

1 Integralrechnung S492

1.1 Integrationsmethoden S495ff

Linearität	$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha x + \beta) + C$
Partielle Integration	$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$
Weierstrass-Substitution	$t = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \int R(\sin(x), \cos(x)) dx$
Allgemeine Substitution	$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad t = g^{-1}(x) \quad \boxed{x=g(t)} \Leftrightarrow^{d(\dots)} dx = g'(t) \cdot dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C \quad (f(x) \neq 1) \quad y'(x) \cdot dx = dy \rightarrow \text{allg. gültig}$
Potenzregel	$\int f'(x) \cdot (f(x))^\alpha dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Differentiation	$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$
Mittelwerte	linear: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ quadratisch: $\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) ^2 dx}$

1.1.1 Einige unbestimmte Integrale S1081ff

1. $\int dx = x + C$	22. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 < b^2$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	23. Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c, \quad a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a \left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a} \right)$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die Integrale 15. bis 22. transformiert.
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x \neq 0$	24. $\int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{X}, \quad a \neq 0, \quad X = ax^2 + 2bx + c$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	25. $\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C, \quad a \neq 0$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	26. $\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C, \quad a \neq 0$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	27. $\int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	28. $\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$	29. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax}{2} \right + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$	30. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2a} + k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
10. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$	31. $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2a} + k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
11. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$	32. $\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln \sin ax + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
12. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C, \quad x \neq 0$	33. $\int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	34. $\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
14. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq -\frac{b}{a}$	35. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
15. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$	36. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
16. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left \frac{ax-b}{ax+b} \right + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad x \neq \pm \frac{b}{a}$	37. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
17. $\int \sqrt{a^2 x^2 + b^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 x^2 + b^2} + \frac{b^2}{2a} \ln(ax + \sqrt{a^2 x^2 + b^2}) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$	38. $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C, \quad x \in \mathbb{R}^+$
18. $\int \sqrt{a^2 x^2 - b^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 x^2 - b^2} - \frac{b^2}{2a} \ln ax + \sqrt{a^2 x^2 - b^2} + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 \geq b^2$	39. $\int x^\alpha \cdot \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} [(\alpha+1) \ln x - 1] + C, \quad x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
19. $\int \sqrt{b^2 - a^2 x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{b^2 - a^2 x^2} + \frac{b^2}{2a} \arcsin \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 \leq b^2$	
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2}} = \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2 x^2 + b^2}) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$	
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - b^2}} = \frac{1}{a} \ln ax + \sqrt{a^2 x^2 - b^2} + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 > b^2$	

1.2 Uneigentliche Integrale **S518**

Uneigentliches Integral heisst, dass entweder eine **unbeschränkte Funktion** integriert wird, oder eine Funktion über einen **unbeschränkten Integrationsbereich** integriert wird.

Für unbeschränkte Funktionen:

$$I = \int_a^c f(x) dx = \lim_{t \uparrow b} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \downarrow b} \int_t^c f(x) dx$$

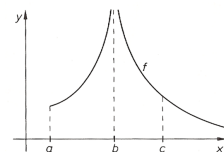
Für die unbeschränkte Integration:

$$I = \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx;$$

$$I = \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx;$$

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx + \int_a^{t_2} f(x) dx$$

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} = 1$



unbeschränkte Funktion

1.2.1 Prinzip der Restfläche

Wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty f(x) dx = 0$, dann konvergiert $\int_a^\infty f(x) dx$ und umgekehrt.

1.2.2 Majorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $|f(x)| \geq 0$ absolut konvergiert, wird eine zweite Funktion $g(x) \geq |f(x)|$ (Majorante) gesucht. Konvergiert $\int_a^\infty g(x) dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty |f(x)| dx$ und somit konvergiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$. $x \in [a, \infty[$

1.2.3 Minorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $f(x)$ divergiert, wird eine zweite Funktion $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (Minorante) gesucht. Divergiert $\int_a^\infty g(x) dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$. $x \in [a, \infty[$

2 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

2.1 Beschreibungsvarianten

Funktion (explizit)

$$y = f(x)$$

(Bronstein S.49, 147)

Koordinatengleichung (implizit)

$$F(x, y) = 0$$

(Bronstein S.49)

Parameterform (Cartesisch)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

(Bronstein S.49)

Polarform x

$$r = f(\varphi)$$

→ Ordnung immer ohne $\sqrt{}$

2.2 Umrechnen diverser Systeme **S49**

Parameter	⇒ explizit	$t = f(x); y = g(f(x))$
Explizit	⇒ Parameter	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$
Ex- bzw. implizit	⇒ Polar	Ersetze $x = r \cos(\varphi)$; $y = r \sin(\varphi)$; $x^2 + y^2 = r^2$
Polar	⇒ implizit	Ersetze $r \sin(\varphi) = y$; $r \cos(\varphi) = x$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Polar	⇒ Parameterform	$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos(\varphi) \\ r(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Einzelner Punkt	⇒ Polar	$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0; y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0; y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$

2.3 Kurvenarten **S203ff**

bei '+', Kurve auf linke Seite geöffnet } bei Polarform
 bei '-', Kurve auf rechte Seite geöffnet }

Kreis **S203**
 Implizit: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
 Bemerkung: Mittelpunkt (x_0, y_0) ; Radius r
 Polarform: $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$; $\epsilon = 0$
 Parameterform: $x = x_0 + R \cos(t), y = y_0 + R \sin(t)$
 p, ϵ : $p = \frac{b^2}{a}$

Ellipse **S204**
 $(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$
 Mittelpunkt (x_0, y_0) ; Halbachsen a, b
 $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$; $0 < \epsilon < 1$ (rechter Brennpunkt)
 $x = a \cos(t), y = b \sin(t)$ um $P(0, 0)$
 $\epsilon = \frac{c}{a}$

Hyperbel **S206**
 Implizit: $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$; $-(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$
 Bemerkung: Achsenkreuz in $P(0, 0)$
 Polarform: $r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\varphi)}$; $\epsilon > 1$ (rechter Hyperbelast)
 Parameterform: $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$ (linker Hyperbelast)
 $x = a \cosh(t), y = b \sinh(t)$

Parabel **S209**
 $y^2 = 2p(x - x_0)$
 Parabeln mit Scheitelpunkt auf der vertikalen Achse
 $r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\varphi)}$; $\epsilon = 1$
 $x = \frac{t^2}{2p}, y = t$
 p = Halbparameter (2·Abstand Scheitel-Brennpunkt)

Kardioiden/Herzk. **S99**
 Polarform: $r = a(1 + \cos(\varphi))$

Lemniskate "∞" **S101**
 $r = a\sqrt{2 \cos(2\varphi)}$

Strophoide/harm. K. **S96**
 $r = -a \frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}, (a > 0)$

2.4 Gleichungen, Mittelwerte **S19ff, 509**

Tangentengleichung	Normalengleichung	Linearer Mittelwert	Quadratischer Mittelwert
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$	$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$	$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}$
$x_0(y - y_0) = y_0(x - x_0)$			

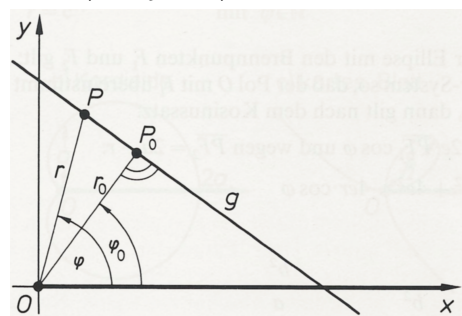
2.5 Tangenten- & Normalenabschnitt, Subtangente & Subnormale **S251ff**

2.6 Abstandsformeln

Hessesche Normalform **S200f, 224**
 $x \cdot \cos \varphi_0 + y \cdot \sin \varphi_0 = r_0$

Geradengleichung
 $y - y_0 = m(x - x_0)$

Abstand zum Ursprung
 $\frac{|y_0 - m \cdot x_0|}{\sqrt{m^2 + 1}}$



2.7 Berührung in n-ter Ordnung

Zwei explizit gegebene Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ berühren einander im Punkt $P(x_0, y_0)$ von der Ordnung n , wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen.

$$f(x_0) = g(x_0); f'(x_0) = g'(x_0); f''(x_0) = g''(x_0); \dots; f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$$

2.8 Scheitel **S256**

Scheitelpunkte sind Extremalwerte der Krümmungs- bzw. Krümmungsradiusfunktion. Falls bei $\kappa'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremalstelle. $\kappa'(x) = 0; \kappa''(x) \neq 0$

2.9 Wichtige Formeln S249ff

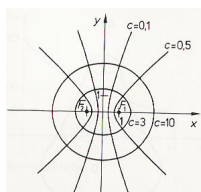
Cartesisch	Parameter	Polar
Anstieg einer Kurve, Ableitung, 2. Ableitung		
$y' = f'(x_0) \quad y'' = f''(x_0)$	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	$y' = \frac{r'(\varphi) \sin(\varphi) + r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{r'(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)}$
Bogenlänge S514		
$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$	$ s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$	$ s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi$
Krümmung ebener Kurven S253		
$\kappa = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}$	$\kappa = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2})^3}$	$\kappa = \frac{2(r'(\varphi))^2 - r(\varphi)r''(\varphi) + (r(\varphi))^2}{(\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2})^3}$
Konvex (Linkskurve): $\kappa \geq 0$ Streng konvex: $\kappa > 0$ Wendepunkt: $\kappa = 0$ Analog für konkav		
Krümmungskreisradius S253 $r = \frac{1}{\kappa}$		
$r = \frac{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}{f''(x)}$	$r = \frac{(\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2})^3}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$	$r = \frac{(\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2})^3}{2(r'(\varphi))^2 - r(\varphi)r''(\varphi) + (r(\varphi))^2}$
Flächeninhalt S513 um x-Achse / für y-Achse: $f(y)$ von y_0 bis y_1 integrieren		
$A = \int_a^b f(x) dx$	$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)] dt$	$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 d\varphi$
Volumen S514 um x-Achse / für y-Achse: $f(y)$ von y_0 bis y_1 integrieren / Nur 1.Hälfte der Kurve integrieren!		
$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$	$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 \dot{x}(t) dt$	$V = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) \sin^2 \varphi [r'(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \sin(\varphi)] d\varphi$
Oberflächeninhalt S514 um x-Achse / für y-Achse: $f(y)$ von y_0 bis y_1 integrieren / Nur 1.Hälfte der Kurve integrieren!		
$O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$	$O = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$	$O = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi$
Polar: $\sin \varphi =$ Drehung um Polgerade $\cos \varphi =$ Drehung um y-Achse ($f = \frac{\pi}{2}$) \rightarrow siehe Fläche		
Krümmungskreismitelpunkt		
$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx} [1 + (\frac{dy}{dx})^2]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ $y_c = y + \frac{1 + (\frac{dy}{dx})^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	$x_c = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$ $y_c = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$	$x_c = r \cdot \cos \varphi - \frac{(r^2 + r'^2)(r \cdot \cos \varphi + r' \cdot \sin \varphi)}{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''}$ $y_c = r \cdot \sin \varphi - \frac{(r^2 + r'^2)(r \cdot \sin \varphi - r' \cdot \cos \varphi)}{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''}$

2.10 Evolute

Evolute = Σ Krümmungskreiszentren

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \vec{n}$$

2.11 Orthogonaltrajektorien



Die orthogonalen Trajektorien schneiden alle Kurven der gegebenen Kurvenschar $y = f(x, c)$ (c bestimmen) im rechten Winkel. Die DGL $F(x, y, y')$ der Kurve bestimmen (y' ableiten, c einsetzen, wenn möglich für $f(x, c) = y$), anschliessend y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen. \Rightarrow ergibt die DGL der orthogonalen Trajektorien. Die Kreise sind Orthogonaltrajektorien der Hyperbeln und umgekehrt.

$$\frac{r'}{r} = f(\varphi, r) \quad \xrightarrow{\text{orthogonal}} \quad \frac{r'}{r} = -\frac{1}{f(\varphi, r)}$$

3 Reihen S469, 1073

3.1 Zahlenreihen S470

$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ist eine (unendliche) Reihe. Sie ist die Folge von Partialsummen einer bestehenden Folge a_n .

3.1.1 Konvergenz, Divergenz S471

Konvergiert die Reihe $\langle s_n \rangle$ gegen die Summe $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ so ist sie konvergent. Existiert der GW nicht, so ist sie divergent.

3.1.2 Konvergenzkriterien S462

3.1.2.1 Cauchy-Kriterium

Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert, so dass für alle $m > n > n_0$ gilt:

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon, \text{ dann konvergiert die Reihe, ansonsten divergiert sie.}$$

3.1.2.2 $\lim = 0$

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Aber NICHT UMGEKEHRT!

3.1.2.3 Divergenz

Ist $\langle a_n \rangle$ divergent oder ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

3.1.2.4 Majorantenkriterium S478

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $|a_n| \leq c_n$ (absolut). Dies gilt auch für $|a_n| \leq c_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^m a_k \leq \left| \sum_{n=1}^m a_k \right| \leq \sum_{n=1}^m |a_k| \leq \sum_{n=1}^m c_n$$

3.1.2.5 Minorantenkriterium

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen $+\infty$ divergent, so gilt dies auch für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bei $a_n \geq d_n$.

Dies gilt auch für $a_n \geq d_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.

Reziprokkriterium	$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.	
QuotientenkriteriumS473	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha < 1$ (aboslut) konvergent
WurzelkriteriumS473	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha = 1$ keine Aussage! $\alpha > 1$ divergent
IntegralkriteriumS474	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent. Gilt nur, wenn f auf $[1, \infty)$ definiert und monoton fallend ($f'(x) \leq 0$) ist. Zudem muss $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty)$ sein.	
Leibniz-KriteriumS475	Die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle a_n \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) ist. Monotonie mittels Verhältnis ($\left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right $), Differenz ($ a_{n+1} - a_n \leq a_{n+1} $) oder <i>vollständiger Induktion</i> beweisen.	

3.1.2.6 Abschätzung Restglied einer alternierenden konvergenten Reihe S471

$$|R_n| = |s - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

3.1.3 Bedingte und Absolute Konvergenz **S474**

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Bedingt Konvergent: Eine Reihe hat durch Umordnen einen anderen Grenzwert oder wird divergent (somit nicht absolut konvergent).

Unbedingt Konvergent: Durch Umordnen ändert sich der Grenzwert nicht.

3.1.4 Produkt von absolut konvergenten Reihen **S475**

Gegeben sei: $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$, $\sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n) = c$ so ist $c_n = \sum a_k b_{n-k+1}$ und $c = a \cdot b$

3.1.5 Fehlerformel

$$|s_n - s| \leq |a_{n+1}|$$

3.2 Potenzreihen **S481**

3.2.0.1 Definition **S432**

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heisst Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_n .

Geometrische Reihe **S19** $a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$ ($|q| < 1$) Beidseitiges $\int \Rightarrow a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = -a \cdot \ln |1 - q|$

Binominalreihe **S12** $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ $x \in (-1, 1)$ Binominalkoeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Taylor-Reihe **S483** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ Taylor-Reihe von f bezüglich der Stelle x_0

E-Funktion $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n \quad \text{für } x_0 = 0$$

3.2.1 Konvergenz **S481**

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$

Für $a = 0$ ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Für $a > 0$ ist die Potenzreihe für alle x mit $\begin{cases} |x| < \frac{1}{a} = r \Rightarrow \text{absolut konvergent.} \\ |x| > \frac{1}{a} = r \Rightarrow \text{divergent.} \end{cases}$

Ist die Folge $< \sqrt[n]{|a_n|} >$ nicht beschränkt, so ist die Potenzreihe nur für $x = 0$ konvergent.

3.2.2 Abel's Theorem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n \text{ konvergent} = \lim_{x \uparrow r} f(x) \quad (= \text{Summe der Reihe})$$

3.2.3 Konvergenzradius **S481**

Jeder Potenzreihe kann ein Konvergenzradius r zugeordnet werden. Wobei gilt $r = \frac{1}{a}$ mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Für $a = 0$ gilt $r = \infty$. Wenn a nicht existiert (Folge divergent) ist $r = 0$.

Berechnung mittels Quotientenkriterium: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

3.2.4 Differentiation

Alle Potenzreihen mit einem $\rho > 0$ sind für alle $x \in (-\rho, \rho)$ beliebig oft (gliedweise) differenzierbar.

Der Potenzradius ρ ist bei allen Ableitungen gleich demjenigen der Ursprungsfunktion. $\rho_f = \rho_{f^{(i)}}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} \quad f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-i+1) \cdot a_n x^{n-i}$$

Bemerkung: Startwert ($n = 0$) nur erhöhen, wenn bei x^n , n negativ werden würde!

3.2.5 Integration

3.2.5.1 Unbestimmtes Integral

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad \text{für alle } x \in (-\rho, \rho).$$

3.2.5.2 Bestimmtes Integral

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad \text{für alle } x \in (-\rho, \rho).$$

3.3 einige Reihen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
$(1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^1$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$	$ x < 1$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$	$ x < \infty$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$	$ x < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$	$ x \leq 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \dots \right)$	$ x \leq 1$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots$	$ x \leq 1$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x < \infty$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$	$ x < 1$
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x < \infty$
$\operatorname{arsinh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - + \dots$	$ x < 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$	$ x < 1$

¹⁾ Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so hat die Reihe nur endlich viele (nämlich $\alpha + 1$) Glieder, da dann $\binom{\alpha}{\alpha+k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

Leibniz-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ ist divergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$ absolut konvergent gegen 1 (beweisen mit Integralkriterium)

3.4 Grenzwerte von Reihen

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a}) = 1 \ (a > 0 \text{ und const.})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^a}) = 1 \ (a \text{ const.})$
$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{p(n)}) = 1 \ (p(n) \neq 0)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{K}{n!}) = 0 \ (K \text{ const.})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n!}) = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}) = 0 \ (K > 0 \text{ und const.})$
$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}) = e$			

4 Differentialgleichungen **S552**

4.1 Lösen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

4.1.1 Picard-Lindelöf

Die Funktion $f(x, u, u_1, \dots, u_{n-1})$ sei in einer Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen nach u, u_1, \dots, u_{n-1} dann existiert in einer geeigneten Umgebung des Anfangspunktes x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \text{ mit } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \dots \frac{\partial f}{\partial f^{(n-1)}} \text{ endlich beschränkt} \Rightarrow \text{eindeutige Lösbarkeit}$$

4.1.2 Trennung von Variablen / Separation **S554**

Form: $y' = f(x)g(y)$ **Vorgehen:** $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$, nun ist die DGL beidseitig nach x integrierbar
 $(dy = y'(x)dx): \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$

4.1.3 Lineartermsubstitution/separierte Lösung **S554**

Form: $y' = f(ax + by + c)$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = ax + by + c$ $z' = a + by' = a + bf(z)$
 $\int_{x_0}^x \frac{z'}{a + bf(z)} d\tilde{x} = \int 1 d\tilde{x} \Rightarrow \int_{z_0}^z \frac{1}{a + bf(\tilde{z})} d\tilde{z} = \int_{x_0}^x 1 d\tilde{x} \quad [d\tilde{z} = \underbrace{(a + by')}_{z'} d\tilde{x}]$

4.1.4 Gleichgradigkeit **S554**

Form: $y' = f(\frac{y}{x})$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = \frac{y}{x}$ $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$ $y' = f(z)$ $dz = y'(x)dx$

4.1.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung **S555**

Form: $y' + f(x)y = \underbrace{g(x)}_{\text{Störglied}}$ **Vorgehen:** $y = e^{-\int f(x)dx}(k + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx)$ $(k \in \mathbf{R})$

4.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten **S573**

Form: $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$ **Störglied:** $f(x)$
Homogene Differentialgleichung: $f(x) = 0$ **Inhomogene Differentialgleichung:** $f(x) \neq 0$

4.2.1 Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: Y_H

Charakteristisches Polynom $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$ von $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ $(\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2})$

$(D > 0)$	Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in \mathbf{R}$:	$Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$	} starke Dämpfung } aperiodischer Grenzfall } schwache Dämpfung / Schwingfall
$(D = 0)$	Falls $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in \mathbf{R}$:	$Y_H = e^{\lambda_1 x}(A + B \cdot x)$	
$(D < 0)$	Falls $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\alpha$:	$Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x}(A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x))$	

Eigenfrequenz: $\omega = \alpha = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ Dämpfung: $|\delta| = |\lambda|$

4.2.2 Allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL: $y = Y_H + y_P$ **4.2.3 Grundlöseverfahren einer inhomogenen DGL:** y_P

Homogene DGL: $g(x) = Y_H$ mit den Anfangsbedingungen $g(x_0) = 0$; $g'(x_0) = 1$. Wenn möglich $x_0 = 0$.

$$y_P(x) = \int_{x_0}^x g(x + x_0 - t) \cdot f(t) dt$$

4.2.4 Vorgehen bei einer inh. DGL mit Störgliedertabelle:

Alle Schritte werden anhand diesem Beispiel erklärt: $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$

1. Y_H mit λ_1 und λ_2 berechnen
 $y'' + 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2 \Rightarrow Y_H = Ae^{-x} + Be^{-2x} \Rightarrow Y_{H1} = Ae^{-x}$ und $Y_{H2} = Be^{-2x}$
2. Anhand der Störglied Tabelle y_P bestimmen
 $y_P = Ae^{-2x}$
3. Testen ob $y_P(x) = Y_{H1}$ oder $y_P(x) = Y_{H2}$ ist. Falls Bedingung(en) zutreffen: $y_P(x) = y_P(x) * x^{\text{Anzahl zutreffende Bedingungen}}$
 $y_P(x) = Y_{H2} \Rightarrow y_P(x) = Ae^{-2x}x$
4. y_P ableiten und in die DGL einsetzen
 $y'_P = (-2Ax + A)e^{-2x}$ und $y''_P = (4Ax - 4A)e^{-2x} \Rightarrow (4Ax - 4A)e^{-2x} + 3(-2Ax + A)e^{-2x} + 2Axe^{-2x} = 3e^{-2x}$
5. Gleichung kürzen und nach x-Potenzen ordnen
 $(4A - 6A + 2A)xe^{-2x} + (3A - 4A)e^{-2x} = 3e^{-2x}$
6. Koeffizienten bestimmen:
 $(3A - 4A) = 3$ $(3A - 4A)$ kommt 3 mal in $g(x)$ vor
 $(4A - 6A + 2A) = 0$ $(4A - 6A + 2A)$ kommt 0 mal in $g(x)$ vor
 $A = -3$
7. Koeffizienten in y_P einsetzen $y_P = -3e^{-2x}$
8. Wenn das Störglied $f(x)$ aus mehreren Teilen besteht (z.B. $x^2e^x + x$), Störglied auseinander nehmen und in zwei Teile x^2e^x und x unterteilen und Schritt 3 - 6 wiederholen
9. $y = Y_H + y_{P1} + y_{P2} + \dots$

4.2.4.1 Störgliedertabelle

Störglied $g(x)$	Ansatz y_P
k (Konstante)	A
x^n $p_n(x) = b_n * x^n + \dots + b_1 * x + b_0$	$A_n * x^n + \dots + A_1 * x + A_0$
$k * e^{m*x}$	$A * e^{m*x}$
$k * \cos(b * x)$ $k * \sin(b * x)$ $k_1 * \cos(b * x) + k_2 * \sin(b * x)$	$A * \cos(b * x) + B * \sin(b * x)$
$k * e^{m*x} * \cos(b * x)$ $k * e^{m*x} * \sin(b * x)$ $e^{m*x} * (k_1 * \cos(b * x) + k_2 * \sin(b * x))$	$e^{m*x} * (A * \cos(b * x) + B * \sin(b * x))$
$k * \cosh(b * x)$ $k * \sinh(b * x)$ $k_1 * \cosh(b * x) + k_2 * \sinh(b * x)$	$A * \cosh(b * x) + B * \sinh(b * x)$
$k * e^{m*x} * \cosh(b * x)$ $k * e^{m*x} * \sinh(b * x)$ $e^{m*x} * (k_1 * \cosh(b * x) + k_2 * \sinh(b * x))$	$e^{m*x} * (A * \cosh(b * x) + B * \sinh(b * x))$
$k * x * e^{m*x}$	$(A * x + B) * e^{m*x}$
$p_n(x) * e^{m*x}$	$(A_n * x^n + \dots + A_1 * x + A_0) * e^{m*x}$
$x * (k_1 * \cos(b * x) + k_2 * \sin(b * x))$	$(A_1 * x + B_1) * \cos(b * x) + (A_2 * x + B_2) * \sin(b * x)$
$x * e^{m*x} * (k_1 * \cos(b * x) + k_2 * \sin(b * x))$	$e^{m*x} * ((A_1 * x + B_1) * \cos(b * x) + (A_2 * x + B_2) * \sin(b * x))$
$x * (k_1 * \cosh(b * x) + k_2 * \sinh(b * x))$	$(A_1 * x + B_1) * \cosh(b * x) + (A_2 * x + B_2) * \sinh(b * x)$
$x * e^{m*x} * (k_1 * \cosh(b * x) + k_2 * \sinh(b * x))$	$e^{m*x} * ((A_1 * x + B_1) * \cosh(b * x) + (A_2 * x + B_2) * \sinh(b * x))$

4.2.5 Superpositionsprinzip

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

y_1 ist spezielle Lösung der DGL

y_2 ist spezielle Lösung der DGL

dann ist:

$$y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 = c_1 f_1(x)$$

$$y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_0 \cdot y_2 = c_2 f_2(x)$$

$$y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

4.3 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S554

Form:
$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot y = f(x)$$

4.3.1 n-verschiedene Homogene Lösungen

Fall a: r reelle Lösungen λ_1 :

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

Starke Dämpfung / Kriechfall

Fall b: k komplexe Lösungen $\lambda_2 = \alpha + j\beta$:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, y_k = e^{\alpha x} x^{k-1} \cos(\beta x)$$

Schwache Dämpfung /

$$y_{k+1} = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, y_{2k} = e^{\alpha x} x^{k-1} \sin(\beta x)$$

Schwingfall

$$Y_H = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + \dots + Ny_n$$

4.3.2 Allgemeinste Lösung des partikulären Teils:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}}_{f(y, y', y'', \dots)} = \underbrace{e^{\alpha x} (p_{m1}(x) \cos(\beta x) + q_{m2}(x) \sin(\beta x))}_{\text{Störglied}} \quad \lambda \text{ aus Homogenlösung}$$

Unterscheide die Lösungen des charakteristischen Polynoms (λ):

mit $m = \max(m1, m2)$

Fall a: $\alpha + j\beta \neq \lambda$, so ist

$$y_P = e^{\alpha x} (r_m(x) \cos(\beta x) + s_m(x) \sin(\beta x))$$

Fall b: $\alpha + j\beta$ ist u-fache Lösung von λ , so ist

$$y_P = e^{\alpha x} x^u (r_m(x) \cos(\beta x) + s_m(x) \sin(\beta x))$$

u-fache Resonanz

4.3.3 Grundlöseverfahren

$$\begin{pmatrix} g(x_0) = 0 = Ay_1(x_0) + By_2(x_0) + \dots + Ny_n(x_0) \\ g'(x_0) = 0 = Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) + \dots + Ny_n'(x_0) \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(x_0) = 1 = Ay_1^{(n-1)}(x_0) + By_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + Ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ergibt } c_1, \dots, c_n \text{ für} \\ y_P(x) = \int_{x_0}^x g(x + x_0 - t) f(t) dt \end{array}$$

4.3.4 Anfangswertproblem

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad y''(x_0) = y_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

4.4 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Die allgem. Lösung ergibt sich aus der DGL:

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = \dot{f}(t) - df(t) + bg(t)$$

normale DGL 2.Ordnung \rightarrow nach x auflösen

$$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t))$$

Anfangsbedingung:

$$x_0(t_0) = x_0, \dot{x}_0(t_0) = ax_0 + by_0 + f(t_0)$$

Anordnung beachten! Gesuchte Grösse immer zu oberst (in diesem Fall ist die gesuchte Grösse x)

4.5 Faltung S802

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-t) f_2(t) dt \quad \text{Schreibweise } f = f_1 * f_2$$

5 Formeln + Theorie aus An1E

5.1 Trigonometrie

$$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \quad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$$

5.1.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0 °	0	0	1	0	90 °	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180 °	π	0	-1	270 °	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30 °	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120 °	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210 °	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300 °	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45 °	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135 °	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225 °	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315 °	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60 °	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150 °	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240 °	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330 °	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.1.2 Periodizität

$$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \quad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

5.1.3 Quadrantenbeziehungen

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a) \end{aligned}$$

5.1.4 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)} \end{aligned}$$

5.1.5 Doppel- und Halbwinkel

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \\ \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(a)}{2} \quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos(a)}{2} \end{aligned}$$

5.1.6 Produkte

$$\begin{aligned} \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a - b) + \sin(a + b)) \end{aligned}$$

5.1.7 Summe und Differenz

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cos(b)} \end{aligned}$$