UniMiB - 2021/22 - 879276

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

- Esercitazione -

09.03.2022

Sistemi Lineari

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Trovare tutte le coppie XY che soddisfano tutte le equazioni proproste

I Ricavo e Sostituisco

1) ricavo x dalla seconda equazione

$x = 3 + 2y$

2) sostituisco x nella prima equazione

$2(3 + 2y) - 3y = 4$

$6 + 4y - 3y = 4$

$y = -2$

3) sostituisco "all'indietro" y nella seconda equazione

$x = 3 + 2(-2) = -1$

$\Rightarrow (x, y) = (-1, -2)$

II Combinare le equazioni

$$\begin{cases} x + y = A \\ x - y = B \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = A + B \\ 2y = A - B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

•) $I^a - 2 \cdot II^a$

$$(2x - 3y) - 2(x - 2y) = 4 - 2 \cdot 3$$
$$2x - 3y - 2x + 4y = 4 - 6$$
$$y = -2$$

•) $I^a - \frac{3}{2} II^a$

$$(2x - 3y) - \frac{3}{2}(x - 2y) = 4 - \frac{3}{2} \cdot 3$$
$$2x - 3y - \frac{3}{2}x + 3y = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \;;\; x = -1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

ricavo e sostituisco

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 - 2x_5 \\ 2(-x_2 - x_4 - 2x_5) + x_3 + x_5 = 0 \\ -3(-x_2 - x_4 - 2x_5) + x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 - 2x_5 \\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

compongo le equazioni

$\mathrm{II}^{2} - 2\,\mathrm{I}^{1}$

$\cancel{2x_1} + x_3 + x_5 - \cancel{2(x_1} + x_2 + 2x_5) = 0$

$-2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0$

$\mathrm{III}^{1} + 3\,\mathrm{I}$

$\cancel{-3x_1} + x_2 - 2x_3 + 2x_5 + \cancel{3x_1} + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0$

$4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

coefficienti delle variabili

$$\mathrm{II}^a \to \mathrm{II}^a - 2\,\mathrm{I}^a$$

$$\mathrm{III}^a \to \mathrm{III}^a + 3\,\mathrm{I}^a$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

x1 è stato tolto da II e III

$$\mathrm{III}^a \to \mathrm{III}^a + 2\,\mathrm{II}^a \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cancello x2 dalla terza

ogni equazione dipende da sempre meno variabili

$$\mathrm{II}^a \to \mathrm{II}^a - 2\,\mathrm{III}^a$$

$$\mathrm{I}^a \to \mathrm{I}^a + \mathrm{III}^a$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cancello x4 dalla prima e dalla seconda

$$I^a \to I^a - \frac{1}{2} II^a \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ricavo x2 dalla seconda

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - 7x_5 = 0 \\ -x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_5$$

$$x_2 = +\frac{1}{2} x_3 - \frac{7}{2} x_5$$

$$x_4 = 2x_5$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} t \\ x_2 = \frac{1}{2} s - \frac{7}{2} t \\ x_3 = s \\ x_4 = 2t \\ x_5 = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{I}^a \leftrightarrow \mathrm{II}^a$$

scambio prima e seconda riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II}^a \to \mathrm{II}^a$$

$$\mathrm{III}^a \to \mathrm{III}^a - \mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{III}^a \to \mathrm{III}^a + \mathrm{II}^a$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$0 = -1$

Impossibile

16.03.2022

$\mathbb{N}$ naturali $\quad \mathbb{Z}$ interi $\quad \mathbb{Q}$ razionali $\quad \mathbb{R}$ reali

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$ immaginari

$z \in \mathbb{C} \qquad z = a + ib$

a parte reale

b parte immaginaria

$$+ = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$
$$\cdot = (a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

$$z = 0 + i \cdot 1 = i$$
$$i^2 = z^2 = z \cdot z = (0 + i \cdot 1)(0 + i \cdot 1) = (0-1) = -1$$

vale la proprietà commutativa
vale la proprietà associativa
l'elemento neutro è $0 + 0i$
l'opposto di $a + ib$ è $-(a + ib)$
vale la proprietà distributiva

elemento neutro della somma
elemento neutro del prodotto
diversi

$\mathbb{C}$ è un campo

Es $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + i\left(2\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

coniugo $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

modulo $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z|^2 = 1$

inverso $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

$z^3 = 1$

$\bar{z}^3 = \left(\frac{|z|^2}{2}\right)^3 = \frac{|z|^6}{2^3} = \frac{1}{1} = 1$

Teorema Fondamentale dell'Algebra

ogni polinomio a coefficienti complessi ha almeno una radice complessa campo con due elementi

$$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$$

XOR

+	0	1
0	0	1
1	1	0

AND

·	0	1
0	0	0
1	0	1

commutative (simmetriche rispetto alla diagonale)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

RICAVO x_2

$$x_2 = x_3$$

RICAVO x_1

$$x_1 = 1 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = t \qquad t \in \mathbb{F}_2 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. particolare}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. sistema omogeneo}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$