1 Integralrechnung S492

1.1 Integrationsmethoden S495ff

Linearität	$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha x+\beta)+C$
Partielle Integration	$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$
Weierstrass-Substitution	$t=\tan\frac{x}{2}$, $\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ $\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \int R(\sin(x),\cos(x))dx$
Allgemeine Substitution	$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt$ $\quad t=g^{-1}(x)$ $\quad \boxed{\text{x=g(t)}} \Leftrightarrow^{d(\dots)} dx=g'(t)\cdot dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ $\quad (f(x)\neq 1)$ $\quad y'(x)\cdot dx = dy \rightarrow$ allg. gültig
Potenzregel	$\int f'(x)\cdot(f(x))^{\alpha}dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $\quad (\alpha\neq -1)$
Differentiation	$\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a)$ $\quad \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x)$
Mittelwerte	linear: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ $\quad$ quadratisch: $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \lvert f(x)^2\rvert dx}$

1.1.1 Einige unbestimmte Integrale S1081ff

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x\neq 0$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad x\neq k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad x\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$
10. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$
11. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$
12. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C, \quad x\neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
14. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C, \quad a\neq 0, x\neq -\frac{b}{a}$
15. $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
16. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad x\neq \frac{b}{a}, \quad x\neq -\frac{b}{a}$
17. $\int \sqrt{a^2x^2+b^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
18. $\int \sqrt{a^2x^2-b^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a}\ln|ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}| + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, a^2x^2\geqq b^2$
19. $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad a^2x^2\leqq b^2$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}| + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0 \quad a^2x^2>b^2$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad a^2x^2<b^2$
23. Die Integrale $\int\frac{dx}{X}$, $\int\sqrt{X}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X=ax^2+2bx+c$, $a\neq 0$ werden durch die Umformung $X=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)$ und die Substitution $t=x+\frac{b}{a}$ in die Integrale 15. bis 22. transformiert.
24. $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X}, \quad a\neq 0, \quad X=ax^2+2bx+c$
25. $\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C, \quad a\neq 0$
26. $\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C, \quad a\neq 0$
27. $\int \sin^n ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax\, dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
28. $\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax\, dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
29. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right| + C, \quad a\neq 0, \quad x\neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
30. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C, \quad a\neq 0, \quad x\neq \frac{\pi}{2a}+k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
31. $\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C, \quad a\neq 0, \quad x\neq \frac{\pi}{2a}+k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
32. $\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C, \quad a\neq 0, \quad x\neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
33. $\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
34. $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
35. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
36. $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
37. $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C, \quad a\neq 0, b\neq 0$
38. $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C, \quad x\in\mathbb{R}^+$
39. $\int x^{\alpha}\cdot\ln x\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C, \quad x\in\mathbb{R}^+, \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

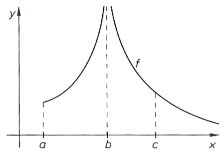
1.2 Uneigentliche Integrale S518

Uneigentliches Integral heisst, dass entweder eine **unbeschränkte Funktion** integriert wird, oder eine Funktion über einen **unbeschränkten Integrationsbereich** integriert wird.
Für unbeschränkte Funktionen:
$I = \int_a^c f(x)dx = \lim_{t\uparrow b} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\downarrow b} \int_t^c f(x)dx$

Für die unbeschränkte Integration:
$I = \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx;$

$I = \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx;$

$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t_1\to-\infty} \lim_{t_2\to\infty} \int_{t_1}^a f(x)dx + \int_a^{t_2} f(x)dx$



unbeschränkte Funktion

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} = 1$

1.2.1 Prinzip der Restfläche

Wenn $\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty f(x)dx = 0$, dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$ und umgekehrt.

1.2.2 Majorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $|f(x)| \geq 0$ absolut konvergiert, wird eine zweite Funktion $g(x) \geq |f(x)|$ (Majorante) gesucht. Konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty |f(x)|dx$ und somit konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. $\quad x \in [a, \infty[$

1.2.3 Minorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $f(x)$ divergiert, wird eine zweite Funktion $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (Minorante) gesucht. Divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. $\quad x \in [a, \infty[$

2 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

2.1 Beschreibungsvarianten

Funktion (explizit)	Koordinatengleichung (implizit)	Parameterform(Cartesisch)	Polarform x
$y = f(x)$ (Bronstein S.49, 147)	$F(x, y) = 0$ (Bronstein S.49)	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ (Bronstein S.49)	$r = f(\varphi)$

$\rightarrow$ Ordnung immer ohne $\sqrt{\ }$

2.2 Umrechnen diverser Systeme S49

Parameter	$\Rightarrow$ explizit	$t = f(x);\ y = g(f(x))$
Explizit	$\Rightarrow$ Parameter	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$
Ex- bzw. implizit	$\Rightarrow$ Polar	Ersetze $x = r\cos(\varphi)$; $y = r\sin(\varphi)$; $x^2 + y^2 = r^2$
Polar	$\Rightarrow$ implizit	Ersetze $r\sin(\varphi) = y$; $r\cos(\varphi) = x$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Polar	$\Rightarrow$ Parameterform	$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Einzelner Punkt	$\Rightarrow$ Polar	$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0;\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0;\ y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$

2.3 Kurvenarten S203ff

bei '+', Kurve auf linke Seite geöffnet
bei '-', Kurve auf rechte Seite geöffnet } bei Polarform

	Kreis S203	**Ellipse S204**
Implizit:	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	$(\frac{x-x_0}{a})^2+(\frac{y-y_0}{b})^2=1$
Bemerkung:	Mittelpunkt (x_0, y_0); Radius r	Mittelpunkt (x_0, y_0); Halbachsen a, b
Polarform:	$r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon=0$	$r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; 0<\epsilon<1$ (rechter Brennpunkt)
Parameterform:	$x=x_0+R\cos(t), y=y_0+R\sin(t)$	$x=a\cos(t), y=b\sin(t)$ um $P(0,0)$
p, ϵ:	$p=\frac{b^2}{a}$	$\epsilon=\frac{c}{a}$

	Hyperbel S206	**Parabel S209**
Implizit:	$(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2=1; -(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$	$y^2=2p(x-x_0)$
Bemerkung:	Achsenkreuz in $P(0,0)$	Parabeln mit Scheitelpunkt auf der vertikaler Achse
Polarform:	$r=\frac{p}{1-\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon>1_{(rechter Hyperbelast)}$ $r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}{}_{(linker Hyperbelast)}$	$r=\frac{p}{1-\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon=1$
Parameterform:	$x=a\cosh(t), y=b\sinh(t)$	$x=\frac{t^2}{2p}, y=t$ $p=$Halbparameter (2·Abstand Scheitel-Brennpunkt)

	Kardioide/Herzk. S99	**Lemniskate "∞" S101**	**Strophoide/harm. K. S96**
Polarform:	$r=a(1+\cos(\varphi))$	$r=a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$	$r=-a\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}, (a>0)$

2.4 Gleichungen, Mittelwerte S19ff, 509

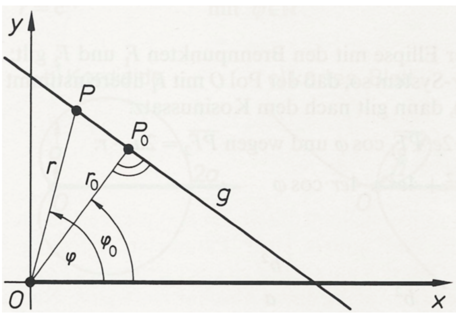
Tangentengleichung	**Normalengleichung**	**Linearer Mittelwert**	**Quadratischer Mittelwert**
$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $\dot{x_0}(y-y_0)=\dot{y_0}(x-x_0)$	$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$	$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$	$\bar{f}=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)^2dx}$

2.5 Tangenten- & Normalenabschnitt, Subtangente & Subnormale S251ff

2.6 Abstandsformeln

Hessesche Normalform S200f, 224

$x\cdot\cos\varphi_0+y\cdot\sin\varphi_0=r_0$



Geradengleichung

$y-y_0=m(x-x_0)$

Abstand zum Ursprung

$\frac{|y_0-m\cdot x_0|}{\sqrt{m^2+1}}$

2.7 Berührung in n-ter Ordnung

Zwei explizit gegebene Kurven $y=f(x)$ und $y=g(x)$ berühren einander im Punkt P x_0, y_0 von der Ordnung n, wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen.

$f(x_0)=g(x_0);\ f'(x_0)=g'(x_0);\ f''(x_0)=g''(x_0);\ \ldots;\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0) \qquad f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0)$

2.8 Scheitel S256

Scheitelpunte sind Extremalwerte der Krümmungs- bzw. Krümmungsradiusfunktion. Falls bei $\kappa'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremalstelle. $\kappa'(x)=0; \kappa''(x)\neq 0$

2.9 Wichtige Formeln S249ff

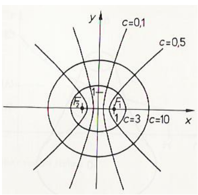
Cartesisch	**Parameter**	**Polar**
Anstieg einer Kurve, Ableitung, 2. Ableitung		
$y' = f'(x_o) \quad y'' = f''(x_0)$	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	$y' = \frac{r'(\varphi)\sin(\varphi)+r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{r'(\varphi)\cos(\varphi)-r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}$
Bogenlänge S514		
$s = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$\lvert s\rvert = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$	$\lvert s\rvert = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Krümmung ebener Kurven S253		
$\kappa = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}$	$\kappa = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2})^3}$	$\kappa = \frac{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}{(\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2})^3}$
Konvex (Linkskurve): $\kappa \geq 0$ Streng konvex: $\kappa > 0$	Wendepunkt: $\kappa = 0$	Analog für konkav
Krümmungskreisradius S253 $r = \lvert\frac{1}{\kappa}\rvert$		
$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}{f''(x)}\right\rvert$	$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2})^3}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}\right\rvert$	$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2})^3}{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}\right\rvert$
Flächeninhalt S513 um x-Achse	y-Achse: Umkerhfunktion $f^{-1}(x)$ von y_0 bis y_1 integrieren	
$A = \int\limits_a^b f(x)dx$	$A = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}[x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)]dt$	$A = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}(r(\varphi))^2d\varphi$
Volumen S514 **Symmertire!** nur 1.Hälfte der Kurve integrieren (pos. Meridian)		
$V = \pi\int\limits_a^b(f(x))^2dx$	$V = \pi\left\lvert\int\limits_{t_1}^{t_2}(y(t))^2\dot{x}(t)dt\right\rvert$	$V = \pi\left\lvert\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\sin^2\varphi[r'(\varphi)\cos(\varphi)-r(\varphi)\sin(\varphi)]d\varphi\right\rvert$
Oberflächeninhalt S514 **Symmertire!** nur 1.Hälfte der Kurve integrieren (pos. Meridian)		
$O = 2\pi\int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$O = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}\lvert y(t)\rvert\sqrt{\dot{x}^2(t)+(\dot{y}^2(t))}dt$	$O = 2\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\lvert r(\varphi)\sin\varphi\rvert\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Polar: $\sin\varphi$ = Drehung um Polgerade	$\cos y$ = Drehung um y-Achse ($f = \frac{\pi}{2}$)	$\rightarrow$ siehe Fläche
Krümmungskreismittelpunkt		
$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}[1+(\frac{dy}{dx})^2]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ $y_c = y + \frac{1+(\frac{dy}{dx})^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	$x_c = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$ $y_c = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$	$x_c = r\cdot\cos\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\cos\varphi+r'\cdot\sin\varphi)}{r^2+2r'^2-r\cdot r''}$ $y_c = r\cdot\sin\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\sin\varphi-r'\cdot\cos\varphi)}{r^2+2r'^2-r\cdot r''}$

2.10 Evolute

Evolute = Σ Krümmungskreiszentren

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\overrightarrow{n}$$

2.11 Orthogonaltrajektorien



Die orthogonalen Trajektorien schneiden alle Kurven der gegebenen Kurvenschar $y = f(x,c)$ (c bestimmen) im rechten Winkel. Die DGL $F(x,y,y')$ der Kurve bestimmen(y' ableiten, c einsetzen, wenn möglich für $f(x,c) = y$), anschliessend y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen. $\Rightarrow$ ergibt die DGL der orthogonalen Trajektorien.
Die Kreise sind Orthogonaltrajektorien der Hyperbeln und umgekehrt.

$$\frac{r'}{r} = f(\varphi,r) \quad \xrightarrow{orthogonal} \quad \frac{r'}{r} = -\frac{1}{f(\varphi,r)}$$

3 Reihen S469, 1073

3.1 Zahlenreihen S470

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist eine (unendliche) Reihe. Sie ist die Folge von Partialsummen einer bestehenden Folge a_n.

3.1.1 Konvergenz, Divergenz S471

Konvergiert die Reihe $< s_n >$ gegen die Summe $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ so ist sie konvergent. Existiert der GW nicht, so ist sie divergent.

3.1.2 Konvergenzkriterien S462

3.1.2.1 Cauchy-Kriterium

Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert, so dass für alle $m > n > n_0$ gilt:
$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$, dann konvergiert die Reihe, ansonsten divergiert sie.

3.1.2.2 lim = 0

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Aber NICHT UMGEKEHRT!

3.1.2.3 Divergenz

Ist $< a_n >$ divergent oder ist $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

3.1.2.4 Majorantenkriterium S478

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $|a_n| \leq c_n$ (absolut). Dies gilt auch für $|a_n| \leq c_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.
$\sum_{n=1}^{m} a_k \leq |\sum_{n=1}^{m} a_k| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_k| \leq \sum_{n=1}^{m} c_n$

3.1.2.5 Minorantenkriterium

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen $+\infty$ divergent, so gilt dies auch für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bei $a_n \geq d_n$.
Dies gilt auch für $a_n \geq d_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.

Reziprokkriterium	$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.	
Quotientenkriterium S473	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha < 1$ (aboslut) konvergent
Wurzelkriterium S473	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha = 1$ keine Aussage! $\alpha > 1$ divergent
Integralkriterium S474	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent. Gilt nur, wenn f auf $[1,\infty)$ definiert und monoton fallend ($f'(x) \leq 0$) ist. Zudem muss $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1,\infty)$ sein.	
Leibniz-Kriterium S475	Die **alternierende** Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $< \lvert a_n\rvert >$ eine monoton fallende Nullfolge ($\lim_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = 0$) ist. Monotonie mittels Verhältnis ($\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert$), Differenz ($\lvert a_{n+1}\rvert - \lvert a_n\rvert$) oder *vollständiger Induktion* beweisen.	

3.1.2.6 Abschätzung Restglied einer alternierenden konvergenten Reihe S426,430

$|R_n| = |s - s_n| \leq |a_{n+1}|$

3.1.3 Bedingte und Absolute Konvergenz S474

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Bedingt Konvergent:	Eine Reihe hat durch Umordnen einen anderen Grenzwert oder wird divergent (somit nicht absolut konvergent).
Unbedingt Konvergent:	Durch Umordnen ändert sich der Grenzwert nicht.

3.1.4 Produkt von absolut konvergenten Reihen S475

Gegeben sei: $\sum a_n = a, \quad \sum b_n = b, \quad \sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n) = c$ so ist $c_n = \sum a_k b_{n-k+1}$ und $c = a \cdot b$

3.2 Potenzreihen S481

3.2.0.1 Definition S432

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heisst Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_n.

Geometrische Reihe S19	$a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$	$(\lvert q\rvert < 1)$ Beidseitiges $\int \Rightarrow a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = -a \cdot \ln\lvert 1-q\rvert$
Binominalreihe S12	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$	$x \in (-1, 1)$ Binominalkoeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
Taylor-Reihe S483	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$	Taylor-Reihe von f bezüglich der Stelle x_0
E-Funktion	$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$	
	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	für $x_0 = 0$

3.2.1 Konvergenz S481

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ oder $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$

Für $a = 0$ ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Für $a > 0$ ist die Potenzreihe für alle x mit $\begin{cases} |x| < \frac{1}{a} = r \Rightarrow & \text{absolut konvergent.} \\ |x| > \frac{1}{a} = r \Rightarrow & \text{divergent.} \end{cases}$

Ist die Folge $< \sqrt[n]{|a_n|} >$ nicht beschränkt, so ist die Potenzreihe nur für $x = 0$ konvergent.

3.2.2 Abel's Theorem

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$ konvergent $= \lim_{x\uparrow r} f(x)$ (= Summe der Reihe)

3.2.3 Konvergenzradius S481

Jeder Potenzreihe kann ein Konvergenzradius r zugeordnet werden. Wobei gilt $r = \frac{1}{a}$ mit $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Für $a = 0$ gilt $r = \infty$. Wenn a nicht exisitiert (Folge divergent) ist $r = 0$.

Berechnung mittels Quotientenkriterium: $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

3.2.4 Differentiation

Alle Potenzreihen mit einem $\rho > 0$ sind für alle $x \in (-\rho, \rho)$ beliebig oft (gliedweise) differenzierbar.
Der Potenzradius ρ ist bei allen Ableitungen gleich demjenigen der Ursprungsfunktion. $\rho_f = \rho_{f^{(i)}}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} \qquad f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1) \cdot a_n x^{n-i}$$

Bemerkung: Startwert $(n = 0)$ nur erhöhen, wenn bei x^n, n negativ werden würde!

3.2.5 Integration

3.2.5.1 Unbestimmtes Integral

$\int \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$.

3.2.5.2 Bestimmtes Integral

$\int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$.

3.3 einige Reihen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
$(1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$[1])	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\sin x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cos x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \cdots \right)$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
$\arctan x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
e^x	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots$	$-1 < x \leqq 1$
$\ln\frac{1+x}{1-x}$	$2 \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right)$	$\lvert x\rvert < 1$
$\sinh x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cosh x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{arsinh} x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$

[1]) Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so hat die Reihe nur endlich viele (nämlich $\alpha + 1$) Glieder, da dann $\binom{\alpha}{\alpha+k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ ist divergent

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$ absolut konvergent gegen 1 (beweisen mit Integralkriterium)

3.4 Grenzwerte von Reihen

$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1$ ($a > 0$ und const.)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n^a}) = 1$ (a const.)
$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\lvert p(n)\rvert}) = 1$ ($p(n) \neq 0$)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{K}{n!}) = 0$ (K const.)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n!}) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}) = 0$ ($K > 0$ und const.)
$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}) = e$			

4 Differentialgleichungen S552

4.1 Lösen von Differentialgleichungen 1.Ordnung

4.1.1 Piccard-Lindelöf

Die Funktion $f(x, u, u_1, ..., u_{n-1})$ sei in einer Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R^{n+1}}$ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen nach $u, u_1, ..., u_{n-1}$ dann existiert in einer geeigneten Umgebung des Anfangspunktes x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems
$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ mit $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

$\frac{\partial f}{\partial y} \cdots \frac{\partial f}{\partial f^{(n-1)}}$ endlich beschränkt $\Rightarrow$ eindeutige Lösbarkeit

4.1.2 Trennung von Variabeln / Separation S554

Form: $y' = f(x)g(y)$ **Vorgehen:** $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$, nun ist die DGL beidseitig nach x integrierbar
$(dy = y'(x)dx)$: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx$

4.1.3 Lineartermsubstitution/separierte Lösung S554

Form: $y' = f(ax + by + c)$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = ax + by + c$ $\quad z' = a + by' = a + bf(z)$
$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{z'}{a+bf(z)} d\tilde{x} = \int 1 d\tilde{x} \Rightarrow \int\limits_{z_0}^{z} \frac{1}{a+bf(\tilde{z})} d\tilde{z} = \int\limits_{x_0}^{x} 1 d\tilde{x} \qquad [d\tilde{z} = \underbrace{(a + by')}_{z'} d\tilde{x}]$

4.1.4 Gleichgradigkeit S554

Form: $y' = f(\frac{y}{x})$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = \frac{y}{x}$ $\quad z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) \quad y' = f(z) \quad dz = y'(x)dx$

4.1.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung S555

Form: $y' + f(x)y = \underbrace{g(x)}_{\text{Störglied}}$ **Vorgehen:** $y = e^{-\int f(x)dx}(k + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx) \qquad (k \in \mathbf{R})$

4.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S573

Form: $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$ **Störglied:** $f(x)$
Homogene Differentialgleichung: $f(x) = 0$ **Inhomogene Differentialgleichung:** $f(x) \neq 0$

4.2.1 Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: Y_H

Charakteristisches Polynom $\underline{\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0}$ von $\underline{y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0}$ $(\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2})$

$(D > 0)$	Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$:	$Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$	} starke Dämpfung
$(D = 0)$	Falls $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$:	$Y_H = e^{\lambda_1 x}(A + B \cdot x)$	} aperiodischer Grenzfall
$(D < 0)$	Falls $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\alpha$:	$Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x}(Acos(\alpha x) + Bsin(\alpha x))$	} schwache Dämpfung / Schwingfall

Eigenfrequenz: $\omega = \alpha = \frac{\sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}}{2}$ Dämpfung: $|\delta| = |\lambda|$

4.2.2 Allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL: $y = Y_H + y_P$

4.2.3 Grundlöseverfahren einer inhomogenen DGL: y_P

Homogene DGL: $g(x) = Y_H$ mit den Anfangsbedingungen $g(x_0) = 0; g'(x_0) = 1$. Wenn möglich $x_0 = 0$.

$$y_P(x) = \int\limits_{x_o}^{x} g(x + x_0 - t) \cdot f(t)dt$$

4.2.4 Der Ansatz einer inh. DGL in Form des Störgliedes: y_P

$\mathbf{f(x) = p_n(x)}$	($p_n(x)$ und $q_n(x)$ sind Polynome vom gleichen Grad)
Fall a: $a_0 \neq 0$:	$y_P = q_n(x)$
Fall b: $a_0 = 0, a_1 \neq 0$:	$y_P = x \cdot q_n(x)$
Fall c: $a_0 = a_1 = 0$:	$y_P = x^2 \cdot q_n(x)$
a_0 und a_1 beziehen sich auf die **linke Seite** der DGL	

$\mathbf{f(x) = e^{bx} \cdot p_n(x)}$	
Fall a: b nicht Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot q_n(x)$
Fall b: b einfache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x \cdot q_n(x)$
Fall c: b zweifache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x^2 \cdot q_n(x)$

$\mathbf{f(x) = e^{\alpha x}(p_n(x) \cos \beta x + q_n(x) \sin \beta x)}$	
Fall a: $\alpha + j\beta$ **nicht Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x}(r_n(x) \cos \beta x + s_n(x) \sin \beta x)$
Fall b: $\alpha + j\beta$ **Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x}\mathbf{x}(r_n(x) \cos \beta x + s_n(x) \sin \beta x)$

4.2.5 Vorgehen bei einer inh. DGL in Form des Störgliedes:

1. Y_H mit λ_1 und λ_2 berechnen
2. Ordnung n anhand der r.h.s der DGL bestimmen
   Koeffizient b anhand der r.h.s der DGL bestimmen
   (Achtung kann aus mehreren Elementen bestehen z.B. $x^2e^x + x$; Superposition)
3. Anhand der Störglied Tabellen y_p bestimmen
4. $q_n = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + cx + d$
5. y_p ableiten und in die **l.h.s** der DGL einsetzen. $y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p = f(x)$
6. Koeffizienten bestimmen: $x^2e^x \cdot 18a + xe^x(6a + 12b) + e^x(2b + 6c) = x^2e^x$
   $18a = 1$ — $18a$ kommt 1mal in der r.h.s vor
   $(6a + 12b) = 0$ — $(6a + 12b)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s
   $(2b + 6c) = 0$ — $(2b + 6c)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s
7. Koeffizienten in y_p einsetzen
8. Wenn das Störglied $f(x)$ aus mehreren Teilen besteht (z.B. $x^2e^x + x$), Störglied auseinander nehmen und in zwei Teile x^2e^x und x unterteilen und Schritt 3 - 6 wiederholen
9. $y = Y_H + y_{p1} + y_{p2} + \ldots$

4.2.6 Superpositionsprinzip

$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$

y_1 ist spezielle Lösung der DGL	$y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 = c_1 f_1(x)$
y_2 ist spezielle Lösung der DGL	$y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_0 \cdot y_2 = c_2 f_2(x)$
dann ist:	$y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2$

4.3 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S554

Form: $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = f(x)$

4.3.1 n-verschiedene Homogene Lösungen

Fall a: r reelle Lösungen λ_1:	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, $\ldots$,$y_r = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}$	Starke Dämpfung / Kriechfall
Fall b: k komplexe Lösungen $\lambda_2 = \alpha + j\beta$:	$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\ldots$, $y_k = e^{\alpha x}x^{k-1}\cos(\beta x)$ $y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\ldots$, $y_{2k} = e^{\alpha x}x^{k-1}\sin(\beta x)$	Schwache Dämpfung / Schwingfall

$Y_H = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + ... + Ny_n$

4.3.2 Allgemeinste Lösung des partikulären Teils:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}}_{f(y,y',y'',\ldots)} = \underbrace{e^{\alpha x}(p_{m1}(x)\cos(\beta x) + q_{m2}(x)\sin(\beta x))}_{\text{Störglied}} \qquad \lambda \text{ aus Homogenlösung}$$

Unterscheide die Lösungen des charakteristischen Polynoms (λ): mit m = max(m1, m2)

Fall a: $\alpha + j\beta \neq \lambda$, so ist $y_P = e^{\alpha x}(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$

Fall b: $\alpha + j\beta$ ist u-fache Lösung von λ, so ist $y_P = e^{\alpha x}x^u(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$

u-fache Resonanz

4.3.3 Grundlöseverfahren

$$\begin{pmatrix} g(x_0) = & 0 & = & Ay_1(x_0) + By_2(x_0) + \ldots + Ny_n(x_0) \\ g'(x_0) = & 0 & = & Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) + \ldots + Ny_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ g^{(n-1)}(x_0) = & 1 & = & Ay_1^{(n-1)}(x_0) + By_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + Ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ergibt $c_1, \ldots, c_n$ für

$y_P(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t) f(t) dt$

4.3.4 Anfangswertproblem

$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1 \qquad y''(x_0) = y_2 \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

4.4 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form:

$$\begin{matrix} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Die allgem. Lösung ergibt sich aus der DGL:

$$\underbrace{\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = \dot{f}(t) - df(t) + bg(t)}_{\text{normale DGL 2.Ordnung}\rightarrow\text{nach } x \text{ auflösen}}$$

$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t)))$

Anfangsbedinung: $x_0(t_0) = x_0, \dot{x}_0(t_0) = ax_0 + by_0 + f(t_0)$

Anordnung beachten! Gesuchte Grösse immer zu oberst (in diesem Fall ist die gesuchte Grösse x)

4.5 Faltung S802

$f(x) = \int\limits_{0}^{x} f_1(x - t) f_2(t) dt \qquad$ Schreibweise $f = f_1 * f_2$

5 Formeln + Theorie aus An1E

5.1 Differentialrechnung S443

$f'(x_0) = \frac{df}{dx}|_{x=x_0} = (\frac{d}{dx}f)_{x=x_0} = Df(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ und $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

f^{-1} ist differenzierbar wenn: f differenzierbar und umkehrbar ist und wenn $f'(x) \neq 0$ ist.
Rechtsseitige $f'_r(x_0)$ bzw. linksseitige $f'_l(x_0)$ Ableitung.
Falls $f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$ und f an der Stelle x_0 stetig, dann ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.

5.1.1 Ableitungsregeln S449

5.1.2 Einige Ableitungen S445

$(|x|)' = sgn(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$ $\quad$ $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x, x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{2k+1}{2}\pi\right\}$ $\quad$ $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x), x \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi\}$

$\ln(|x|)' = \frac{1}{x}$ $\quad$ $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$ $\quad$ $(\coth x)' = 1 - \coth^2 x$

5.1.3 Höhere Ableitungen S451

$(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N}_0$ $\quad$ $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x, k \in \mathbb{N}$

$(\cos x)^{(2k-1)} = (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N}$ $\quad$ $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N}$

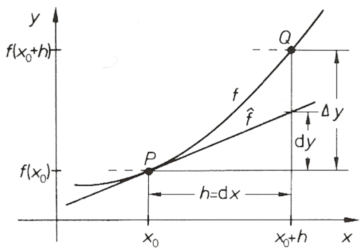
$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$ $\quad$ $(\sqrt{x})^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n x^{n-1} \sqrt{x}}$

$\left(ln \frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$ $\quad$ $(x \cdot e^x)^{(n)} = n \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(n+x)$

5.1.4 Tangentengleichung

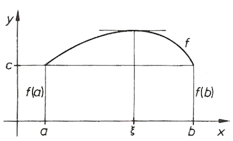
$\hat{f}(x) = \underbrace{\overbrace{(x-x_0)}^{dx} \cdot f'(x_0)}_{dy} + f(x_0)$ $\quad$ (x_0 =Entwicklungspunkt)

5.1.5 Differential, Fehlerrechnung S865



absoluter Fehler: $|\Delta y| \approx |dy| = |f'(\bar{x})| \cdot |dx| \leq |f'(\bar{x})| \cdot |\delta|$
relativer Fehler: $|\Delta y| \approx |\frac{dy}{y}| = |\frac{f'(x)}{y}| \cdot |dx| \leq |\frac{f'(x)}{y}| \cdot |\delta| = |\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot |\delta|$
$|\frac{dx}{x}|\hat{=}$relative Fehler Input $\quad$ $|\frac{dy}{y}|\hat{=}$relative Fehler Output $\quad$ Einheit= [1]
Auf n-Stellen nach dem Komma genau $\Rightarrow$ absoluter Fehler: $\delta = \pm 0.5 \cdot 10^{-n}$

5.1.6 Mittelwertsatz S453



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
$\xi = a + \delta(b-a)$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\delta h)$
$f(x+h) = h \cdot f' f(x+\delta h) + f(x)$
$\xi = x + \delta h \qquad 0 < \delta < 1$

5.1.7 Taylor Polynom S454,483

(x_0 = Entwicklungspunkt) $\quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0,h)$
$h = x - x_0$

R_n(Lagrange): $\quad R_n(x_0,h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\delta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, (0 < \delta < 1);$ $\qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x_0,h) = 0 \Longrightarrow f(x_0+h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$

MacLaurinsche-Form (gilt für $x_0 = 0, h = x$): $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n;$ $\qquad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\delta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (0 < \delta < 1);$

5.1.7.1 Einige Reihen S19,476,1073

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \overbrace{(-1)^n \cdot \frac{\cos(\vartheta x)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}}^{R_n}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

5.1.8 Bernoulli-de l'Hospital S56

$lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, dies gilt für: „$\frac{0}{0}$“ 1. Regel, oder „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ 2. Regel; Zähler und Nenner separat ableiten!

5.1.8.1 Spezialfälle

$0 \cdot \pm\infty \Rightarrow \frac{f_1}{\frac{1}{f_2}} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{f_2}{\frac{1}{f_1}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$\infty - \infty \Rightarrow \frac{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_1 \cdot f_2}}$

$f^g : \left\{ \begin{matrix} 1^\infty \\ 0^0 \\ \infty^0 \end{matrix} \right\} = e^{g \cdot ln(f)} = \left\{ \begin{matrix} e^{\infty \cdot 0} \\ e^{0 \cdot -\infty} \\ e^{0 \cdot \infty} \end{matrix} \right\}$

5.1.9 Kurvenuntersuchungen S260

1. Definitionsbereich S48 D_f und Abschätzung des Wertebereichs W_f, wenn möglich anhand der Extremalstellen
2. Symmetrie und Periodizität S52
3. Nullstellen
4. Stetigkeit S59 und Differenzierbarkeit S443 (Berechnung der Ableitungen)
5. Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten, Monotonie, Krümmungsverhalten S51
6. Grenzwertaussagen (Asymptote, Pole, Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs)

5.1.9.1 Monotonie S452

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
≥ 0					monoton wachsend
> 0					streng monoton wachsend
≤ 0					monoton fallend
< 0					streng monoton fallend
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	> 0	streng monoton wachsend (falls n ungerade)
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	< 0	streng monoton falls (falls n ungerade)

5.1.9.2 Extremstelle S455

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
$= 0$	> 0				relatives Minimum, **Randstellen beachten**
$= 0$	< 0				relatives Maximum, **Randstellen beachten**
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	> 0	relatives Minimum (falls n gerade), **Randstellen beachten**
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	< 0	relatives Maximum (falls n gerade), **Randstellen beachten**
Zweite Variante Falls bei $f'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremstelle					

5.1.9.3 Konvexität - Krümmungsverhalten S253

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	≥ 0				konvex (linksgekrümmt)
	> 0				streng konvex (linksgekrümmt)
	≤ 0				konkav (rechtsgekrümmt)
	< 0				streng konkav (rechtsgekrümmt)

5.1.9.4 Wendepunkte (Terassenpunkt) S255

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	$= 0$	$\neq 0$			Wendepunkt
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$			Terassen- oder Sattelpunkt
Zweite Variante Falls bei $f''(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort ein Wendepunkt					

5.1.9.5 Asymptote S259

Die Asymptote existiert nur wenn alle drei eigentlichen Grenzwerte existieren. Für Funktionen, die nicht gebrochenrational sind, kann die Asymptote wie folgt bestimmt werden.

Asymptote $g : y = ax + b \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ oder $a = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$
gilt jedoch nur wenn in der ersten Formel die Bedingung für Bernoulli-de l'Hospital erfüllt sind.
$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$

Dies alles gilt sinngemäss auch für $x \to -\infty$

Spezialfall: Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert, so ist $a = 0$ und $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5.1.10 Schnittwinkel

1. Bei einem Schnittpunkt gilt: $f(x) = g(x)$
2. Schnittpunkt $S(x_0, y_0)$ berechnen
3. Falls dies eine kubische Gleichung ist, den Wert durch ausprobieren herausfinden (Bereich von $-3 \ldots 3$)
4. Funktionen ableiten: $f'(x)$ und $g'(x)$
5. Steigungen berechnen: $f'(x_0) = m_1$ und $g'(x_0) = m_2$
6. Schnittwinkel mit Hilfe dieser Gleichung berechnen: $tan(\sigma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

5.2 Trigonometrie

$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \qquad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$

5.2.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180°	π	0	-1
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.2.2 Periodizität

$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

5.2.3 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$ | $\cos(-a) = \cos(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$ | $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$ | $\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

5.2.4 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

5.2.5 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2}$ $\quad$ $\sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

5.2.6 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

5.2.7 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$