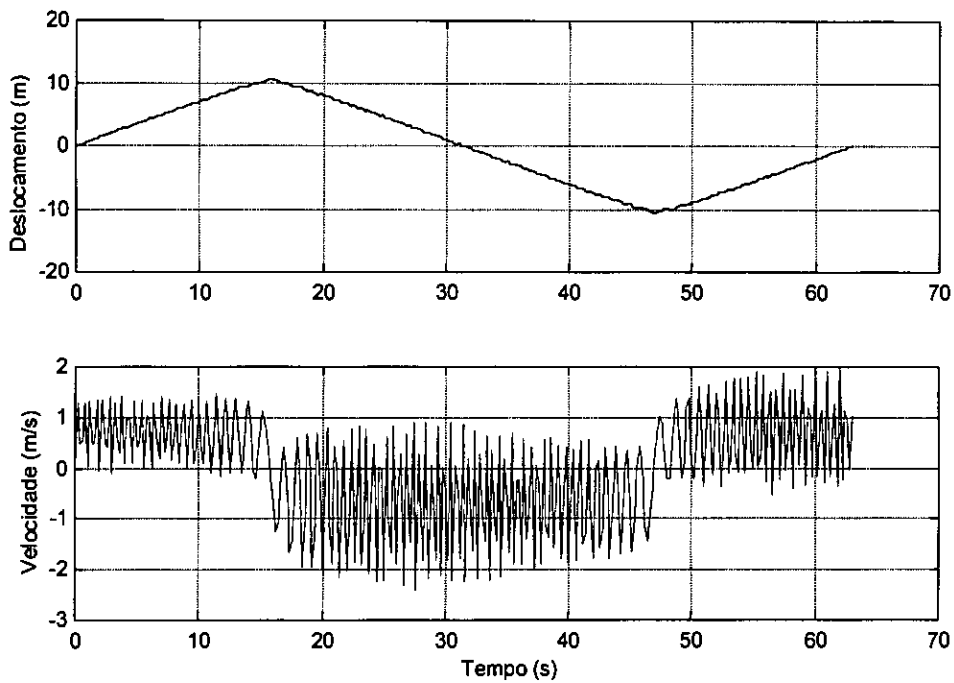


Figura V-18 Respostas com perda de rigidez

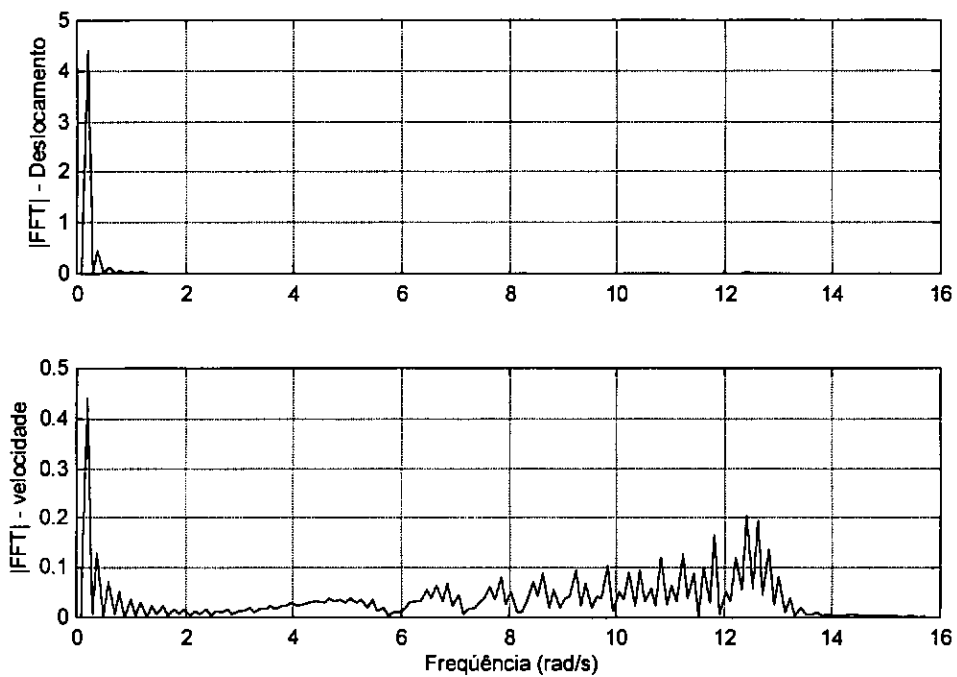


Figura V-19 FFT das respostas com perda de rigidez

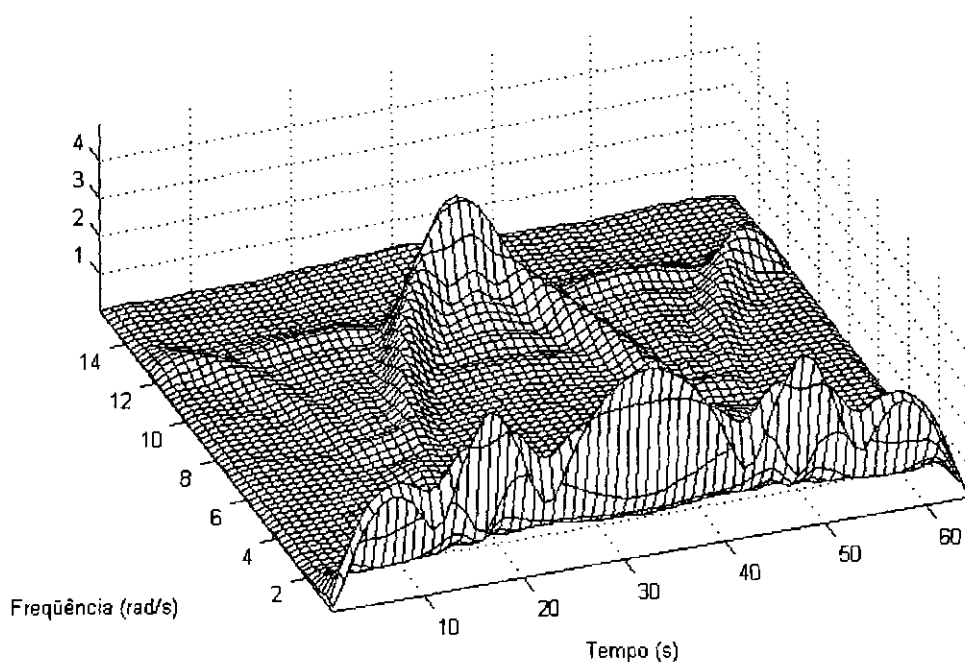


Figura V-20 Gráfico de malha da distribuição tempo-frequência da resposta da velocidade com perda de rigidez.

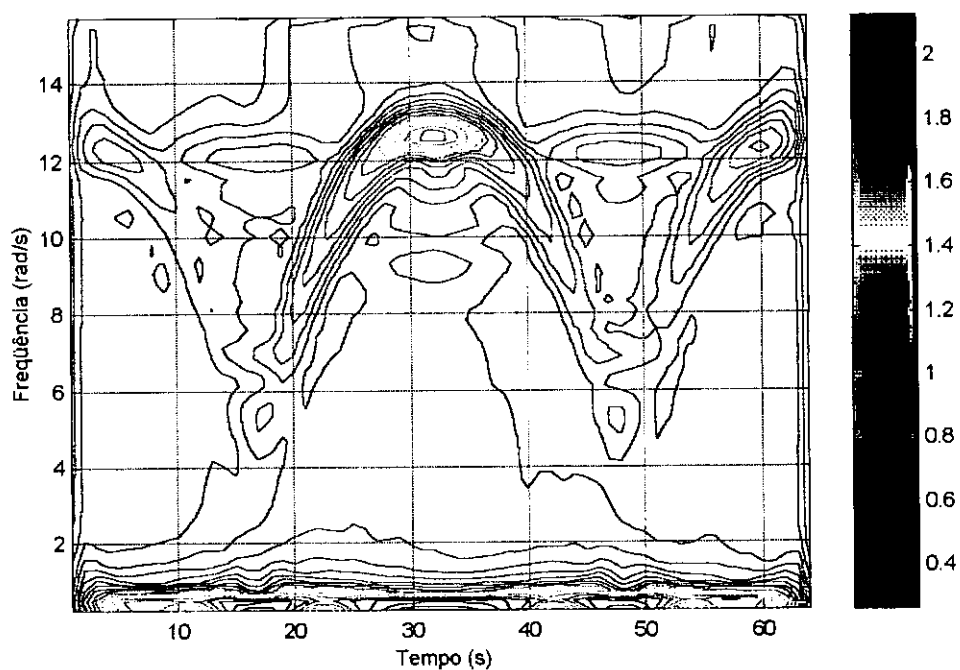


Figura V-21 Gráfico de contorno da distribuição tempo-frequência da resposta da velocidade com perda de rigidez.

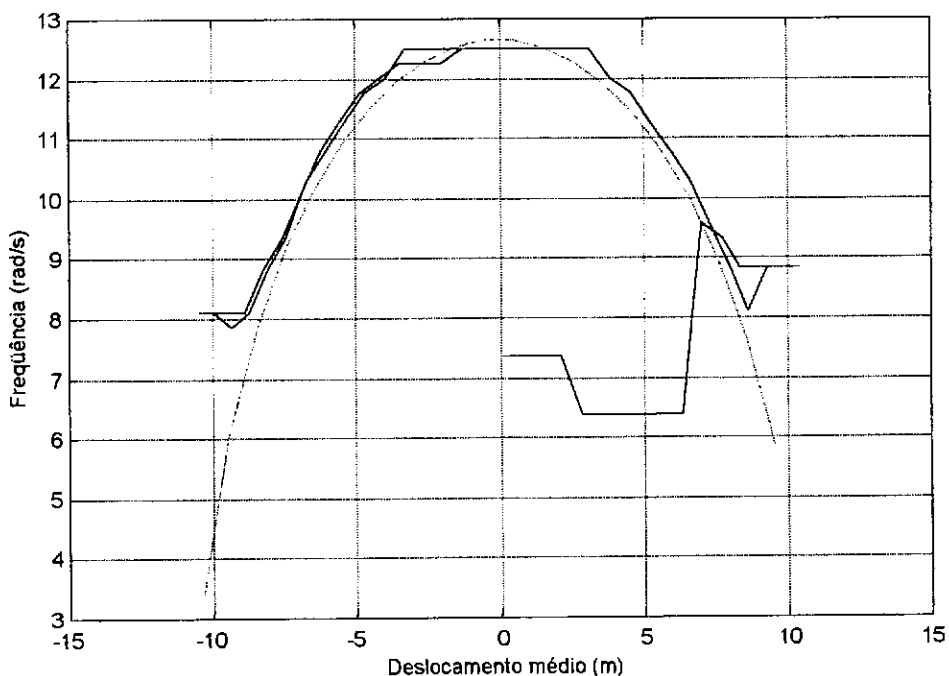


Figura V-22 Gráfico tipo plano-fase relacionando deslocamento e frequência instantânea de vibração

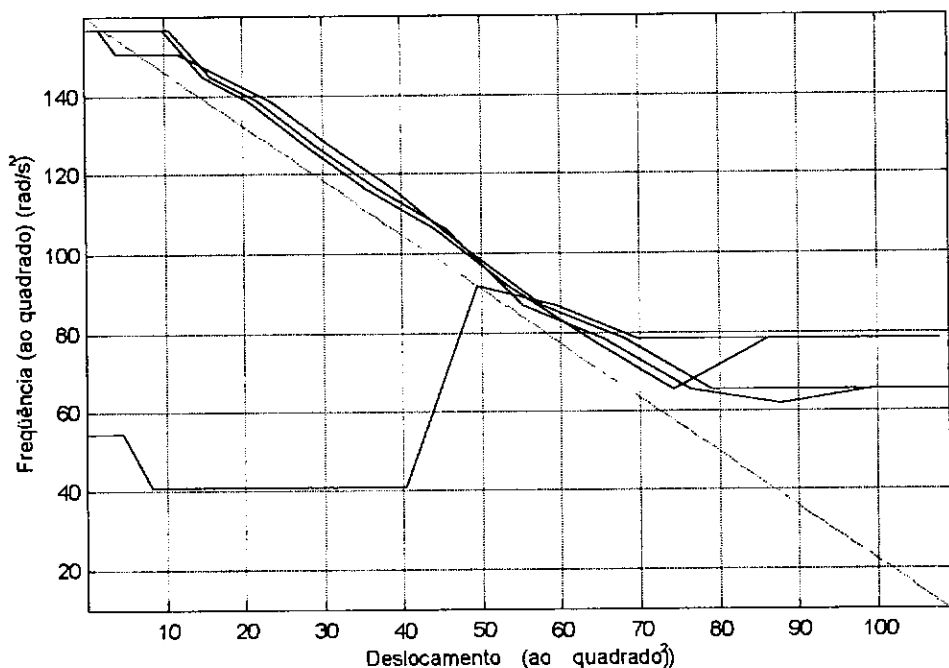


Figura V-23 Relação de proporcionalidade entre deslocamento e frequência

Novamente se verifica uma excelente correlação entre a simulação (linha sólida) e a solução do caso linear (em linha pontilhada). O parâmetro de não-linearidade, dado pela inclinação da reta, se ajusta perfeitamente à solução do caso linear.

V.3 Simulação de propagação de ondas em viga bi-apoiada

Em certos tipos de ensaios para detecção de danos em estruturas unifilares como estacas, por exemplo, são aplicados impactos axiais cujo objetivo é gerar uma onda de compressão que se propaga com velocidade constante pela estrutura até alcançar o final da estaca ou um ponto de descontinuidade, geralmente uma fratura, onde ocorre uma reflexão da onda que retorna ao ponto do impacto. Conhecido o intervalo de tempo entre o instante do impacto e o instante do retorno da onda é possível identificar a existência ou não de falhas bem como sua localização e extensão.

Em certos casos, porém, não é possível executar um impacto axial na estrutura e o único meio de se gerar uma onda é aplicar o impacto lateralmente. O problema deste procedimento é que impactos laterais geram ondas de flexão cujo comportamento é dispersivo, ou seja, cada frequência que compõe o impacto se propaga a uma velocidade distinta, fato comprovado teoricamente por qualquer teoria existente sobre propagação de ondas em vigas como a de Euler-Bernoulli ou a de Timoshenko. Devido ao comportamento dispersivo destas ondas, uma leitura confusa será obtida quando do retorno destas ondas, impedindo assim a determinação da posição da falha.

Como será visto adiante ainda neste item, técnicas tempo-frequência permitem visualizar perfeitamente tanto as reflexões como caracterizar o comportamento dispersivo de tais ondas. Neste sentido foram realizadas simulações de impactos aplicados lateralmente a uma viga biapoiada, realizados pelo programa ABAQUS num supercomputador Cray J-90. Antes de se apresentar os resultados, no entanto, faz-se necessário uma breve explanação do que se espera observar nas simulações.

Quando se aplica uma excitação tipo impacto em uma viga, uma grande faixa de frequências é excitada. Decorrente desta excitação duas formas de vibração são criadas. A primeira corresponde a uma vibração da estrutura como um todo, que pode ser completamente caracterizada por seus modos de vibração. A outra forma é propagativa, isto é, de caráter local e transiente e dá origem à formação de ondas. A cada uma destas duas formas de vibração está associada uma parcela de energia fornecida pela excitação. A atual análise irá concentrar-se somente na forma propagativa de vibração.

Após a excitação, duas quantidades distintas de energia relacionadas à forma propagativa de vibração, cada qual identificada daqui por diante como uma onda, começam a propagar-se, uma em sentido oposto à outra, distanciando-se do ponto de excitação como mostrado esquematicamente na Figura V-24. Deve-se ressaltar que esta figura não é totalmente correta pois o caráter dispersivo não permite que a forma das ondas permaneça a mesma como indicado. No entanto, a figura pode ser considerada correta se o impacto for decomposto em frequência pela transformada de Fourier e for entendido que as ondas indicadas correspondem a uma única frequência resultante de tal decomposição.

Estas ondas se propagarão indefinidamente até serem naturalmente amortecidas ou serão refletidas, retornando ao ponto de origem ao encontrarem certos pontos singulares. Estes pontos são os contornos (borda livre, apoio rotulado, apoio fixo) ou um ponto onde haja uma mudança qualquer do meio sobre o qual se propagam, como por exemplo onde haja uma fratura. Neste último caso uma parte da energia da onda continua na direção original e a outra parte retorna em direção oposta.

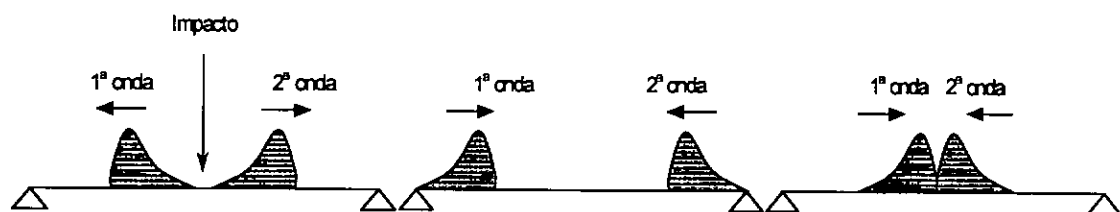


Figura V-24 Esquema do comportamento de ondas de flexão geradas por impacto em vigas

O sinal no tempo resultante refletirá todos estes comportamentos - a dispersão, a reflexão nos contornos e o amortecimento - e por isso inviabiliza qualquer análise no domínio do tempo. Uma distribuição tempo-frequência, por ser uma forma de distribuição de energia, terá a ótima propriedade de manter a unidade visual da onda, permitindo caracterizar por completo seu comportamento dispersivo. A seguir é descrito o modelo usado pela simulação e mais adiante serão apresentados as respostas no tempo e em frequência bem como as respectivas distribuições tempo-frequência resultantes da simulação.

O modelo numérico usado é mostrado na Figura V-25.

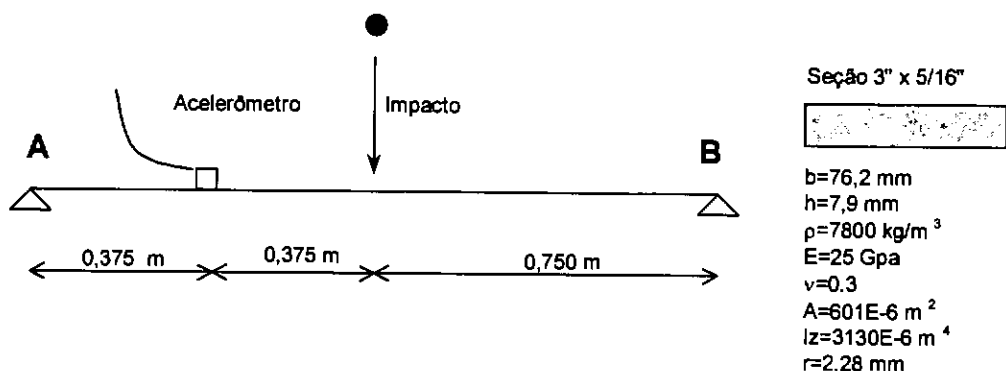


Figura V-25 Modelo usado na simulação

A simulação foi realizada usando-se o programa ABAQUS. A viga foi discretizada em 1200 elementos tipo B21 (elemento de viga de Timoshenko). Nenhuma condição de plastificação foi inserida no modelo. O método de resolução é a integração direta das matrizes globais, não usando superposição modal.

Note-se que o módulo de elasticidade adotado (25GPa) foi muito inferior ao real para o aço (210GPa). O efeito disso é que diminui-se a velocidade de propagação das ondas, permitindo que o intervalo crítico calculado pelo programa aumente bastante, economizando recursos computacionais. Esta é uma medida essencial pois a simulação, para este modelo, de duração total 0,1s demora cerca de uma hora rodando no supercomputador Cray J90. Como o objetivo final da simulação é tão somente obter-se um sinal para ser analisado por técnicas tempo-frequência, tal abstração da realidade foi permitida.

Presume-se que a excitação seja fornecida por uma esfera de aço de 10mm de diâmetro caindo de uma altura de 10cm, o que resulta em uma excitação de forma aproximadamente triangular com pico 100N para um tempo de contato prescrito de 10 μ s. Contato Herziano (sem perda de energia) é assumido entre a esfera e a viga. A Figura V-26 mostra a excitação aplicada à viga e seu respectivo espectro.

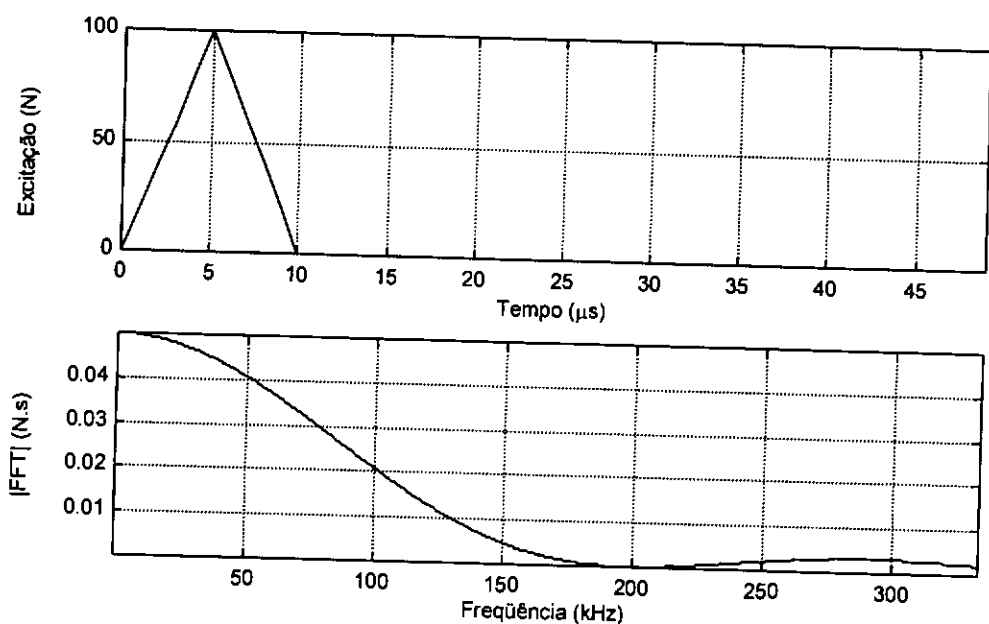


Figura V-26 Excitação aplicada e FFT

Nesta figura nota-se que a excitação não é curta o bastante para excitar de forma constante todo o domínio desejável em frequência. Contudo não se poderia diminuir mais esta duração pois segundo JOHNSON (1985) o tempo de contato de $10\mu\text{s}$ já está bem abaixo do previsto para este caso em particular. Adicionalmente a diminuição do tempo de contato iria aumentar o custo computacional para a simulação. No entanto desejou-se observar o comportamento em frequências na faixa de 0-330kHz e tornou-se necessário prescrever a duração do contato para este valor.

De acordo com a teoria de Bernoulli-Euler, a velocidade de uma onda é diretamente proporcional à raiz quadrada de sua frequência. Isto contraria a experiência pois sabe-se que existe uma velocidade-limite para a qual as altas frequências tendem. A teoria de Timoshenko prevê esta velocidade limite como $\alpha\sqrt{E/\rho}$, onde α pode ser tomado, para uma grande classe de materiais, como 0,69 em seções retangulares e 0,60 em seções circulares. Para a viga da simulação teremos que a velocidade-limite deve ser, portanto, 1235m/s.

O comportamento esperado da simulação são duas ondas inicialmente propagando-se em sentido contrário, uma na direção do apoio da esquerda (A) e outra na direção do apoio da direita (B), conforme o esquema mostrado na Figura V-24. Como existirá uma grande faixa de frequência das ondas propagando-se à velocidade-limite de 1235m/s,

devem-se observar picos no sinal no tempo nos instantes em que a energia correspondente a esta faixa de frequências passar pelo sensor (vide Figura V-25). Considere-se, para efeito de previsão inicial do comportamento, que as duas ondas A e B se propaguem somente a esta velocidade. A onda A passará pelo sensor no instante $0,375\text{m}/1235\text{m/s} = 304\mu\text{s}$, refletirá no apoio esquerdo e tornará a passar pelo sensor em $3 \times 304\mu\text{s} = 912\mu\text{s}$, indo em direção ao apoio direito. A onda B, que segue em direção oposta, refletindo no apoio direito e retornando, será a próxima a passar pelo sensor no instante $(2 \times 0,750 + 0,375\text{m})/1235\text{m/s} = 1516\mu\text{s}$, refletindo a seguir no apoio esquerdo e passando pelo sensor novamente em $1516 + 304\mu\text{s} = 1820\mu\text{s}$. A partir deste instante as ondas se refletirão continuamente nos dois apoios até que sejam amortecidas. O caráter dispersivo das ondas de flexão fará com que o sinal no tempo tenda a se tornar bastante confuso com o passar do tempo e os picos do sinal captado pelo sensor, bem definidos inicialmente, tenderão a abrandar-se.

De acordo com esta previsão deve-se obter no sinal a sequência de ondas A-A-B-B-A-A-B-B-..., cada item da sequência separado por um intervalo de tempo de $608\mu\text{s}$. Como o intervalo total da simulação é de $10.000\mu\text{s}$ espera-se a ocorrência de 16 ondas passando pelo sensor.

A Figura V-27 mostra o espectrograma do sinal para o qual foi utilizada uma janela de duração $48\mu\text{s}$, permitindo discretização de 64 pontos em frequência. A FFT a partir da qual o espectrograma é definido não foi elevada ao quadrado conforme a definição original, que permite uma equivalência de amplitudes entre a distribuição e a FFT do sinal total. Associado ao espectrograma estão o sinal no tempo (aceleração vertical em m/s^2) e respectiva FFT. O sinal cobre o intervalo de 10ms a partir do momento da excitação e está discretizado a uma taxa de 666kHz, perfazendo um total de 6.667 pontos. Verificou-se anteriormente à confecção do gráfico que praticamente nenhuma fração de energia encontra-se acima de 320kHz. As amplitudes da distribuição correspondem à escala de cores indicada do lado esquerdo da figura.

A Figura V-28 apresenta o mesmo sinal para o qual foi calculada a distribuição alias-free. Não foi usado nenhum tipo de escalamento ou suavização neste gráfico.

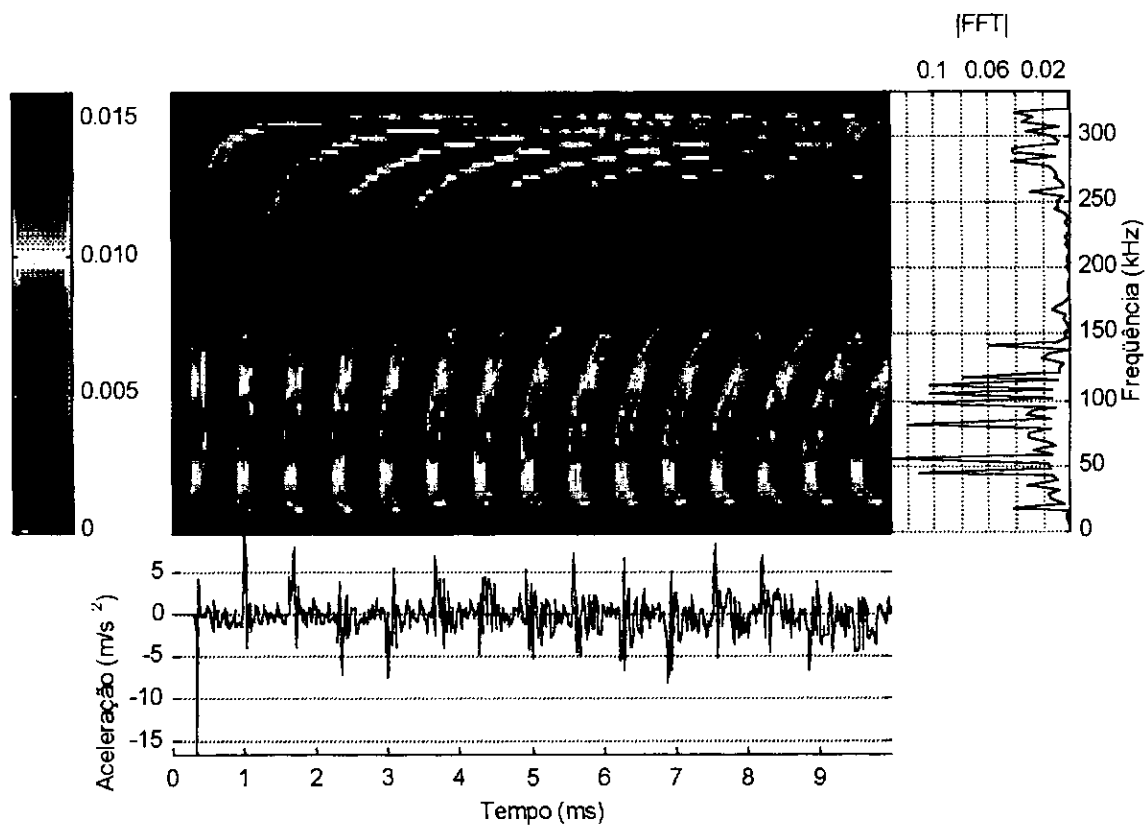


Figura V-27 Espectrograma do sinal resultante da simulação

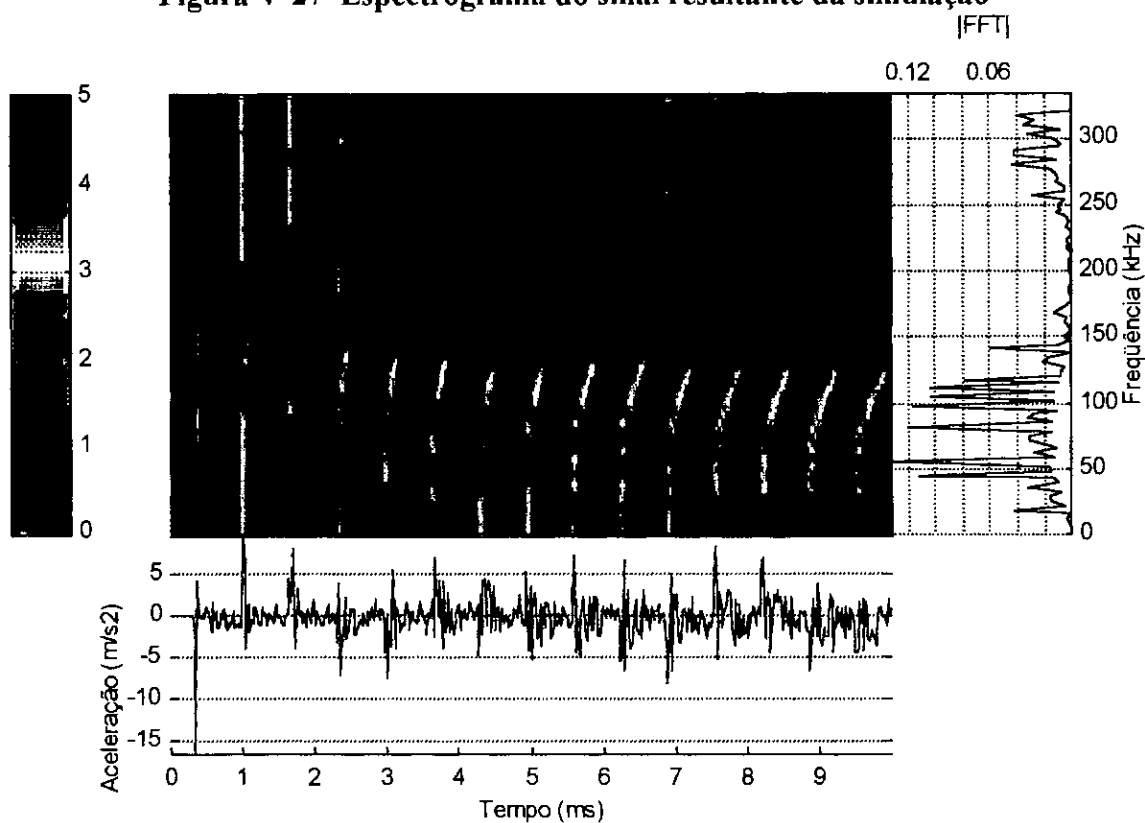


Figura V-28 Distribuição alias-free do sinal obtido pela simulação

Nota-se pelas figuras que o sensor captou a presença de 15 ondas distintas, a última passando pelo sensor aproximadamente em $9500\mu\text{s}$. Descontando-se o intervalo da chegada da primeira onda, tem-se um intervalo de $656\mu\text{s}$, correspondente a uma distância de metade do comprimento da viga ($0,750\text{m}$), o que fornece uma velocidade de 1145m/s , 7,5% inferior à velocidade prevista.

O gráfico da Figura V-27 mostra que o sinal no tempo mostra um pico muito forte durante a passagem da primeira onda, devido ao fato de que a energia ainda não teve tempo de se dispersar. Estes picos se repetem em intervalos de $656\mu\text{s}$ até que apresentam uma tendência de misturar-se a outros componentes de frequência mais para o final da simulação.

O comportamento das ondas para as mais baixas frequências – abaixo de 50kHz – é realmente o previsto pelas teorias clássicas, tanto de Bernoulli-Euler quanto Timoshenko: quanto menor a frequência, menor a velocidade de propagação da onda, que portanto passam mais tarde pelo sensor que as correspondentes às frequências mais altas. Um fato importante a se notar é que o comportamento das ondas para as altas frequências, principalmente acima de 200kHz , não é o previsto. Pela teoria de Timoshenko as altas frequências deveriam tender assintoticamente à velocidade-limite mas não é o que se observa da simulação. A partir desta frequência existe uma tendência a uma diminuição da velocidade de propagação, atingindo um valor praticamente zero em torno de 320kHz . Teorias como a de Pochamer-Chree sinalizam para este comportamento não-assintótico. Não explicadas pelas teorias clássicas são as duas ondas que aparecem cruzando perpendicularmente as ondas principais nesta mesma faixa de $200\text{-}320\text{kHz}$, que provavelmente são resultantes do processamento numérico.

A distribuição alias-free demonstra no gráfico da Figura V-28 sua sensibilidade a uma alta concentração de energia do sinal, refletida pelos traços verticais partindo dos pontos de mais alta amplitude da distribuição. Esta é uma característica indesejável desta distribuição e é provavelmente causada pela forte descontinuidade resultante na função de autocorrelação que compõe o cálculo.

Nota-se que a distribuição alias-free é bastante superior em resolução ao espectrograma. Contudo este é um dos casos onde a utilização do espectrograma é recomendada, apesar de sua baixa resolução. Como se possui uma grande quantidade de pontos no sinal, pode-se usar uma janela larga e assim obter razoável precisão em frequência. O número de 64 pontos de discretização em frequência é o bastante para se obter um gráfico razoável para o tamanho utilizado, cerca de 5cm de altura, conferindo uma resolução visual de $64 \text{ pontos} / 5\text{cm} = 12.8 \text{ ppc}$ (pontos por centímetro) ou 32.5 dpi (*dots per inch*) na vertical. No tempo, a janela de $48\mu\text{s}$ de duração (64 pontos de largura) confere uma resolução visual de $6667 \text{ pontos} / 64 \text{ pontos} / 9 \text{ cm} = 900 \text{ ppc}$ (2286 dpi), excesso este utilizado para realizar-se uma suavização da distribuição que se encontrava com picos muito fortes e certa quantidade de ruído. Por causa desta suavização o espectrograma não reflete as amplitudes dos picos indicados na FFT.

A Figura V-29 mostra o espectrograma do sinal do qual foi utilizado apenas o trecho de 6-7,5ms, contendo 1000 pontos. A janela utilizada foi reduzida para $24\mu\text{s}$ (32 pontos de largura) pois neste caso é necessário obter maior precisão no tempo em detrimento da frequência, que foi discretizada em somente 32 pontos.

Observa-se que o espectrograma está no limite da resolução visual vertical, isto é, de $32 \text{ pontos} / 5\text{cm} = 6,5 \text{ ppc}$ (16.5 dpi), enquanto a horizontal é de $1000 \text{ pontos} / 32 \text{ pontos} / 9\text{cm} = 3,5 \text{ ppc}$ (8,8 dpi). Este *zoom* permite acentuar o caráter dispersivo da onda, caracterizado pela forte curvatura das ondas nestes instantes tardios da simulação. Nesta escala já é recomendável o uso de uma distribuição de maior resolução.

A Figura V-30 mostra a distribuição alias-free do sinal entre 6 e 7,5ms. Nenhum tipo de suavização ou escalamento foi utilizado, apesar de ser recomendável um escalamento para evidenciar as mais altas frequências. Verifica-se pelo gráfico da Figura V-30 que a precisão desta distribuição é adequada à visualização do comportamento das ondas. Continuam aparecendo ainda interferências – retas verticais partindo dos pontos de alta energia.

Desta simulação ficam evidentes as limitações das duas técnicas tempo-frequência utilizadas, o espectrograma e a distribuição alias-free, servindo como exemplo prático para posteriores análises.

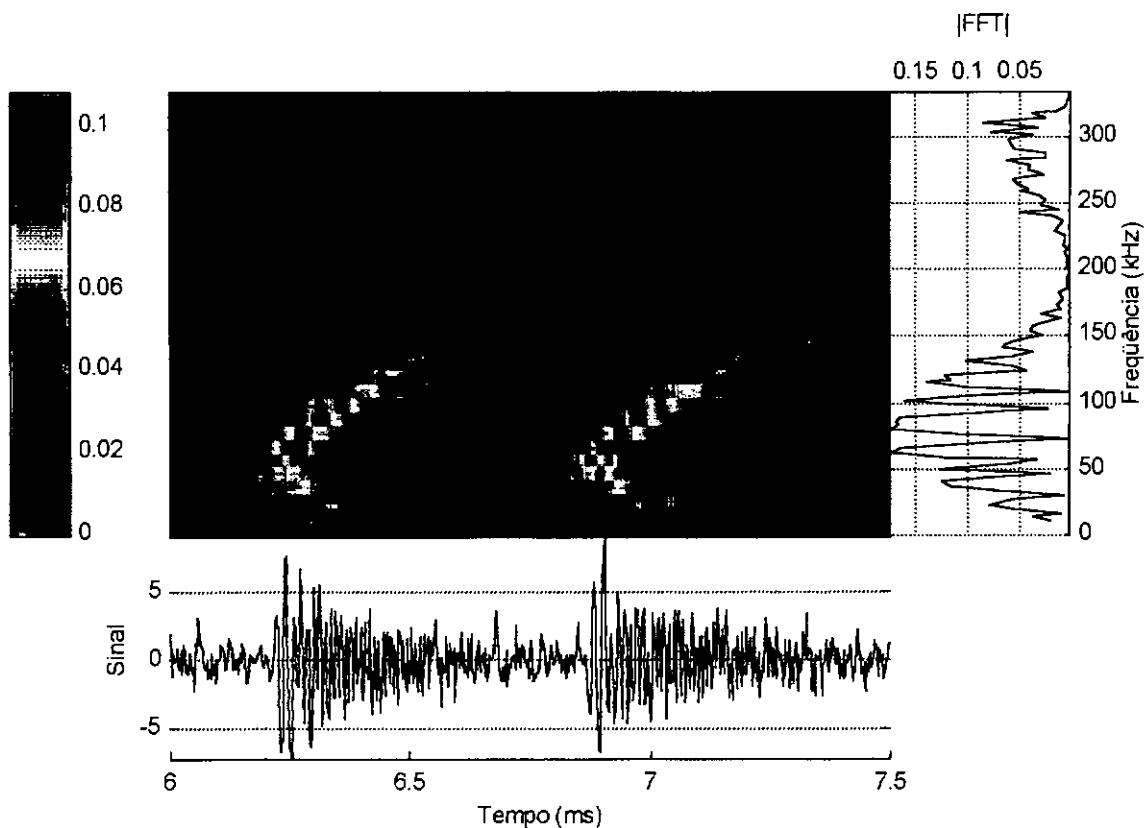


Figura V-29 Espectrograma do sinal – 6 a 7,5ms

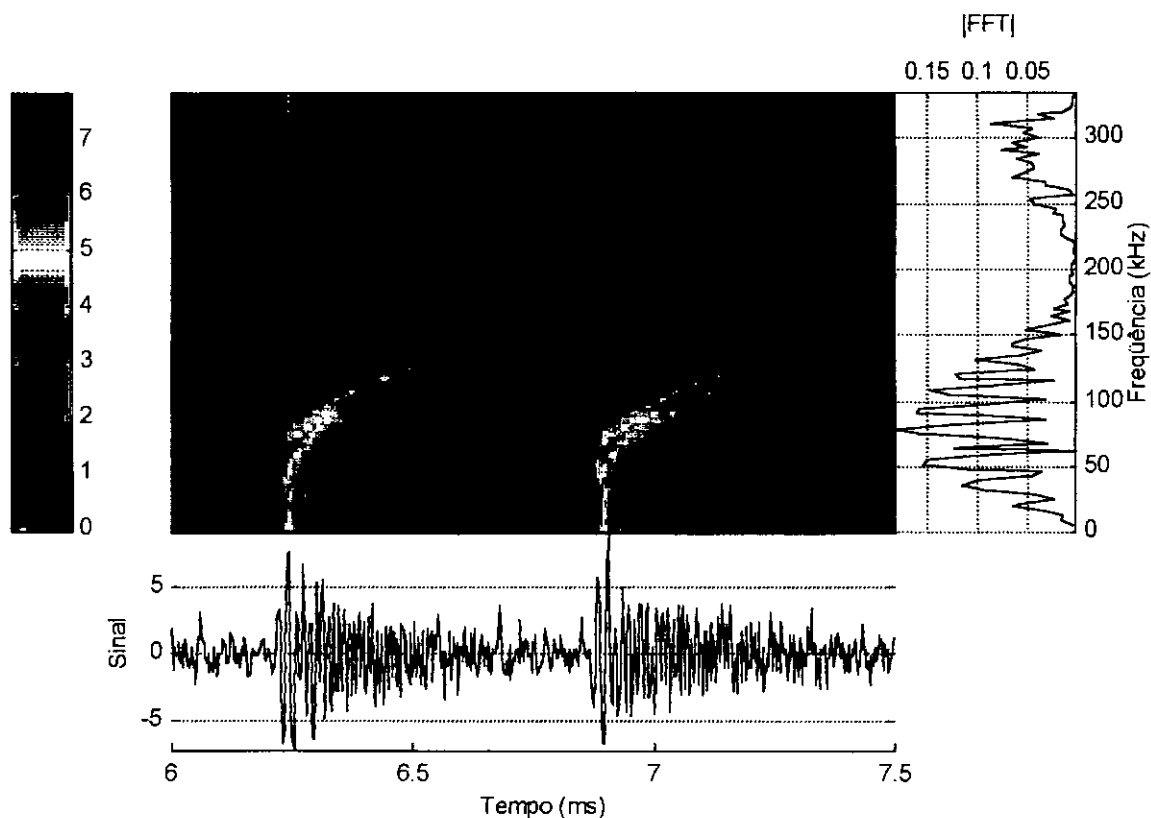


Figura V-30 Distribuição alias-free do sinal – 6 a 7,5ms

V.4 Utilização de técnicas tempo-frequência no auxílio a detecção de problemas em ensaios sísmicos para determinação do módulo de cisalhamento de solos

Nesta aplicação mostra-se como as distribuições tempo-frequência podem ser úteis mesmo em casos onde as técnicas de análise no tempo ou em frequência separadamente são consideradas suficientes. O objetivo do ensaio seguinte é identificar o módulo de cisalhamento de solos em diferentes profundidades. É um método classificado como *downhole* pois se baseia na propagação de ondas a partir da superfície em direção ao interior do solo. Um esquema do ensaio é apresentado na Figura V-31.

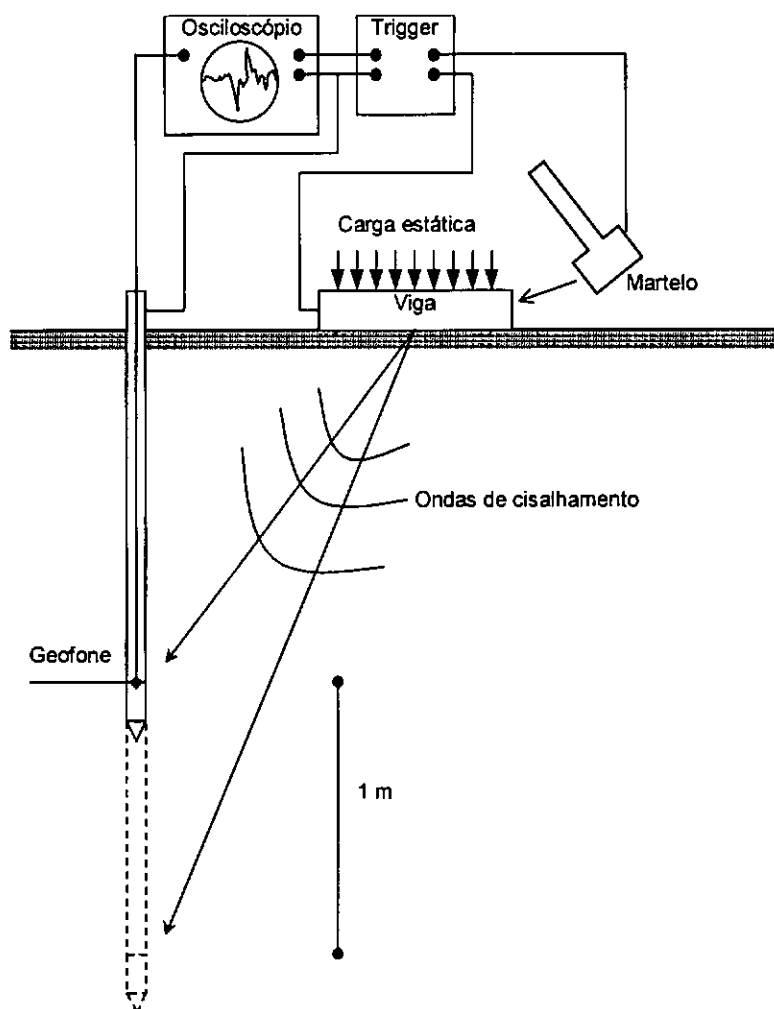


Figura V-31 Esquema de ensaio para obtenção do módulo de cisalhamento de solos

O ensaio é iniciado com a cravação da haste até a profundidade de um metro, quando então é gerada a onda de cisalhamento através do impacto do martelo à viga de aço cravada no solo. No momento do impacto o circuito trigger dispara o dispositivo de gravação do sinal associado ao osciloscópio. A viga é fixada ao solo pela aplicação de uma carga estática, geralmente com o patolamento do caminhão de transporte do equipamento sobre a viga. As ondas se propagam pelo solo e chegam ao geofone instalado na ponta da haste. O ensaio se repete a cada metro cravado da haste. Obtendo os tempos de chegada da onda de cisalhamento a partir do sinal, é possível calcular a velocidade de propagação da onda em cada camada. O módulo de cisalhamento é então calculado facilmente por ser proporcional ao quadrado da velocidade da onda de cisalhamento.

Pela teoria clássica existem duas formas de propagação de ondas num sólido elástico: ondas de dilatação (primárias ou ondas-P) e de cisalhamento (secundárias ou ondas-S). Ambas são ondas não-dispersivas, isto é, sua velocidade não se altera com a frequência/comprimento de onda. Devido ao fato de que o módulo de cisalhamento é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade da onda de cisalhamento do solo, o ensaio é todo direcionado à geração deste tipo de onda e tenta-se evitar ao máximo a formação de ondas de dilatação (ondas-P).

A razão para isto é simples. Como a propagação é não-dispersiva, a análise é geralmente feita no domínio do tempo através de simples inspeção visual do sinal ou através de funções de correlação. Quando se geram outros tipos de onda o sinal torna-se bastante difícil de ser analisado. O impacto transversal à direção entre o geofone e a fonte excitadora martelo-viga é consequência desta exigência. Mas outros fatores, como ruído de tráfego nas vizinhanças, reflexão das ondas nos contornos, também podem arruinar o sinal. Particularmente, para profundidades inferiores a 3 metros não se obtém resultados confiáveis.

Ao elaborar esta tese teve-se acesso aos sinais de um ensaio deste tipo. Apesar de não ser uma aplicação apropriada para distribuições tempo-frequência pois o caráter das ondas é não-dispersivo, pôde-se levantar uma hipótese para a grande incoerência do sinal a pequenas profundidades. Este comportamento pode ser verificado na Figura V-

32 onde é mostrado um conjunto de distribuições tempo-frequência correspondentes aos sinais captados pelo geofone, tomados para diferentes profundidades.

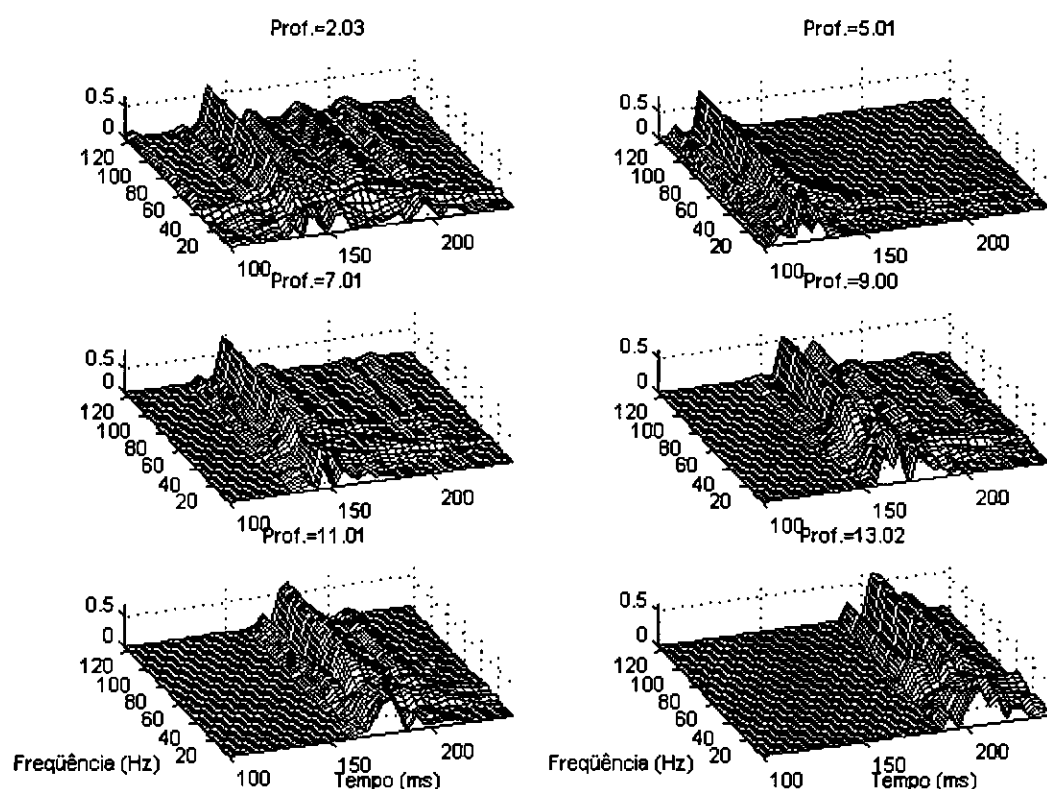


Figura V-32 Conjunto de distribuições tempo-frequência dos sinais captados pelo geofone a diferentes profundidades

Pode-se notar que existe um tempo bem definido de chegada da onda para profundidades maiores que 3 metros mas para 2,03 metros existe uma grande confusão no sinal.

A hipótese se baseia no fato de que poderia estar ocorrendo propagação de ondas pela haste do cone pois este está relativamente solidário ao solo. E por estar também a haste relativamente solidária ao geofone, ondas de maior velocidade como as de superfície poderiam estar desta forma interferindo no sinal. Resta caracterizar a existência de ondas não-dispersivas, o que caracterizaria a propagação de ondas de flexão pela haste do cone.

A distribuição mostrada na Figura V-33 a seguir, juntamente com o sinal no tempo e seu respectivo espectro, foram obtidos do ensaio à profundidade de 2,03m, dentro da zona de suspeição das análises tradicionais. A distribuição utilizada foi a alias-free e foi

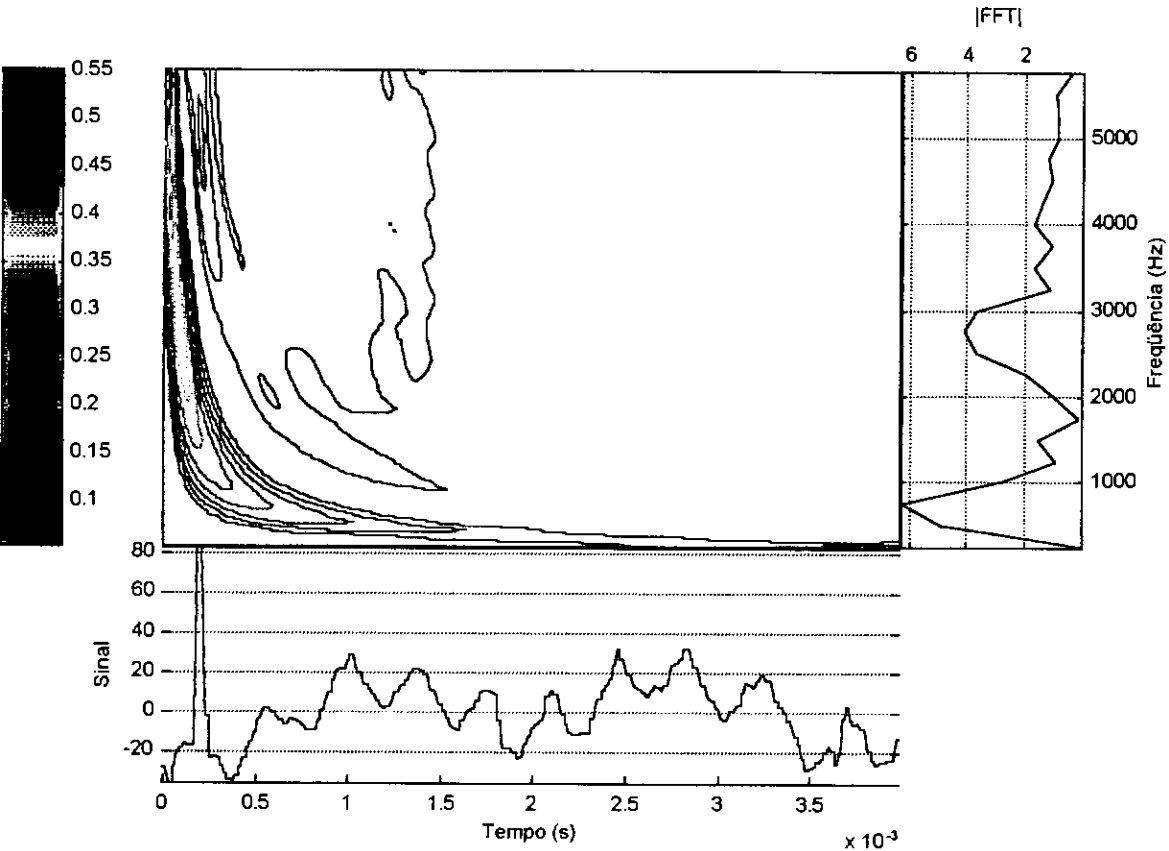


Figura V-33 Distribuição tempo-freqüência do sinal obtido pelo geofone à profundidade de 2,03m.

Pelo gráfico da Figura V-33 pode-se notar claramente a forma típica de duas ondas dispersivas. Pela análise pode-se constatar o caráter dispersivo, evidenciado pela concentração de altas freqüências nos instantes iniciais (até 0,5s) e baixas freqüências pelo resto do sinal. Isto prova a contaminação do sinal por ondas de flexão, explicando em parte a inconfiabilidade dos resultados obtidos a pequenas profundidades.

Como dito anteriormente, as wavelets discretas possuem aplicações específicas, especialmente na eliminação de ruído, especialmente quando este se localiza dentro da faixa de freqüências dos componentes importantes do sinal. Nos ensaios sísmicos a carga estática mostrada na Figura V-31 é fornecida pelo peso do próprio veículo de transporte dos equipamentos, geralmente um caminhão de 20 a 40 toneladas.

Devido ao fato de que os ensaios sísmicos são realizados durante as pausas para adição de um módulo adicional da haste, o motor do veículo, utilizado para gerar a força

de um módulo adicional da haste, o motor do veículo, utilizado para gerar a força hidráulica necessária ao cravamento da haste, foi deixado ligado durante o ensaio sísmico, gerando um ruído adicional ao sinal na faixa de 1980rpm (33Hz). Esta frequência está bem próxima à faixa de frequências em que se localizam as ondas de cisalhamento, entre 40 e 120Hz. Utilizando filtros digitais convencionais, é muito difícil retirar este componente de ruído do sinal sem que se altere significativamente a onda de cisalhamento.

Neste sentido utilizou-se um algoritmo de compressão de dados utilizando wavelets discretas, pois pode-se provar (DONOHO, 1993) que comprimir um sinal é equivalente a reduzir ruído. Comprimir dados utilizando wavelets significa tão somente obter os coeficientes da transformada wavelet discreta a partir do sinal no tempo e então eliminar os coeficientes de menor significância. No presente caso, exigiu-se do algoritmo que eliminasse 80% dos coeficientes, mantendo os 20% mais significantes. Existem vários critérios de significação e o critério que forneceu o melhor resultado foi o *heuristic sure* com *soft thresholding*, aqui utilizado. A descrição destes critérios pode ser consultada em DONOHO (1993). A wavelet utilizada foi a Symmlet ordem 8.

Após este procedimento de eliminação dos coeficientes de menor significância, também conhecido como *shrinkage*, procede-se à transformada inversa, obtendo um sinal filtrado no domínio do tempo. A Figura V-34, Figura V-35 e a Figura V-36 mostram o resultado deste procedimento. Nestas figuras vê-se o sinal original e respectivo espectro na parte superior e o sinal filtrado e respectivo espectro na parte inferior da figura.

Observa-se nesta sequência de figuras que a grande vantagem da filtragem com wavelets é que ela mantém a amplitude dos picos ao mesmo tempo que elimina por completo o ruído provocado pelo motor do veículo. E, por serem os filtros FIR associados às wavelets de reduzido tamanho, a filtragem ocorre praticamente sem inserção de fase, além de esta fase ser constante.

O resultado da utilização deste tipo de filtragem com wavelets é o cálculo mais preciso e confiável das velocidades das ondas, o que permitirá obter o módulo de cisalhamento com maior precisão.

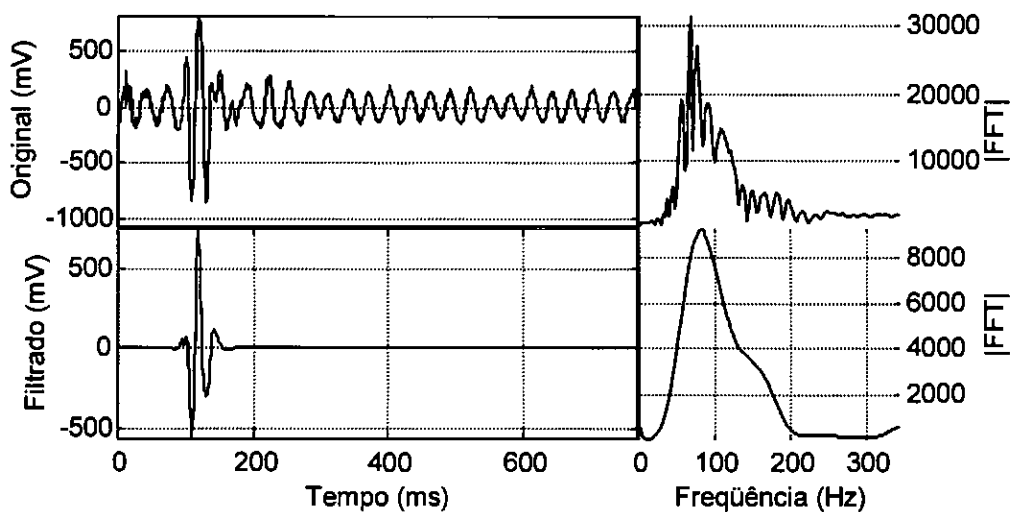


Figura V-34 Sinal obtido com ensaio sísmico (prof. 11m) e filtrado com wavelets.

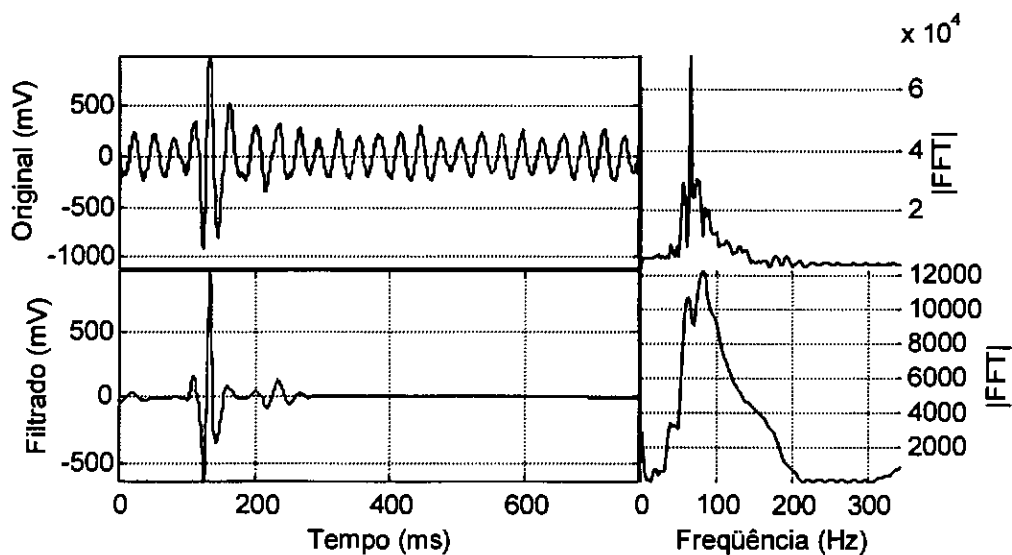


Figura V-35 Sinal obtido com ensaio sísmico (prof. 14m) e filtrado com wavelets.

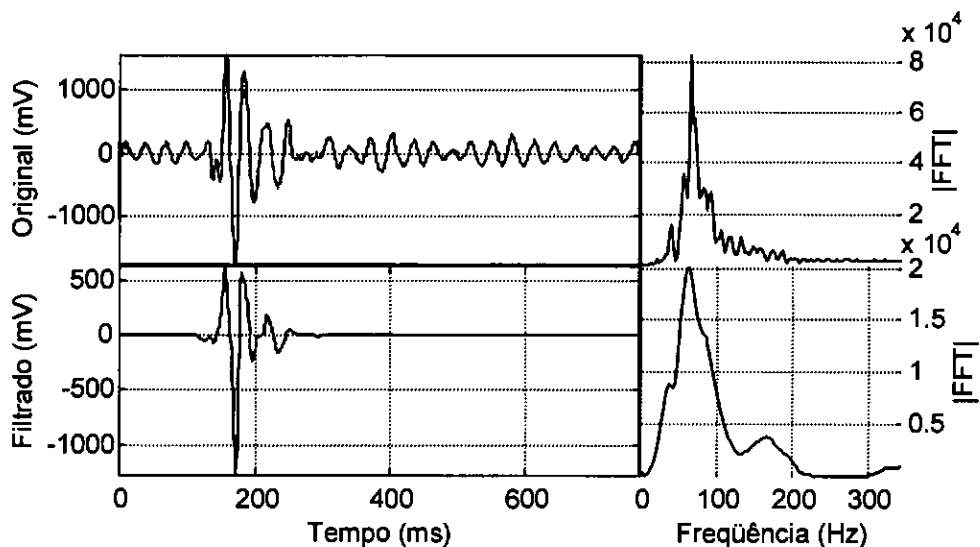


Figura V-36 Sinal obtido com ensaio sísmico (prof. 18m) e filtrado com wavelets.

Nesta aplicação fica clara a distinta utilização das wavelets discretas e das técnicas tempo-frequência. Apesar de serem parte da mesma teoria geral, suas propriedades são distintas e, portanto, também seus usos.

VI CONCLUSÕES E SUGESTÕES

VI.1 Conclusões

O objetivo final desta tese, estudar formas alternativas de visualização do sinal foi plenamente satisfeito. Novas formas de visualização foram apresentadas, algoritmos rápidos foram desenvolvidos de forma que existe neste trabalho o bastante para que o pesquisador interessado tenha ferramentas úteis para auxiliar na interpretação de sinais desconhecidos.

A maior conclusão deste trabalho é que técnicas tempo-frequência devem sempre ser utilizadas como ferramenta auxiliar no entendimento de sinais de qualquer tipo e em qualquer aplicação pois fornecem uma visão ímpar de seu conteúdo espectral. Mesmo em situações onde técnicas puras no tempo ou em frequência são suficientes, o ponto de vista singular fornecido pelas técnicas tempo-frequência sempre trouxe informações adicionais à compreensão do fenômeno físico que está sendo estudado.

As conclusões mais importantes que podem ser tiradas deste trabalho são listadas a seguir.

1. Distribuições tempo-frequência não substituem as técnicas tradicionais no tempo ou em frequência pois possuem graves limitações principalmente quanto ao esforço computacional exigido. Existem, no entanto, um sem número de análises que podem ser mais eficazmente realizadas com o auxílio de técnicas tempo-frequência como é o caso da determinação do amortecimento em estruturas. Entretanto devem ser utilizadas em conjunto com as técnicas tradicionais enquanto seus resultados não estiverem suficientemente comprovados.
2. Wavelets não devem ser usadas para gerar distribuições tempo-frequência. Para isto devem ser utilizados o espectrograma ou técnicas alias-free como a versão 2 do autor. A transformada wavelet contínua não possui grandes propriedades e bons resultados só são obtidos a partir das wavelets discretas, que por sua vez possui

aplicações específicas.

3. De um modo geral o espectrograma sempre forneceu bons resultados ao longo deste trabalho, sendo a técnica mais estável dentre as distribuições tempo-frequência analisadas. Esta técnica, no entanto, tem a desvantagem de possuir pouca resolução no plano tempo-frequência o que o torna inviável para analisar sinais com poucos pontos ou com taxa de digitalização baixa (em relação às frequências que compõem o sinal).
4. A distribuição alias-free conforme implementada no trabalho original de CHEONG, WILLIAMS (1992) leva a um algoritmo complexo e lento. As versões 1 e 2 do autor, apresentadas no capítulo III são mais simples e muitas vezes mais rápidas, mantendo a mesma qualidade.
5. A versão 2 do autor difere da versão 1 na prática por subentender que o sinal é periódico, o que leva à necessidade de promover um tratamento adicional no início e fim do sinal analisado. No entanto é de longe a distribuição mais rápida de todas as da classe de Cohen testadas neste trabalho.
6. Técnicas tempo-frequência fornecem uma forma simples e eficaz para determinar a taxa de amortecimento em estruturas com comportamento linear. Apesar do exemplo utilizado ser uma simulação, a estabilidade do método durante várias simulações confirma este fato. Recomenda-se a utilização do espectrograma com janela gaussiana larga como distribuição-base para o cálculo.
7. Técnicas tempo-frequência podem ser utilizadas com sucesso para determinar o comportamento não-linear de estruturas, bastando para isto que o tipo correto de excitação seja aplicado.
8. Gráficos tipo imagem são os que mais informações destacam da distribuição tempo-frequência desde que o leitor esteja acostumado a ler este tipo de gráfico. Os do tipo contorno exigem tratamentos adicionais como suavização e escalamento mas produzem um resultado superior quando corretamente calculados. Gráficos de malha são mais indicados para o leigo menos acostumado com a visualização.

9. Técnicas de pós-processamento como suavização, escalamento e corte devem sempre ser utilizados nas distribuições tempo-frequência. A perfeita compreensão do efeito que cada uma das formas de pós-processamento tem sobre a distribuição é fundamental para a boa interpretação dos resultados.

VI.2 Sugestões

Como seria de se esperar, o desenvolvimento deste trabalho suscitou maior quantidade de dúvidas que de conclusões. Alguns destes questionamentos devem ser devidamente esclarecidos pois parecem levar a promissores desenvolvimentos futuros.

Um aspecto a ser estudado mais profundamente é como se comportariam outros núcleos como os de Margenou-Hill, Choi-Williams ou Zhao-Atlas-Marks nos exemplos e nas aplicações desta tese. Haveria algum proveito maior utilizando estes núcleos ou os resultados seriam semelhantes?

Em vista do bom resultado obtido com a filtragem utilizando a transformada wavelet discreta, poderia-se pesquisar mais profundamente quais outras aplicações em engenharia civil teria esta técnica. Que proveito pode-se tirar de propriedades como ortogonalidade das bases, simetria/assimetria e preservação total de energia?

O excelente resultado obtido com as técnicas tempo-frequência quando utilizadas para determinação do amortecimento em estruturas de comportamento linear sugere uma maior investigação desta aplicação. Embora tenha sido feita apenas uma simulação, a simplicidade da técnica deixa claro que resultados experimentais podem ser facilmente obtidos. Entretanto certos parâmetros, como a forma de excitação, a faixa de frequências excitadas e o efeito de borda, devem ser melhor estudados.

A determinação do parâmetro não-linear de um sistema UGL foi realizada sem nenhuma prova física ou matemática que comprovasse a validade das equações utilizadas. Resta saber qual o real motivo do bom ajustamento dos resultados aos parâmetros da simulação. Como pode-se relacionar as equações das técnicas tempo-frequência às soluções clássicas? Esta abordagem certamente deve passar por um estudo mais aprofundado de sistemas não-lineares, levado a um certo nível de complexidade

matemática. Resta ainda estudar as formas de excitação que aproveitarão melhor as qualidades das distribuições tempo-frequência.

Apesar de ter sido comprovada a eficiência das ferramentas de pós-processamento como o escalamento, o corte e a suavização na melhora da interpretação das distribuições tempo-frequência, não se determinou neste trabalho em qual sequência elas devem ser utilizadas. Em relação à suavização, particularmente, não foi determinado o grau ótimo que deve ser aplicado a cada caso. Em relação ao escalamento, percebeu-se que em alguns casos podem ocorrer dificuldades, principalmente quando as médias ou desvios atingem valores muito baixos. O corte necessita que seja especificada uma faixa, no histograma, dentro do qual deve ser aplicado mas não foi determinado quais os melhores valores para defini-la. Todas estas técnicas necessitam de ajustes pois ainda não foi estudado suficientemente seus reais efeitos sobre a interpretação das distribuições.

Recentes trabalhos como BARANIUK, JONES (1996), RODRIGUEZ FONOLLOSA (1996) e GROUTAGE (1997) sugerem novas áreas de pesquisa principalmente no sentido de obter-se distribuições tempo-frequência com melhores propriedades e mais rápidas. Estes trabalhos precisam ser investigados pois podem superar algumas dificuldades enfrentadas durante este trabalho, como a obtenção de valores negativos nas distribuições tempo-frequência ou a grande quantidade de memória computacional exigida para o armazenamento destas distribuições.

É comum na prática se analisar um determinado fenômeno através de várias amostragens, retirando-se então médias que o caracterizarão. Isto é relativamente fácil de se realizar no domínio da frequência mas ainda não se estudou como realizar esta estatística no domínio tempo-frequência e sob quais condições (experimentais) deve ser realizada.

De uma forma geral, pode-se questionar o que mais podem acrescentar as técnicas tempo-frequência à interpretação dos sinais obtidos cotidianamente em engenharia civil. Neste trabalho ficou claro que, mesmo quando não fornecem informações adicionais a respeito do sinal, as técnicas tempo-frequência sempre oferecem uma forma de interpretação mais clara de seu comportamento.

BIBLIOGRAFIA

- ATLAS, L. E., LOUGHLIN, P. J., PITTON, J. W., "Signal analysis with cone kernel time-frequency representations and their application to speech", In: Boashash, B., *Time-Frequency Signal Analysis*, Longman Cheshire, pp. 375-388, 1992.
- BALIAN, R., *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique*, C.R.Acad.Sci.Paris, Sér.II, v. 292, pp. 1357-1361, 1981.
- BARANIUK, R. G., JONES, D. L., "Wigner-Based Formulation of the Chirplet Transform", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 44, n. 12, 1996.
- BATTLE, G., "A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarie functions", *Comm. Math. Phys.*, v. 110, pp. 601-615, 1987.
- BOASHASH, B., O'SHEA, P., "Polynomial Wigner-Ville Distributions and Their Relationship to Time-Varying Higher Order Spectra", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 42, n. 1, 1994.
- BUTKOV, E., *Física Matemática*, 1 ed., Rio de Janeiro, Guanabara, 1988.
- CARTWRIGHT, N. D., "A non-negative Wigner-type distribution", *Physica*, v. 83A, pp. 210-212, 1976.
- CHOI, H. I., WILLIAMS, W. J., "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels", *IEEE Trans. On Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 37, pp. 862-871, 1989.
- CHUI, C. K., *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York, 1992.
- CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., *Dynamics of structures*, 2 ed., Singapore, McGraw-Hill, 1993.
- COHEN, L., "Generalized phase-space distribution functions", *Jour. Math. Phys.*, v. 7, pp. 781-786, 1966.
- COHEN, L., "Quantization Problem and Variational Principle in the Phase Space Formulation of Quantum Mechanics", *Jour. Math. Phys.*, v. 17, pp. 1863-1866, 1976.

- COHEN, L., *Time-frequency Analysis*", 1 ed., New Jersey, Prentice Hall, 1995.
- COHEN, L., "A general Approach for Obtaining Joint Representations in Signal Analysis - Part I: Characteristic Function Operator Method", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 44, n. 5, 1996.
- CUNNINGHAM, G. S., WILLIAMS, J. W., "High-Resolution Signal Syntesis for Time-Frequency Distributions", *Proc. IEEE ICASSP-93*, v. 4, pp. 400-403, 1993.
- CUNNINGHAM, G. S., WILLIAMS, J. W., "Vector-Valued Time-Frequency Representations", *IEEE Trans. on Signal Processing*, n. 7, v. 44, pp 1642-1656, 1996.
- DAUBECHIES, I., "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", *Commun. Pure Appl. Math.*, v. 41, pp. 909-996, 1988.
- DAUBECHIES, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- DONOHOO, D. L., "Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data", In: *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, v. 00, pp. 173-205, Stanford, 1993.
- FLANDRIN, P., "A time-frequency formulation of optimum detection", *IEEE Trans. On Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 36, pp.1377-1384, 1988.
- FONOLLOSA, J. R., "Positive Time-Frequency Distributions Based on Joint Marginal Constraints", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 44, n. 8, 1996.
- FOUFOULA-GEORGIU, E., KUMAR, P., "Wavelet Analysis in Geophysics: An Introduction", In: *Wavelets in Geophysics*, v. 4, *Wavelet Analysis and its Applications*, Academic Press, pp. 1-43, 1994.
- GABOR, D., "Theory of communication", *Journal of the IEE*, v. 93, pp. 429-457, 1946.
- GRAFF, K. F., *Wave Motions on Elastic Solids*, 1 ed., Belfast, Universities Press, 1975.
- GRATTAN-GUINNESS, I., *Joseph Fourier 1768-1830*, Cambridge, Mass., MIT Press, 1972.
- GROSSMAN, A., MORLET, J., "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape", *SIAM J.Math.Anal.*, v. 15, pp. 723-736, 1984.

- GROUTAGE, D., "A Fast Algorithm for Computing Minimum Cross-Entropy Positive Time-Frequency Distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 45, n. 8, 1997.
- HAAR, A., "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Mathematische Annalen*, v. 69, pp.331-371, 1910.
- HAGELBERG, C. R., GAMAGE, N. K. K., "Applications of Structure Preserving Wavelet Decompositions to Intermittent Turbulence: A Case Study", In: *Wavelets in Geophysics*, v. 4, *Wavelet Analysis and its Applications*, Academic Press, pp. 45-80, 1994.
- INOUE, H., KISHIMOTO, K., SHIBUYA, T., "Experimental Wavelet Analysis of Flexural Waves in Beams", *Experimental Mechanics*, v. 36, n. 3, pp. 212-217, 1996.
- JEONG, J., WILLIAMS, W. J., "A new formulation of generalizes discrete-time time-frequency distributions", *Proc. IEEE ICASSP-91*, pp. 3189-3192, 1992.
- JOHNSON, K. L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- LEMARIE, P. G., "Une nouvelle base d'ondettes de $L^2(\mathbb{R})$ ", *J. Math. Pures Appl.*, v. 67, pp. 227-236, 1988.
- MALLAT, S. G., "Multiresolution approximation and wavelets", *Preprint*, GRASP Lab., Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, 1986.
- MALLAT, S. G., "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *Comm. Math. Phys.*, v. 110, pp. 601-615, 1987.
- MARGENOU, H., HILL, R. N., "Correlation between measurements in quantum theory", *Prog. Theoret. Phys.*, v. 26, pp. 722-738, 1961.
- MEYER, Y., *Wavelets: algorithms and applications*, 1 ed., Philadelphia, SIAM, 1993.
- MEYER, Y., "Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs", *Seminaire Bourbaki*, n. 662, Paris, 1985.
- MEYER, Y., "Ondelettes, fonctions splines et analyses graduees", *Seminaire EDP*, Ecole Polytechnique, Paris, 1986.

- MEYER, Y., "Ondelettes et fonctions splines", *Lectures given at the University of Torino, Itália*, 1986.
- MORLET, J., *et. al*, "Wave propagation and sampling theory", *Geophys.*, v. 47, pp. 203-236, 1982.
- MORLET, J., "Sampling theory and wave propagation", In: Chen, C. H. (ed.), *Issues in Acoustic Signal/Image Processing and Recognition*, v. 1, NATO ASI Series, Springer, pp. 233-261, Berlim, 1983.
- MOYAL, J. E., "Quantum mechanics as a statistical theory", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, v. 45, pp. 99-124, 1949.
- OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R. W., *Discrete-Time Signal Processing*, 1 ed., New Jersey, Prentice Hall, 1989.
- PAGE, C. H., "Instantaneous power spectra", *Jour. Appl. Phys.*, v. 23, pp. 103-106, 1952.
- QIAN, S., CHEN, D., *Joint Time-Frequency Analysis: methods and applications*, 1 ed., New Jersey, Prentice-Hall, 1996.
- RAO, S., *Mechanical Vibrations*, 3 ed., Reading, Massachussets, Addison Wesley, 1995.
- RIHACZEK, K. S., "Signal energy distribution in time and frequency", *IEEE Trans. Info Theory*, v. 14, pp. 368-374, 1968.
- STANKOVIC, L. J., "Highly concentrated time-frequency distributions: pseudo quantum signal representation", *IEEE Trans. on signal processing*, v. 45, n. 3, 1997.
- STROMBERG, J. O., "A modified Franklin system and higher order spline systems on \mathfrak{R}^n as unconditional bases for Hardy spaces", *Conf. In Honour of A. Zygmund*, v. 2, Wadsworth Mathematical Series, pp. 475-493, 1982.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N., *Theory of Elasticity*, 3 ed., Singapore, McGraw-Hill, 1970.
- TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. E., *Mecânica dos Sólidos*, v. 1, 1 ed., Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1994.

- VILLE, J., "Theorie et applications de la notion de signal analytique", *Cables et Transmission*, v. 2, no. 1, pp. 61-74, 1946.
- VILLE, J., *Théorie et applications de la notion de signal analytique*, C&T, Laboratoire de Télécommunications de la Société Alsacienne de Construction Mécanique, 1948.
- WAHL, T. J., BOLTON, J. S., "The application of the Wigner distribution to the identification of structure-borne noise components", *Journal of Sound and Vibration*, v. 163, n. 1, pp. 101-122, 1993.
- WICKERHAUSER, V., "Lectures on wavelet packets algorithms", *Preprint*, Dept. of Math., Washington University, 1991.
- WIGNER, E. P., "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys. Ver.*, v. 40, pp. 749-759, 1932.
- WILLIAMS, J. R., AMARATUNGA, K., "Introduction to wavelets in engineering", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.37, pp. 2365-2388, 1994.
- YEN, N., "Time and frequency representation of acoustic signals by means of the Wigner distribution function: implementation and interpretation", *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 81, pp. 1841-1850, 1987.
- ZHAO, Y., ATLAS, L. E., MARKS, R. J., "The use of cone-shaped kernels for generalizes time-frequency representations of nonstationary signals", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 38, pp. 1084-1091, 1990.

Apêndice A

FREQUÊNCIA INSTANTÂNEA E O SINAL ANALÍTICO

O conceito de frequência instantânea é essencial à compreensão das distribuições tempo-frequência e wavelets desde que a finalidade de tais técnicas é exatamente mostrar o comportamento transiente das frequências com o tempo. Apesar de o aparelho auditivo (e também o visual) do ser humano fornecer automaticamente a compreensão deste conceito de forma intuitiva, é complexo definir frequência instantânea a partir de um sinal digitalizado em um ensaio experimental, por exemplo. Para tanto é necessário desenvolver-se uma teoria completa, cujas equações permitam exibir numérica e graficamente o que a audição e a visão apreendem diretamente dos fenômenos físicos.

Apesar de não fazerem parte do cotidiano em engenharia civil, desde o início deste século já se desenvolvem estas teorias em outros campos, principalmente em telecomunicações. Para que um sinal sonoro seja transmitido por ondas de rádio através de técnicas como modulação em amplitude (AM) ou em frequência (FM) foi necessário o desenvolvimento de todo um arsenal teórico do qual faz parte o conceito de frequência instantânea, este intimamente ligado ao conceito de sinal analítico, como se verá posteriormente. Pretende-se neste apêndice revisar uma parte destas teorias, somente o necessário para a perfeita compreensão das técnicas tempo-frequência apresentadas nesta tese. Em sua maior parte, o texto deste apêndice foi resumido a partir de COHEN (1995) mas a idéia originalmente proposta deve ser consultada no excelente trabalho de Dennis Gabor (GABOR, 1946).

A.1 *Frequência instantânea*

Suponha que um sinal real $f_R(t)$ possa ser representado pela forma complexa

$$f(t) = A(t)e^{i\theta(t)} = f_R(t) + if_I(t) \quad (\text{A-1})$$

o que sempre poderá ser feito devido à liberdade oferecida pela parte imaginária $f_I(t)$.

A frequência média deste sinal pode ser obtida por

$$(\omega)_m = \omega_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) \frac{1}{i} \frac{d}{dt} f(t) dt \quad (\text{A-2})$$

onde foi aplicada a identidade de Parseval para obter uma relação direta com o sinal no tempo. Desenvolvendo esta expressão, vem

$$\begin{aligned} \omega_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) \frac{1}{i} \frac{d}{dt} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{-i\theta(t)} \left(\dot{\theta}(t) - i \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right) A(t) e^{i\theta(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\dot{\theta}(t) - i \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right) A^2(t) dt \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

O segundo termo dentro da integral produz um resultado zero por dois motivos: para que a frequência média seja real é necessário que o termo imaginário se anule; e também porque este termo é uma diferencial perfeita que redundará em zero. Simplificando desta forma obtém-se a expressão

$$\omega_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\theta}(t) A^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\theta}(t) |f(t)|^2 dt = (\dot{\theta}(t))_m \quad (\text{A-4})$$

Pode-se apreender da fórmula (A-4) que a frequência média (do espectro) é a média de $\dot{\theta}(t)$, a derivada da fase, que imediatamente pode-se caracterizar como a *frequência instantânea média* do sinal. Desta forma convencionou-se que a frequência instantânea $\varphi(t)$ seja definida por

$$\varphi(t) \triangleq \dot{\theta}(t). \quad (\text{A-5})$$

A despeito de a derivada da fase ser popularmente chamada de *freqüência instantânea*, é mais correto usar o termo *freqüência instantânea média* porque num determinado instante um sinal geralmente é composto por vários componentes atuando em freqüências distintas. Portanto a derivada da fase irá refletir um tipo de média destas componentes, sendo mais corretamente chamada, portanto, de *freqüência instantânea média*. No entanto o uso popular consagrou o uso do termo *freqüência instantânea* que será usado desta forma deste ponto em diante, devendo manter-se em mente que esta representa na verdade uma média.

Observe no entanto que este último resultado foi obtido a partir da expressão do sinal complexo $f(t) = A(t)e^{i\theta(t)}$ e ainda não está definida a forma de se obter um único par definido de funções $[A(t), \theta(t)]$ associado ao sinal real $f_R(t)$. Como existem infinitas formas de fazê-lo, podem existir infinitas “*freqüências instantâneas*” para um mesmo sinal real. A grande questão que permanece é como associar um sinal complexo ao sinal real de que se dispõe inicialmente. E, evidentemente, saber se esta forma leva a uma *freqüência instantânea coerente*.

A.2 O sinal analítico

Se um determinado sinal $f_R(t)$ é real então sua transformada de Fourier $F_R(\omega)$ será uma função hermitiana desde que $F_R(\omega) = F_R^*(-\omega)$. Isto tem uma grande consequência na caracterização do sinal em freqüência pois

$$\begin{aligned}
\omega_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega \\
&= \int_{-\infty}^0 \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega + \int_0^{+\infty} \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega \\
&= - \int_0^{\infty} \omega |F_R(-\omega)|^2 d\omega + \int_0^{+\infty} \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega \quad (A-6) \\
&= \int_0^{\infty} \omega \left[-|F_R^*(\omega)|^2 + |F_R(\omega)|^2 \right] d\omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

Em outras palavras, sendo a energia (em frequência) $|F_R(\omega)|^2$ simétrica em relação ao zero, a frequência média de um sinal real será sempre zero, o que evidentemente é uma incoerência. Pode-se contornar esta dificuldade integrando-se apenas as frequências positivas da forma

$$\omega_m = \int_0^{+\infty} \omega |F_R(\omega)|^2 d\omega, \quad (A-7)$$

o que realmente fornecerá uma resposta satisfatória. No entanto esta forma de cálculo modifica a definição de frequência média (A-2) e implica na revisão - e talvez inutilização - de todas as expressões desenvolvidas, inclusive a igualdade de Parseval e a definição de distribuições tempo-frequência da classe de Cohen.

Nesta hora o conceito de função complexa se apresenta como uma solução mais viável. Para aplicar este conceito, relembra-se que é procurada uma função complexa $f(t)$ que deve estar associada ao sinal real $f_R(t)$ da forma

$$f(t) = A(t)e^{i\theta(t)} = f_R(t) + if_I(t) \quad (A-8)$$

e que existem infinitas formas de fazê-lo pela liberdade oferecida pela parte imaginária $f_I(t)$. Une-se neste momento a elegância à necessidade exigindo-se que a transformada de Fourier $F(\omega)$ da função complexa $f(t)$ obedeça a lei:

$$F(\omega) = \begin{cases} 2F_R(\omega), & \text{se } \omega \geq 0 \\ 0, & \text{se } \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

O sinal complexo $f(t)$ pode então ser obtido pela transformada inversa do espectro assim definido. Portanto,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F_R(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A-10})$$

Desde que a transformada de Fourier $F_R(\omega)$ do sinal real $f_R(t)$ é dada por

$$F_R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A-11})$$

pode-se relacionar o sinal complexo $f(t)$ com o sinal real $f_R(t)$ substituindo a equação (A-11) na equação (A-10) de tal forma que

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(u) e^{-i\omega u} e^{i\omega t} d\omega du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(u) \int_0^{+\infty} e^{i\omega(t-u)} d\omega du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(u) \left(\pi \delta(t-u) - \frac{i}{t-u} \right) du \\ &= f_R(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_R(u)}{t-u} du \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

de onde se conclui imediatamente que

$$f_I(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_R(u)}{t-u} du = H[f_R(t)] \quad (\text{A-13})$$

onde o operador H é conhecido como a *transformada de Hilbert*. O sinal complexo associado obtido por este método é chamado de *sinal analítico*.

Uma importante propriedade adiciona significação física imediata ao sinal analítico. Diga-se que $F_A(\omega)$ é a transformada de Fourier de $A(t)$ e $F_\theta(\omega)$ a transformada de

Fourier de $e^{i\theta(t)}$. É possível provar que se

$$f(t) = A(t)e^{i\theta(t)} = f_R(t) + iH[f_R(t)] \quad (\text{A-14})$$

é o sinal analítico relacionado a $f_R(t)$, então existe uma frequência-limite ω_L tal que

$$\begin{aligned} F_A(\omega) &= 0 \quad \text{se } |\omega| > \omega_L \\ F_\theta(\omega) &= 0 \quad \text{se } |\omega| \leq \omega_L \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Em outras palavras, o que o método do sinal analítico faz é colocar as baixas frequências em $A(t)$ e as altas frequências em $e^{i\theta(t)}$.

Se, por exemplo,

$$\theta(t) = \omega_L t, \quad (\text{A-16})$$

é condição necessária, mas não suficiente, que o espectro de $A(t)$ deva estar limitado no intervalo $[0, \omega_L]$ para que $f(t)$ seja um sinal analítico.

A.3 Características do sinal analítico

Generalizando as conclusões anteriores, o sinal analítico será definido, para qualquer sinal, por

$$A[f(t)] = f(t) + H[f(t)]. \quad (\text{A-17})$$

onde o *operador analítico* fica definido em função da transformada de Hilbert por

$$A = I + H \quad (\text{A-18})$$

onde I é o operador identidade. É importante frisar que o sinal analítico é simplesmente um sinal associado a um sinal real e a partir deste último calculado de forma que sua transformada de Fourier seja nula para frequências negativas e o dobro para as positivas, mantendo-se assim intacta a parte real do sinal.

O sinal analítico calculado desta forma possui certas características que podem ser úteis em posteriores desenvolvimentos teóricos, listadas a seguir.

1. Sinal analítico de um sinal complexo

Embora o sinal analítico tenha sido definido para um sinal real, não existe motivo para que não se possa usar a transformada de Hilbert para calcular-se o sinal analítico associado a um sinal complexo. O sinal analítico resultante também terá amplitudes nulas para frequências negativas.

2. Energia do sinal analítico

Seja E_R a energia total de um sinal real $f_R(t)$ e $F_R(\omega)$ sua transformada de Fourier. Recordando que a transformada de Fourier do sinal analítico é zero para frequências negativas e $2F_R(\omega)$ para as positivas, a energia do sinal analítico associado será então

$$E = \int_0^{\infty} |2F_R(\omega)|^2 d\omega = 4 \int_0^{\infty} |F_R(\omega)|^2 d\omega = 4 \frac{E_R}{2} = 2E_R, \quad (\text{A-19})$$

isto é, a energia do sinal analítico é duas vezes a energia do sinal real. Adicionalmente, pode-se provar que a energia da parte imaginária é igual à da parte real.

3. Sinal analítico de um harmônico complexo

Sendo a transformada de Fourier do harmônico $f(t) = e^{i\omega t}$ um delta de Dirac

$$F_R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\omega), \text{ então}$$

$$A[f] = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega < 0 \\ 2e^{i\omega t} & \text{se } \omega \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A-20})$$

4. Sinal analítico de um sinal analítico

Pode-se chegar a conclusão de que

$$A[A[f]] = 2A[f] \quad (\text{A-21})$$

se for observado que o espectro de um sinal analítico já é zero para frequências negativas e, portanto, nada há para se anular. O sinal então retorna intacto, porém multiplicado pela constante 2, que faz parte de sua definição.

5. Sinal analítico da derivada de uma função

É simples provar que o operador analítico é comutativo em relação ao operador diferencial $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ aplicando este último à transformada inversa de Fourier do espectro do sinal e usando o fato de que o operador analítico é linear. Portanto,

$$A[D^n[f]] = D^n[A[f]] \quad (\text{A-22})$$

6. Convolução de um sinal analítico com um sinal qualquer

Se $f(t)$ é um sinal analítico e $g(t)$ um sinal qualquer, então, pelo teorema da convolução tem-se que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A-23})$$

também será um sinal analítico, desde que o produto $F(\omega)G(\omega)$ tem valores nulos para as frequências negativas. Conclui-se que a convolução de um sinal analítico com um sinal qualquer também será um sinal analítico.

7. Sinal com largura de banda limitada

Se $g(t)$ tiver o espectro limitado a um intervalo $[-\omega_0, \omega_0]$ de forma que

$$G(\omega) = 0 \text{ se } |\omega| > \omega_0 \quad (\text{A-24})$$

então $h(t) = g(t)e^{i\omega_0 t}$ automaticamente será um sinal analítico porque

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt = G(\omega - \omega_0) \quad (\text{A-25})$$

e

$$H(\omega < 0) = G(\omega - \omega_0 < -\omega_0) = 0. \quad (\text{A-26})$$

8. Multiplicação de dois sinais reais

Se $g(t)$ e $h(t)$ têm espectros separados tais que

$$G(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_0 \text{ e} \quad (\text{A-27})$$

$$H(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| \leq \omega_0 \quad (\text{A-28})$$

então

$$A[gh] = gA[h] \quad (\text{A-29})$$

A.4 Paradoxos

Como já foi dito anteriormente, existem infinitas formas de se associar um sinal complexo a um sinal real, e a interpretação da frequência instantânea está intimamente ligada ao método que se escolhe para tal. Quando este método é o do sinal analítico então ótimas propriedades se seguem. Porém nunca foi dito ou provado que este é o melhor método nem muito menos que não tenha defeitos. Para enfatizar este ponto apresentam-se aqui cinco paradoxos que poderão oferecer dificuldades quando da interpretação de determinado sinal.

Sejam então $\varphi(t)$ a frequência instantânea de um sinal qualquer $f(t)$ e $F(\omega)$ sua transformada de Fourier. Os paradoxos são:

1. Se determinado sinal possui uma frequência ω para o qual $F(\omega) = 0$ pode acontecer de, em um certo instante t , $\varphi(t) = \omega$;
2. Se o espectro de $f(t)$ for tal que $F(\omega) = \sum_{j=1}^n F_j \delta(\omega - \omega_j)$, isto é, uma série de picos em determinadas frequências ω_j , então pode acontecer de $\varphi(t)$ ser contínua e assumir valores em um largo espectro de frequências diferentes de ω_j ;
3. Se $F(\omega < 0) = 0$, como é o caso dos sinais analíticos, pode acontecer de $\varphi(t) < 0$;
4. Se um sinal tem largura de banda limitada, isto é, $F(\omega) = 0$ para $|\omega| \leq \omega_0$, pode

acontecer de $|\phi(t)| > \omega_0$;

5. Por analogia com outras grandezas como velocidade instantânea pode-se pensar na frequência instantânea como um fenômeno não-causal, isto é, dependente apenas do estado do sistema no momento analisado. Porém deve-se lembrar que o conceito de frequência instantânea está intimamente ligado ao método de se associar o sinal complexo ao sinal real. No caso do método do sinal analítico esta associação envolve uma integral ao longo de todo o tempo do sinal - vide equação (A-13). Isto demonstra que o conceito de frequência instantânea é não somente causal - dependente de estados passados - como também depende de estados futuros do sistema até o limite, no infinito.

Em parte tais paradoxos podem ser esclarecidos pelo fato da frequência instantânea ser de fato uma média de todas as frequências que atuam em determinado instante. Se tal fato é compreendido, o conceito de frequência instantânea, conforme definido, passa a ser bastante razoável.

Apêndice B

WAVELETS DISCRETAS

Como visto no capítulo II, as grandes propriedades das wavelets somente emergem a partir de análises discretas e este tipo de análise exige que sejam criadas famílias especiais de wavelets. Este apêndice tem por objetivo recompor resumidamente o caminho trilhado em trabalhos pioneiros neste sentido, especialmente DAUBECHIES (1988).

A idéia básica das wavelets discretas é criar um tipo de análise estruturada de forma hierárquica, chamada de multi-resolução, que invariavelmente tem como consequência a formação de bases ortogonais para o espaço real unidimensional. Esta propriedade, ortogonalidade, é a principal vantagem que a análise com wavelets discretas possui sobre outros tipo de análise como a decomposição do sinal usando bancos de filtros (*filter banks*).

No texto a seguir define-se a forma hierárquica em níveis de análise e a consequente obtenção de famílias de wavelets ortogonais. Por fim é dado um exemplo da forma de se obter uma destas famílias, a de Daubechies.

B.1 Análise hierárquica em níveis de resolução

Para desenvolver uma representação com vários níveis de resolução para uma função no espaço $L^2(\mathfrak{R})$, o espaço real das funções de energia finita, deve-se procurar uma seqüência de subespaços V_j aninhados da forma

$$\{0\} \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots \subset L^2(\mathfrak{R})$$

o que é mostrado de forma gráfica na Figura B-1.

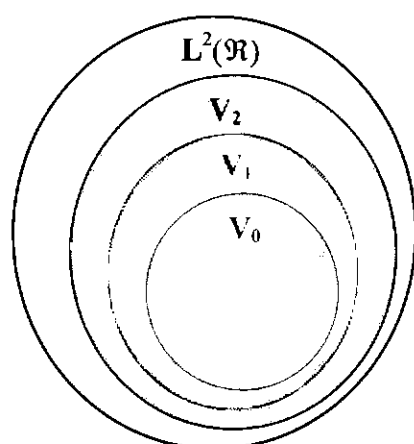


Figura B-1 Subespaços aninhados

Observa-se na Figura B-1 que os subespaços V_j estão organizados hierarquicamente em níveis, cada qual indicado por um número inteiro j , que por este motivo é chamado *nível de resolução*. Organizados os subespaços desta forma, a seguinte propriedade facilmente se segue:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathfrak{R}) \quad (\text{B-1})$$

isto é, a união de todos os subespaços V_j gera o espaço real. A idéia primordial no desenvolvimento das wavelets é que a base de cada subespaço V_j seja composta por funções $\phi_{j,k}(x)$ obtidas a partir de uma única função $\phi(x)$ seguindo estritamente duas regras: uma de translação e outra de escalamento. Por este motivo a função $\phi(x)$ é chamada de *função de escala*¹ ou *wavelet-pai*.

Pode ser feita a analogia do nível de resolução j com o aumento provocado por uma lente tipo *zoom* de uma câmera fotográfica a qual está sendo usada para fazer um levantamento aerofotogramétrico de uma região a partir de um avião. Iniciando com o menor aumento que a lente oferece (nível $j=0$), a visão da cidade cabe inteiramente no visor da câmera e por isso com uma única fotografia é possível obter a imagem completa de toda a cidade. No entanto os detalhes necessários como os bairros, casas e ruas não podem ser vistos satisfatoriamente.

¹ *Scaling functions*, em inglês.

Incrementando-se o aumento oferecido pela lente (nível $j-1$, por exemplo), tais detalhes são revelados mas a visão geral da cidade, seu contorno, não pode ser completamente visto em uma só fotografia. São necessárias portanto duas ou mais fotografias para que, colocadas uma ao lado da outra, possam formar uma imagem completa de toda a cidade. Incrementando-se mais o aumento da lente (nível $j=5$, por exemplo) podem ser vistos detalhes menores como pessoas, o tipo de telhado das casas, etc., e ainda mais fotografias devem ser feitas para que toda área da cidade seja coberta.

O mesmo ocorre com a análise hierárquica das wavelets. Quanto maior o nível de resolução j (o aumento da lente), menor o domínio no tempo (a área coberta pela fotografia) ocupado por cada função da base $\phi_{j,k}(x)$ deste nível j e, portanto, mais detalhes do sinal poderão ser observados. Em contrapartida, mais funções $\phi_{j,k}(x)$ da base são necessárias para varrer todo o sinal. Obviamente todo sinal digitalizado tem tamanho finito e, por causa disso, a análise deve iniciar com um subespaço também de tamanho finito V_0 , por facilidade de notação.

A forma de obter estas bases com tal organização hierárquica é o assunto do próximo item.

B.2 Definição de bases

São duas as regras que devem ser seguidas para se formar uma base hierarquicamente organizada: uma de escalamento, que relaciona os subespaços V_j com o subespaço inicial V_0 , e uma de translação, que varre todo o subespaço V_j . Em termos das funções da base, a regra de escalamento relaciona as funções $\phi_{j,0}(x)$ com a função geradora $\phi(x) = \phi_{0,0}(x)$, e a regra de translação relaciona as demais funções $\phi_{j,k}(x)$ com as funções $\phi_{j,0}(x)$ obtidas pelo escalamento. Estas duas regras, reunidas, levam à definição

$$\phi_{j,k}(x) \triangleq 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (\text{B-2})$$

onde a constante $2^{j/2}$ foi adicionada para que desde já seja incluída uma propriedade de normalização importante no desenvolvimento teórico posterior. Na equação (B-2) a variável j é responsável pelo escalamento e a variável k , pela translação. A partir da atenta observação da Figura B-1 podem ser tiradas algumas conclusões importantes:

1. Como a base do subespaço V_0 é formado pelas funções $\phi_{0,k} = \phi(x - k)$, conclui-se então que $\phi(x) \in V_0$ pois $\phi_{0,0}(x) = \phi(x)$.
2. Como o subespaço V_0 está contido em V_1 , pode-se escrever qualquer função $\phi_{0,k}(x)$ que compõe a base de V_0 como uma combinação linear das funções $\phi_{1,k} = \phi(2x - k)$ que formam a base de V_1 , ou seja,

$$\phi_{0,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{1,k}(x) \quad (\text{B-3})$$

Tendo em vista a equação (B-2), pode-se reescrever a equação (B-3) da forma

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi(2x - k). \quad (\text{B-4})$$

Esta relação é fundamental para a gênese das wavelets discretas e é chamada *equação de escala*, *equação de refinamento* ou *relação de escala*². Será visto adiante que os coeficientes a_k que aparecem nesta equação definem completamente uma família de wavelets discretas. Todos os passos seguintes terão por objetivo definir um conjunto único destes coeficientes a_k . Entretanto todas as propriedades que se dispõe até o momento não são suficientes para isto e é necessário antes definir o conceito de *níveis de detalhe*.

B.3 Níveis de detalhe

Um nível de detalhe é definido como o subespaço W_j que deve ser adicionado ao subespaço V_j para se obter o subespaço imediatamente superior V_{j+1} . Isto pode ser

² *Dilation equation, refinement equation, scaling relation.*

melhor compreendido com a ajuda do exemplo da Figura B-2.

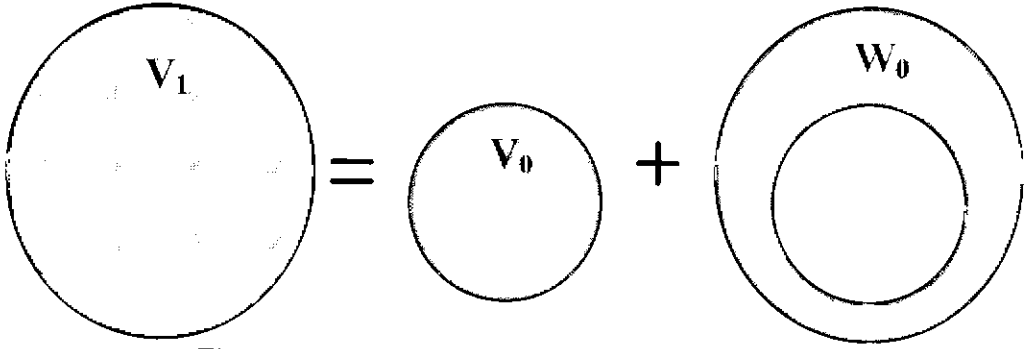


Figura B-2 Subespaço complementar - detalhe

Da Figura B-2 pode-se apreender que W_0 é o *complemento* de V_0 em relação a V_1 , ou seja, $V_1 = V_0 \cup W_0$. Extendendo o raciocínio para o subespaço imediatamente superior se terá que $V_2 = V_1 \cup W_1 = (V_0 \cup W_0) \cup W_1$ e finalmente conclui-se que

$$V_{J+1} = V_0 \cup \bigcup_{j=0}^J W_j. \quad (\text{B-5})$$

Levando esta série ao limite, chega-se à conclusão que

$$L^2(\mathfrak{R}) = V_0 \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} W_j \quad (\text{B-6})$$

A partir deste ponto deve-se esquecer a relação (B-1) em favor da relação (B-6) a qual efetivamente dará substrato para a origem das wavelets, as quais são exatamente as funções $\psi_{j,k}(x)$ que formarão a base dos subespaços W_j . Analogamente à definição (B-2), define-se

$$\psi_{j,k}(x) \triangleq 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (\text{B-7})$$

onde a função $\psi(x)$ é chamada de *wavelet-mãe* ou *wavelet-geradora*. As funções $\psi_{j,k}(x)$ são denominadas simplesmente *wavelets*. Ao conjunto formado pela wavelet-mãe $\psi(x)$, wavelet-pai $\phi(x)$ e as “filhas” $\psi_{j,k}(x)$ denomina-se *família*. Seguindo o mesmo raciocínio usado para se obter a equação (B-4) chega-se à conclusão que

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \phi(2x - k). \quad (\text{B-8})$$

Desta forma restam apenas duas tarefas:

1. Obter os coeficientes a_k e b_k que foram deixados em aberto;
2. Descobrir uma forma de gerar as wavelets pai $\phi(x)$ e mãe $\psi(x)$ a partir dos coeficientes.

Todos raciocínios e equações usados até o momento são comuns a todas as famílias de wavelets discretas. Deste ponto em diante será exigido que as wavelets possuam a propriedade de ortogonalidade o que exclui a família b-splines. Esta família utiliza uma forma de semi-ortogonalidade e seu desenvolvimento teórico é mais complexo. Entretanto a forma como se exige esta semi-ortogonalidade é similar à que será utilizada para exigir a ortogonalidade completa, vista a seguir.

B.4 Propriedade de ortogonalidade das bases

O produto interno entre duas funções é definido da forma:

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (\text{B-9})$$

Quando o produto interno entre duas funções é zero, isto é $\langle f, g \rangle = 0$, diz-se que f e g são ortogonais entre si. Adicionalmente quando $\langle f, f \rangle = 1$ e $\langle g, g \rangle = 1$ as duas funções são ditas ortonormais entre si.

Para que uma família de wavelets forme uma base ortonormal, é necessário que:

$$1) \quad \langle \phi_{jk}, \phi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km} \quad (\text{B-10})$$

$$2) \quad \langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km} \quad (\text{B-11})$$

Utilizando estas duas exigências e tendo em vista (B-4) e (B-7), a seguinte terceira propriedade é imediata:

$$3) \quad \langle \psi_{jk}, \phi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km} \quad (\text{B-12})$$

Visto que uma das duas propriedades é redundante, pois é obtida a partir das demais, somente é necessário exigir duas destas propriedades para que a família forme uma base ortonormal. Exigindo apenas uma destas condições há substrato suficiente para se obter uma equação que relacione os coeficientes a_k e b_k , o que será feito a seguir.

B.5 Relacionamento entre os coeficientes a_k e b_k

Retorna-se à equação de escala (B-4) aqui reescrita,

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi(2x - k) \quad (\text{B-13})$$

Os coeficientes a_k que aparecem nesta equação são chamados de *coeficientes de filtragem* e sempre acontecerá de somente um número finito n destes serem não-nulos: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Utilizando a terceira propriedade de ortogonalidade (B-12) em conjunto com as equações (B-4) e (B-8), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi(2x - k) \right] \left[\sum_{m=0}^{n-1} b_m \phi(2x - m) \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_k b_m \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2x - m) \phi(2x - k) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

Se for exigido que n seja par, pode-se satisfazer esta exigência simplesmente definindo

$$b_k = (-1)^k a_{n-k-1} \quad (\text{B-15})$$

Por exemplo, se $n=4$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k = \sum_{k=0}^3 (-1)^k a_k a_{3-k} = a_0 a_3 - a_1 a_2 + a_2 a_1 - a_3 a_0 = 0 \quad (\text{B-16})$$

Substituindo a equação (B-15) em (B-8), tem-se um novo relacionamento entre a

wavelet-mãe $\psi(x)$ e a wavelet-pai $\phi(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{n-k-1} \phi(2x - k), \quad (\text{B-17})$$

sendo n par, conforme exigido. Fazendo esta substituição, elimina-se da formulação os coeficientes b_k sendo necessário apenas obter os coeficientes a_k para obter uma família completa de wavelets.

B.6 Definição dos coeficientes a_k

Até o momento a única exigência feita às wavelets é que formassem um conjunto hierarquicamente organizado tal que a terceira propriedade de ortonormalidade (B-12) fosse atendida. Observe-se que ortogonalidade completa ainda não foi exigida até o momento pois falta inserir mais uma das duas propriedades de ortogonalidade necessárias para que a família forme uma base ortonormal. Esta única exigência/propriedade (B-12) eliminou os coeficientes b_k da formulação mas não foi suficiente para determinar os coeficientes a_k . Para que sejam determinados, é necessário impor às wavelets novas restrições/propriedades que levarão à formação das diversas famílias de wavelets.

Desta forma deste ponto em diante diversos caminhos podem ser tomados, resultando em diferentes famílias de wavelets. Como a intenção deste apêndice é somente delinear a forma de obtenção de tais famílias, isto será feito concentrando o texto na obtenção de apenas uma família, a de Daubechies, que foi efetivamente a primeira família de wavelets discretas e ortonormais a ser descoberta. Entretanto as propriedades específicas exigidas para esta família são comuns a muitas outras, o que torna o estudo das demais um trabalho menos árduo.

A exigência de propriedades adicionais dará origem a um sistema de equações cujas incógnitas são os coeficientes a_k . Este sistema de equações invariavelmente é não-linear e deve ser resolvido por métodos iterativos.

1. Propriedade 1: Completa ortonormalidade

Esta propriedade é uma das mais úteis, senão a mais úteis, de todas que podem ser exigidas das wavelets. Embora existam famílias de wavelets semi-ortonormais, como as B-spline, a maioria das famílias incorpora esta propriedade em sua formulação.

Conforme esclarecido anteriormente, precisa-se exigir apenas mais uma das três propriedades de ortonormalidade para que completa ortonormalidade seja alcançada. Escolhe-se a primeira propriedade (B-10), aqui transcrita:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{j/2}x - k) \phi(2^{l/2}x - m) dx = \delta_{jl} \delta_{km}, \quad j, k, l, m = 0..n-1 \quad (\text{B-18})$$

Entretanto será exigido apenas que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \phi(x-p) dx = \delta_{0p} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(x) dx = 1, & \text{se } p=0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \phi(x-p) dx = 0, & \text{se } p \neq 0 \end{cases}, p=0..n-1 \quad (\text{B-19})$$

sendo condição *apenas necessária*, e não suficiente, para a completa ortogonalidade da base. Apesar disso, esta condição é, na maioria dos casos, quase sempre suficiente para garantir a ortogonalidade. Substituindo a equação (B-4) na equação (B-19), vem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \phi(x-p) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi(2x-k) \right] \left[\sum_{m=0}^{n-1} a_m \phi(2(x-p)-m) \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_k a_m \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2x-k) \phi(2x-2p-m) dx \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

No entanto esta integral será nula para todos os valores de m e p tais que $2p+m \neq k$. Portanto só restarão valores não-nulos onde $m=k-2p$, de tal forma que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_k a_m \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2x-k) \phi(2x-2p-m) dx \\
= \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{k-2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(2x-k) dx \\
= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{k-2p} = \delta_{0,p}
\end{aligned} \tag{B-21}$$

que dá origem às primeiras n (par) equações do sistema:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{k-2p} = 2, \quad p=0..n-1. \tag{B-22}$$

Porém $n/2$ equações deste conjunto redundarão em referências a coeficientes como a_{-1} ou a_{-2} . Como não se deseja incluir estes coeficientes no sistema, deve-se descartar estas $n/2$ equações. Por exemplo, se $n=2$, duas equações resultam de (B-22):

$$\begin{aligned}
p=0 &\xrightarrow{\text{produz}} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{k-2p} = \sum_{k=0}^1 a_k^2 = a_0^2 + a_1^2 = 2 \\
p=1 &\xrightarrow{\text{produz}} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{k-2p} = \sum_{k=0}^1 a_k a_{k-2} = a_0 a_{-2} + a_1 a_{-1} = 2
\end{aligned} \tag{B-23}$$

Portanto somente as $n/2$ equações seguintes restarão válidas:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{k-2p} = 2, \quad p=0..n/2-1. \tag{B-24}$$

2. Propriedade 2: Normalização da função escala

Exige-se que a função de escala seja normalizada, isto é, que a área sob a função seja uma constante, por exemplo, 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1 \tag{B-25}$$

Observe-se que, devido a esta exigência,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2x-k)dx = 1/2 \quad (\text{B-26})$$

Isto implica em que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi(2x-k)dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2x-k)dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = 1 \quad (\text{B-27})$$

resultando na equação $n/2+1$ do sistema

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 2 \quad (\text{B-28})$$

3. Propriedade 3: perfeita representação de polinômios

Até o momento tem-se $n/2+1$ equações num sistema com n incógnitas. Portanto precisa-se de mais $n/2-1$ equações para completar o sistema. A condição escolhida por DAUBECHIES (1988) é que a função de escala seja capaz de representar exatamente polinômios até um certo grau p . Seja o polinômio $P_p(x)$

$$P_p(x) = \sum_{q=0}^p \alpha_q x^q \quad (\text{B-29})$$

Como a função de escala deve representar exatamente este polinômio, pode-se escrever

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \phi(x-k) \quad (\text{B-30})$$

Realizando o produto interno entre $P_p(x)$ e $\psi(x)$, no qual será substituído a equação (B-30), tem-se que

$$\langle P_p(x), \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k \phi(x-k) \right] \psi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-k) \psi(x) dx \equiv 0 \quad (\text{B-31})$$

desde que a segunda propriedade de ortogonalidade (B-11) já foi exigida. Realizando novamente a operação, desta vez substituindo (B-29), vem

$$\langle P_p(x), \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{q=0}^p \alpha_q x^q \right] \psi(x) dx = \sum_{q=0}^p \alpha_q \int_{-\infty}^{+\infty} x^q \psi(x) dx \quad (\text{B-32})$$

que deve ser igual a zero para *quaisquer valores* de α_q , $q=0..p$. Escolhendo arbitrariamente um determinado $\alpha_m = 1$ e igualando todos os demais α_q a zero, vem

$$\langle P_p(x), \psi(x) \rangle = \sum_{q=0}^p \alpha_q \int_{-\infty}^{+\infty} x^q \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \psi(x) dx = 0 \quad (\text{B-33})$$

Substituindo a equação de relação da wavelet com a função de escala (B-17) nesta última obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{n-k-1} \phi(2x-k) \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{n-k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \phi(2x-k) dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-34})$$

Com um pouco mais de álgebra, na qual é usada diferenciação parcial para resolver a integral, tem-se as p equações

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k k^m = 0, \quad m=0..p \quad (\text{B-35})$$

Ocorre porém que a primeira equação deste conjunto ($m=0$) é redundante, pois pode ser obtida por uma combinação das equações dos outros dois grupos de equações (propriedades 1 e 2). Pode-se então resolver retirando uma equação de qualquer dos três grupos.

Tem-se até agora $n/2$ equações do primeiro grupo mais 1 equação do segundo grupo mais p equações do terceiro menos 1 equação redundante, totalizando $n/2+p$ equações. Como são precisas n equações para resolver o sistema, segue-se que $p=n/2$, isto é, os coeficientes a_k podem ser escolhidos de tal forma que a função de escala possa representar exatamente polinômios de grau até $n/2$.

4. Exemplo

Como exemplo serão calculadas a seguir as constantes para $n=4$, a wavelet de Daubechies de ordem quatro popularmente denominada D4. A equação redundante será retirada do 1º grupo, para $p=1$.

1ª. propriedade (ortogonalidade) = 2 equações - 1 redundante ($p=1$)

$$p = 0 \xrightarrow{\text{produz}} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_k = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2 \quad (\text{B-36})$$

2ª. propriedade (normalização) = 1 equação

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad (\text{B-37})$$

3ª. propriedade (representação de polinômios) = 2 equações

$$\begin{aligned} m = 0 &\xrightarrow{\text{produz}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k k^0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ m = 1 &\xrightarrow{\text{produz}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k k^1 = 0 - a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-38})$$

As duas soluções deste sistema são

$$a_0 = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}, a_1 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}, a_2 = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{4} \text{ e } a_3 = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{4} \quad (\text{B-39})$$

Claramente uma é a antítese da outra. Se for escolhida uma solução para formar $\phi(x)$ e a outra fornecerá $\phi(x)$. Os pares (a_0, a_3) e (a_1, a_2) são chamados de *quadrature mirror filters*.

A partir destes coeficientes já se pode obter as funções $\psi(x)$ e $\phi(x)$. A obtenção destas funções é mais extensa e uma completa descrição do método pode ser obtida em WILLIAMS e AMARATUNGA (1994). Na verdade não é preciso que se conheça estas funções para se efetuar a análise ou decomposição discreta, a FWT.