

Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

879276 * A.A. 2023/2024



Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Appunti del Corso ✎ Anno Accademico 2023-2024 ✎ 879276

25.09.2023

Il corso tratterà tre grandi argomenti:

Programmazione Lineare

Programmazione Lineare Intera

Programmazione non Lineare

La ricerca operativa si occupa dello sviluppo e analisi di modelli matematici per problemi decisionali

Pre Requisiti - Algebra Lineare

Una **matrice** è una tabella contenente numeri, con m righe e n colonne, e si dice matrice $m \times n$

Una matrice $m \times m$ si dice **quadrata**

Una matrice $1 \times m$ è detta **vettore riga** m dimensionale

Una matrice $m \times 1$ è detta **vettore colonna** m dimensionale

Una matrice A $m \times n$ ha come matrice **trasposta** At $n \times m$, che presenta per righe le colonne di A.

Due vettori si dicono **linearmente indipendenti** tra loro se gli scalari per cui l'unica combinazione lineare che genera il vettore nullo sono tutti nulli

$$v_1 = (0, 1) \quad v_2 = (1, 0) \quad a_1, a_2 \text{ scalari} \quad v_1 a_1 + v_2 a_2 = (0; a_1) + (a_2; 0) = (a_2, a_1)$$

(a₂, a₁) nullo se e solo se a₁ = 0 e a₂ = 0, v₁ e v₂ sono linearmente indipendenti

Una matrice si dice **singolare** se ogni vettore riga è colonna è linearmente indipendente

La matrice **diagonale** dove ogni $A[ii] = 1$ viene detta matrice **identità I**

Se una matrice A non è singolare, esiste la sua **inversa** A^{-1} , tale che $A A^{-1} = A^{-1} A = I$

Il **determinante** di una matrice $\det(A)$ è un numero

In una matrice $A \times 2 \times 2$, $\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

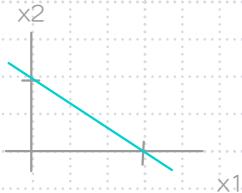
Il determinante di un matrice quadrata $m \times m$ si ottiene in modo ricorsivo, metodo di **Laplace**

Il determinante è nullo solo se la matrice è singolare, per cui non ammette inversa

Una matrice è **invertibile** solo se il determinante è diverso da zero

Un'**equazione lineare** è un'equazione tale che l'insieme delle sue soluzioni è rappresentato da una retta in R^2

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$



Un **sistema** di equazioni **lineari** ha soluzione solo se esiste l'intersezione delle soluzioni di tutte le equazioni che lo formano

Un sistema è **consistente** se ammette almeno una soluzione.

Un sistema è **determinato** se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite, $m = n$.

Un sistema lineare si può scrivere sotto forma di matrice $A x = B$, dove:

A matrice dei coefficienti

x vettore incognite

B vettore termini noti

Una matrice ha **rango di riga** pari al numero di righe linearmente indipendenti, e **rango di colonna** pari al numero di colonne linearmente indipendenti

Se il rango di riga è uguale a quello di colonna, $\text{rank}(A) \leq \min(n, m)$, se A ha rango pieno

Data la matrice dei coefficienti A, si chiama matrice aumentata C, la matrice A con aggiunto a destra il vettore dei termini noti B

Per risolvere un sistema lineare esistono diversi metodi

Metodo di eliminazione

- 1) si sceglie una variabile e si risolve una delle equazioni rispetto ad essa
- 2) si elimina la variabile scelta per sostituzione in tutte le altre equazioni

Metodo di eliminazione di Gauss

Questo metodo prevede tre operazioni elementari:

- 1) Moltiplicare un'equazione per uno scalare
- 2) Sommare un'equazione moltiplicata per scalare ad un'altra equazione
- 3) Scambiare tra loro due equazioni

Applicare operazioni elementari ad un sistema non cambia le sue soluzioni

Pre Requisiti - Funzioni

Una funzione è una terna (A, B, f) dove A è il **dominio**, B è il **codominio** e f è una **legge** che associa ad ogni elemento x di A uno ad un solo elemento $f(x)$ appartenente a B

Una funzione è derivabile se esiste finito il limite del rapporto incrementale, si indica con $f'(x_0)$ la **derivata** della funzione f nel punto x_0

Se $f'(x_0)$ appartiene a R, f si dice **derivabile**

Se una funzione da R in R è derivabile in x_0 , allora è anche **continua** in x_0

Data una funzione f, in un intervallo $[a, b]$:

f è **crescente** se per ogni coppia $x_1 < x_2$ dell'intervallo, $f(x_1) < f(x_2)$

f è **decrescente** se per ogni coppia $x_1 < x_2$ dell'intervallo, $f(x_1) > f(x_2)$

se $f'(x_0) > 0$, f è **crescente** nel punto x_0

se $f'(x_0) < 0$, f è **decrescente** nel punto x_0

Una funzione $f:[a, b]$ si dice **convessa** se per ogni coppia $x_1 < x_2$, la retta che passa per x_1 e x_2 si trova geometricamente sopra la funzione f

Una funzione $f:[a, b]$ si dice **concava** se per ogni coppia $x_1 < x_2$, la retta che passa per x_1 e x_2 si trova geometricamente sotto la funzione f

Una funzione può essere **convessa**, **concava**, o **non-convessa** (o non-concava)

Una funzione è detta **lineare** se la sua derivata è costante

I punti dove la derivata prima di annulla sono detti **stazionari**, possono essere di **minimo** o **massimo**

Pre Requisiti - Funzioni a Più Variabili

Una funzione f in n variabili (x_1, x_2, \dots, x_n) viene detta **lineare** se è nella forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

In forma matriciale: $f(x) = a_0 + a^T x$

Una funzione f in n variabili viene detta **quadratica** se è nella forma (matriciale):

$$f(x) = a_0 + b^T x + 1/2 x^T H x$$

26.09.2023

Data una funzione a due variabili $f(x_1, x_2)$

Si dice **derivata parziale rispetto a x_1** , la funzione $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 = f'_x = f'_1 x_1$

Si dice **derivata parziale rispetto a x_2** , la funzione $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2 = f'_x = f'_2 x_2$

Si dice **gradiente** il vettore i cui coefficienti sono le derivate parziali della funzione $f(x_1, x_2)$.

È dunque la combinazione delle derivate parziali prime della funzione

$$\nabla f(x_1, x_2) = (f'_1 x_1, f'_2 x_2)$$

Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_1 e x_1** , la funzione $\sigma/\sigma x_1 \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_1$
 $= f_{x_1 x_1} = f'_{x_1 x_1}$

Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_1 e x_2** , la funzione $\sigma/\sigma x_1 \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_2$
 $= f_{x_1 x_2} = f'_{x_1 x_2}$

Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_2 e x_1** , la funzione $\sigma/\sigma x_2 \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_1$
 $= f_{x_2 x_1} = f'_{x_2 x_1}$

Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_2 e x_2** , la funzione $\sigma/\sigma x_2 \sigma f(x_1, x_2)/\sigma x_2$
 $= f_{x_2 x_2} = f'_{x_2 x_2}$

La **matrice Hessiana** è una matrice quadrata che contiene in modo ordinato le derivate parziali seconde della funzione

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$$

Data una funzione in due variabili $f(x_1, x_2)$, un punto (x_1, x_2) può essere un **punto critico** solo se il suo gradiente nel punto (x_1, x_2) è nullo

Supponendo che (x_1, x_2) sia un punto critico, calcolo il **determinante** della matrice hessiana, si verifica uno dei seguenti casi:

$$\det(H) > 0$$

$f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) > 0 \quad (x_1, x_2) \text{ è un minimo relativo}$

$f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) < 0 \quad (x_1, x_2) \text{ è un massimo relativo}$

$$\det(H) < 0 \quad (x_1, x_2) \text{ è un punto di sella}$$

Se la matrice hessiana H di una funzione $f(x_1, x_2)$ è tale per cui:

$$f_{x_1 x_1} > 0 \quad \text{e} \quad \det(H) > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{la funzione è convessa}$$

Modelli nella Ricerca Operativa

Data una funzione a n variabili, un **problema di ottimizzazione** è formulabile come segue!

$$\begin{aligned} \text{opt } f(x) \\ \text{s.a. } x \in X, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ottimizzare la funzione $f(x)$
soggetta al vincolo della regione X

dove $\text{opt} \in \{\min, \max\}$

$f(x)$ è detta **funzione obiettivo**

X è la **regione ammissibile**, l'insieme dove posso trovare soluzioni al mio problema

Un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, dove esistono, uno o più punti di minimo o massimo x^*

Se X corrisponde all'intero spazio, l'ottimizzazione si dice **non vincolata**

Se invece X è un sottoinsieme stretto dello spazio, l'ottimizzazione si dice **vincolata**

L'ammissibilità della soluzione si verifica **prima** della sua ottimalità

Se lo spazio ammissibile X appartiene all'insieme degli interi, si parla di **ottimizzazione intera**

Se lo spazio ammissibile X appartiene allo spazio binario, si parla di **ottimizzazione binaria**

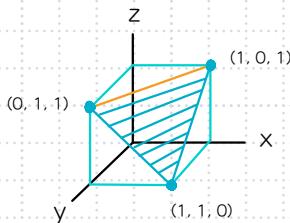
Quando l'insieme X delle soluzioni ammissibili viene espresso attraverso un sistema di equazioni o disequazioni, si parla di **programmazione matematica**

Un **vincolo g** è un'espressione del tipo: $= \leq \geq$

Si possono avere in generale m vincoli e n variabili a cui essi si applicano

Esempio di Problema di Ottimizzazione

$$\begin{aligned} \text{max}(z) \\ x,y,z \\ \text{s.a. } 0 \leq x, y, z \leq 1 & \quad g_1 \\ x + y + z = 2 & \quad g_2 \end{aligned}$$



L'insieme delle soluzioni ammissibili è la sezione di piano descritto da g2, e delimitata dal cubo i cui vertici sono limitati da g1
La soluzione, ovvero il valore (o i valori) che massimizzano z, è la linea in arancione

Esistono tre categorie di programmazione matematica

Programmazione Lineare

$\text{opt } f(x) = c^T x$ (lineare)
vincoli $g(x) = a_j^T x - b_i$ (lineari)
 X nei numeri reali R

Programmazione Lineare Intera

$\text{opt } f(x) = c^T x$ (lineare)
vincoli $g(x) = a_j^T x - b_i$ (lineari)
 X nei numeri interi Z

Programmazione non Lineare

$\text{opt } f(x)$ (lineare o non lineare)
vincoli $g(x)$ (lineari o non lineari)
 X nei numeri reali R

Programmazione Lineare

La Wyndor Glass co. produce vetri di elevata qualità, incluso finestre e porte.

Impianto 1: produce le cornici in alluminio e componenti metalli e

Impianto 2: produce le cornici in legno

Impianto 3: produce i vetri e assembla i prodotti

A causa di un calo di guadagno, verrà dismessa la produzione del prodotto meno sostenibile

Prodotto 1: vetro di lusso e cornice in alluminio

Imp. 1 e 3

Prodotto 2: finestra in legno pregiato

Imp. 2 e 3

Ogni prodotto viene realizzato in lotti da 20 unità, e sono soggetti ai vincoli produttivi degli impianti. I tassi di produzione si esprimono come numero di lotti prodotti settimanalmente

Impianto	Tempo di produzione per Lotto (ore)		Tempo produttivo disponibile (settimanale)
	Prodotto 1	Prodotto 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Profitto per Lotto (Euro)	3.000	5.000	

Determinare i tassi di produzione per massimizzare il guadagno, formalizzando il problema matematicamente

Vincoli del tipo $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ rappresentano graficamente una **retta** sul piano

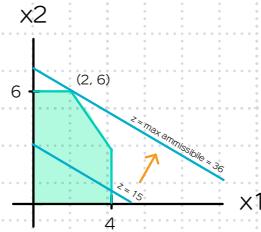
Vincoli del tipo $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$ rappresentano graficamente un **semipiano**

x_1 = numero di lotti del prodotto 1 per settimana

x_2 = numero di lotti del prodotto 2 per settimana

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2 \quad (\text{In migliaia})$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a.} & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_0 \end{array}$$



Geometricamente, il valore di Z cresce al crescere di entrambi i valori x_1 e x_2

Scegliamo i valori in modo tale che la proiezione della retta $f(x)$, la curva di **isolivello**, sia in una posizione **ammissibile** ed **ottimale**, o, in termini geometrici, trasliamo la retta verso l'alto fino agli estremi della zona ammissibile

La soluzione è $Z = 36$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$

03.10.2023

Per poter risolvere un problema di programmazione lineare sono valide 4 assunzioni

Proporzionalità: il contributo di ogni variabile decisionale è proporzionale al suo valore

Ogni "passo" sull'asse orizzontale produce un passo equivalente su quello verticale

Additività: ogni funzione è equivalente alla somma del contributo delle variabili decisionali

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \quad Z(1, 0) = 3 \quad Z(0, 1) = 5 \quad Z(1, 1) = 8 = 3 + 5 = Z(1, 0) + Z(0, 1)$$

Anche i vincoli devono verificare l'additività

Divisibilità: qualunque valore in R^n assunto delle variabili decisioni è accettabile

Certezza: il valore delle variabili decisionali è sempre noto e costante

Consociamo ad esattezza i coefficienti di costo (c_j) e i termini noti sia destri (a_{ij}) che sinistri $b_{(j)}$

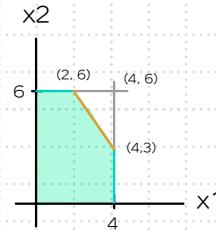
Metodo del Simplex

Il metodo del simplex è una **procedura generale** per la risoluzione di problemi di programmazione lineare

Si tratta di una procedura **algebrica** ma i suoi concetti sono di base **geometrici**

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.	x_1	≤ 4	g_1
	$2x_2 \leq 12$	g_2	
	$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	g_3	
	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$	g_0	



$3x_1 + 2x_2 = 8$ (g_3) viene detta **frontiera del vincolo**, superata quella frontiera di esce dal vincolo. Anche $x_2 = 6$ (g_2) e $x_1 = 4$ (g_1) sono frontiere del vincolo

I punti di intersezione delle frontiere di vincolo si dicono **vertici**. Due vertici si dicono adiacenti se condividono $n - 1$ frontiere di vincolo (in un problema con n variabili decisionali). Il segmento tra di loro è detto **spigolo**.

Ad esempio (2, 6) e (4, 3) sono vertici adiacenti.

Un vertice è **ammissibile** se è all'interno della regione ammissibile, come ad esempio (4, 6).

I vertici adiacenti godono della proprietà del **test di ottimalità**: se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione è ottimale.

Ad esempio, il vertice (2, 6) assume il valore $Z = 36$. I suoi adiacenti ammissibili sono (0, 6) e (4, 3), i cui valori Z sono rispettivamente 30 e 27. Per il test di ottimalità, sappiamo che (2, 6) è dunque la soluzione ottimale in quanto $36 > 30$ e $36 > 27$.

Procedura Geometrica

Passo di **inizializzazione**: si sceglie il vertice (0, 0) (che in questo caso è ammissibile) come soluzione vantaggiosa.

Effettuiamo il **test di ottimalità**: confrontiamo (0, 0) con (0, 6) e (4, 0), dunque 0 con 30 e 12.

È chiaro che (0, 0) non è la soluzione ottimale al problema.

Scegliamo di procedere con il vertice il cui valore è maggiore, ovvero (0, 6).

Procediamo nuovamente con il test di ottimalità con (0, 6), e ci muoviamo di conseguenza sul vertice (2, 6), il cui valore Z è $36 > 30$.

Come ultimo passaggio, effettuiamo ancora una volta il test di ottimalità con (2, 6), e concludiamo di trovarci nella soluzione ottimale, terminando l'algoritmo.

Esistono sei concetti chiave del metodo del simplex:

1: per ogni problema PL che ammette almeno una soluzione, trovarne richiede trovare solamente il vertice ammissibile il cui valore della funzione obiettivo è il migliore

2: l'algoritmo è iterativo, prevede due passaggi principali, l'**inizializzazione** e il **test di ottimalità**

Inizializzazione → Test di Ottimalità \Leftrightarrow Cambio di vertice

→ **Terminazione**

3: quando possibile, il vertice iniziale deve essere quello che annulla tutte le variabili decisionali (vettore nullo)

Nei casi in cui non è possibile, se il vettore nullo non dovesse essere ammissibile, esistono procedure di pre-inizializzazione

4: dato un vertice è più computazionalmente vantaggioso ispezionare (ottenerne informazioni) i suoi vertici adiacenti rispetto a quelli non adiacenti

Il cammino percorre dunque gli **spigoli** della regione ammissibile

5: il valore della funzione Z nei vertici adiacenti non viene calcolato, ma viene effettuata una scelta **greedy**, muovendosi nella direzione del vertice che garantisce il più grande tasso di miglioramento della funzione obiettivo

Ad esempio, con $Z = 3x_1 + 5x_2$, muovendosi da $(0, 0)$ a $(0, 6)$, il tasso di incremento unitario (**costo** delle variabili) è 5, mentre verso $(4, 0)$ equivale a 3, ci si muove dunque verso $(0, 6)$

6: il concetto 5 esamina gli spigoli emanati dal vertice corrente, tale ispezione consente di identificare rapidamente il tasso di miglioramento di Z, che può essere **positivo** o negativo. Il test di ottimalità consiste dunque di verificare se il vertice corrente ammette almeno uno spigolo con tasso di miglioramento positivo

Procedura Algebrica

Per rendere **computazionale** il metodo del simplex, è necessario formularlo sotto forma di procedura algebrica

Si convertono i vincoli di disegualanza in vincolo di uguaglianza tramite **variabili slack**

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.	$x_1 \leq 4$	g_1
	$2x_2 \leq 12$	g_2
	$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	g_3
	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$	g_0

$$x_3 = 4 - x_1 \quad x_1 + x_3 = 4$$

Assumendo $x_1 = 0$, la variabile **slack** x_3 è la quantità che manca al termine sinistro della disegualanza affinché questa sia verificata come dell'uguaglianza

Ogni vincolo funzionale avrà associata una variabile slack

Si riscrivono i vincoli nelle seguenti forme:

Forma Standard

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.	$x_1 \leq 4$	g_1
	$2x_2 \leq 12$	g_2
	$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	g_3
	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$	g_0

Forma Aumentata

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.	$x_1 + x_3 = 4$	g_1
	$2x_2 + x_4 = 12$	g_2
	$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	g_3
	$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$	g_0

Se la variabile slack di un vincolo assume valore positivo, la soluzione corrispondere al semipiano ammissibile individuato dalla frontiera del vincolo della forma originale, ovvero la soluzione appartiene alla soluzione ammissibile

Definiamo **soluzione aumentata** di un problema PL, una soluzione del modello in forma originale che viene aumentata tramite i corrispondenti valori delle variabili slack

$$(3, 2) \rightarrow (3, 2, 1, 8, 5)$$

Si definisce **soluzione di base** un vertice del modello in forma aumentata

Preso il vertice $(4, 6)$, le variabili slack sono $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = -6$, e dunque la soluzione aumentata di base è $(4, 6, 0, 0, -6)$

Siccome la variabile slack x_5 è < 0 , il vertice $(4, 6)$ non è ammissibile

Il modello aumentato d'esempio consiste in 5 variabili (2 decisionali e 3 slack) e di 3 equazioni
Abbiamo a disposizione $2 = 5 - 3$ **gradi di libertà** per risolvere il **sistema lineare**, ponendo a 0 due variabili arbitrarie

Una soluzione di base gode di alcune proprietà:

- 1: una variabile può essere di base o non di base
- 2: il numero di variabili di base è uguale al numero di vincoli funzioni (equazioni)
- 3: il valore delle variabili non di base viene posto a 0
- 4: il valore delle variabili di base è ricavabile risolvendo il sistema lineare
- 5: se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, allora è la soluzione di base è ammissibile

Sempre in riferimento all'esempio precedente:

Pongo $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$ in quanto sono variabili non di base

Le soluzioni del sistema lineari sono: $x_2 = 6$, $x_3 = 4$ e $x_5 = 6$, tutte le variabili di base assumono valori diversi da zero, perciò la soluzione di base è ammissibile

Due soluzioni di base ammissibili sono **adiacenti** se condividono le stesse variabili non di base eccetto una, e le stesse variabili di base eccetto una

Muoversi da una soluzione di base ammissibile a una adiacente implica che una variabile non di base diventi di base e che una variabile di base diventi non di base (**swap** tra variabili di base e non di base)

Vertice Ammissibile	Soluzione di Base Aumentata	Base
(0, 0)	(0, 0, 4, 12, 18)	x3, x4, x5
(0, 6)	(0, 6, 4, 0, 6)	x2, x3, x5

(0, 0) e (0, 6) sono adiacenti, perché condividono due variabili di base (x3, x5) e una non di base (x1)

In forma aumentata, è vantaggioso considerare e manipolare la funzione obiettivo insieme ai vincoli del problema

Forma Standard

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Forma Aumentata

$$\max Z$$

$$\text{s.a.} \quad Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$$

Algoritmo in Forma Algebrica

Inizializzazione: si sceglie x_1 e x_2 come variabili non di base, e le si pone dunque a zero

Determiniamo i valori di x_3 , x_4 e x_5 tramite il sistema lineare: (0, 0, 4, 12, 18)

(Notiamo che in questo caso la matrice è diagonale, dunque immediata)

La soluzione è una soluzione di base ammissibile, e prende il nome di **iniziale**

Test di Ottimalità Algebrico: le variabili slack non compaiono nella funzione obiettivo, per cui sono le variabili non di base x_1 e x_2 a determinare il **tasso di crescita** di Z

I tassi di crescita di x_1 e x_2 sono rispettivamente 3 e 5, entrambi positivi.

Dunque la soluzione attuale non è quella ottimale (concetto chiave 6)

È necessario ora determinare la **direzione di movimento**, aumentando il valore di una delle variabili non di base, modificando di conseguenza anche il valore delle variabili di base (per mantenere verificate le equazioni del sistema)

Il tasso di miglioramento di x_1 è 3 mentre quello di x_2 è 5, di conseguenza scegliamo di far crescere x_2 , facendola entrare in base (concetti 4 e 5)

x_2 è dunque la variabile **entrante in base**, dobbiamo quindi trovare "di quanto" muoverci nella sua direzione, massimizzando tale valore senza perdere ammissibilità (uscire dalla regione ammissibile)

Risolviamo le equazioni in funzione di x_2

Poniamo: $x_1 = 0$ dunque $x_3 = 4$

$$x_4 = 12 - 2x_2 \quad 1$$

$$x_5 = 18 - 2x_2 \quad 2$$

Il valore di x_2 "impatta" quello di x_4 (1) e x_5 (2), quanto posso aumentarlo verificando entrambe le equazioni?

1 $x_2 \leq 6$

Tra le due limitazioni, quella più stringente è la 1, in

2 $x_2 \leq 9$

quanto $6 < 9$

Posso dunque far assumere a x_2 il valore 6, in questo modo, x_2 **entra in base** con valore 6, mentre x_4 **esce dalla base** con valore 0

In questo modo abbiamo anche determinato qualche variabile diminuire a 0 e togliere dalla base

Soluzione di base ammissibile attuale

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x_2 &= 0 \\ x_3 &= 4 & x_4 &= 12 & x_5 &= 18 \end{aligned}$$

Soluzione di base ammissibile nuova

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x_4 &= 0 \\ x_2 &= 6 & x_3 &= & x_5 & \text{eliminazione di Gauss} \end{aligned}$$

Quando x_4 si trovava in base, il suo **pattern di colonna** era **(0, 0, 1, 0)**, perciò x_2 che è entrato al suo posto dovrà rispettarlo ugualmente

$$\begin{array}{rcl}
 Z - 3x_1 - 5x_2 & + 0x_4 & = 0 \\
 x_1 & + x_3 + 0x_4 & = 4 \\
 2x_2 & + 1x_4 & = 12 \\
 3x_1 + 2x_2 & + 0x_4 + x_5 & = 18
 \end{array} \rightarrow
 \begin{array}{rcl}
 Z - 3x_1 & & \\
 x_1 & + x_3 + 0 & = 4 \\
 x_2 & + 1/2x_4 & = 12 \\
 3x_1 & - x_4 + x_5 & = 18
 \end{array}$$

La soluzione di base ricavata è dunque $(0, 6, 4, 0, 6)$

Si ripete il test di ottimalità: i coefficienti delle variabili x_1 e x_4 di base sono rispettivamente $+3$ e $-5/2$, dobbiamo dunque muoverci nella direzione di x_1

Di quanto può aumentare x_1 senza violare i vincoli?

$$\begin{array}{ll}
 x_3 = 4 - x_1 & x_1 \leq 4 \\
 x_2 = 6 & \\
 x_5 = 6 - 3x_1 & x_1 \leq 2 \quad x_1 = 2
 \end{array}$$

x_1 entrerà in base con valore 2, e x_5 lascerà la base. Il suo pattern era $(0, 0, 0, 1)$, dobbiamo dunque riprodurlo per x_1

Il risultato sarà la base ammissibile $(2, 6, 2, 0, 0)$ con $Z = -3/2x_4 - x_5$

Verifichiamo e l'ottimalità: entrambi i tassi di miglioramento, coefficienti di x_4 e x_5 , sono negativi, dunque la soluzione di base attuale è quella ottimale

10.10.2023

Algoritmo in Forma Tabellare

La forma tabellare del metodo del simplex di permette di comprendere la logica sottostante all'algoritmo; registra solo l'informazione essenziale

coefficienti delle variabili termini noti variabili di base

L'algoritmo in forma tabellare consiste di un'inizializzazione, e tre passi che compongono una singola iterazione, possono essere necessarie più iterazioni per raggiungere la soluzione ottimale

FORMA ALGEBRICA		FORMA TABELLARE						
VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE NOTO
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	(0)	Z	1	-3	-5	0	0	0
(1) $x_1 + x_3 = 4$	(1)	x_3	0	1	0	1	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	(2)	x_4	0	0	2	0	1	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	(3)	x_5	0	3	2	0	0	18

La forma tabellare si compila in questo modo, la porzione evidenziata prende il nome di **tableau**

Inizializzazione:

Si aggiungono le variabili di slack al problema in forma standard, si selezionano le variabili da porre a zero (non di base), e si utilizzano le variabili di slack come variabili di base

Passo 1:

Identificare la variabile entrante come il minimo coefficiente dell'equazione 0 (-5 nell'esempio), la sua colonna viene detta **colonna pivot**

Passo 2:

Determinare la variabile uscente tramite il **test del rapporto minimo**, applicabile solo alle righe che presentano un valore maggiore di zero nella colonna pivot

1. selezioniamo i coefficienti positivi della colonna pivot
2. dividiamo i termini noti per questi coefficienti
3. selezioniamo la riga cui corrisponde il rapporto più piccolo
4. la variabile di base di quella riga (**riga pivot**) è la variabile uscente

L'intersezione tra colonna pivot e riga pivot (x_2 2 nell'esempio), prende il nome di **numero pivot** (2 nell'esempio)

Passo 3:

Determinare la nuova soluzione tramite **eliminazione gaussiana**. Dividere la riga pivot per il numero pivot ottenendo un nuovo numero pivot e una nuova riga pivot. Utilizzare questa nuova riga per portare a zero tutti i coefficienti della colonna pivot in ogni riga

Si esegue poi il test di ottimalità

Il nuovo tableau che si ottiene è:

Z	-3	0	0	5/2	0	30
x3	1	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	1/2	0	6
x5	3	0	0	-1	1	6

La nuova soluzione di base ammissibile è quindi: **(0, 6, 4, 0, 6)**

Il test di ottimalità prevede di controllare se sono presenti coefficienti negativi nella riga zero (Z), se presente, ripetere una nuova iterazione dal passo 1

In questo caso, poiché è presente -3 nella colonna x_1 , tale colonna sarà la nuova colonna pivot e x_1 entrerà in base

Tramite il test del rapporto minimo, determiniamo che x_5 sarà la variabile uscente dalla base in questa iterazione

Eseguiamo l'eliminazione di gauss per ottenere la nuova soluzione ammissibile di base, che sarà: (2, 6, 2, 0, 0)

La riga zero non presenta più numeri negativi, perciò la soluzione attuale è anche quella ottimale

Tie Breaking

Applicando il metodo del simplex, possono presentarsi anomalie e ambiguità

- alternative multiple per la variabile entrante
- alternative multiple per la variabile uscente (degenerazione)
- mancanza di variabile uscente (funzione obiettivo illimitata)
- molteplici soluzioni ottimali

Nel caso in cui due variabili entranti hanno lo stesso coefficiente, la scelta della variabile è del tutto arbitraria. Tale scelta non determina il raggiungimento o meno della soluzione ottimale, ma la rapidità (numero di iterazioni) con cui la raggiungeremo

Nel caso in cui, al passo 2, più di un variabile in base si qualifica come potenziale variabile uscente, ovvero esistono due variabili i cui rapporti sono minimi e si equivalgono, seguono una serie di eventi critici. Questa situazione è definita **degenera**, perché una delle due variabili rimarrà in base ma il valore sarà nullo, rendendola indistinguibile dalle variabili non di base (prende il nome di **variabile degenera**). La variabile degenera, nel passo successivo, non permette di essere diminuita per fare spazio ad una variabile entrante, rendendo perciò costante il valore della funzione obiettivo. L'algoritmo entra così in un loop infinito

Nel caso in cui non c'è alcuna variabili qualificata per uscire dalla base, il valore di una variabile entrante può essere aumentato indefinitamente, senza che il valore di almeno una variabile di base diventi negativo. La zona ammissibile è dunque illimitata, e la funzione obiettivo cresce a infinito. Nella forma tabellare dell'algoritmo, tale situazione è riconoscibile quando ogni coefficiente della colonna pivot (esclusa l'intersezione con la riga zero), assume un valore non positivo

Nel caso in cui siano presenti molteplici soluzioni ottimali, la funzione obiettivo si posiziona su uno degli "spigoli" determinati da un vincolo. Il problema presenta dunque più di una soluzione ottimale valida. Può essere utile o necessario trovare tutte le soluzioni ottimali, ma il metodo del simplex si interrompe trovata la prima. Se un problema ha più soluzioni ottimali, allora ha almeno un valore nullo nella riga zero per una variabile non di base (il coefficiente di almeno una delle variabili è nullo, dunque al variale di quella variabile non cambia il valore della funzione obiettivo). In questo caso si forza l'entrata in base di tale variabile e si prosegue con l'algoritmo

24.10.2023

Dualità

Il concetto di **dualità** offre un insieme di elementi utili per la programmazione lineare

In corrispondenza di ogni problema di programmazione lineare (**problema primale**), ne esiste uno chiamato **problema duale**

Analisi di Sensitività

L'analisi di sensitività è una delle applicazioni più importanti della teoria della dualità, è una componente importante riguardo i modelli di PL.

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a.} & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Molti dei parametri del modello sono solo stile di condizioni future, è utile e necessario studiare l'effetto di cambiamenti di queste condizioni sulla soluzione ottimale.

Un **problema duale** si formula, rispetto al primale, nel seguente modo:

Primale	$\max Z = cx$	Duale	$\min W = yb$
	s.a. $Ax \leq b$		s.a. $yA \geq c$
	$x \geq 0$		$y \geq 0$

Il problema primale è in forma standard, quindi è di massimo, mentre il relativo duale è **di minimo**; i coefficienti del primale diventano i termini noti del duale, e i termini noti del primale diventano coefficienti del duale; i coefficienti di vincolo sono comuni a entrambi

			Problema Primale						coefficients of the objective function (minimization)	
			coefficiente di			termine noto				
			x_1	x_2	\dots	x_n				
Problema Duale	coefficiente di	y_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	$\leq b_1$			
		y_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	$\leq b_2$			
		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	$\leq \dots$			
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	$\leq b_m$			
termine noto			V1	V1	V1	V1				
			c_1	c_2	\dots	c_n				
coefficients of the objective function (maximization)										

Il metodo del simplex, di fatto, effettuando i test di ottimalità finché tutti i coefficienti della riga zero non sono tutti positivi, sta in realtà risolvendo un altro problema di programmazione lineare formulato nello stesso modo del problema duale (è questa l'origine del problema duale)

ITERAZIONE	VARIABLE DI BASE	EQ	COEFFICIENTE									TERMINE NOTO
			Z	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	
OGNI	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$...	$z_n - c_n$	y_1	y_2	...	y_m	W

Il vettore y formato da (y_1, \dots, y_n) è dunque una soluzione ottimale y^* per il problema duale. La soluzione ottimale y^* fornisce i **prezzi ombra** del problema primale, e il valore ottimale di W è uguale al valore ottimale di Z

I coefficienti delle variabili di slack del problema primale sono dunque i valori delle y del problema duale

iterazione	Problema Primale (coefficiente)						Problema Duale					W
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	
0	[-3, -5 0, 0, 0 0]						0	0	0	-3	-5	0
1	[-3, 0 0, $\frac{5}{2}$, 0 30]						0	$\frac{5}{2}$	0	-3	0	30
2	[0, 0 0, $\frac{3}{2}$, 1 36]						0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

Iterazione 0 $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$ è una soluzione non ammissibile, infatti entrambe le variabili **surplus** ($z_1 - c_1$) e ($z_2 - c_2$) sono negative

Iterazione 1 rimuove una ($z_2 - c_2$) dalle due regioni di inammissibilità di (y_1, y_2, y_3) ma non l'altra ($z_1 - c_1$)

Iterazione 2 $(z_1 - c_1)$ e $(z_2 - c_2)$ sono non negative

La soluzione duale corrisponde $y^* = (0, 3/2, 1)$ è ottimale, come verificabile applicando il simplex sul problema duale, il valore ottimo di Z e W è quindi 36

Relazioni Primale-Duale

Proprietà Duale Debole

Se x è una soluzione ammissibile per il problema primale, e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente problema duale, allora vale:

$$cx \leq yb$$

Proprietà Duale Forte

Se x^* è una soluzione ottimale per il problema primale, e y^* è una soluzione ottimale per il problema duale corrispondente, allora vale:

$$cx^* = y^*b$$

La diseguaglianza vale per soluzioni ammissibili se una o entrambe non sono ottimali per i corrispondenti problemi, l'uguaglianza vale solo se entrambe sono ottimali

Proprietà delle Soluzioni Complementari

Ad ogni iterazione, il metodo del simpelss identifica simultaneamente una soluzione vertice ammissibile x per il problema primale, e una soluzione complementare y per il problema duale, dove: $cx = yb$

Se x non è ottimale per il problema primale, y non è ammissibile per il problema duale

Proprietà delle Soluzioni Ottimali Complementari

All'iterazione finale, il metodo del simpelss identifica simultaneamente una soluzione ottimale x^* per il problema primale, e una soluzione ottimale y^* per il problema duale, dove: $cx^* = y^*b$

Le componenti del vettore y^* sono i **prezzi ombra** del problema primale

Teorema di Dualità

Le sole relazioni possibili tra problema primale e problema duale sono riassumibili in:

- 1) Se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo limitata, allora lo stesso vale per il problema corrispondente, per cui sia la proprietà della dualità debole che quella forte sono applicabili
- 2) Se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo illimitata, allora l'altro problema non ha soluzioni ammissibili
- 3) Se un problema non ha soluzioni ammissibili, allora l'altro problema o non ha soluzioni ammissibili o ha funzione obiettivo limitata

Semantica e Interpretazione

Una variabile duale y_i è interpretabile come il contributo al profitto per unità di risorsa i , quando il corrente insieme di variabili di base viene usato per ricavare la soluzione primale

iterazione	Problema Primale (coefficiente)						Problema Duale					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	w
0	[-3, -5 0, 0, 0 0]						0	0	0	-3	-5	0
1	[-3, 0 0, $\frac{5}{2}$, 0 30]						0	$\frac{5}{2}$	0	-3	0	30
2	[0, 0 0, $\frac{3}{2}$, 1 36]						0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

Ad esempio, il valore $y_1^* = 0$, indica che aumentando di 1 il valore di b_1 (ovvero il termine noto del vincolo 1), il valore della funzione obiettivo aumenta di 0, mentre aumentando di 1 il valore di b_3 , il valore della funzione obiettivo aumenta di $y_3^* = 1$.

Il problema duale quindi, si pone l'obiettivo di ottenere il massimo profitto trovando la distribuzione delle risorse (vincoli) più efficiente

Riassumendo la relazione tra le soluzioni tra il problema primale e il problema duale:

Soluzione di Base del Primale	Soluzione di Base Complementare del Duale	Entrambe Soluzioni di Base	
		Primale Ammissibile	Duale Ammissibile
sub-ottimale	super-ottimale	SI	NO
ottimale	ottimale	SI	SI
super-ottimale	sub-ottimale	NO	SI
ne ammissibile ne super-ottimale	ne ammissibile ne super-ottimale	NO	NO

Metodo SOB

È possibile trasformare un problema primale in duale anche se il primo non si trova in forma standard applicando il **metodo SOB (sensible-odd-bizarre)**

un problema	altro problema
Vincolo i	← Variabile i
Funzione Obiettivo	← Termine noto destro

(tabella disponibile in esame)

Etichetta	Problema Primale (o Problema Duale)	Problema Duale (o Problema Primale)
	max Z (o W)	min W (o Z)
Sensibile	Vincolo i :	Variabile y_i (o x_i):
Odd	\leq \longleftrightarrow	$y_i \geq 0$
Bizarre	$=$ \longleftrightarrow	non vincolata
	\geq \longleftrightarrow	$y_i' \leq 0$
Sensibile	Variabile x_i (o y_i):	Vincolo j :
Odd	$x_i \geq 0$ \longleftrightarrow	\geq
Bizarre	non vincolata \longleftrightarrow	$=$
	$x_i' \leq 0$ \longleftrightarrow	\leq

- invertire il senso del problema, da massimo a minimo e viceversa
- etichettare le diverse forme di vincoli funzionali e sulle singole variabili decisionali del primale, come **sensibile**, **odd** o **bizarre** come indicato nella tabella
- assegnare a ogni vincolo su variabile il vincolo funzionale come descritto nella tabella
- assegnare a ogni vincolo funzionale il vincolo su variabile decisionale come in tabella

$$\max -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$$

$$\min W = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3$$

$$S: 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$y_1 \geq 0$$

$$O: 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$y_2 \text{ non vincolata}$$

$$B: 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

$$y_3 \leq 0$$

$$S: x_1 \geq 0$$

$$0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.6y_3 \geq -0.4$$

$$S: x_2 \geq 0$$

$$0.1y_1 + 0.5y_2 + 0.4y_3 \geq -0.5$$

Programmazione Lineare Intera e Mista

Un problema di programmazione lineare mista ha lo scopo di **minimizzare** i costi, che possono essere di tre tipi: costi, costi **di magazzino**, costi **fissi**

Il **primo vincolo** indica il fatto che tutto ciò che rimane al tempo t attuale è equivalente a ciò che era presente in magazzino al tempo pretendete t-1 meno ciò che è "uscito" dal magazzino

Il **secondo vincolo** Indica che la quantità di possibili ordini è potenzialmente illimitata

Condizioni Logiche [Esercizio]

Formulare in forma matematica le seguenti condizioni logiche

È possibile selezionare o l'oggetto 1 o l'oggetto 2 ma non entrambi

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

Se l'oggetto 1 è selezionato, allora anche l'oggetto 2 è l'oggetto 3 sono selezionati

$$2x_1 \leq x_2 + x_3 \quad \text{o} \quad x_1 \leq x_2, x_1 \leq x_3$$

Algoritmo - PLI

$$\text{Max } Z = 33x_1 + 12x_2$$

$$\text{s.a. } -x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere}$$

La zona ammissibile si un problema di

Programmazione Lineare Intera è un

insieme finito di **punti** delimitato dai vincoli

Ciò ci permette una procedura di **enumerazione**, ovvero un approccio "brute force", dove si valuta la f.o. in ogni soluzione ammissibile

Il numero di soluzioni ammissibili, se pur finito, può essere però molto grande, e un approccio del genere risulterebbe poco efficace e di un'elevata complessità computazionale

Il modello **Branch & Bound** si basa su una enumerazione **implicita**, e utilizza tre principali operazioni:

1. **Branching**
2. **Bounding**
3. **Pruning**

Il **branching**, o ramificazione, consiste partizione della regione ammissibile, simile all'approccio divide et impera, si continua a partizionare la regione ammissibile creando problemi più piccoli e più semplici da risolvere

Le partizioni sono **esaustive** (la loro unione contiene tutte le soluzioni ammissibili di partenza, e non c'è overlapping (c'è **muta esclusione**)

Il **bounding** consiste nella definizione di un limite (superiore o inferiore in base al tipo di problema) sul valore ottimo della soluzione intera

La soluzione ottima di un **rilassamento** del PLI fornisce un bound, in quanto la soluzione ottima del problema di PL è sempre superiore o uguale a quella del problema di PLI

Il **pruning** è la decisione di non esplorare delle (partizioni di) regioni ammissibili sapendo che tali regioni non contengono una soluzione migliore di quella attuale

Avendo due partizioni di una regione ammissibile ed i relativi bound, si continua con il processo di partizione e valutazione sulla regione che presenta il bound maggiore