1 Integralrechnung S483

1.1 Integrationsmethoden S486ff

Linearität	$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha x+\beta)+C$
Partielle Integration	$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$
Weierstrass-Substitution S494	$t=\tan\frac{x}{2}$, $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \int R(\sin(x),\cos(x))dx$
Allgemeine Substitution	$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt \qquad t=g^{-1}(x) \qquad \boxed{\text{x=g(t)}} \Leftrightarrow^{d(\dots)} dx = g'(t)\cdot dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C \qquad (f(x)\neq 1) \qquad y'(x)\cdot dx = dy \rightarrow$ allg. gültig
Potenzregel	$\int f'(x)\cdot(f(x))^{\alpha}dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \qquad (\alpha\neq -1)$
Differentiation	$\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a) \qquad \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x)$
Mittelwerte	linear: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ quadratisch: $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \lvert f(x)^2\rvert dx}$

1.1.1 Einige unbestimmte Integrale S1074ff

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
3. $\int\frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C, \quad x\neq 0$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, \quad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad x\neq k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$
9. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$
10. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$
11. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$
12. $\int\frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C, \quad x\neq 0$
13. $\int\frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
14. $\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C, \quad a\neq 0, x\neq -\frac{b}{a}$
15. $\int\frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
16. $\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{ax-b}{ax+b}\right\rvert + C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad x\neq\frac{b}{a}, \quad x\neq -\frac{b}{a}$
17. $\int\sqrt{a^2x^2+b^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2}+\frac{b^2}{2a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2})+C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
18. $\int\sqrt{a^2x^2-b^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2}-\frac{b^2}{2a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert+C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, a^2x^2\geqq b^2$
19. $\int\sqrt{b^2-a^2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2}+\frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x+C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad a^2x^2\leqq b^2$
20. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2})+C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
21. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert+C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0 \quad a^2x^2>b^2$
22. $\int\frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x+C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad a^2x^2<b^2$
23. Die Integrale $\int\frac{dx}{X}$, $\int\sqrt{X}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X=ax^2+2bx+c$, $a\neq 0$ werden durch die Umformung $X=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)$ und die Substitution $t\Rightarrow x+\frac{b}{a}$ in die Integrale 15. bis 22. transformiert.
24. $\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{X}, \quad a\neq 0, \quad X=ax^2+2bx+c$
25. $\int\sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax+C, \quad a\neq 0$
26. $\int\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax+C, \quad a\neq 0$
27. $\int\sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax\,dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
28. $\int\cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax\,dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
29. $\int\frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax}{2}\right\rvert+C, \quad a\neq 0, \quad x\neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
30. $\int\frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C, \quad a\neq 0, \quad x\neq\frac{\pi}{2a}+k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
31. $\int\tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert+C, \quad a\neq 0, \quad x\neq\frac{\pi}{2a}+k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
32. $\int\cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert+C, \quad a\neq 0, \quad x\neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\in\mathbb{Z}$
33. $\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
34. $\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sin ax-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
35. $\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx, \quad n\in\mathbb{N}, \quad a\neq 0$
36. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C, \quad a\neq 0, \quad b\neq 0$
37. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C, \quad a\neq 0, b\neq 0$
38. $\int\ln x\,dx = x(\ln x-1)+C, \quad x\in\mathbb{R}^+$
39. $\int x^{\alpha}\cdot\ln x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x-1]+C, \quad x\in\mathbb{R}^+, \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

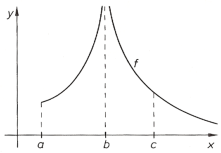
1.2 Uneigentliche Integrale S510

Uneigentliches Integral heisst, dass entweder eine **unbeschränkte Funktion** integriert wird, oder eine Funktion über einen **unbeschränkten Integrationsberech** integriert wird.
Für unbeschränkte Funktionen:
$I = \int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{t\uparrow b} \int\limits_a^t f(x)dx + \lim\limits_{t\downarrow b} \int\limits_t^c f(x)dx$

Für die unbeschränkte Integration:
$I = \int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_a^t f(x)dx;$

$I = \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_t^a f(x)dx;$

$I = \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim\limits_{t_1\to-\infty} \lim\limits_{t_2\to\infty} \int\limits_{t_1}^a f(x)dx + \int\limits_a^{t_2} f(x)dx$



unbeschränkte Funktion

Beispiel: $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} = 1$

1.2.1 Prinzip der Restfläche

Wenn $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^\infty f(x)dx = 0$, dann konvergiert $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ und umgekehrt.

1.2.2 Majorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $|f(x)| \geq 0$ absolut konvergiert, wird eine zweite Funktion $g(x) \geq |f(x)|$ (Majorante) gesucht. Konvergiert $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ und somit konvergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. $\quad x \in [a, \infty[$

1.2.3 Minorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $f(x)$ divergiert, wird eine zweite Funktion $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (Minorante) gesucht. Divergiert $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, dann divergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. $\quad x \in [a, \infty[$

2 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

2.1 Beschreibungsvarianten

Funktion (explizit)	Koordinatengleichung (implizit)	Parameterform(Cartesisch)	Polarform x
$y = f(x)$ (Bronstein S.49, 147)	$F(x, y) = 0$ (Bronstein S.49)	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ (Bronstein S.49)	$r = f(\varphi)$

$\rightarrow$ Ordnung immer ohne $\sqrt{}$

Hat man die explizite Form gegeben, so hat man automatisch die Implizite- und Parameter-Form

2.2 Umrechnen diverser Systeme S49, 197

Parameter	$\Rightarrow$ explizit	$t = f(x);\ y = g(f(x))$
Explizit	$\Rightarrow$ Parameter	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$
Ex- bzw. implizit	$\Rightarrow$ Polar	Ersetze $x = r\cos(\varphi)$; $y = r\sin(\varphi)$
Polar	$\Rightarrow$ implizit	Ersetze $r\sin(\varphi) = y$; $r\cos(\varphi) = x$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Polar	$\Rightarrow$ Parameterform	$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Einzelner Punkt	$\Rightarrow$ Polar	$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0;\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0;\ y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$

2.3 Kurvenarten S202ff

bei '+', Kurve auf linke Seite geöffnet
bei '-' , Kurve auf rechte Seite geöffnet } bei Polarform

	Kreis S203	**Ellipse** S204
Implizit:	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	$(\frac{x-x_0}{a})^2+(\frac{y-y_0}{b})^2=1$
Bemerkung:	Mittelpunkt (x_0, y_0); Radius r	Mittelpunkt (x_0, y_0); Halbachsen a, b
Polarform:	$r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon=0$	$r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; 0<\epsilon<1$ (rechter Brennpunkt)
Parameterform:	$x=x_0+R\cos(t), y=y_0+R\sin(t)$	$x=a\cos(t), y=b\sin(t)$ um $P(0,0)$
p,ϵ:	$p=\frac{b^2}{a}$	$\epsilon=\frac{c}{a}$

	Hyperbel S206	**Parabel** S209
Implizit:	$(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2=1; -(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$	$y^2=2p(x-x_0)$
Bemerkung:	Achsenkreuz in $P(0,0)$	Parabeln mit Scheitelpunkt auf der vertikaler Achse
Polarform:	$r=\frac{p}{1-\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon>1_{(rechter Hyperbelast)}$ $r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}_{(linker Hyperbelast)}$	$r=\frac{p}{1-\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon=1$
Parameterform:	$x=a\cosh(t), y=b\sinh(t)$	$x=\frac{t^2}{2p}, y=t$ p =Halbparameter (2·Abstand Scheitel-Brennpunkt)

	Kardioide/Herzk. S99	**Lemniskate "∞"** S101	**Strophoide/harm. K.** S96
Polarform:	$r=a(1+\cos(\varphi))$	$r=a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$	$r=-a\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}, (a>0)$

2.4 Gleichungen, Mittelwerte S19ff, 500

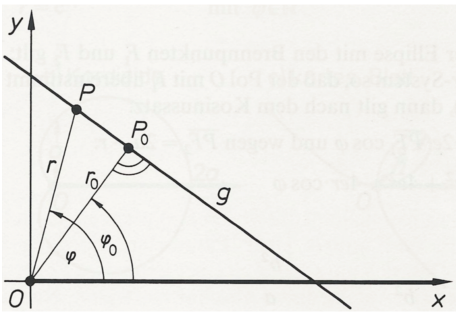
Tangentengleichung	**Normalengleichung**	**Linearer Mittelwert**	**Quadratischer Mittelwert**
$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$	$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$	$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$	$\bar{f}=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)^2dx}$
$\dot{x_0}(y-y_0)=\dot{y_0}(x-x_0)$			

2.5 Tangenten- & Normalenabschnitt, Subtangente & Subnormale S234ff

2.6 Abstandsformeln

Hessesche Normalform S200f, 221

$x\cdot\cos\varphi_0+y\cdot\sin\varphi_0=r_0$



Geradengleichung

$y-y_0=m(x-x_0)$

Abstand zum Ursprung

$\frac{|y_0-m\cdot x_0|}{\sqrt{m^2+1}}$

2.7 Berührung in n-ter Ordnung

Zwei explizit gegebene Kurven $y=f(x)$ und $y=g(x)$ berühren einander im Punkt P x_0, y_0 von der Ordnung n, wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen.

$f(x_0)=g(x_0);\ f'(x_0)=g'(x_0);\ f''(x_0)=g''(x_0);\ \ldots;\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0) \qquad f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0)$

2.8 Scheitel S254

Scheitelpunte sind Extremalwerte der Krümmungs- bzw. Krümmungsradiusfunktion. Falls bei $\kappa'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremalstelle. $\kappa'(x)=0; \kappa''(x)\neq 0$

2.9 Wichtige Formeln S248ff

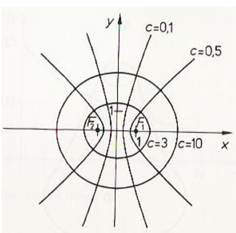
Cartesisch	**Parameter**	**Polar**
Anstieg einer Kurve, Ableitung, 2. Ableitung		
$y' = f'(x_o) \quad y'' = f''(x_0)$	$y' = \frac{\dot y}{\dot x} \quad y'' = \frac{\dot x \ddot y - \dot y \ddot x}{\dot x^3}$	$y' = \frac{r'(\varphi)\sin(\varphi)+r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{r'(\varphi)\cos(\varphi)-r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}$
Bogenlänge S248		
$s = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$\lvert s\rvert = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)}dt$	$\lvert s\rvert = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Krümmung ebener Kurven S251		
$\kappa = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}$	$\kappa = \frac{\dot x(t)\ddot y(t)-\dot y(t)\ddot x(t)}{(\sqrt{(\dot x(t))^2+(\dot y(t))^2})^3}$	$\kappa = \frac{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}{(\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2})^3}$
Konvex (Linkskurve): $\kappa \geq 0$ Streng konvex: $\kappa > 0$ Wendepunkt: $\kappa = 0$ Analog für konkav		
Krümmungskreisradius S251 $r = \lvert\frac{1}{\kappa}\rvert$		
$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}{f''(x)}\right\rvert$	$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{(\dot x(t))^2+(\dot y(t))^2})^3}{\dot x(t)\ddot y(t)-\dot y(t)\ddot x(t)}\right\rvert$	$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2})^3}{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}\right\rvert$
Flächeninhalt S504 um x-Achse y-Achse: Umkerhfunktion $f^{-1}(x)$ von y_0 bis y_1 integrieren		
$A = \int\limits_a^b f(x)dx$	$A = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} [x(t)\dot y(t) - \dot x(t)y(t)]dt$	$A = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 d\varphi$
Volumen S506 **Symmertire!** nur 1.Hälfte der Kurve integrieren (pos. Meridian)		
$V = \pi\int\limits_a^b (f(x))^2dx$	$V = \pi\left\lvert\int\limits_{t_1}^{t_2} (y(t))^2\dot x(t)dt\right\rvert$	$V = \pi\left\lvert\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\sin^2\varphi[r'(\varphi)\cos(\varphi) - r(\varphi)\sin(\varphi)]d\varphi\right\rvert$
Oberflächeninhalt S505 **Symmertire!** nur 1.Hälfte der Kurve integrieren (pos. Meridian)		
$O = 2\pi\int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$O = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} \lvert y(t)\rvert\sqrt{\dot x^2(t)+(\dot y^2(t))}dt$	$O = 2\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lvert r(\varphi)\sin\varphi\rvert\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Polar: $\sin\varphi$ = Drehung um Polgerade $\cos y$ = Drehung um y-Achse ($f = \frac{\pi}{2}$) $\rightarrow$ siehe Fläche		
Krümmungskreismittelpunkt		
$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}[1+(\frac{dy}{dx})^2]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ $y_c = y + \frac{1+(\frac{dy}{dx})^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	$x_c = x - \frac{\dot y(\dot x^2+\dot y^2)}{\dot x\ddot y-\ddot x\dot y}$ $y_c = y + \frac{\dot x(\dot x^2+\dot y^2)}{\dot x\ddot y-\ddot x\dot y}$	$x_c = r\cdot\cos\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\cos\varphi+r'\cdot\sin\varphi)}{r^2+2r'^2-r\cdot r''}$ $y_c = r\cdot\sin\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\sin\varphi-r'\cdot\cos\varphi)}{r^2+2r'^2-r\cdot r''}$

2.10 Evolute

Evolute = Σ Krümmungskreiszentren

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\overrightarrow{n}$$

2.11 Orthogonaltrajektorien



Die orthogonalen Trajektorien schneiden alle Kurven der gegebenen Kurvenschar $y = f(x, c)$ (c bestimmen) im rechten Winkel. Die DGL $F(x, y, y')$ der Kurve bestimmen(y' ableiten, c einsetzen, wenn möglich für $f(x, c) = y$), anschliessend y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen. $\Rightarrow$ ergibt die DGL der orthogonalen Trajektorien.

Die Kreise sind Orthogonaltrajektorien der Hyperbeln und umgekehrt.

$\frac{r'}{r} = f(\varphi, r) \quad \xrightarrow{orthogonal} \quad \frac{r'}{r} = -\frac{1}{f(\varphi, r)}$

3 Reihen S460, 1066

3.1 Zahlenreihen S462

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist eine (unendliche) Reihe. Sie ist die Folge von Partialsummen einer bestehenden Folge a_n.

3.1.1 Konvergenz, Divergenz S462

Konvergiert die Reihe $< s_n >$ gegen die Summe $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ so ist sie konvergent. Existiert der GW nicht, so ist sie divergent.

3.1.2 Konvergenzkriterien S463

Cauchy-Kriterium Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert, so dass für alle $m > n > n_0$ gilt: $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$, dann konvergiert die Reihe, ansonsten divergiert sie.

lim = 0 S423 Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Aber NICHT UMGEKEHRT!

Divergenz Ist $< a_n >$ divergent oder ist $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Majorantenkriterium S469 Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $|a_n| \leq c_n$ (absolut). Dies gilt auch für $|a_n| \leq c_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.
$\sum_{n=1}^{m} a_k \leq |\sum_{n=1}^{m} a_k| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_k| \leq \sum_{n=1}^{m} c_n$

Minorantenkriterium Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen $+\infty$ divergent, so gilt dies auch für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bei $a_n \geq d_n$. Dies gilt auch für $a_n \geq d_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.

Reziprokkriterium	$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.	
Quotientenkriterium S464	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha < 1$ (aboslut) konvergent
Wurzelkriterium S464	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha = 1$ keine Aussage! $\alpha > 1$ divergent
Integralkriterium S465	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent. Gilt nur, wenn f auf $[1,\infty)$ definiert und monoton fallend ($f'(x) \leq 0$) ist. Zudem muss $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1,\infty)$ sein.	
Leibniz-Kriterium S466	Die **alternierende** Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $< \lvert a_n\rvert >$ eine monoton fallende Nullfolge ($\lim_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = 0$) ist. Monotonie mittels Verhältnis ($\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert$), Differenz ($\lvert a_{n+1}\rvert - \lvert a_n\rvert$) oder *vollständiger Induktion* beweisen.	

Abschätzung Restglied einer alternierenden konvergenten Reihe S426,430 $|R_n| = |s - s_n| \leq |a_{n+1}|$

3.1.3 Bedingte und Absolute Konvergenz S465

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Bedingt Konvergent: Eine Reihe hat durch Umordnen einen anderen Grenzwert oder wird divergent (somit nicht absolut konvergent).
Unbedingt Konvergent: Durch Umordnen ändert sich der Grenzwert nicht.

3.1.4 Produkt von absolut konvergenten Reihen S466

Gegeben sei: $\sum a_n = a, \quad \sum b_n = b, \quad \sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n) = c$ so ist $c_n = \sum a_k b_{n-k+1}$ und $c = a \cdot b$

3.2 Potenzreihen S472

Definition S432 Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heisst Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_n.

Geometrische Reihe S19	$a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$	$(\lvert q\rvert < 1)$	Beidseitiges $\int \Rightarrow a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = -a \cdot \ln \lvert 1-q \rvert$
Binominalreihe S12	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$	$x \in (-1, 1)$	Binominalkoeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
Taylor-Reihe S474, 1066	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$	Taylor-Reihe von f bezüglich der Stelle x_0	
E-Funktion	$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$		
	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	für $x_0 = 0$	

3.2.1 Konvergenz S472

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = a$ oder $\lim_{n\to\infty} \lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \rvert = a$

Für $a = 0$ ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Für $a > 0$ ist die Potenzreihe für alle x mit $\begin{cases} \lvert x\rvert < \frac{1}{a} = r \Rightarrow & \text{absolut konvergent.} \\ \lvert x\rvert > \frac{1}{a} = r \Rightarrow & \text{divergent.} \end{cases}$

Ist die Folge $< \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} >$ nicht beschränkt, so ist die Potenzreihe nur für $x = 0$ konvergent.

3.2.2 Abel's Theorem

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$ konvergent $= \lim_{x\uparrow r} f(x)$ (= Summe der Reihe)

3.2.3 Konvergenzradius S472

Jeder Potenzreihe kann ein Konvergenzradius r zugeordnet werden. Wobei gilt $r = \frac{1}{a}$ mit $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$.

Für $a = 0$ gilt $r = \infty$. Wenn a nicht exisitiert (Folge divergent) ist $r = 0$.

Berechnung mittels Quotientenkriterium: $r = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}$

3.2.4 Differentiation

Alle Potenzreihen mit einem $\rho > 0$ sind für alle $x \in (-\rho, \rho)$ beliebig oft (gliedweise) differenzierbar.
Der Potenzradius ρ ist bei allen Ableitungen gleich demjenigen der Ursprungsfunktion. $\rho_f = \rho_{f^{(i)}}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} \qquad f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1) \cdot a_n x^{n-i}$$

Bemerkung: Startwert $(n = 0)$ nur erhöhen, wenn bei x^n, n negativ werden würde!

3.2.5 Integration

Unbestimmtes Integral $\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$.

Bestimmtes Integral $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$.

3.3 einige Reihen

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1$ ($a>0$ und const.)	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = 1$	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^a}) = 1$ (a const.)
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{\lvert p(n)\rvert}) = 1$ ($p(n)\neq 0$)	$\lim_{n\to\infty}(\frac{K}{n!}) = 0$ (K const.)	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n!}) = +\infty$	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}) = 0$ ($K>0$ und const.)
$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}) = e$			

Zusammenstellung wichtiger Potenzreihenentwicklungen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
$(1+x)^\alpha$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$[1])	$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\tan x$	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\cdots$	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\arcsin x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$	$\lvert x\rvert\leqq 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\cdots\right)$	$\lvert x\rvert\leqq 1$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\cdots$	$\lvert x\rvert\leqq 1$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+\cdots$	$-1<x\leqq 1$
$\ln\frac{1+x}{1-x}$	$2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$	$\lvert x\rvert<1$
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\operatorname{arsinh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}-+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$\operatorname{artanh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$

[1]) Ist $\alpha\in\mathbb{N}_0$, so hat die Reihe nur endlich viele (nämlich $\alpha+1$) Glieder, da dann $\binom{\alpha}{\alpha+k}=0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ ist.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to$ ist divergent

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \to$ absolut konvergent gegen 1 (beweisen mit Integralkriterium)

4 Differentialgleichungen S543

4.1 Lösen von Differentialgleichungen 1.Ordnung

4.1.1 Piccard-Lindelöf

Die Funktion $f(x, u, u_1, ..., u_{n-1})$ sei in einer Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R^{n+1}}$ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen nach $u, u_1, ..., u_{n-1}$ dann existiert in einer geeigneten Umgebung des Anfangspunktes x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems
$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ mit $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

$\frac{\partial f}{\partial y} \dots \frac{\partial f}{\partial f^{(n-1)}}$ endlich beschränkt $\Rightarrow$ eindeutige Lösbarkeit

4.1.2 Trennung von Variabeln / Separation S545

Form: $y' = f(x)g(y)$ **Vorgehen:** $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$, nun ist die DGL beidseitig nach x integrierbar
$(dy = y'(x)dx)$: $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$

4.1.3 Lineartermsubstitution/separierte Lösung S545

Form: $y' = f(ax+by+c)$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = ax + by + c$ $\quad z' = a + by' = a + bf(z)$

$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{z'}{a+bf(z)}d\tilde{x} = \int 1d\tilde{x} \Rightarrow \int\limits_{z_0}^{z} \frac{1}{a+b(f\tilde{z}}d\tilde{z} = \int\limits_{x_0}^{x} 1d\tilde{x} \qquad [d\tilde{z} = \underbrace{(a + by')}_{z'}d\tilde{x}]$

4.1.4 Gleichgradigkeit S545

Form: $y' = f(\frac{y}{x})$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = \frac{y}{x}$ $\quad z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$

4.1.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung S546

Form: $y' + f(x)y = \underbrace{g(x)}_{\text{Störglied}}$ **Vorgehen:** $y = e^{-\int f(x)dx}(k + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx) \qquad (k \in \mathbf{R})$

4.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S564 ?

Form: $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$ **Störglied:** $f(x)$
Homogene Differentialgleichung: $f(x) = 0$ **Inhomogene Differentialgleichung:** $f(x) \neq 0$

4.2.1 Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: Y_H

Charakteristisches Polynom $\underline{\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0}$ von $\underline{y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0}$ $\quad (\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2})$

$(D > 0)$	Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$:	$Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$	} starke Dämpfung
$(D = 0)$	Falls $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$:	$Y_H = e^{\lambda_1 x}(A + B \cdot x)$	} aperiodischer Grenzfall
$(D < 0)$	Falls $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\alpha$:	$Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x}(Acos(\alpha x) + Bsin(\alpha x))$	} schwache Dämpfung / Schwingfall

Eigenfrequenz: $\omega = \alpha = \frac{\sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}}{2}$ Dämpfung: $|\delta| = |\lambda|$

4.2.2 Allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL: $y = Y_H + y_P$

4.2.3 Grundlöseverfahren einer inhomogenen DGL: y_P

Homogene DGL: $g(x) = Y_H$ mit den Anfangsbedingungen $g(x_0) = 0; g'(x_0) = 1$. Wenn möglich $x_0 = 0$.

$$y_P(x) = \int\limits_{x_o}^{x} g(x + x_0 - t) \cdot f(t)dt$$

4.2.4 Der Ansatz einer inh. DGL in Form des Störgliedes: y_P

$\mathbf{f(x) = p_n(x)}$	($p_n(x)$ und $q_n(x)$ sind Polynome vom gleichen Grad)
Fall a: $a_0 \neq 0$:	$y_P = q_n(x)$
Fall b: $a_0 = 0, a_1 \neq 0$:	$y_P = x \cdot q_n(x)$
Fall c: $a_0 = a_1 = 0$:	$y_P = x^2 \cdot q_n(x)$
a_0 und a_1 beziehen sich auf die **linke Seite** der DGL	

$\mathbf{f(x) = e^{bx} \cdot p_n(x)}$	
Fall a: b nicht Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot q_n(x)$
Fall b: b einfache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x \cdot q_n(x)$
Fall c: b zweifache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x^2 \cdot q_n(x)$

$\mathbf{f(x) = e^{\alpha x}(p_n(x) \cos \beta x + q_n(x) \sin \beta x)}$	
Fall a: $\alpha + j\beta$ **nicht Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x}(r_n(x) \cos \beta x + s_n(x) \sin \beta x)$
Fall b: $\alpha + j\beta$ **Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x}\mathbf{x}(r_n(x) \cos \beta x + s_n(x) \sin \beta x)$

4.2.5 Vorgehen bei einer inh. DGL in Form des Störgliedes:

1. Y_H mit λ_1 und λ_2 berechnen

2. Ordnung n anhand der r.h.s der DGL bestimmen
   Koeffizient b anhand der r.h.s der DGL bestimmen
   (Achtung kann aus mehreren Elementen bestehen z.B. $x^2e^x + x$; Superposition)

3. Anhand der Störglied Tabellen y_p bestimmen

4. $q_n = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + cx + d$

5. y_p ableiten und in die **l.h.s** der DGL einsetzen. $y_p'' + a_1y_p' + a_0y_p = f(x)$

6. Koeffizienten bestimmen: $x^2e^x \cdot 18a + xe^x(6a + 12b) + e^x(2b + 6c) = x^2e^x$
   $18a = 1$ — $18a$ kommt 1mal in der r.h.s vor
   $(6a + 12b) = 0$ — $(6a + 12b)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s
   $(2b + 6c) = 0$ — $(2b + 6c)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s

7. Koeffizienten in y_p einsetzen

8. Wenn das Störglied $f(x)$ aus mehreren Teilen besteht (z.B. $x^2e^x + x$), Störglied auseinander nehmen und in zwei Teile x^2e^x und x unterteilen und Schritt 3 - 6 wiederholen

9. $y = Y_H + y_{p1} + y_{p2} + \ldots$

4.2.6 Superpositionsprinzip

$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$

y_1 ist spezielle Lösung der DGL	$y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 = c_1f_1(x)$
y_2 ist spezielle Lösung der DGL	$y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_0 \cdot y_2 = c_2f_2(x)$
dann ist:	$y_P = c_1y_1 + c_2y_2$

4.3 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S554

Form: $$\sum_{k=0}^{n} a_ky^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = f(x)$$

4.3.1 n-verschiedene Homogene Lösungen

Fall a: r reelle Lösungen λ_1:	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, $\ldots$,$y_r = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}$	Starke Dämpfung / Kriechfall
Fall b: k komplexe Lösungen $\lambda_2 = \alpha + j\beta$:	$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\ldots$, $y_k = e^{\alpha x}x^{k-1}\cos(\beta x)$ $y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\ldots$, $y_{2k} = e^{\alpha x}x^{k-1}\sin(\beta x)$	Schwache Dämpfung / Schwingfall

$Y_H = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + ... + Ny_n$

4.3.2 Allgemeinste Lösung des partikulären Teils:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}}_{f(y,y',y'',\ldots)} = \underbrace{e^{\alpha x}(p_{m1}(x)\cos(\beta x) + q_{m2}(x)\sin(\beta x))}_{\text{Störglied}} \qquad \lambda \text{ aus Homogenlösung}$$

Unterscheide die Lösungen des charakteristischen Polynoms (λ): mit m = max(m1, m2)

Fall a: $\alpha + j\beta \neq \lambda$, so ist $y_P = e^{\alpha x}(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$

Fall b: $\alpha + j\beta$ ist u-fache Lösung von λ, so ist $y_P = e^{\alpha x}x^u(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$
u-fache Resonanz

4.3.3 Grundlöseverfahren

$$\begin{pmatrix} g(x_0) = & 0 & = & Ay_1(x_0) + By_2(x_0) + \ldots + Ny_n(x_0) \\ g'(x_0) = & 0 & = & Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) + \ldots + Ny_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ g^{(n-1)}(x_0) = & 1 & = & Ay_1^{(n-1)}(x_0) + By_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + Ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ergibt $c_1, \ldots, c_n$ für
$y_P(x) = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t)f(t)dt$

4.3.4 Anfangswertproblem

$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1 \qquad y''(x_0) = y_2 \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

4.4 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form:
$$\begin{matrix} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Die allgem. Lösung ergibt sich aus der DGL:
$$\underbrace{\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = \dot{f}(t) - df(t) + bg(t)}_{\text{normale DGL 2.Ordnung}\rightarrow\text{nach } x \text{ auflösen}}$$
$$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t)))$$

Anfangsbedinung: $x_0(t_0) = x_0, \dot{x}_0(t_0) = ax_0 + by_0 + f(t_0)$

Anordnung beachten! Gesuchte Grösse immer zu oberst (in diesem Fall ist die gesuchte Grösse x)

4.5 Faltung S794

$f(x) = \int_0^x f_1(x - t)f_2(t)dt \qquad$ Schreibweise $f = f_1 * f_2$