Hamiltonian Zoo

Nike Dattani*

Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics

Tim Li

HPQC Labs

Joshua Tyler Cantin

University of British Columbia

and Whoever Else Contributes

No Matter Where They're From

(Dated: April 21, 2021)

I. MODEL HAMILTONIANS

1. *Coulomb*

$$H_{\text{Coulomb}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{1}$$

A. Electronic Structure

1. *Molecular Hamiltonian*

$$H_{\text{BO}} = -\sum_A \frac{1}{2M_A}\nabla_A^2 - \sum_i \frac{1}{2}\nabla_i^2 - \sum_{iA}\frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i>j}\frac{1}{r_{ij}} + \sum_{B>A}\frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} \tag{2}$$

* n.dattani@cfa.harvard.edu

2. Born-Oppenheimer Model

3. Watson Model

B. Fine and Hyperfine Structure

1. Stark

2. Zeeman

$$H_{\text{Zeeman}} = -\frac{\mu_B \left(g_l \vec{L} + g_s \vec{S}\right)}{\hbar} \cdot \vec{B} \tag{3}$$

3. Complete magnetic dipole interaction

$$H_{\text{Magnetic Dipole}} = \frac{g_I \mu_N \mu_B \mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{L_z} \sum_i \frac{\hat{l}_{zi}}{r_i^3} \vec{I} \cdot \vec{L} + \frac{2g_s}{S_z} \sum_i \frac{\hat{s}_{zi}}{r_i^3} \left(3\left(\vec{I} \cdot \hat{r}\right)\left(\vec{S} \cdot \hat{r}\right) - \vec{I} \cdot \vec{S}\right) + \frac{g_s}{3S_z} \sum_i \hat{s}_{zi} \delta^3\left(\vec{r}_i\right) \vec{I} \cdot \vec{S} \right) \tag{4}$$

4. Frosch-Foley

$$H_{\text{Frosch-Foley,1}} = \frac{e\hbar}{2mc} \frac{2\mu \cdot \mathbf{L}}{r_1^3} + \frac{\mathrm{i}2\mu_0}{\hbar} \mathbf{S} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{A}] + \frac{2e^2\hbar}{4m^2c^3} \mathbf{S} \cdot [\epsilon' \times \mathbf{A}]. \tag{5}$$

$$H_{\text{Frosch-Foley,2}} = aI_zL_z + b\vec{I} \cdot \vec{S} + cI_zS_z, \tag{6}$$

where

$$a \equiv 2g_I \mu_0 \mu_N \sum_i \left\langle \frac{1}{r_i^3} \right\rangle, \tag{7}$$

$$b \equiv 2g_I \mu_0 \mu_N \sum_i \left\langle \frac{2e^2mc^2\mathcal{E}_r}{\left(E + eV + mc^2\right)^2} \frac{\left({}^1\!/\!{}_2 \sin^2\chi + \cos^2\chi\right)}{r_i^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3\cos^2\chi - 1}{r_i^3}\right) \right\rangle, \text{ and} \tag{8}$$

$$c \equiv 2g_I \mu_0 \mu_N \sum_i \left\langle \frac{2e^2mc^2\mathcal{E}_r}{\left(E + eV + mc^2\right)^2} \frac{\left({}^1\!/\!{}_2 \sin^2\chi - \cos^2\chi\right)}{r_i^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{3\cos^2\chi - 1}{r_i^3}\right) \right\rangle. \tag{9}$$

5. Spin-orbit

6. Orbit-orbit

7. Spin-other-orbit (Gaunt)

8. Fermi Contact

C. Special Relativity

1. Dirac

$$H = \beta mc^2 - eV + c\alpha \cdot (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}). \tag{10}$$

2. Klein-Gordon

3. Darwin ($1e^-$)

$$H_{\text{Darwin}-1} = \alpha_{\text{FS}}^2 \frac{\pi Z}{2} \sum_i \delta\left(\vec{r}_i\right) \tag{11}$$

4. Darwin ($2e^-$)

$$H_{\text{Darwin}-2} = \alpha_{\text{FS}}^2 \pi \sum_{i<j} \delta\left(\vec{r}_{ij}\right) \tag{12}$$

5. Mass Velocity

$$H_{\text{Mass}-\text{Velocity}} = -\alpha_{\text{FS}}^2 \frac{1}{8} \sum_i \nabla_i^4. \tag{13}$$

6. Breit-Pauli

7. Dirac-Coulomb-Breit

D. Quantum Electrodynamics

1. Aracki-Sucher

$$H_{\text{Aracki-Sucher}} = -\alpha_{\text{FS}}^3 \frac{7}{6\pi} \sum_{i>j} \lim_{a\to 0} \left(\frac{\theta\left(r_{ij} - a\right)}{r_{ij}^3} + 4\pi\left(\gamma + \ln a\right)\delta(\vec{r}_{ij}) \right) \tag{14}$$

2. One-Loop

$$H_{1-\text{loop}} = \alpha_{\text{FS}}^4 \pi Z^2 \left(\frac{427}{96} - \ln 2 \right) \sum_i \delta\left(\vec{r}_i\right) \tag{15}$$

3. Schwinger-Dyson

E. Nuclear Motion

$$H_{\text{Nuc}} = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{M_i} \frac{\partial^2}{\partial R_{i\alpha}^2} + V\left(\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_N\right) \tag{16}$$

1. Rigid Rotor Harmonic Oscillator

2. Centrifugal distortion

3. Centrifugal distortion

F. Long-range Interactions

1. van der Waals

2. Lenard-Jones

3. Casimir-Polder

4. Resonance dipole-dipole

5. Meath

6. Axilrod-Teller

G. Hubbard Models

1. Non-interacting Hubbard model

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu\right) n_{\mathbf{k},\sigma} \tag{17}$$

2. 1D Hydrogen chain Hubbard model

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma} \left(\hat{c}^{\dagger}_{i,\sigma} \hat{c}_{j,\sigma} + \hat{c}^{\dagger}_{j,\sigma} \hat{c}_{i,\sigma}\right) + U \sum_{i=1}^{N} \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow}, \quad t > 0, U > 0 \tag{18}$$

3. 1D Hydrogen chain Hubbard model with μ term

$$H = -t\sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{\sigma}\left(\hat{c}^{\dagger}_{i,\sigma}\hat{c}_{j,\sigma}+\hat{c}^{\dagger}_{j,\sigma}\hat{c}_{i,\sigma}\right)+U\sum_{i=1}^{N}\hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow}-\mu\sum_{i}\left(n_{i\uparrow}+n_{i\downarrow}\right) \tag{19}$$

4. With particle-hole symmetry

$$H = -t\sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{\sigma}\left(\hat{c}^{\dagger}_{i,\sigma}\hat{c}_{j,\sigma}+\hat{c}^{\dagger}_{j,\sigma}\hat{c}_{i,\sigma}\right)+U\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{n}_{i\uparrow}-\frac{1}{2}\right)\left(\hat{n}_{i\downarrow}-\frac{1}{2}\right)-\mu\sum_{i}\left(n_{i\uparrow}+n_{i\downarrow}\right) \tag{20}$$

5. Bose-Hubbard (Boson Hubbard)

$$H = -t\sum_{\langle i,j\rangle}\hat{b}^{\dagger}_{i}\hat{b}_{j}+\frac{1}{2}U\sum_{i}\hat{n}_{i}\left(\hat{n}_{i}-1\right)-\mu\sum_{i}\hat{n}_{i} \tag{21}$$

6. Fermi-Hubbard (Fermi Hubbard)

7. Bose–Fermi–Hubbard

8. Jaynes-Cummings-Hubbard

9. Tavis-Cummings-Hubbard

10. Periodic Anderson Model

$$\begin{aligned} H =& -t\sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{\sigma}\left(\hat{c}^{\dagger}_{i,\sigma}\hat{c}_{j,\sigma}+\hat{c}^{\dagger}_{j,\sigma}\hat{c}_{i,\sigma}\right)+V\sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{\sigma}\left(c^{\dagger}_{j\sigma}d_{i\sigma}+d^{\dagger}_{i\sigma}c_{j\sigma}\right) \\ &+U\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{n}_{di\uparrow}-\frac{1}{2}\right)\left(\hat{n}_{di\downarrow}-\frac{1}{2}\right)-\mu\sum_{i}\left(n_{di\uparrow}+n_{di\downarrow}+n_{ci\uparrow}+n_{ci\downarrow}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

where $d_{i\sigma}$ is the annihilation operator for an electron in the localized band at site i, $c_{i\sigma}$ is the annihilation operator for an electron in the conduction band at site i, V is termed the hybridization and is the transition amplitude of an electron moving from the localized band at site i to the conduction band at site i or vice versa.

H. Disorder Models

1. Tight-binding Model with Onsite Disorder

$$H = \sum_i \omega_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i + t \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j, \tag{23}$$

where ω_i is drawn from a unifrom distribution of width W, the disorder strength, and the angular brackets indicate a sum over nearest-neighbours only.

2. Tight-binding Model with Continuous Off-diagonal Disorder

3. Tight-binding Model with Binary Off-diagonal Disorder

4. Long-range Disorder Models

I. Mean-field Hamiltonians

1. Clean Bose-Hubbard

$$H_{\mathrm{MF}} = \sum_i \left[-\mu \hat{n}_i + \frac{U}{2} \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) - zt(\psi^* \hat{b}_i + \psi \hat{b}_i^\dagger) + zt\psi^* \psi \right] \tag{24}$$

J. Spin lattices

1. XY model

$$H = -J \sum_i \left(\frac{1+\gamma}{2} \sigma_{x,i} \sigma_{x,i+1} + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_{y,i} \sigma_{y,i+1} \right) - h \sum_i \sigma_{z,i} \tag{25}$$

$$H = -J \sum_i \left(\frac{1+\gamma}{2} x_i x_{i+1} + \frac{1-\gamma}{2} y_i y_{i+1} \right) - h \sum_i z_i \tag{26}$$

K. Open Quantum Systems

1. Rabi model

2. Spin-Boson

3. Feynman-Vernon

4. Leggett-Caldeira

5. Ishizaki-Fleming

6. Jaynes-Cummings

L. Models of Superconductivity

1. BCS

$$H_{\mathrm{BCS}} = \sum_i \epsilon_i n_i + g \sum_{ij} c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{-i\downarrow} c_{-j\downarrow} c_{j\uparrow} \tag{27}$$

2. Richardson-Gaudin

3. Exactly solvable pairing Hamiltonians

SU(2), Rank 1 algebra

$$H_{\mathrm{SU(2)}} = \sum_i \epsilon_i n_i - g \sum_{ij} P^+_i P_j \tag{28}$$

SO(5), Rank 2 algebra

$$H_{\mathrm{SO(5)}} = \sum_i \epsilon_i n_i - g \sum_{ijk} P^+_{ik} P_{jk} \tag{29}$$

SO(8), Rank 4 algebra

$$H_{\mathrm{SO(8)}} = \sum_i \epsilon_i n_i - g_T \sum_{ijk} P^+_{ik} P_{jk} - g_S \sum_{ijk} D^+_{ik} D_{jk} \tag{30}$$

4. t-J model

M. Models of Superfluidity

1. 2D p-wave Fermi superfluid

$$H_{2DFSF} = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i + \frac{\mathrm{i}\Delta_i}{2}\left(a_i^\dagger a_{-i}^\dagger + \mathrm{H.c.}\right) \tag{31}$$

N. Spin models

1. Ising

2. Transverse Ising

3. XY

4. XYZ

O. Heisenberg

P. J1-J2 Model

Q. Majumdar-Ghosh

R. AKLT Model

S. Kitaev Models

1. Toric Code

2. Ocko-Yoshida

3. Honeycomb Model

$$H_{\text{Honeycomb}} = -J_x \sum_{x-\text{links}} x_i x_j - J_y \sum_{y-\text{links}} y_i y_j - J_z \sum_{z-\text{links}} z_i z_j \tag{32}$$

T. Miscellaneous

1. Fertitta-Booth auxiliary Hamiltonian

$$H_{\text{FB}} = \sum_{x=0}^{N_{\text{cells}}-1} \sum_{\alpha}^{N_{\text{Impurities}}} \sum_{k}^{N_{\text{aux}}} \nu_{\alpha k} \left(\hat{c}^{\dagger}_{\alpha+x} \hat{c}_{k+x} + \hat{c}^{\dagger}_{k+x} \hat{c}_{\alpha+x} \right) + \varepsilon_k \hat{c}^{\dagger}_{k+x} \hat{c}_{k+x} \tag{33}$$

Matrix Zoo

U. 2-level systems (spin-1/2 particles)

$$x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{x+\mathrm{i}y}{2} \quad s_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{x-\mathrm{i}y}{2} \quad s_\alpha \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathbb{1}+z}{2} \equiv b \quad s_\beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbb{1}-z}{2}$$

V. 3-level systems (spin-1 particles)

$$x_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad z_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s_{3+} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{3-} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_8 \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad s_3^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_3^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_3^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_7 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_8 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_9 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(x_3 + z_3x_3 + x_3z_3)$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}(y_3 + y_3z_3 + z_3y_3)$

$\lambda_3 = 2\mathbb{1} + \frac{1}{2}(z_3 - \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{3}{2}y_3^2)$

$\lambda_4 = \frac{1}{2}(x_3^2 - y_3^2)$

$\lambda_5 = \frac{1}{2}(x_3y_3 + y_3x_3)$

$\lambda_6 = \frac{1}{2}(x_3 - z_3x_3 - x_3z_3)$

$\lambda_7 = \frac{1}{2}(y_3 - y_3z_3 - z_3y_3)$

$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2\mathbb{1} + \frac{3}{2}(z_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}y_3^2))$

$s_{3+} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{x_3 + \mathrm{i}y_3}{2}$

$s_{3-} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{x_3 - \mathrm{i}y_3}{2}$

$s_{3,1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{4}i(y_3x_3 - x_3y_3) = \frac{z_3}{2}(\mathbb{1} + z_3)$

$s_{3,2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{2}z_3^2$

$s_{3,3} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z_3^2 - \frac{1}{4}i(y_3x_3 - x_3y_3) = \frac{z_3}{2}(z_3 - \mathbb{1})$

$\{x_3, y_3\} \equiv x_3y_3 + y_3x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\{y_3, z_3\} \equiv y_3z_3 + z_3y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$

$\{z_3, x_3\} \equiv z_3x_3 + x_3z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$|1\rangle\langle 2| \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\lambda_6 + \mathrm{i}\lambda_7)$

$\lambda_7\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_7\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_7\lambda_3 + \lambda_3\lambda_7 = \lambda_1$

$\lambda_7\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda_6\lambda_1$

$\lambda_2\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda_1\lambda_6$

$\lambda_7\lambda_2 + \lambda_2\lambda_7 = -\lambda_4$

$\lambda_6\lambda_1 + \lambda_1\lambda_6 = \lambda_4$

$\lambda_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |\lambda_1|$

$\lambda_5\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_5\lambda_2 + \lambda_2\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_6$

$\lambda_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |\lambda_3|$

$y_3x_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix} = \lambda_5 - iz_3$

W. 4-level systems (spin-3/2 particles)

$$x_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad y_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\mathrm{i} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{3}\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad z_4 \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_D^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{24} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{24} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{34} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{34} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^3 \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad C_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_7 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_8 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_9 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{10} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_{11} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{15} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{16} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{4+} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{x_{3/2} + \mathrm{i}y_{3/2}}{2} \equiv \frac{x_{4\times4} + \mathrm{i}y_{4\times4}}{2}$$

$$s_{4-} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{x_4 - \mathrm{i}y_4}{2}$$

$$s_{4,1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(z_2 + z_1 z_2 + z_1 + \mathbb{1}\right)$$

$$s_{4,2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + z_1 - z_2 - z_1 z_2)$$

$$s_{4,3} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(\mathbb{1} - z_1 + z_2 - z_1 z_2)$$

$$s_{4,4} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(\mathbb{1} - z_1 - z_2 + z_1 z_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - z_1 + z_1 z_2 + z_2\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - z_2 + z_1 z_2 + z_1\right)$$

$$|10\rangle\langle 01| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(x_1 x_2 - \mathrm{i}y_1 x_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + y_1 y_2\right)$$

$$|01\rangle\langle 10| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(x_1 x_2 - \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}y_1 x_2 + y_1 y_2\right)$$

$$\mathrm{CNOT} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + z_1 + x_2 - z_1 x_2\right)$$

X. 5-level systems (spin-2 particles)

$$x_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 0 & -\sqrt{6}\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}\mathrm{i} & 0 & -\sqrt{6}\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}\mathrm{i} & 0 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad z_5 \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad z_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{12} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_A^{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_A^{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{15} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{15} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_D^{2} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{24} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{24} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{25} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{25} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{34} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{34} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{3} \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{35} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{35} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{45} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{45} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{4} \equiv \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad D_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_7 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_8 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_9 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_{10} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_{11} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{13}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{14}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{15}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{16}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&i&0\\0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{17}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D_{18}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{19}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-i&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{20}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{21}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_{22}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$D_{23}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0\\0&0&-i&0&0\end{pmatrix}\quad D_{24}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad D_{25}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&i\\0&0&0&-i&0\end{pmatrix}$$

$$s_{5+}\equiv\begin{pmatrix}0&2&0&0&0\\0&0&\sqrt{6}&0&0\\0&0&0&\sqrt{6}&0\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\equiv\frac{x_{5\times5}+\mathrm{i}y_{5\times5}}{2}\equiv\frac{x_{(5)}+\mathrm{i}y_{(5)}}{2}\qquad s_{5-}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\0&\sqrt{6}&0&0&0\\0&0&\sqrt{6}&0&0\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\equiv\frac{x_{5\times5}+\mathrm{i}y_{5\times5}}{2}\equiv\frac{x_{(5)}+\mathrm{i}y_{(5)}}{2}$$

$$s_{5,1}\equiv\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\Lambda_D^1+\sqrt{\frac{1}{12}}\Lambda_D^2+\sqrt{\frac{1}{24}}\Lambda_D^3+\sqrt{\frac{1}{40}}\Lambda_D^4+\frac{1}{5}\mathbb{1}\qquad s_{5,2}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\Lambda_D^1+\sqrt{\frac{1}{12}}\Lambda_D^2+\sqrt{\frac{1}{24}}\Lambda_D^3+\sqrt{\frac{1}{40}}\Lambda_D^4+\frac{1}{5}\mathbb{1}$$

$$s_{5,3}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=-\sqrt{\frac{1}{3}}\Lambda_D^2+\sqrt{\frac{1}{24}}\Lambda_D^3+\sqrt{\frac{1}{40}}\Lambda_D^4+\frac{1}{5}\mathbb{1}\qquad s_{5,4}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=-\sqrt{\frac{3}{8}}\Lambda_D^3+\sqrt{\frac{1}{40}}\Lambda_D^4+\frac{1}{5}\mathbb{1}$$

$$s_{5,5}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=-\sqrt{\frac{2}{5}}\Lambda_D^4+\frac{1}{5}\mathbb{1}$$

Y. 6-level systems (spin-3/2 particles)

$$x_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 & \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9} & 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \quad y_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5}i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5}i & 0 & -\sqrt{8}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8}i & 0 & -\sqrt{9}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9}i & 0 & -\sqrt{8}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{8}i & 0 & -\sqrt{5}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5}i & 0 \end{pmatrix} \quad z_6 \equiv \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$s_{6+} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad s_{6-} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{14} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{15} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{15} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{16} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_A^{16} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{2} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{24} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_A^{24} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{25} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{25} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{26} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{26} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{34} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{34} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{3} \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{35} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{35} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{36} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{36} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{45} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{45} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-i&0\\ 0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{4} \equiv \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-4&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_S^{46} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{46} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_S^{56} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_A^{56} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&i&0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_D^{5} \equiv \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&-5 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \equiv \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_2 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_3 \equiv \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_4 \equiv \begin{pmatrix} 0&i&0&0&0&0\\ -i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_5 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$E_6 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_7 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ -i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_8 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_9 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0\\ 0&-i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{10} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$E_{11} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ -i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{13} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{14} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&-i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{15} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$E_{16} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0&0\\ 0&0&-i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{17} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{18} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{19} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ -i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{20} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&-i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{22} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{23} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{24} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{25} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&-i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$E_{26} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad E_{27} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{28} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-i&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{29} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{30} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$E_{31} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{32} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-i&0&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{33} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{34} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0&0 \end{pmatrix} \quad E_{35} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$E_{36} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&-i&0 \end{pmatrix}$$

$$|0_b1_t\rangle\langle 1_b0_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(x\lambda_1 + \mathrm{i}y\lambda_1 - \mathrm{i}x\lambda_2 + y\lambda_2\right) \qquad |1_b0_t\rangle\langle 0_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(x\lambda_1 - \mathrm{i}y\lambda_1 + \mathrm{i}x\lambda_2 + y\lambda_2\right)$$

$$|0_b1_t\rangle\langle 1_b0_t| + |1_b0_t\rangle\langle 0_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(x\lambda_1 + y\lambda_2\right) \qquad |1_b1_t\rangle\langle 0_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(iy\lambda_3 - x\lambda_3) + \sqrt{\frac{1}{48}}(x\lambda_8 - iy\lambda_8) + \frac{1}{6}(x-y)$$

$$|1_b1_t\rangle\langle 0_b1_t| + |0_b1_t\rangle\langle 1_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\lambda_5 y + \lambda_4 x\right) \qquad |1_b0_t\rangle\langle 1_b2_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$|1_b1_t\rangle\langle 1_b2_t| = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\lambda_6 - z\lambda_6 + \mathrm{i}\lambda_7 - \mathrm{i}z\lambda_7\right) \qquad |1_b0_t\rangle\langle 1_b2_t| + |1_b2_t\rangle\langle 1_b0_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\lambda_6 - \lambda_6 z\right)$$

$$|0_b1_t\rangle\langle 0_b0_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(z\lambda_1+\lambda_1-\mathrm{i}z\lambda_2-\mathrm{i}\lambda_2\right)$$

$$|0_b0_t\rangle\langle 0_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(z\lambda_1+\lambda_1+\mathrm{i}z\lambda_2+\mathrm{i}\lambda_2\right)$$

$$|0_b1_t\rangle\langle 0_b0_t| + |0_b0_t\rangle\langle 0_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(z\lambda_1+\lambda_1\right)$$

$$|0_b2_t\rangle\langle 1_b0_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(x\lambda_4+\mathrm{i}y\lambda_4-\mathrm{i}x\lambda_5+y\lambda_5\right)$$

$$|0_b2_t\rangle\langle 1_b0_t| + |1_b0_t\rangle\langle 0_b2_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(x\lambda_4+y\lambda_5\right)$$

$$|0_b2_t\rangle\langle 0_b0_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(z\lambda_4+\lambda_4-\mathrm{i}z\lambda_5-\mathrm{i}\lambda_5\right)$$

$$|0_b2_t\rangle\langle 0_b0_t| + |0_b0_t\rangle\langle 0_b2_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(z\lambda_4+\lambda_4\right)$$

$$|1_b1_t\rangle\langle 1_b2_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(\lambda_6+i\lambda_7-z\lambda_6-iz\lambda_7)$$

$$|1_b1_t\rangle\langle 1_b2_t| + |1_b2_t\rangle\langle 1_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\lambda_6-z\lambda_6)$$

$$|1_{t,1}\rangle\langle 2_{t,1}|x_2 + |2_{t,1}\rangle\langle 1_{t,1}|x_2 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} = \lambda_6 x_2$$

$$\lambda_6 x_2 = -\frac{1}{2}z\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1-\frac{1}{\sqrt{3}}x\lambda_8+\frac{1}{3}x$$

$$x_1|1_{t,2}\rangle\langle 2_{t,2}| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x\lambda_6+\mathrm{i}\lambda_7)$$

$$x_1|1_{t,2}\rangle\langle 2_{t,2}| + x_1|2_{t,2}\rangle\langle 1_{t,2}| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} = x\lambda_6$$

$$|0_b2_t\rangle\langle 1_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(x\lambda_6+\mathrm{i}y\lambda_6-\mathrm{i}x\lambda_7+y\lambda_7\right)$$

$$|0_b2_t\rangle\langle 1_b1_t| = \frac{1}{4}\left(\lambda_6 + \lambda_6 z + \mathrm{i}\lambda_7 + \mathrm{i}\lambda_7 z\right)$$

$$|0_b1_t\rangle\langle 0_b2_t| \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\lambda_6 + z\lambda_6 + \mathrm{i}\lambda_7 + \mathrm{i}z\lambda_7\right)$$

$$|0_b1_t\rangle\langle 0_b2_t| + |0_b2_t\rangle\langle 0_b1_t| \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\lambda_6 + z\lambda_6\right)$$

Z. 7-level systems (spin-3 particles)

$$\lambda_1 \equiv \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 \equiv \begin{pmatrix} 0&-i&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 \equiv \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&-i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-i&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&-2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_9 \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{10} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&-i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{11} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{13} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{14} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-i&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{15} \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-3&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{16} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{17} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{18} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{19} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{20} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{21} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{22} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{23} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-i&0&0\\ 0&0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{24} \equiv \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&-4&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{25} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{26} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&-i&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{27} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{28} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-i&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{29} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{30} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-i&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{31} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{32} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-i&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{33} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{34} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-i&0\\ 0&0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{35} \equiv \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&-5&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{36} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{37} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{38} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{39} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{40} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{41} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{42} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{43} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{44} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{45} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0&0 \end{pmatrix} \lambda_{46} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \lambda_{47} \equiv \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0&i&0 \end{pmatrix} \lambda_{48} \equiv \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&-6 \end{pmatrix}$$

II. OTHER HAMILTONIANS

A. Feynman Hamiltonian

Wavefunction Zoo

B. Electronic Structure Ansatze

1. Hartree Product

2. Configuration Interaction

3. Coupled Cluster

CC(n)

Bruckner-CC(n)

EOM-CC(n)

EOM-IP-CC(n)

FS-CC(n)

DLPNO-CC(n)

MR-EOM

4. Geminals

AP1roG/pCCD

APIG

APSetG

APG

Potential Zoo

C. Diatomics

Harmonic Oscillator

Morse

Lenard-Jones

Morse/Long-range

Tiemann

Morse-Rosen

D. Triatomics

Jensen

Schwenke

PolyMLR

E. Torsion Potentials

Functional Zoo

Function Zoo

Master Equation Zoo

Particle Zoo

https://en.wikipedia.org/wiki/Particle_zoo

Complexity Zoo (founded by Scott Aarsonson of UWaterloo)

https://complexityzoo.uwaterloo.ca/Complexity_Zoo

Algorithms Zoo (founded by Stephen Jordan of NIST)

https://math.nist.gov/quantum/zoo/