UniMiB - 2021/22 - 879276

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

- Appunti -

ALGORITMO DI GAUSS

17.03.2022

$$Ax = B$$

$A =$ matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \quad + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{n1} \cdot x_n + \quad + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

- $(A \mid B)$ si chiama matrice completa del sistema

- un sistema si può scrivere sotto forma di matrice

  - **esempio**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

- come operazione posso scambiare le equazioni (righe)

$$\begin{cases} a_{21} \, x_1 + \quad + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{11} \, x_1 + \quad + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{n1} \, x_1 + \quad + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \quad + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_2 + \quad + a_{2n} x_n = b_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$ equivalenti

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda a_{21}) x_1 + \quad + (a_{1n} + \lambda a_{2n}) x_n = b_1 + \lambda b_2 \\ a_{21} x_2 + \quad + a_{2n} x_n = b_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \underbrace{A_1}_{\text{riga}} X = b_1 \\ A_2 X = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (A_1 + \lambda A_2) X = b_1 + \lambda b_2 \\ A_2 X = b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A_1 + \lambda A_2) X = A_1 X + \lambda A_2 X = b_1 + \lambda b_2$$

- **esempio**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\lambda = 2]{I + 2 II} \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

- come operazione posso scambiare le colonne

colonna

$$x_1 A^1 + \quad + x_n A^n = B \qquad\qquad Ax = B$$

$$x_2 A^2 + \quad + x_n A^n = B \qquad (A^2 \ A^1 \ \dots \ A^n)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = y_2 \qquad x_2 = y_1$$

$$\begin{cases} a_{12} y_1 + a_{11} y_2 = b_1 \\ a_{22} y_1 + a_{21} y_2 = b_2 \end{cases}$$

- l'obiettivo dell'algoritmo di gauss è ridurre il sistema ad un sistema a scala

una **matrice a scala** è una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \dots & a_{kk} \\ \vdots & \vdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad a_{11} \dots a_{kk} \neq 0$$

le singole righe possono essere interamente nulle

- **esempio**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{31} \neq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad\qquad + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \quad + a_{22}x_2 + \qquad\qquad + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \quad + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

- **esempio**

$$\begin{array}{c c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} & \end{array}$$

per ogni valore di x4 trovo una e una sola soluzione

pongo $x_4 = t$

ricavo le altre x

$\mathrm{III} \quad 0x_1 + 0x_2 - x_3 + t = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = t - 1$

$\mathrm{II} \quad 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 - 3t$

$\mathrm{I} \quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{1-t}{2}$

- **esempio**

pivot

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = a \qquad x_3 = b \qquad x_4 = 1$

$x_2 = 1 - 2x_3 = 1 - 2b$

ALGORITMO DI GAUSS #2

$(A \mid B) \rightarrow (S \mid C)$ $\qquad S$ matrice a scala

1. sia A^k la prima colonna di A non nulla
   sia a_{ik} il primo termine non nullo della colonna A^k

   scambiamo la riga i-esima con la prima

2. sommo a ogni riga j-esima con $j > 1$ la prima riga
   moltiplicata per $-\dfrac{a_{jk}}{a_{1k}}$

3. estraggo la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ A_n & b_n \end{array}\right)$ e reitero

Applicazione algoritmo di Gauss

1. esempio con scambio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = 2 \quad k = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esempio senza scambio (continua nel 2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad i = 1 \quad k = 1$$

esempio completo (continua nel 2 e nel 3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array}\right) \quad i = 1 \quad k = 1$$

2. esempio parziale

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{II - \frac{3}{2} I} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ \cancel{3 - \frac{3}{2} \cdot 2}\ 0 & 4 - \frac{3}{2} \cdot 2 & 5 - \frac{3}{2} \cdot 1 \end{array}\right)$$

esempio completo (continua nel 3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II - 4I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array}\right)$$

3. estraggo e reitero

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array}\right) \quad i = 2 \quad k = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{III - 2II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

risolvo il sistema a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 6x_3 = -3 \end{cases}$$

pongo $x_3 = t$

$-3x_2 - 6t = -3$; $x_2 = 1 - 2t$

$x_1 + 2 - 4t + 3t$; $x_1 = t - 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

le soluzioni si ottengono sommando una soluzione particolare e una soluzione generica del sistema omogeneo associato

ad esempio $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$AB \in M_{m,p}(\mathbb{K}) \qquad B = (B^1 \quad \cdots \quad B^p)$$

$$AB = (\underset{n \text{ colonne}}{A}\underset{n \text{ elementi}}{B^1} \quad \cdots \quad AB^p)$$

PRODOTTO DI MATRICI

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad C, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$A(\lambda B) = B(\lambda A) = \lambda(AB)$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

$AB \in M_{m,p}(\mathbb{K})$

$(AB)C \in M_{m,q}(\mathbb{K})$ $\qquad A(BC) \in M_{m,q}(\mathbb{K})$

$(AB)C = A(BC)$

18.03.2022

$A \in M_{n,m}(\mathbb{K}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

$AX = x_1 A^1 \dots x_n A^n \in \mathbb{K}^m$

- $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ matrici quadrate

$AB = M_{n,n}(\mathbb{K}) \neq BA \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$AB = (AB^1 \quad AB^2) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} BA^1 & BA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **DEFINIZIONE: Matrice Identica**

$$I_n \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{TERMINE}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{SE } i = j \\ 0 & \text{SE } i \neq j \end{cases}$$

- È elemento neutro del prodotto

$$A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \qquad I \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

$$AI_n = A \quad I_n A = A$$

- $A_n \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è invertibile se esiste $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

$$\text{T.C.} \quad AB = I_n \qquad BA = I_n$$

diciamo che B è l'inverso di A

l'inversa, se esiste, è unica

- **esempio**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}$$

- $A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \qquad AB = I_n \qquad (AB^1 \quad AB^n) = (e_1 \quad e_n)$

$$\begin{cases} AB^1 = e_1 \\ AB^n = e_n \end{cases}$$

$$(A \mid e_1 \quad e_n) \xrightarrow{\text{GAUSS}} (S \mid C)$$

- **esempio**

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}_{A^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$ invertibile?

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\mathrm{II}-2\mathrm{I}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-7&-2&0\end{array}\right)$$

faccio diventare il pivot = 1

$$\xrightarrow[-\frac{1}{7}\mathrm{II}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[\mathrm{I}-3\mathrm{II}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\\0&1&\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

- **esempio**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

invertibile?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}-2\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

impossibile

- se esiste l'inversa di $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$
  allora la riduzione a scala di A ha n pivot

- $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$AB = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & & c_{1p} \\ & & \\ c_{m1} & & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

$$c_{ij} = A_i \, B^j$$

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}$$

- $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

$$\underset{(c_{ij})}{\underset{\parallel}{AB}} = \underset{(\delta_{ij})}{\underset{\parallel}{I_n}} \qquad \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj} = \delta_{ij} \quad \forall i j$$

- A quadrata ha riduzione a scala con n pivot se e solo se A è invertibile, e l'inversa si ottiene risolvendo $(A \mid I)$

- $A = M_{n,n}(\mathbb{K})$

  il sistema lineare $AX = B$ ha una unica soluzione se e solo se A è invertibile

- il prodotto di matrici invertibili è invertibile

24.03.2022

- $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{K} \quad x_n \in \mathbb{K} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

1) $v + (u + w) = (v + u) + w$

2) $\exists \; \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v + \underline{0} = v + \underline{0} + v$

3) $\exists \; (-v) \qquad v + (-v) = \underline{0}$

4) $v + w = w + v$

5) $\lambda (\mu v) = (\lambda \mu) v$

6) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

7) $\lambda (v + w) = \lambda v + \lambda w$

8) $1 \cdot v = v$

SPAZIO VETTORIALE

uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme V munito di due operazioni

$$V \times V \to V \qquad \mathbb{K} \times V \to V$$

$$(v, w) \to v + w \qquad (\lambda, v) \to \lambda v$$

esempio

$\mathbb{K}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

esempio

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(a, b) \to a + b \qquad (\lambda, a) \to \lambda a$$

esempio

$M_{m,n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad A + B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$\lambda \in \mathbb{K}. \ A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad \lambda A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$\lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

- in uno spazio vettoriale $0\,v = \underline{0} \in V$

$(1+0)v = 1v + 0v$

$\Rightarrow \quad \underline{0} = 0v$

$(-1)v + 1v = (-1+1)v = 0v = \underline{0}$

$\Rightarrow \quad -1 \cdot v = -v$

- **esempio**

X insieme non vuoto $\{F : X \to \mathbb{R}\} = V$

$V \to V \qquad \mathbb{R} \times V \to V$

$(f, g) = f + g \qquad (\lambda, f) = \lambda f$

$\underline{0}(x) = 0$

$f, g \quad X \to \mathbb{R}$

$f + g \quad X \to \mathbb{R} \qquad (f+g)(x) \overset{DEF}{=} f(x) + g(x)$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad f \cdot \lambda \quad X \to \mathbb{R}$

$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$

$(f + \underline{0})(x) = f(x) + \underline{0}(x) = f(x)$

- V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ un sottinsieme $W \subseteq V$
  è un sottospazio vettoriale se

1) $\underline{0} \in W$
2) $w, v \in W \Rightarrow w + v \in W$
3) $w \in W, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda w \in W$

- **esempio**

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{0}$

$\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \mid AX = \underline{0} \right\} = \ker A$ kernel (o nucleo)

$\ker A \subseteq \mathbb{K}^n$ sottospazio vettoriale

1) $\underline{0} \in \ker A \iff A\underline{0} = \underline{0}$

2) $w, w \in \ker A$

$A(w + w) = Aw + Aw = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

3) $\lambda \in \mathbb{K}, w \in \ker A \qquad A(\lambda w) = \lambda(Aw) = \lambda(\underline{0}) = \underline{0}$
$\lambda w \in \ker A$

OSSERVAZIONE

se $\mathbb{K}$ è infinito, ogni spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è $\{\underline{0}\}$ oppure è infinito

$V \in v \neq \underline{0}$ (con piu di un elemento)

$\lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda v \in V$

$\lambda v = \mu v \Rightarrow \lambda v - \mu v = \underline{0}$

$(\lambda - \mu) v = \underline{0} \Rightarrow (\lambda - \mu) = 0$

$V \neq \underline{0} \quad v \in V \qquad \alpha v = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha^{-1} \alpha v = 1v = v$

$\alpha v = \underline{0} \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha v) = \underline{0} \Rightarrow 1v = 0 \Rightarrow v = 0$

$\mathbb{K} \to V \qquad \lambda \mapsto \lambda v$ iniettiva

- V sp. vett. $v_1 \dots v_k \in V$ una combinazione lineare di $\{v_1, \dots v_k\}$ è una scrittura del tipo $\lambda_1 v_1 \dots \lambda_k v_k$, $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{K}$

esempio

$$2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ è comb. lineare di $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

- i vettori $V_1 \dots V_k \in \mathbb{K}$

sono linearmente dipendenti se

$\underline{0} = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k$, $\alpha_1 \dots \alpha_k$ non tutti nulli

sono linearmente indipendenti

$\underline{0} = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k$, $\alpha_1 \dots \alpha_k$ tutti nulli

31.03.2022

- $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ il rango di A è $\text{RANK}(A)$

ed è la dimensione dello spazio $\{A^1 \dots A^n\}$

equivale al numero di pivot

- **esempio**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{RANK}(A) = \dim Sp\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{RANK}(A) \leq n$

TEO **Rouché-Capelli**

un sistema lineare $AX = B$

ha soluzione se e solo se $\text{RANK}(A) = \text{RANK}(A \mid B)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile se $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

non sono linearmente dipendenti

TEO

per ogni $n \geq 1$ esiste un'unica

$D : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ VOLTE}} \to \mathbb{K}$

multilineare alternante $D'(e_1 \quad e_n) = 1$

TEO

$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad \text{DET}(AB) = \text{DET}(A)\,\text{DET}(B)$

TEO **Cramer**

sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ matrice invertibile

allora la soluzione $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ di $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = B$

soddisfa $x_j = \dfrac{\det (A^1 \cdots \overset{j}{B} \cdots A^n)}{\det A}$

$$\det (A^1 \quad \overset{i}{e_j} \quad A^n) = (-1)^{j+i} a_{ji} 0 + \cdots + (-1)^{ji} \det A$$

esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$ invertibile

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -2$$

TEO **Completamento della Base**

sia V spazio vettoriale $\dim V = n$, siano $v_1 \dots v_k$

vettori di V linearmente indipendenti, allora esistono

$v_{k+1} \dots v_n \in V$ tali che $v_1 \dots v_n$ è una base

esempio

Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = -y \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -y$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ formano una base $\Leftrightarrow$ $y \neq 0$

01.04.2022

$A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\operatorname{RANK} A = \dim \operatorname{Span}\{A^1 \cdots A^n\}$

- se A è quadrata, cioè $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$
  $\operatorname{RANK} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

- **TEO**

sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ t.c. una sua sottomatrice $B \in M_{r,r}(\mathbb{K})$ abbia $\det B \neq 0$ supponiamo che tutte le sottomatrici di A ottenute orlando B abbiano determinante zero, allora $\operatorname{RANK} A = r$

- **esempio**

sottomatrici ottenute orlando $B = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\det = 0 \qquad \det = 3$ X

② $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ l'unico modo di orlare B è prendendo A

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{matrix} (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + \\ (-1)^{2+2} a_{2,2} \det A_{22} + \\ (-1)^{2+3} a_{2,3} \det A_{23} = \end{matrix}$$

$$= -3 \cdot 5 = -15 \neq 0 \qquad \operatorname{RANK} A = 3$$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

1. $B = (1)$ $\det B \neq 0$ orlate di B: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\det = 3$ X

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ orlate di B: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\det = 3(-2+2) = 0$

3. gli orlati di B hanno $\det = 0$ $\text{RANK } A = 2$

POLINOMI

sia $\mathbb{K}$ un campo, un polinomio su $\mathbb{K}$ nell'indeterminata t è una scrittura formale $a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$

$d \geq 0 \quad a_0 \dots a_d \in \mathbb{K}$

se $p = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$
si pone $a_k = 0$ per ogni $k > d$

se $p \neq 0$, $\deg p$ è il massimo k t.c. il coefficiente di grado k è diverso da zero

due polinomi si coincidono se $\forall k \geq 0$ hanno lo stesso coefficiente di grado k

a_i è il coefficiente di grado i

$p = 0$ polinomio con tutti i coefficienti $= 0$

$\mathbb{K}[t]$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}[t]$$

$p + q$ è il polinomio il cui coefficiente di grado k è la somma dei coefficienti di grado k di p e q

- **TEO**

  se $f, g \in \mathbb{K}[t]^{g \neq 0}$ esistono unici

  $q, r \in \mathbb{K}[t]$ $\deg r < \deg q$

  t.c. $f = gq + r$

- $\mathbb{K}[t]$ è anello su $\mathbb{K}$

- $p \in \mathbb{K}[t]$, $x \in \mathbb{K}$

  x radice di p se $f_p(x) = 0$

- cor. se x radice di p allora $p = (t-x)q$

- cor. se $p \in \mathbb{K}[t]$ ha grado d, allora ha al più

  d radici distinte

- se x radice di $p \in \mathbb{K}[t]$

  la molteplicità di x è il massimo k

  tale che $p\ (t-x)^k q$

  per qualunque q

APPLICAZIONI LINEARI

07.04.2022

Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$f: V \to W$ si dice applicazione lineare se

① $f(v + v') = f(v) + f(v') \quad \forall v, v' \in V$ **(additività)**

② $f(k \cdot v) = k \cdot f(v) \quad \forall v \in V, k \in \mathbb{K}$ **(omogeneità)**

in pratica, f "si comporta bene" rispetto alle operazioni di spazio vettoriale di V e W

dalla proprietà ② della def. segue che, scelto qualsiasi $v \in V$

$f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$

ogni applicazione lineare manda l'origine di V nell'origine di W

dalla proprietà ② della def. segue che, se $\exists v \in V$ t.c. $f(v) \neq 0$

$\Rightarrow f(kv) = k f(v) \quad \forall k \in \mathbb{K}$

e questi sono tanti vettori diversi quanti sono gli elementi di $\mathbb{K}$

- **esempio**

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right)$$

① $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + x', y + y') =$

$$\left(\frac{(x + x') + (y + y')}{\sqrt{2}}, \frac{(y + y') - (x - x')}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \frac{y'-x'}{\sqrt{2}} \right)$$

② $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \forall k \in \mathbb{R} \qquad f(kx, ky) =$

$$\left(\frac{kx + ky}{\sqrt{2}}, \frac{ky - kx}{\sqrt{2}} \right) = k \cdot \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right)$$

f è lineare

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{y-x}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

esempio

$V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ spazio vett. dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3

$W = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ spazio vett. dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2

$f : V \longrightarrow W$ $\qquad f(p(x)) = \underset{\text{derivata}}{p'(x)}$

f è lineare

1. $f((p+q)(x)) = p'(x) + q'(x) = f(p(x)) + f(q(x))$
2. $f(k \cdot p(x)) = k \cdot p'(x) = k \cdot f(p(x))$

DEFINIZIONE

sia $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

la funzione $L_A : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$

è data da $L_A(x)\ A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{K}$

L_A è lineare

- **esempio**

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad L_A : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

- **TEO**

Dati V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, data $\{v_1 \cdots v_k\}$ una base di V e scelti $v_1 \cdots v_n \in V$ qualsiasi, esiste una e una sola applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ t.c. $f(v_i) = w_i \quad i = 1 \dots n$

- **DEFINIZIONE**

V, W spazi vett. su $\mathbb{K}$ $\quad f: V \to W$ lineare

- l'immagine di f è $Im\, f = \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$
  sottospazio vett. di W
- il nucleo di f è $\ker f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subseteq V$
  sottospazio vett. di V

- se $\ker f = \{0\}$ allora f è iniettiva

DEFINIZIONE

$f : V \to W$ lineare

il rango di f è $\mathrm{rk}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$

TEO **Nullità-Rango**

siano V, W spazi vett. su $\mathbb{K}$ sia $f : V \to W$ lineare, allora
$\dim V = \mathrm{rk}\, f + \dim \ker f$

REGRESSIONE LINEARE

08.04.2022

Siamo in $\mathbb{R}^n$

① Distanza

in generale, dato $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = x^t \cdot x$ norma $\|\cdot\|$

se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad x^t \cdot x = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

distanza tra $x, y \in \mathbb{R}^n = \|x - y\| = \sqrt{(x-y)^t \cdot (x-y)}$

$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2y^t x$

$x \perp y \iff y^t \cdot x = 0$

$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = 0$

la "lunghezza" del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è $\|x\| = \sqrt{x^t \cdot x}$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ sono perpendicolari se e solo se $y^t \cdot x = 0$ $\quad (x^t \cdot y = 0)$

se $\ \in \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale
e $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore, in punto di x più vicino a W è
la proiezione ortogonale di x su W, cioè è il vettore $y \in W$
tale che $(x - y) \perp w \quad \forall w \in W$

② Soluzioni Approssimate di un Sistema Lineare

sia $A \in M^{m,n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$

se $Ax = b$ non ha soluzioni i $\mathbb{R}^n$, posso pormi il problema di trovare la migliore approssimazione alla soluzione, cioè $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|A\bar{x} - b\|^2$ sia minima possibile

$\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = Im L_A \in \mathbb{R}^k$ è un sottospazio vett.

$\Rightarrow$ devo cercare la proiezione ortogonale di b su $Im L_A$

$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \quad L_A(x) = Ax$

TEO

min (n, k) poniamo $= n =$ numero colonne

Se $Rk\,A$ è il massimo possibile, allora

① $A^t \cdot A$ è invertibile

② $\bar{x} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot b$

in generale: se $Ax = b$ non si risolve, $A^t A x = A^t b$ si risolve e dà le "soluzioni approssimate" del sistema originale

③ Regressione Lineare

peso = α (altezza) + β

rilevamenti w_1, h_1

w_2, h_2

$\vdots$

w_N, h_m

risolvono?

$w = \alpha h + \beta$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ h_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{x} \overset{?}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{b}$$

sistema impossibile
con N righe >> 2 colonne

$rk\, A = 2 \qquad (A^t \cdot A)$ invertibile

cerco una soluzione approssimata $\quad \bar{x} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot b \quad \bar{x} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$

la retta $y = \bar{\alpha} x + \bar{\beta}$ è la retta che minimzza la somma dei quadrati degli scarti dei punti dati da essa

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} (w_i - \bar{\alpha} h_i - \bar{\beta})^2}{N}$$

SSE / Scarto quadratico
medio

in generale, dati punti $(x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n)$, la retta di regressione è

$y = \bar{\alpha} x + \bar{\beta}$ con

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x})^2} \qquad \bar{\beta} = \hat{y} - \alpha \hat{x}$$

con $\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \hat{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$

05.05.2022

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$v \mapsto Av$

siano adesso V, W sp. vettoriali su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ base di V,

$\mathcal{B}'$ base di W sia $F: V \to W$ lineare

la matrice associata a F rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

è la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $\forall v \in V$

$$M_{\mathcal{B}'}(F(v)) = A\, M_{\mathcal{B}}(v)$$

$\mathcal{B} = \{v_1 \cdots v_n\} \quad V \ni v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \qquad a_i \in \mathbb{K}$

$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad W \qquad \mathcal{B}' = \{w_1 \cdots w_m\}$

$$M_{\mathcal{B}'}(b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m$$

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \qquad M_{B'}(F(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$M_{B'}(F(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)) = M_{B'}(x_1 F(v_1) + \cdots + x_n F(v_n))$$

$$= M_{B'}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} w_1 x_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} w_n x_n\right)$$

$$= M_{B'}\left(\sum_{\substack{i=1 \ m \\ j=1 \ n}} a_{ij} w_i x_j\right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad : \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$A = (a_{ij}) \quad \text{MAT. ASS.} \rightarrow M^{B}_{B'}(f)$$

esempio

$$A \in M_{m.n}(\mathbb{K}) \qquad L_A \quad \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$v \longmapsto Av$$

$$M_{B'}(L_A(v)) = M^{B}_{B'}(L_A)v \qquad M^{B}_{B'}(L_A) = A$$

esempio

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad F(v) = v \qquad F = Id$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \end{pmatrix} \qquad A^1 = M_{\mathcal{C}}(F(v_1)) = M_{\mathcal{C}}(v_1) = v_1$

$A^2 = M_{\mathcal{C}}(F(v_2)) = M_{\mathcal{C}}(v_2) = v_2$

$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$M_{\mathcal{C}}(v) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id)\, M_{\mathcal{B}}(v)$

$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id)$ matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

$= \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id)\right)^{-1}$

DEFINIZIONE

$F: V \to W$ è un isomorfismo se f è lineare, biunivoca e f^{-1} è lineare

DEFINIZIONE

$A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ $\quad A \sim B \quad$ A simile a B

se esiste $N \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ invertibile $\quad A = NBN^{-1}$

$\sim$ è una relazione di equivalenza (anche B è simile a A)

riflessiva, simmetrica, transitiva

DEFINIZIONE

data una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è diagonale se i termini (i, j)

con $i \neq j$ sono nulli

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

data un'applicazione lineare $f: V \to V$ (endomorfismo) è diagonalizzabile se esiste

base $\mathcal{B}$ di V t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ è diagonale

DEFINIZIONE

06.05.2022

data $f: V \to V$ lineare, diciamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore

se esiste $v \in V$, $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$

in tal caso v è autovettore relativo all'autovalore λ

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \{v_1 \cdots v_n\}$$

λ_i autovalori v_i autovettori

- $F: V \to V$ diagonalizzabile $\iff$ V ha una base $\mathcal{B}$ costituita da autovettori di f

- $F: V \to V$ lineare v, w autovettori vale per n autovettori

  $f(v) = \lambda v$ $\quad f(w) = \mu w$ $\quad \lambda \neq \mu$

  allora v, w sono linearmente indipendenti

- se $\dim V = n$, $f: V \to V$ ha n autovalori distinti

  allora f è diagonalizzabile

DEFINIZIONE

dato λ autovalore di $f: V \longrightarrow V$

l'autospazio di λ è $V_\lambda = \ker(f - \lambda I_d)$

$f - \lambda I_d : V \to V$ $\quad V_\lambda$ sottospazio di V

$v \longmapsto f(v) - \lambda v$

DEFINIZIONE

se $f: V \longrightarrow V$ lineare, definisco il suo determinante come il determinante di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ per qualunque base $\mathcal{B}$

DEFINIZIONE

data $f: V \longrightarrow V$, $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda I_d) \in \mathbb{K}[\lambda]$

polinomio caratteristico

λ è autovalore se e solo se λ è una radice di P_f

- **esempio**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad f = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$L_A - \lambda Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad C = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$v \longmapsto Av - \lambda v$$

$$M_C^C(L_A - \lambda Id) = A - \lambda I$$

$$P_f(\lambda) = \det(L_A - \lambda Id)$$

$$M_B^B(f - \lambda Id) = M_B^B(f) - \lambda I$$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$ le radici di P_f sono $\lambda = 1$ $\lambda = 2$ $\lambda = 4$

L_A ha 3 autovalori $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\longrightarrow$ è diagonalizzabile

esiste base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ $A_1 v_1 = v_1$ $A_2 v_2 = 2 v_2$ $A_3 v_3 = 4 v_3$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \ker(L_A - \lambda Id) = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \ker(A - 2I_A) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_4 = \ker(A - 4I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di autovettori

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$v_1 \in \ker(A - I)$

$Av_1 = v_1$

DEFINIZIONE

$A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile se lo è $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

λ è autovalore di A se esiste $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \underline{0}$

$Av = \lambda v$ (cioè λ è autovalore di L_A)

$P_A(\lambda) = \det(L_A - \lambda \, I_d) = \det(A - \lambda I)$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

gli autovalori sono 1, -1 (radici di $P_A(\lambda)$)

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$, ho 2 autovalori distinti $\to$ A diagonalizzabile

$$V_1 = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \ker(A+I) = \ker\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \operatorname{span}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\}$ base di autovettori

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

- **esempio**

$A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix}\partial&1\\0&\partial\end{pmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}-\lambda&1\\0&-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2$ $\quad \partial-\lambda$

ho un solo autovalore, $\lambda = 0$ $\quad \lambda = \partial$

$V_0 = \ker(A - \overset{\partial}{0} I) = \ker \overset{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}{A} = \operatorname{span}\overset{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$

tutti gli autovettori sono multipli di $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

A non diagonalizzabile

quindi non esiste una base di autovettori di $\mathbb{R}^2$ $\quad A$ non diagonalizzabile

- $f: V \longrightarrow V$, V spazio vettoriale $\dim V < +\infty$ su $\mathbb{R}$

$p_f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ grado n

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda(a+d) - bc$$

f ha al più n autovalori distinti

$$p_f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{a_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{a_k} \, q$$

$\lambda_1 \cdots \lambda_k$ autovalori $\quad a_1 \cdots a_k$ molteplicità come radici di $p_f(\lambda)$

$q \in \mathbb{R}[\mathbb{K}]$ polinomio senza radici in $\mathbb{R}$

$p_f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ di grado n

$$p_f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{a_1} \cdots (\lambda_k-\lambda)^{a_k}$$

dove λ_i sono autovalori di
$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ v &\longmapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, v \end{aligned}$$

DEFINIZIONE

f ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$

se $p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{d_1} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{d_k}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

molteplicità algebriche

$\deg p_f(\lambda) = n$ $\deg = d_1 + \cdots + d_k$

f ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ la somma delle molpeplicità algebriche è $n = \dim V$

DIAGONALIZZAZIONE

12.05.2022

- V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $f : V \to V$
  f è diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale
- polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(f - \lambda I) \in \mathbb{K}[\lambda]$
- autovalore di f è $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tale che $\exists v \in V, v \neq 0$ per cui $f(v) = v$
  sono le radici del polinomio caratteristico
  v (non nullo) si dice autovettore di autovalore λ_0
- l'autospazio relativo all'autovalore λ_0 è $V_{\lambda_0} = \ker(f - I\lambda)$
  se $v \in V_{\lambda_0}, v \neq 0$ allora v è autovettore di autovalore

- f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base di V fatta dagli autovettori di f

- $v_1 \dots v_k$ autovettori di autovalori distinti $\Leftrightarrow$ $v_1 \dots v_k$ sono lin. ind.

  Se $P(\lambda)$ ha $n = \dim V$ radici distinte in $\mathbb{K}$
  per ognuna trovo almeno un autovettore

  $\Rightarrow$ ho n autovettori relativi ad autovalori distinti
  $\Rightarrow$ sono n autovettori lin. indip.
  $\Rightarrow$ sono una base di autovettori
  $\Rightarrow$ f è diagonalizzabile

- molteplicità di un autovalore (m.a. λ_0) = quante volte compare come radice di $P(\lambda)$

  se $P(\lambda)$ non ha radici in $\mathbb{K}$, f non è diagonalizzabile

  se $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ sono tutte le radici in $\mathbb{K}$ di $P(\lambda)$ e se
  (m.a. λ_1) $+ \cdots +$ (m.a. λ_k) $< n$

  $\Rightarrow$ $P(\lambda)$ non ha tutte le radici in
  $\Rightarrow$ f non è diagonalizzabile

- **DEFINIZIONE**

sia λ_0 un autovalore di f.
la **molteplicità geometrica** di λ_0 è $m.g.(\lambda_0) = \dim V_{\lambda_0} = \dim \ker (f - \lambda I)$

- **esempio**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ data da } f(x) = Ax \quad f = L_A$$

$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \qquad \mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$P(\lambda) = p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(\lambda-4)$$

autovalori $\lambda = 0, \quad \lambda = 4$

molteplicità algebrica $m(0) = 2, \quad m(4) = 1$

$\lambda = 0$

$$V_0 = \ker(f - 0\,I_d) = \ker(f) = \ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

per calcolare m.g.(0)
bastava arrivare qui
infatti $\dim \ker(A)$ = numero colonne senza pivot dopo gauss

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda = 4$

$$V_4 = \ker(f - 4\,I_d) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim \ker(A) = 1$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 5t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

f è diagonalizzabile?

λ	m. a.	m. g.
0	2	1
4	1	1

se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono autovettori
allora sono multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ o di $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ sono tutti contenuti in $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ non possono generare $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ non sono base

$\Rightarrow$ non esiste una base di autovett.

$\Rightarrow$ non è diagonalizzabile

TEO

sia $f: V \to V$ lineare, se $\lambda_1 \dots \lambda_K \in \mathbb{K}$ sono autovalori di e
$m.g.(\lambda_1) + \dots + m.g.(\lambda_k) = n = \dim V$
allora f è diagonalizzabile

TEO

sia V spazio vett. su $\mathbb{K}$, $f: V \to V$ lineare
se tutti gli autovalori di f stanno in $\mathbb{K}$ e se per ognuno di loro $m.a. = m.g.$
allora f è diagonalizzabile

TEO (CNS per la diagonalizzabilità)

sia V spazio vett. su $\mathbb{K}$, $f: V \to V$ lineare
è diagonalizzabile se e solo se tutte le radici di $P(\lambda)$ sono in $\mathbb{K}$
e per ognuna di loro si ha $m.g. = m.a.$

Disuguaglianza tra le Molteplicità

se $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è autovalore di f, allora $1 \leq m.g.(\lambda_0) \leq m.a.(\lambda_0) \leq n = \dim V$

Se $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è autovalore di f e $m.a.(\lambda_0) = 1$ allora $m.g.(\lambda_0) = 1$

STRUTTURA EUCLIDEA DI $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ 13.05.2022

DEFINIZIONE

Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ è $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

data da $\langle x, y \rangle = x^t \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ $\quad x, y \in \mathbb{R}^n$

dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ **simmetria**
- $\langle \alpha x + \beta z, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle z, y \rangle$ **linearità**
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ ed è $= 0$ se e solo se $x = 0$ **positività**

DEFINIZIONE

- La **norma** di $x \in \mathbb{R}^n$ è $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- L'**angolo** θ tra $x, y \in \mathbb{R}^n$ è caratterizzato da $\cos \theta = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$
- La **distanza** tra $x, y \in \mathbb{R}^n$ è $d(x, y) = \|x - y\|$
- $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali** $x \perp y$ se $\langle x, y \rangle = 0$

PROP $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

- $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ — **disuguaglianza di Cauchy-Shwarz**
- $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$ — **disuguaglianza triangolare**

DEFINIZIONE

$x, y \in \mathbb{R}^n$ la **proiezione ortogonale** di x su y è $y \cdot \frac{\langle x, y\rangle}{\|y^2\|}$

un vettore di norma 1 (vettore unitario) si dice **versore**

gli elementi della base canonica in $\mathbb{R}^n$ sono versori

DEFINIZIONE

Una base $U = \{u_1, \dots u_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice **ortonormale** se gli u_j sono versori, perpendicolari tra loro, cioè $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

TEO

Se $U = \{u_1 \dots u_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, dato $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$v = \langle v, u_1\rangle \cdot u_1 + \dots + \langle v, u_n\rangle \cdot u_n$$

PROP

$U = \{u_1 \cdots u_n\}$ b.o.n. $Q = (u_1 | \cdots | u_n)$ $\Rightarrow Q^t \cdot Q = I$

le matrici con tale proprietà di dice **ortogonale**

DEFINIZIONE

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineare si dice **simmetrica** se

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

f è simmetrica se e solo se la $M_\varepsilon^\varepsilon(f)$ è simmetrica

matrice associata rispetto alla base canonica

TEO (Spettrale)

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è simmetrica rispetto al prodotto scalare standard

se e solo se esiste una b.o.n. di autovettori di f

19.05.2022

DEFINIZIONE

Si definisce **prodotto esterno** $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (v, w) \longmapsto v \times w$

genera vettori ortogonali a w

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_3 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (v \times w) \cdot u = \det(v, w, u)$$

- se v, w sono linearmente dipendenti $\Rightarrow v \times w = 0$

  viceversa se $v \times w = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^3$

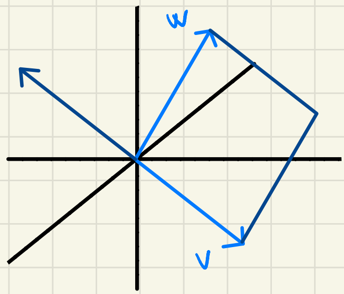
  $(v \times w) \cdot u = 0 \quad \Rightarrow \det(v, w, u) = 0 \quad \forall u$

  $\Rightarrow v, w$ linearmente dipendenti

$$(v \times w) \cdot v = \det(v, w, v) = 0$$

$$(v \times w) \cdot w = \det(v, w, w) = 0$$

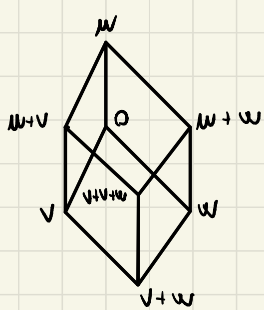
- se v, w sono linearmente indipendenti, $v \times w \perp \operatorname{span}\{v, w\}$



- $\|v \times w\| = \|v\| \, \|w\| \, |\sin \alpha|$

- $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2$

- $(v \times w) \cdot u$ è il volume del parallelepipedo che ha vertici $O, u, v, w, v+w$



la base ha area $\|v\| \, \|w\| \, (\sin \alpha)$

l'altezza $\|u\| \cos \beta$

DEFINIZIONE

uno **spazio affine** in $\mathbb{R}^n$ è un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$

non vuoto tale che S è l'insieme di soluzioni di un sistema lineare

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \qquad A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad B \in \mathbb{R}^n$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid AX = B \}, \qquad S \neq \emptyset$$

- $AX_0 = B \qquad y \in \mathbb{R}^n$

$$S = \{ X = X_0 + Y \mid AY = 0 \}$$

$$= X_0 + W \qquad W = \ker A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{sottospazio vettoriale}$$

W giacitura di S

- la dimensione di uno spazio affine è la dimensione della giacitura

$$S = X_0 + W \qquad W \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \dim S = \dim W$$

- uno spazio affine di dimensione 0 $\qquad X_0 + W \qquad W = \{ \underline{0} \}$

- uno spazio affine di dimensione 1 $\qquad X_0 + \mathrm{span}\{ v \}$

esempio

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

termini noti

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in X_0 + \text{SPAN}\{V, w\} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - X_0 \in \text{SPAN}\{V, w\}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - X_0 \,,\, V \,,\, w$$ linearmente dipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & x_2 - 1 \\ 1 & -1 & x_3 - 2 \\ 0 & 0 & x_4 - 2 \end{pmatrix}$$ ha rango $2 \longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0 \\ x_4 - 2 = 0 \end{cases}$

esempio

trovare equazioni cartesiane di $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x_1 + 1 \\ 1 & 0 & x_2 - 1 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$ ha rango 2

$$\det = -1 \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + 1 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + 1 \\ 0 & x_2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$-x_3 + x_2 - 1$ equazione cartesiana

- $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $\quad \text{RANK } A = n$

  se A ha rango massimo

  $S = \{ X \mid AX = B \}$ ha dimensione $n - m$

- se $\dim S = n - m$ allora S è definito da un sistema di m equazioni lineari

- ogni spazio affine di dimensione $n - m$ in $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di iperpiani $H_1 \dots H_m$

DEFINIZIONE

la retta passante per $P, Q \in \mathbb{R}^n$

è $P + t(Q - P)$ $\quad P + \text{SPAN}\{Q - P\}$

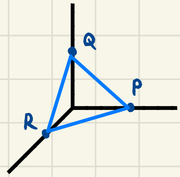
DEFINIZIONE

$P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ sono allineati se esiste una retta che li contiene

PROP

se $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ non sono allineati, esiste un solo piano che li contiene il piano che passa per tali punti è $P + \text{SPAN}\left\{ Q - P,\ R - P \right\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$Q - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linearmente indipendenti

l'equazione cartesiana è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & x_1 - 1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

la giacitura è $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \middle| v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0} \right\}$

DEFINIZIONE

due spazi affini T, S di $\mathbb{R}^n$ sono **paralleli** se la giacitura di T è contenuta nella giacitura di S o viceversa

20.05.2022

esempio (spazio affine piu giacitura)

S spazio affine

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + z = 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \quad x = -2y - z + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - z + 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{SPAN} \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{giacitura}}$$

DEFINIZIONE

$$r = Q + \text{SPAN}\{v\}$$ retta

se s è una retta parallela a r, la sua giacitura è la stessa

r descrive una retta che passa per Q e ha come “direzione”
la sua gacitura

DEFINIZIONE (conica) 25.05.2022

una **conica** in $\mathbb{R}^2$ è l'insieme delle soluzioni di un equazione del tipo

$$(*) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

dove a_{11}, a_{22}, a_{12} non sono tutti nulli

una conica moltiplicata per un valore $\lambda \in \mathbb{R}$ $\neq 0$ rimane la stessa conica

esempio

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}$$

DEFINIZIONE

definiamo una **trasformazione affine** un'applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del tipo $v \longmapsto Mv + c$, $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile $c \in \mathbb{R}^2$

una trasformazione affine è una traslazione se ha la forma $v \longmapsto v + c$ cioè $M = I$

è lineare se ha forma $v \mapsto Mv$ cioè $c = 0$

DEFINIZIONE

due coniche sono **affinamente equivalenti** se esiste una trasformazione affine f tale che manda una nell'altra

$$C' = f(C) = \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in C \right\}$$

- le trasformazioni affini formano un gruppo

$1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad v \longmapsto Iv + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v \longmapsto v$

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affini $\Rightarrow f \circ g$ affine

$f(v) = Av + b \qquad g(v) = A'v + b'$

$(f \circ g)(v) = f(A'v + b') = (AA')v + (A'b + b) =$

$= Mv + c \qquad M = AA' \qquad \det M = \det A \qquad \det A' \neq 0$

$f(v) = Mv + c = w \qquad Mv = w - c \qquad v = M^{-1}(w - c)$

$g(w) = v = M^{-1}w - M^{-1}c = M'w + c'$

$M' = M^{-1} \qquad c' = -M^{-1}c \qquad g = f^{-1}$

- **PROP**

$\{$ coniche in $\mathbb{R}^2 \}$ $\qquad c \sim c'$ se c è aff. equivalente a c'

relazione di equivalenza

- $(*)$ in forma di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

- **TEO**

ogni conica di $\mathbb{R}^2$ è equivalente a una tra:

	equazione	rk A	det A_0	nome
$(*)'$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	3	> 0	ellisse
$\emptyset$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	3	> 0	ellisse a punti non reali
	$x^2 + y^2 = 0$	2	> 0	ellisse degenere
	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	3	< 0	iperbole
	$x^2 - y^2 = 0$	2	< 0	iperbole degenere
	$y^2 - x = 0$	3	0	parabola
$\emptyset$	$y^2 + 1 = 0$	2	0	parabola degenere (punti non reali)
	$y^2 - 1 = 0$	2	0	parabola degenere
	$y^2 = 0$	1	0	conica doppiamente degenere (retta doppia)

RIPASSO (coniche)

26.05.2022

una conica in $\mathbb{R}^2$ è il luogo di zeri di

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{dove } A = \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & & \\ a_{02} & & A_0 \end{array}\right)$$

A simmetrica, A_0 non è la matrice nulla

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, A, λA definiscono la stessa conica

C e C' sono affinamente equivalenti se esiste la trasformazione affine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + c$$

che manda una nell'altra

esempio

$(*)'$ si scrive come

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

la matrice A rappresenta i coefficienti. La diagonale ha i coefficienti del termine noto, di x^2 e di y^2

la matrice A definisce una conica senza punti reali se e solo se

- $\operatorname{rk} A = 3$, $\det A_0 > 0$ e gli autovalori di A hanno tutti lo stesso segno
- $\operatorname{rk} A = 2$, $\det A_0 = 0$ e gli autovalori di A hanno tutti lo stesso segno

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1\ x\ y)\ A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 4x + 6y + x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$\det A_0 = -1 - 1 = -2 < 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rk}\, A = 3$$

$\Rightarrow$ iperbole

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 1 + 4x + 2x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A = \det(A_0) - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -8 \neq 0$$

$\mathrm{rk}\, A = 3$ $\Rightarrow$ parabola

DEFINIZIONE

una trasformazione affine $f(v) = Mv + c$

è **rototraslazione** se M è una matrice ortogonale $\det M = 1$

$\{$ rototraslazioni di $\mathbb{R}^2 \}$ sono un gruppo

DEFINIZIONE

M è ortogonale se ${}^tM M = I \iff {}^tM = M^{-1} \Rightarrow M\,{}^tM = I$

${}^t({}^tM) = {}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$

$\det({}^tM M) = \det I = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1$

DEFINIZIONE

due coniche c, c' sono **congruenti** se esiste una rototraslazione

f tale che $f(c) = c'$

TEO

ogni conica di $\mathbb{R}^2$ è congruente a una tra:

$(*)^2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	ellisse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	ellisse a punti non reali
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	iperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	iperbole degenere
$y^2 - 2px = 0$	parabola
$y^2 + a^2 = 0$	parabola degenere (punti non reali)
$y^2 - a^2 = 0$	parabola degenere
$y^2 = 0$	conica doppiamente degenere (retta doppia)

se A definisce un'ellisse di equazione $(*)^2$

gli autovalori di A_0 sono multipli degli autovalori di $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$