Linguaggi e Computabilità

879276 ※ A.A. 2022/2023

Pumping Lemma [PL] - esercizi

24 Nov 2022

ES. Dimostrare che **L** non è regolare $L = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 1 \}$

Supponiamo che **L** sia REG, allora sia $n \in \mathbb{N}$ la costante del PL, sia $w = 0^n 1^n \in L$

$w = xyz$ t.c. $x = 0^{n-1}$, $y = 0$, $z = 1^n$

Allora, per il PL, deve valere $xy^kz \in L \quad \forall k \geq 0$

Ma, per $k = 0$ dovrebbe essere $xz \in L$ dove $xz = 0^{n-1} 1^n$ il che è **falso**

ES. Dimostrare che **L** non è regolare $L = \{ w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R \}$

Supponiamo che **L** sia REG, allora sia $n \in \mathbb{N}$ la costante del PL, sia $w = 0^n 1 0^n \in L$

$w = xyz$ t.c. $x = 0^{n-1}$ $y = 0$, $z = 1 0^n$

Allora, per il PL, deve valere $xy^kz \in L \quad \forall k \geq 0$

Ma, per $k = 0$ dovrebbe essere $xz \in L$ dove $xz = 0^{n-1} 1 0^n$ il che è **falso**

ES. Dimostrare che **L** non è regolare $L = \{ 0^n 1^m 2^n \mid n, m \geq 1 \}$

Supponiamo che **L** sia REG, allora sia $n \in \mathbb{N}$ la costante del PL, sia $w = 0^n 1^m 2^n \in L$

$w = xyz$ t.c. $x = 0^{n-1}$, $y = 0$, $z = 1^m 2^n$

Allora, per il PL, deve valere $xy^kz \in L \quad \forall k \geq 0$

Ma, per $k = 0$ dovrebbe essere $xz \in L$ dove $xz = 0^{n-1} 1^m 2^n$ il che è **falso**

ES. Dimostrare che **L** non è regolare $L = \{ 0^n 1^m \mid n \geq m \}$

Supponiamo che **L** sia REG, allora sia $n \in \mathbb{N}$ la costante del PL, sia $w = 0^n 1^m \in L$

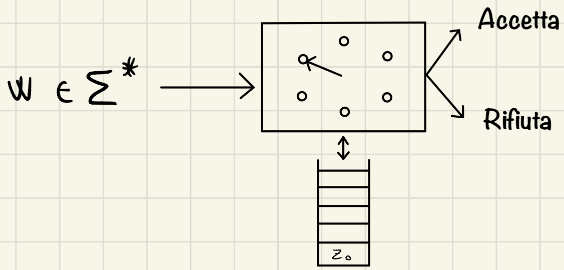
$w = xyz$ t.c. $x = \varepsilon$, $y = 0^n$, $z = 1^m$

Allora, per il PL, deve valere $xy^kz \in L \quad \forall k \geq 0$

Ma, per $K = 0$ dovrebbe essere $xz \in L$ dove $xz = 1^m$ il che è **falso**

Automi a Pila [Pushdown Automata - PDA]

ε-NFA + Pila (stack)



Un automa a pila [**PDA**] è una settupla : $P = \{ Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F \}$ dove:

Q : Insieme finito e non vuoto di <u>stati</u>

Σ : Alfabeto dei <u>simboli di input</u>

Γ : Alfabeto dei <u>simboli dello stack</u>

$q_0 \in Q$: <u>Stato iniziale</u>

$z_0 \in \Gamma$: Simbolo inizialmente presente nella pila

$F \subseteq Q$: Insieme degli <u>stati finali</u>

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow P(Q \times \Gamma^*)$$

Il passaggio da uno stato q_0 a uno stato q_1 avviene così: $q_0 \xrightarrow{\text{Input, pop} \mid \text{push}} q_1$

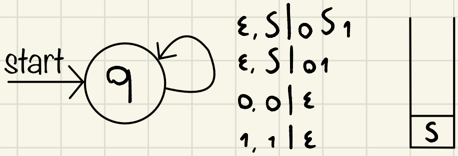
L'input viene rimosso dalla stringa

Creazione di un PDA per pila vuota da una CFG

1 Dec 2022

CFG: $S \to 0S1 \mid 01$

$\boxed{P_n}$



Esempio di derivazione $S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 0011$

$$(q, 0011, S) \vdash (q, 0011, 0S1) \vdash (q, 011, S1)$$
$$\vdash (q, 011, 011) \vdash (q, 11, 11) \vdash (q, 1, 1) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Automa a Pila Deterministico [DPDA]

14 Dec 2022

I PDA <u>non deterministici</u> accettano tutti e soli i CFL

Un DPDA accetta tutti i linguaggi regolari

Un PDA $P = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\}$ è deterministico se:

1. $|\delta(q, a, X)| \leq 1 \qquad \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \forall X \in \Gamma$
2. Se $|\delta(q, a, X)| \neq 0$ per qualche $a \in \Sigma$ allora $|\delta(q, \varepsilon, X)| = 0$

Proprietà di Prefisso [Prefix-free]

Un linguaggio L ha la proprietà del prefisso (cioè è <u>prefix-free</u>) se $\nexists\ x, y \in L$

tali che $x \neq y$ e x è prefissa di y

Proprietà del Prefisso - esempi

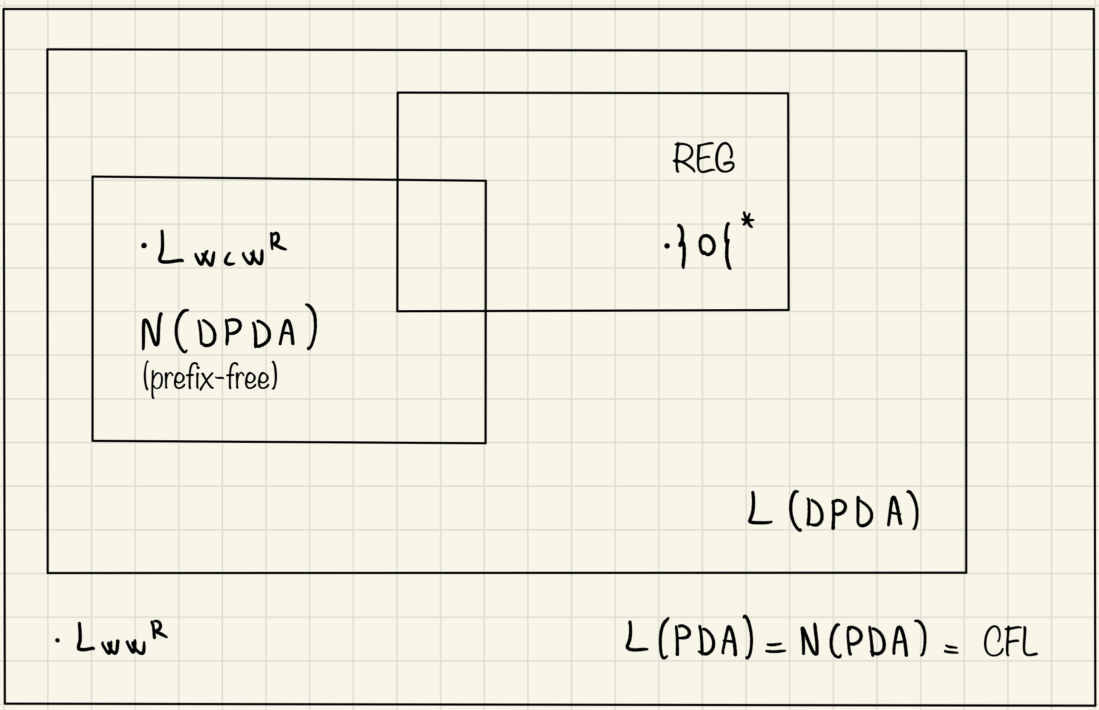
$L = \{0\}^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots\}$ $\quad x = 00 \quad y = 000$

$x \neq y$ e x è prefissa di y. $\quad L$ non è prefix-free.

Potenza Computazionale di un DPDA

Un linguaggio L è $N(P)$ per un DPDA P <u>se e solo se</u> L è prefix-free, ed è $L(P')$ per un DPDA P'

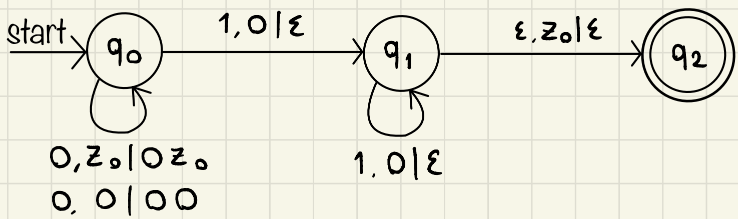
Schema generale della Potenza Computazionale



Costruzione di un DPDA - esercizi

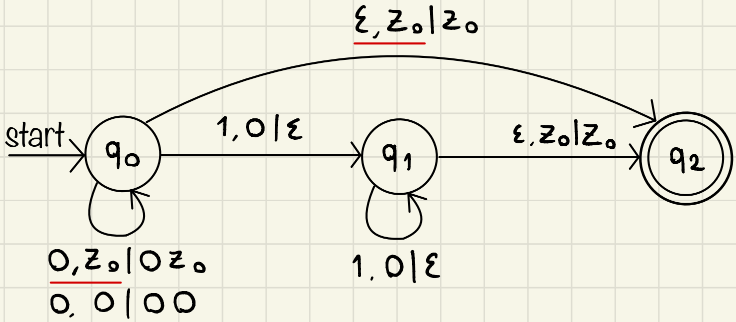
$L = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 1 \}$

L è prefix-free



$L = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$

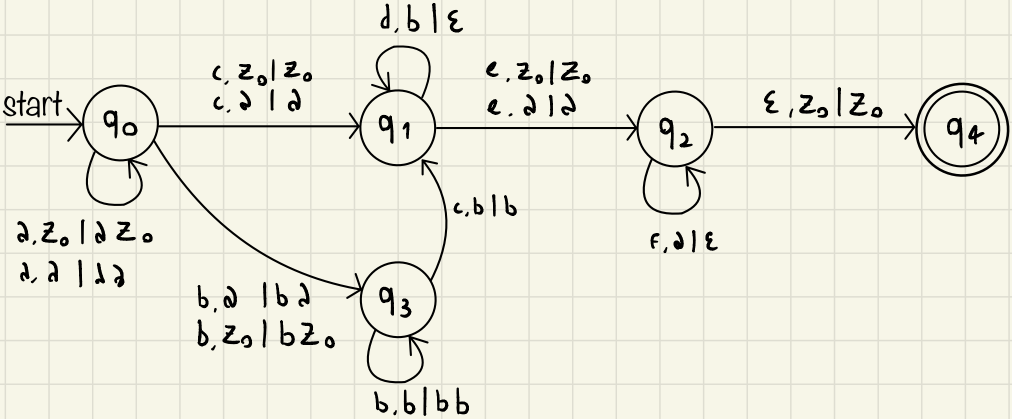
L <u>non</u> è prefix-free



L'automa <u>non è</u> deterministico. È impossibile creare un DPDA per L

$L = \{ a^n b^m c d^m e f^n \mid n, m \geq 0 \}$

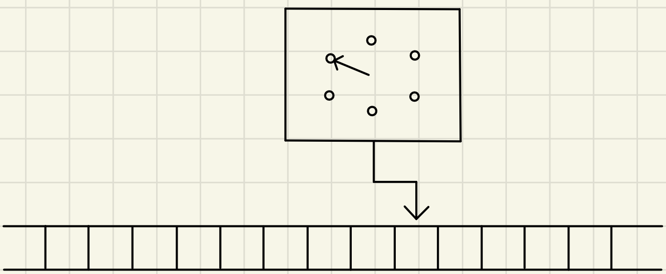
L è prefix-free



Macchine di Turing [MdT]

15 Dec 2022

Linguaggi ricorsivamente enumerabili



Una Macchina di Turing è una settupla: $M = \{ Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F \}$ dove:

Q: Insieme finito e non vuoto di stati

$\Sigma \subset \Gamma$: Alfabeto dei simboli di input

Γ: Alfabeto dei simboli del nastro

$q_0 \in Q$: Stato iniziale

$B \in \Gamma \setminus \Sigma$: Simbolo di blank

$F \subseteq Q$: Insieme degli stati finali

$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ \underset{\text{left}}{L}, \underset{\text{right}}{R} \}$ funzione parziale di transizione

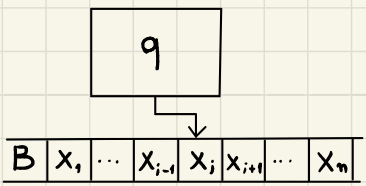
Linguaggi Ricorsivamente Enumerabili [RE]

Linguaggi di tipo 0

Un linguaggio L è Ricorsivamente Enumerabile (RE) se esiste una Macchina di Turing M tale che $L = L(M)$

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid M \text{ accetta } w \}$$

Rappresentazione dello Stato - descrizione istantanea



$$D: x_1 \cdots x_{i-1}\, q\, x_i\, x_{i+1} \cdots x_n$$

Deve essere $Q \cap \Gamma = \emptyset$

Macchina di Turing con delta non deterministica

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

$$\delta(q, a) = \{ (p_1, b_1, L), (p_2, b_2, R) \cdots (p_n, b_n, R) \}$$