Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

879276 ※ A.A. 2023/2024

haru
879276

Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Appunti del Corso ※ Anno Accademico 2023-2024 ※ 879276

25.09.2023

Il corso tratterà tre grandi argomenti:

Programmazione Lineare
Programmazione non Lineare
Programmazione Lineare Intera

La ricerca operativa si occupa dello sviluppo e analisi di modelli matematici per problemi decisionali

Pre Requisiti - Algebra Lineare

Una **matrice** è una tabella contenente numeri, con m righe e n colonne, e si dice matrice m x n

Una matrice m x m si dice **quadrata**
Una matrice 1 x m è detta **vettore riga** m dimensionale
Una matrice m x 1 è detta **vettore colonna** m dimensionale

Una matrice A m x n ha come matrice **trasposta** At n x m, che presenta per righe le colonne di A

Due vettori si dicono **linearmente indipendenti** tra loro se gli scalari per cui l'unica combinazione lineare che genera il vettore nullo sono tutti nulli

v1 = (0, 1) v2 = (1, 0) a1, a2 scalari v1 a1 + v2 a2 = (0, a1) + (a2, 0) = (a2, a1)
(a2, a1) nullo se e solo se a1 = 0 e a2 = 0, v1 e v2 sono linearmente indipendenti

Una matrice si dice **singolare** se ogni vettore riga è colonna è linearmente indipendente
La matrice **diagonale** dove ogni A[ii] = 1 viene detta matrice **identità** I

Se una matrice A non è singolare, esiste la sua **inversa** A-1, tale che A A-1 = A-1 A = I

Il **determinante** di una matrice det(A) è un numero

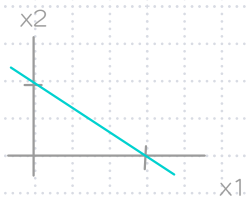
In una matrice A 2 x 2, det(A) = a11 a22 - a12 a21

Il determinante di un matrice quadrata m x m si ottiene in modo ricorsivo, metodo di **Laplace**

Il determinante è nullo solo se la matrice è singolare, per cui non ammette inversa
Una matrice è **invertibile** solo se il determinante è diverso da zero

Un'**equazione lineare** è un'equazione tale che l'insieme delle sue soluzioni è rappresentato da una retta in R

2 x1 + 3 x2 = 6



Un **sistema** di equazioni **lineari** ha soluzione solo se esiste l'intersezione delle soluzioni di tutte le equazioni che lo formano

Un sistema è **consistente** se ammette almeno una soluzione,
Un sistema è **determinato** se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite, m = n,

Un sistema lineare si può scrivere sotto forma di matrice A x = B, dove:

- **A** matrice dei coefficienti
- **x** vettore incognite
- **B** vettore termini noti

Una matrice ha **rango di riga** pari al numero di righe linearmente indipendenti, e **rango di colonna** pari al numero di colonne linearmente indipendenti

Se il rango di riga è uguale a quello di colonna, rank(A) ≤ min(n, m), se = A ha rango pieno

Data la matrice dei coefficienti A, si chiama matrice aumentata C, la matrice A con aggiunto a destra il vettore dei termini noti B

Per risolvere un sistema lineare esistono diversi metodi

Metodo di eliminazione

1) si sceglie una variabile e si risolve una delle equazioni rispetto ad essa
2) si elimina la variabile scelta per sostituzione in tutte le altre equazioni

Metodo di eliminazione di Gauss

Questo metodo prevede tre operazioni elementari:

1) Moltiplicare un'equazione per uno scalare
2) Sommare un'equazione moltiplicata per scalare ad un'altra equazione
3) Scambiare tra loro due equazioni

Applicare operazioni elementari ad un sistema non cambia le sue soluzioni

Pre Requisiti - Funzioni

Una funzione è una terna (A, B, f) dove A è il **dominio**, B è il **codominio** e f è una **legge** che associa ad ogni elemento x di A uno ad un solo elemento f(x) appartenente a B

Una funzione è derivabile se esiste finito il limite del rapporto incrementale, si indica con f'(x0) la **derivata** della funzione f nel punto x0
Se f'(x0) appartiene a R, f si dice **derivabile**

Se una funzione da R in R è derivabile in x0, allora è anche **continua** in x0

Data una funzione f, in un intervallo [a, b]:

f è **crescente** se per ogni coppia x1 < x2 dell'intervallo, f(x1) < f(x2)
f è **decrescente** se per ogni coppia x1 < x2 dell'intervallo, f(x1) > f(x2)

se f'(x0) > 0, f è **crescente** nel punto x0
se f'(x0) < 0, f è **decrescente** nel punto x0

Una funzione f:[a, b] si dice **convessa** se per ogni coppia $x1 < x2$, la retta che passa per x1 e x2 si trova geometricamente sopra la funzione f

Una funzione f:[a, b] si dice **concava** se per ogni coppia $x1 < x2$, la retta che passa per x1 e x2 si trova geometricamente sotto la funzione f

Una funzione può essere **convessa**, **concava**, o **non-convessa** (o non-concava)

Una funzione è detta **lineare** se la sua derivata è costante

I punti dove la derivata prima di annulla sono detti **stazionari**, possono essere di **minimo** o **massimo**

Pre Requisiti - Funzioni a Più Variabili

Una funzione f in n variabili (x1, x2, ... xn) viene detta **lineare** se è nella forma:
$f(x1, x2, \dots xn) = a0 + a1\, x1 + a2\, x2 + \dots + an\, xn$
In forma matriciale: $f(x) = a0 + aTx$

Una funzione f in n variabili viene detta **quadratica** se è nella forma (matriciale):
$f(x) = a0 + bTx + 1/2 + xTHx$

26.09.2023

Data una funzione a due variabili f(x1, x2)

Si dice **derivata parziale rispetto a x1**, la funzione $\sigma f(x1, x2)/\sigma x1 = fx1 = f'x1$
Si dice **derivata parziale rispetto a x2**, la funzione $\sigma f(x1, x2)/\sigma x2 = fx2 = f'x2$

Si dice **gradiente** il vettore i cui coefficienti sono le derivate parziali della funzione f(x1, x2).
È dunque la combinazione delle derivate parziali prime della funzione

$$\nabla f(x1, x2) = (f'x1, f'x2)$$

Si dice **derivata parziale secondarispetto a x_1 e x_1**, la funzione $\sigma/\sigma x_1 \ \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_1 = f_{x_1x_1} = f'_{x_1x_1}$

Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_1 e x_2**, la funzione $\sigma/\sigma x_1 \ \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_2 = f_{x_1x_2} = f'_{x_1x_2}$

Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_2 e x_1**, la funzione $\sigma/\sigma x_2 \ \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_1 = f_{x_2x_1} = f'_{x_2x_1}$

Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_2 e x_2**, la funzione $\sigma/\sigma x_2 \ \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_2 = f_{x_2x_2} = f'_{x_2x_2}$

La **matrice Hessiana** è una matrice quadrata che contiene in modo ordinato le derivate parziali seconde della funzione

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

Data una funzione in due variabili $f(x_1, x_2)$, un punto (x_1, x_2) può essere un **punto critico** solo se il suo gradiente nel punto (x_1, x_2) è nullo

Supponendo che (x_1, x_2) sia un punto critico, calcolo il **determinante** della matrice hessiana, si verifica uno dei seguenti casi:

$\det(H) > 0$

- $f_{x_1x_1}(x_1, x_2) > 0$ (x_1, x_2) è un minimo relativo
- $f_{x_1x_1}(x_1, x_2) < 0$ (x_1, x_2) è un massimo relativo

$\det(H) < 0$ (x_1, x_2) è un punto di sella

Se la matrice hessiana H di una funzione $f(x_1, x_2)$ è tale per cui:

$f_{x_1x_1} > 0$ e $\det(H) > 0$ $\longrightarrow$ la funzione è convessa

Modelli nella Ricerca Operativa

Data una funzione a n variabili, un **problema di ottimizzazione** è formulabile come segue!

$$\text{opt } f(x)$$
$$\text{s.a. } x \in X, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n$$

ottimizzare la funzione f(x)
soggetta al vincolo della regione X

dove opt ∈ {min, max}

f(x) è detta **funzione obiettivo**
X è la **regione ammissibile**, l'insieme dove posso trovare soluzioni al mio problema

Un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, dove esistono, uno o più punti di minimo o massimo x^*

Se X corrisponde all'intero spazio, l'ottimizzazione si dice **non vincolata**
Se invece X è un sottoinsieme stretto dello spazio, l'ottimizzazione si dice **vincolata**

L'ammissibilità della soluzione si verifica **prima** della sua ottimalità

Se lo spazio ammissibile X appartiene all'insieme degli interi, si parla di **ottimizzazione intera**
Se lo spazio ammissibile X appartiene allo spazio binario, si parla di **ottimizzazione binaria**

Quando l'insieme X delle soluzioni ammissibili viene espresso attraverso un sistema di equazioni o disequazioni, si parla di **programmazione matematica**

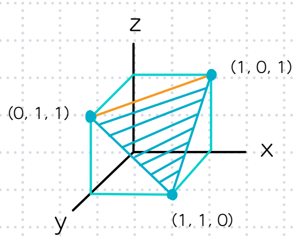
Un **vincolo g** è un'espressione del tipo: = ≤ ≥
Si possono avere in generale m vincoli e n variabili a cui essi si applicano

---

Esempio di Problema di Ottimizzazione

$$\max_{x,y,z}(z)$$

$$\text{s.a.} \quad 0 \le x, y, z \le 1 \qquad g1$$
$$x + y + z = 2 \qquad g2$$



L'insieme delle soluzioni ammissibili è la sezione di piano descritto da g2, e delimitata dal cubo i cui vertici sono limitati da g1
La soluzione, ovvero il valore (o i valori) che massimizzano z, è la linea in arancione

---

Esistono tre categorie di programmazione matematica

Programmazione Lineare

opt f(x) = cTx (lineare)
vincoli g(x) = ajTx - bi (lineari)
X nei numeri reali R

Programmazione Lineare Intera

opt f(x) = cTx (lineare)
vincoli g(x) = ajTx - bi (lineari)
X nei numeri interi Z

Programmazione non Lineare

opt f(x) (lineare o non lineare)
vincoli g(x) (lineari o non lineari)
X nei numeri reali R

Programmazione Lineare

La Wyndor Glass co. produce vetri di elevata qualità,incluso finestre e porte.

Impianto 1: produce le cornici in alluminio e componenti metalli e
Impianto 2: produce le cornici in legno
Impianto 3: produce i vetri e assembla i prodotti

A causa di un caldo di guadagno, verrà dismessa la produzione del prodotto meno sostenibile

Prodotto 1: vetro di lusso e cornice in alluminio Imp. 1 e 3
Prodotto 2: finestra in legno pregiato Imp. 2 e 3

Ogni prodotto viene realizzato in lotti da 20 unità, e sono soggetti ai vincoli produttivi degli impianti. I tassi di produzione si esprimono come numero di lotti prodotti settimanalmente

	Tempo di produzione per Lotto (ore)		*Tempo produttivo disponibile (settimanale)*	
	Prodotto			
Impianto	**1**	**2**		
1	1	0	4	g1
2	0	2	12	g2
3	3	2	18	g3
Profitto per Lotto (Euro)	3.000	5.000		

Determinare i tassi di produzione per massimizzare il guadagno, formalizzando il problema matematicamente

Vincoli del tipo $a1\ x1 + a2\ x2 = b$ rappresentano graficamente una **retta** sul piano
Vincoli del tipo $a1\ x1 + a2\ x2 \leq b$ rappresentano graficamente un **semipiano**

$x1$ = numero di lotti del prodotto 1 per settimana
$x2$ = numero di lotti del prodotto 2 per settimana

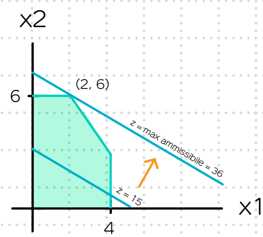
$\max Z = 3\ x1 + 5\ x2$ (In migliaia)

s.a. $x1 \leq 4$ g1

$2\ x2 \leq 12$ g2

$3\ x1 + 2\ x2 \leq 18$ g3

$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$ g0



Geometricamente, il valore di Z cresce al crescere di entrambi i valori x1 e x2
Scegliamo i valori in modo tale che la proiezione della retta f(x), la curva di **isolivello**, sia in una posizione **ammissibile** ed **ottimale**, o, in termini geometrici, trasliamo la retta verso l'alto fino agli estremi della zona ammissibile

La soluzione è $Z = 36$, $x1 = 2$ e $x2 = 6$

03.10.2023

Per poter risolvere un problema di programmazione lineare sono valide 4 assunzioni

Proporzionalità: il contributo di ogni variabile decisionale è proporzionale al suo valore
Ogni "passo" sull'asse orizzontale produce un passo equivalente su quello verticale
Additività: ogni funzione è equivalente alla somma del contributo delle variabili decisionali

$Z = 3x1 + 5x2 \quad Z(1, 0) = 3 \quad Z(0, 1) = 5 \quad Z(1, 1) = 8 = 3 + 5 = Z(1, 0) + Z(0, 1)$

Anche i vincoli devono verificare l'additività
Divisibilità: qualunque valore in Rn assunto delle variabili decisioni è accettabile
Certezza: il valore delle variabili decisionali è sempre noto e costante
Consociamo ad esattezza i coefficienti di costo (cj) e i termini noti sia destri (aj) che sinistri b(j)

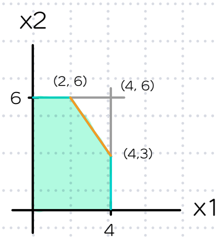
Metodo del Simplesso

Il metodo del simplesso è una **procedura generale** per la risoluzione di problemi di programmazione lineare

Si tratta di una procedura **algebrica** ma i suoi concetti sono di base **geometrici**

$$\max Z = 3\,x1 + 5\,x2$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a.} & x1 \leq 4 & g1 \\ & 2\,x2 \leq 12 & g2 \\ & 3\,x1 + 2\,x2 \leq 18 & g3 \\ & x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 & g0 \end{array}$$



3x1 + 2x2 = 8 (g3) viene detta **frontiera del vincolo**, superata quella frontiera di esce dal vincolo. Anche x2 = 6 (g2) e x1 = 4 (g1) sono frontiere del vincolo

I punti di intersezione delle frontiere di vincolo si dicono **vertici**. Due vertici si dicono adiacenti se condividono n - 1 frontiere di vincolo (in un problema con n variabili decisionali) Il segmento tra di loro è detto **spigolo**

Ad esempio (2,6) e (4, 3) sono vertici adiacenti.

Un vertice è **ammissibile** se è all'interno della regione ammissibile, come ad esempio (4,6)

I vertici adiacenti godono della proprietà del **test di ottimalità**: se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione è ottimale

Ad esempio, il vertice (2, 6) assume il valore Z = 36. I suoi adiacenti ammissibili sono (0, 6) e (4, 3), i cui valori Z sono rispettivamente 30 e 27. Per il test di ottimalità, sappiamo che (2, 6) è dunque la soluzione ottimale in quando 36 > 30 e 36 > 27

Procedura Geometrica

Passo di **inizializzazione**: si sceglie il vertice (0, 0) (che in questo caso è ammissibile) come soluzione vantaggiosa
Effettuiamo il **test di ottimalità**: confrontiamo (0, 0) con (0, 6) e (4, 0), dunque 0 con 30 e 12. È chiaro che (0, 0) non è la soluzione ottimale al problema
Scegliamo di procedere con il vertice il cui valore è maggiore, ovvero (0, 6)
Procediamo nuovamente con il test di ottimalità con (0, 6), e ci muoviamo di conseguenza sul vertice (2, 6), il cui valore Z è 36 > 30
Come ultimo passaggio, effettuiamo ancora una volta il test di ottimalità con (2, 6), e concludiamo di trovarci nella soluzione ottimale, terminando l'algoritmo

Esistono sei concetti chiave del metodo del simplesso:

1 : per ogni problema PL che ammette almeno una soluzione, trovarne richiede trovare solamente il vertice ammissibile il cui valore della funzione obiettivo è il migliore

2: l'algoritmo è iterativo, prevede due passaggi principali, l'**inizializzazione** e il **test di ottimalità**

Inizializzazione → Test di Ottimalità ⇄ Cambio di vertice
→ Terminazione

3: quando possibile, il vertice iniziale deve essere quello che annulla tutte le variabili decisionali (vettore nullo)
Nei casi in cui non è possibile, se il vettore nullo non dovesse essere ammissibile, esistono procedure di pre-inizializzazione

4: dato un vertice è più computazionalmente vantaggioso ispezionare (ottenerne informazioni) i suoi vertici adiacenti rispetto a quelli non adiacenti
Il cammino percorre dunque gli **spigoli** della regione ammissibile

5: il valore della funzione Z nei vertici adiacenti non viene calcolato, ma viene effettuata una scelta **greedy**, muovendosi nella direzione del vertice che garantisce il più grande tasso di miglioramento della funzione obiettivo
Ad esempio, con Z = **3**x1 + **5**x2, muovendosi da (0, 0) a (0, 6), il tasso di incremento unitario (**costo** delle variabili) è 5, mentre verso (4, 0) equivale a 3, ci si muove dunque verso (0, 6)

6: il concetto 5 esamina gli spigoli emanati dal vertice corrente, tale ispezione consente di identificare rapidamente il tasso di miglioramento di Z,che può essere **positivo** o negativo.
Il test di ottimalità consiste dunque di verificare se il vertice corrente ammette almeno uno spigolo con tasso di miglioramento positivo

Procedura Algebrica

Per rendere **computazionabile** il metodo del simplesso, è necessario formularlo sotto forma di procedura algebrica

Si convertono i vincoli di disuguaglianza in vincolo di uguaglianza tramite **variabili slack**

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rl} x_1 \le 4 & g1 \\ 2x_2 \le 12 & g2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 & g3 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 & g0 \end{array}$$

$x_3 = 4 - x_1$ $\qquad$ $x_1 + x_3 = 4$

Assumendo $x_1 = 0$, la variabile **slack x_3** è la quantità che manca al termine sinistro della disuguaglianza affinché questa sia verificata come dell'uguaglianza

Ogni vincolo funzionale avrà associata una variabile slack

Si riscrivono i vincoli nelle seguenti forme:

Forma Standard

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rl} x_1 \le 4 & g1 \\ 2x_2 \le 12 & g2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 & g3 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 & g0 \end{array}$$

Forma Aumentata

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rl} x_1 + x_3 = 4 & g1 \\ 2x_2 + x_4 = 12 & g2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 & g3 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \quad x_5 \ge 0 & g0 \end{array}$$

Se la variabile slack di un vincolo assume valore positivo, la soluzione corrispondere al semipiano ammissibile individuato dalla frontiera del vincolo della forma originale, ovvero la soluzione appartiene alla soluzione ammissibile

Definiamo **soluzione aumentata** di un problema PL, una soluzione del modello in forma originale che viene aumentata tramite i corrispondenti valori delle variabili slack

$(3, 2) \rightarrow (3, 2, 1, 8, 5)$

Si definisce **soluzione di base** un vertice del modello in forma aumentata

Preso il vertice (4, 6), le variabili slack sono $x3 = 0$, $x4 = 0$, $x5 = -6$, e dunque la soluzione aumentata di base è (4, 6, 0, 0, -6)
Siccome la variabile slack x5 è < 0, il vertice (4, 6) non è ammissibile

Il modello aumentato d'esempio consiste in 5 variabili (2 decisionali e 3 slack) e di 3 equazioni
Abbiamo a disposizione 2 = 5 - 3 **gradi di libertà** per risolvere il **sistema lineare**, ponendo a 0 due variabili arbitrarie

Una soluzione di base gode di alcune proprietà:

1: una variabile può essere di base o non di base
2: il numero di variabili di base è uguale al numero di vincoli funzioni (equazioni)
3: il valore delle variabili non di base viene posto a 0
4: il valore delle variabili di base è ricavabile risolvendo il sistema lineare
5: se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, allora è la soluzione di base è ammissibile

Sempre in riferimento all'esempio precedente:

Pongo $x1 = 0$ e $x4 = 0$ in quanto sono variabili non di base

Le soluzioni del sistema lineari sono: $x2 = 6$, $x3 = 4$ e $x5 = 6$, tutte le variabili di base assumono valori diversi da zero, perciò la soluzione di base è ammissibile

Due soluzioni di base ammissibili sono **adiacenti** se condividono le stesse variabili non di base eccetto una, e le stesse variabili di base eccetto una

Muoversi da una soluzione di base ammissibile a una adiacente implica che una variabile non di base diventi di base e che una variabile di base diventi non di base (**swap** tra variabili di base e non di base)

Vertice Ammissibile	Soluzione di Base Aumentata	Base
(0, 0)	(**0**, **0**, 4, 12, 18)	x3, x4, x5
(0, 6)	(**0**, 6, 4, **0**, 6)	x2, x3, x5

(0, 0) e (0, 6) sono adiacenti, perché condivido due variabili di base (x3, x5) e una non di base (x1)

In forma aumentata, è vantaggioso considerare e manipolare la funzione obiettivo insieme ai vincoli del problema

Forma Standard

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

Forma Aumentata

$$\max Z$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} Z - 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \quad x_5 \ge 0$$

Algoritmo in Forma Algebrica

Inizializzazione: si sceglie x1 e x2 come variabili non di base, e le si pone dunque a zero

Determiniamo i valori di x3, x4 e x5 tramite il sistema lineare: (0, 0, 4, 12, 18)

(Notiamo che in questo caso la matrice è diagonale, dunque immediata)

La soluzione è una soluzione di base ammissibile, e prende il nome di **iniziale**

Test di Ottimalità Algebrico: le variabili slack non compaiono nella funzione obiettivo, per cui sono le variabili non di base x1 e x2 a determinare il **tasso di crescita** di Z

I tassi di crescita di $x1$ e $x2$ sono rispettivamente 3 e 5, entrambi positivi.
Dunque la soluzione attuale non è quella ottimale (concetto chiave 6)

È necessario ora determinare la **direzione di movimento**, aumentando il valore di una delle variabili non di base, modificando di conseguenza anche il valore delle variabili di base (per mantenere verificate le equazioni del sistema)

Il tasso di miglioramento di $x1$ è 3 mentre quello di $x2$ è 5, di conseguenza scegliamo di far crescere $x2$, facendola entrare in base (concetti 4 e 5)

$x2$ è dunque la variabile **entrante in base**, dobbiamo quindi trovare "di quanto" muoverci nella sua direzione, massimizzando tale valore senza perdere ammissibilità (uscire dalla regione ammissibile)

Risolviamo le equazioni in funzione di $x2$

Poniamo: $x1 = 0$ dunque $x3 = 4$

$x4 = 12 - 2\,x2$ 1

$x5 = 18 - 2\,x2$ 2

Il valore di $x2$ "impatta" quello di $x4$ (1) e $x5$ (2), quanto posso aumentarlo verificando entrambe le equazioni?

1 $x2 \leq 6$

2 $x2 \leq 9$

Tra le due limitazioni, quella più stringente è la 1, in quanto $6 < 9$

Posso dunque far assumere a $x2$ il valore 6, in questo modo, $x2$ **entra in base** con valore 6, mentre $x4$ **esce dalla base** con valore 0

In questo modo abbiamo anche determinato qualche variabile diminuire a 0 e togliere dalla base

Soluzione di base ammissibile attuale	Soluzione di base ammissibile nuova
$x1 = 0$ $x2 = 0$	$x1 = 0$ $x4 = 0$
$x3 = 4$ $x4 = 12$ $x5 = 18$	$x2 = 6$ $x3$ e $x5$ eliminazione di Gauss

Quando $x4$ si trovava in base, il suo **pattern di colonna** era **(0, 0, 1, 0)**, perciò $x2$ che è entrato al suo posto dovrà rispettarlo ugualmente

$$
\begin{array}{l}
Z - 3x_1 \mathbf{\,-\,5}\,x_2 + \mathbf{0}\,x_4 = 0 \\
x_1 + x_3 + \mathbf{0}\,x_4 = 4 \\
\mathbf{2}\,x_2 + \quad + \mathbf{1}\,x_4 = 12 \\
3x_1 \mathbf{\,+\,2}\,x_2 + \mathbf{0}\,x_4 + x_5 = 18
\end{array}
\quad\rightarrow\quad
\begin{array}{l}
Z - 3x_1 + \mathbf{5/2}\,x_4 = 0 \\
x_1 + x_3 + \mathbf{0} = 4 \\
x_2 + \mathbf{1/2}\,x_4 = 12 \\
3x_1 - x_4 + x_5 = 18
\end{array}
$$

La soluzione di base ricavata è dunque (0, 6, 4, 0, 6)

Si ripete il test di ottimalità: i coefficienti delle variabili x_1 e x_4 di base sono rispettivamente +3 e -5/2, dobbiamo dunque muoverci nella direzione di x_1

Di quanto può aumentare x_1 senza violare i vincoli?

$x_3 = 4 - x_1$ $\qquad x_1 \leq 4$

$x_2 = 6$

$x_5 = 6 - 3x_1$ $\qquad x_1 \leq 2$ $\qquad x_1 = 2$

x_1 entrerà in base con valore 2, e x_5 lascerà la base. Il suo pattern era (0, 0, 0, 1), dobbiamo dunque riprodurlo per x_1

Il risultato sarà la base ammissibile (2, 6, 2, 0, 0) con $Z = -3/2\, x_4 - x_5$

Verifichiamo e l'ottimalità: entrambi i tassi di miglioramento, coefficienti di x_4 e x_5, sono negativi, dunque la soluzione di base attuale è quella ottimale

10.10.2023

Algoritmo in Forma Tabellare

La forma tabellare del metodo del simplesso di permette di comprendere la logica sottostante all'algoritmo; registra solo l'informazione essenziale

coefficienti delle variabili $\qquad$ termini noti $\qquad$ variabili di base

L'algoritmo in forma tabellare consiste di un'inizializzazione, e tre passi che compongono una singola iterazione, possono essere necessarie più iterazioni per raggiungere la soluzione ottimale

Forma Algebrica	Variabile di base	Eq.	Coefficiente Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Termine noto
(0) $\boldsymbol{Z} - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + \boldsymbol{x_3} = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + \boldsymbol{x_4} = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{x_5} = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

La forma tabellare si compila in questo modo, la porzione evidenziata prende il nome di **tableau**

Inizializzazione:
Si aggiungono le variabili di slack al problema in forma standard, si selezionano le variabili da porre a zero (non di base), e si utilizzano le variabili di slack come variabili di base

Passo 1:
Identificare la variabile entrante come il minimo coefficiente dell'equazione 0 (-5 nell'esempio), la sua colonna viene detta **colonna pivot**

Passo 2:
Determinare la variabile uscente tramite il **test del rapporto minimo**, applicabile solo alle righe che presentano un valore maggiore di zero nella colonna pivot

1. selezioniamo i coefficienti positivi della colonna pivot
2. dividiamo i termini noti per questi coefficienti
3. selezioniamo la riga cui corrisponde il rapporto più piccolo
4. la variabile di base di quella riga (**riga pivot**) è la variabile uscente

L'intersezione tra colonna pivot e riga pivot (x2 2 nell'esempio), prende il nome di **numero pivot** (2 nell'esempio)

Passo 3:
Determinare la nuova soluzione tramite **eliminazione gaussiana**. Dividere la riga pivot per il numero pivot ottenendo un nuovo numero pivot e una nuova riga pivot. Utilizzare questa nuova riga per portare a zero tutti i coefficienti della colonna pivot in ogni riga

Si esegue poi il test di ottimalità

Il nuovo tableau che si ottiene è:

Z	-3	0	0	5/2	0	30
x3	1	0	1	0	0	**4**
x2	0	1	0	1/2	0	**6**
x5	3	0	0	-1	1	**6**

La nuova soluzione di base ammissibile è quindi: **(0, 6, 4, 0, 6)**

Il test di ottimalità prevede di controllare se sono presenti coefficienti negativi nella riga zero (Z), se presente, ripetere una nuova iterazione dal passo 1

In questo caso, poiché è presente -3 nella colonna x1, tale colonna sarà la nuova colonna pivot e x1 entrerà in base

Tramite il test del rapporto minimo, determiniamo che x5 sarà la variabile uscente dalla base in questa iterazione

Eseguiamo l'eliminazione di gauss per ottenere la nuova soluzione ammissibile di base, che sarà: (2, 6, 2, 0, 0)

La riga zero non presenta più numeri negativi, perciò la soluzione attuale è anche quella ottimale

Tie Breaking

Applicando il metodo del simplesso, possono presentarsi anomalie e ambiguità

- alternative multiple per la variabile entrante
- alternative multiple per la variabile uscente (degenerazione)
- mancanza di variabile uscente (funzione obiettivo illimitata)
- molteplici soluzioni ottimali

Nel caso in cui due variabili entranti hanno lo stesso coefficiente, la scelta della variabile è del tutto arbitraria. Tale scelta non determina il raggiungimento o meno della soluzione ottimale, ma la rapidità (numero di iterazioni) con cui la raggiungeremo

Nel caso in cui, al passo 2, più di un variabile in base si qualifica come potenziale variabile uscente, ovvero esistono due variabili i cui rapporti sono minimi e si equivalgono, seguono una serie di eventi critici. Questa situazione è definita **degenere**, perché una delle due variabili rimarrà in base ma il valore sarà nullo, rendendola indistinguibile dalle variabili non di base (prende il nome di **variabile degenere**). La variabile degenere, nel passo successivo, non permette di essere diminuita per fare spazio ad una variabile entrante, rendendo perciò costante il valore della funzione obiettivo. L'algoritmo entra così in un loop infinito

Nel caso in cui non c'è alcune variabili qualificata per uscire dalla base, il valore di una variabile entrante può essere aumentato indefinitamente, senza che il valore di almeno una variabile di base diventi negativo. La zona ammissibile è dunque illimitata, e la funzione obiettivo cresce a infinto. Nella forma tabellare dell'algoritmo, tale situazione è riconoscibile quando ogni coefficiente della colonna pivot (esclusa l'intersezione con la riga zero), assume un valore non positivo

Nel caso in cui siano presenti molteplici soluzioni ottimali, la funzione obiettivo si posizione su uno degli "spigoli" determinati da un vincolo. Il problema presenta dunque più di una soluzione ottimale valida. Può essere utile o necessario trovare tutte le soluzioni ottimali, ma il metodo del simplesso si interrompe trovata la prima. Se un problema ha più soluzioni ottimali, allora ha almeno un valore nullo nella riga zero per una variabile non di base (il coefficiente di almeno una delle variabili è nullo, dunque al variale di quella variabile non cambia il valore della funzione obiettivo). In questo caso si forza l'entrata in base di tale variabile e si prosegue con l'algoritmo

24.10.2023

Dualità

Il concetto di **dualità** offre un insieme di elementi utili per la programmazione lineare

In corrispondenza di ogni problema di programmazione lineare (**problema primale**), ne esiste uno chiamato **problema duale**

Analisi di Sensitività

L'analisi di sensitività è una delle applicazioni più importanti della teoria della dualità, è una componente importante riguardo i modelli di PL

max Z = 3 x1 + 5 x2

s.a. x1 ≤ 4

2 x2 ≤ 12

3 x1 + 2 x2 ≤ 18

x1 ≥ 0 x2 ≥ 0

Molti dei parametri del modello sono solo stile di condizioni future, è utile e necessario studiare l'effetto di cambiamenti di queste condizioni sulla soluzione ottimale

Un **problema duale** si formula, rispetto al primale, nel seguente modo:

Primale max Z = cx
s.a Ax ≤ b
x ≥ 0

Duale min W = yb
s.a. yA ≥ c
y ≥ 0

Il problema primale è in forma standard, quindi è di massimo, mentre il relativo duale è **di minimo**; i coefficienti del primale diventano i termini noti del duale, e i termini noti del primale diventano coefficienti del duale; i coefficienti di vincolo sono comuni a entrambi

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="5">Problema Primale</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">coefficiente di</td><td rowspan="2">termine noto</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_n</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Problema Duale</td><td rowspan="4">coefficiente di</td><td>y_1</td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td><td>...</td><td>a_{1n}</td><td>$\leq b_1$</td><td rowspan="4">coefficienti della funzione obiettivo (minimizzazione)</td></tr>
<tr><td>y_2</td><td>a_{21}</td><td>a_{22}</td><td>...</td><td>a_{2n}</td><td>$\leq b_2$</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>$\leq \cdots$</td></tr>
<tr><td>y_m</td><td>a_{m1}</td><td>a_{m2}</td><td>...</td><td>a_{mn}</td><td>$\leq b_m$</td></tr>
<tr><td colspan="2">termine noto</td><td>$\geq$
c_1</td><td>$\geq$
c_2</td><td>$\geq$
...</td><td>$\geq$
c_n</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">coefficienti della funzione obiettivo (massimizzazione)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	x_1	x_2	
y_1	1	0	≤ 4
y_2	0	2	≤ 12
y_3	3	2	≤ 18
	$\geq$ 3	$\geq$ 5	

Riassumendo il rapporto tra duale e primale, si ottiene la tabella precedente; a destra, la stessa tabella applicata all'esempio

Il metodo del simplesso, di fatto, effettuando i test di ottimalità finché tutti i coefficienti della riga zero non sono tutti positivi, sta in realtà risolvendo un altro problema di programmazione lineare formulato nello stesso modo del problema duale (è questa l'origine del problema duale)

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	EQ	COEFFICIENTE									TERMINE NOTO
			Z	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	
OGNI	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$	$\boxed{y_1}$	$\boxed{y_2}$	$\boxed{\cdots}$	$\boxed{y_m}$	$\boxed{W}$

Il vettore y formato da (y1, ... , yn) è dunque una soluzione ottimale y* per il problema duale. La soluzione ottimale y* fornisce i **prezzi ombra** del problema primale, e il valore ottimale di W è uguale al valore ottimale di Z

I coefficienti delle variabili di slack del problema primale sono dunque i valori delle y del problema duale

iterazione	Problema Primale (coefficiente)						Problema Duale					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	W
0	[−3,	−5	0,	0,	0	0]	0	0	0	−3	−5	0
1	[−3,	0	0,	$\frac{5}{2}$,	0	30]	0	$\frac{5}{2}$	0	−3	0	30
2	[0,	0	0,	$\frac{3}{2}$,	1	36]	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

Iterazione 0 (y1, y2, y3) = (0, 0, 0) è una soluzione non ammissibile, infatti entrambe le variabili **surplus** (z1-c1) e (z2-c2) sono negative

Iterazione 1 rimuove una (z2-c2) dalle due regioni di inammissibilità di (y1, y2, y3) ma non l'altra (z1-c1)

Iterazione 2 (z1-c1) e (z2-c2) sono non negative

La soluzione duale corrisponde y* = (0, 3/2, 1) è ottimale, come verificabile applicando il simplesso sul problema duale, il valore ottimo di Z e W è quindi 36

Relazioni Primale-Duale

Proprietà Duale Debole

Se x è una soluzione ammissibile per il problema primale, e y èc una soluzione ammissibile per il corrispondendo problema duale, allora vale:

$cx \leq yb$

Proprietà Duale Forte

Se x* è una soluzione ottimale per il problema primale, e y* è una soluzione ottimale per il problema duale corrispondente, allora vale:

$cx^* = y^*b$

La disuguaglianza vale per soluzioni ammisisible se una o entrambe non sono ottimali per i corrispondenti problemi, l'uguaglianza vale solo se entrambe sono ottimali

Proprietà delle Soluzioni Complementari

Ad ogni iterazione, il metodo del simpelsso identifica simultaneamente una soluzione vertice ammissibile x per il problema primale, e una soluzione complementare y per il problema duale, dove: $cx = yb$

Se x non è ottimale per il problema primale, y non è ammissibile per il problema duale

Proprietà delle Soluzioni Ottimali Complementari

All'iterazione finale, il metodo del simpelsso identifica simultaneamente una soluzione ottimale x* per il problema primale, e una soluzione ottimale y* per il problema duale, dove: $cx^* = y^*b$

Le componenti del vettore y* sono i **prezzi ombra** del problema primale

Teorema di Dualità

Le sole relazioni possibili tra problema primale e problema duale sono riassumibili in:

1) Se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo limitata, allora lo stesso vale per il problema corrispondente, per cui sia la proprietà della dualità debole che quella forte sono applicabili

2) Se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo illimitata, allora l'altro problema non ha soluzioni ammissibili

3) Se un problema non ha soluzioni ammissibili, allora l'altro problema o non ha soluzioni ammissibili o ha funzione obiettivo limitata

Semantica e Interpretazione

Una variabile duale yi è interpretabile come il contributo al profitto per unità di risorsa i, quando il corrente insieme di variabili di base viene usato per ricavare la soluzione primale

	Problema Primale (coefficiente)						Problema Duale					
iterazione	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	W
0	$[-3,$	-5	$0,$	$0,$	0	$0]$	0	0	0	-3	-5	0
1	$[-3,$	0	$0,$	$\frac{5}{2},$	0	$30]$	0	$\frac{5}{2}$	0	-3	0	30
2	$[\ 0,$	0	$0,$	$\frac{3}{2},$	1	$36]$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

Ad esempio, il valore y1* = 0, indica che aumentando di 1 il valore di b1 (**ovvero il termine noto del vincolo 1**), il valore della funzione obiettivo aumenta di 0, mentre aumentando di 1 il valore di b3, il valore della funzione obiettivo aumenta di y3* = 1

Il problema duale quindi, si pone l'obiettivo di ottenere il massimo profitto trovando la distribuzione delle risorse (vincoli) più efficiente