ANALISI

28.09.21

martedì 28 settembre 2021 08:11

Presentazione Programma

- Numeri (reali)
- Funzioni
- Successione
- Serie (numeriche)
- Limiti e continuità di funzioni
- Calcolo differenziale
- Calcolo integrale

$\mathbb{N} = \{0,1,2, \}$

$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2 \}$

$\mathbb{Q} = \{p/q,\ p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

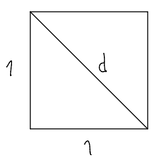
$\mathbb{R} =$ Insieme di numeri che soddisfano alcuni **assiomi**

Assiomi di Campo:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ associativa; $(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$
- $\forall a, b, \in \mathbb{R}$ $a+b=b+a$ commutativa; $a\,b = b\,a$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a+b)\,c = a\,c + b\,c$ distributiva
- $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}$ $a+b = b+a = b$ $a = 0$ Neutro
- $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}$ $a\,b = b\,a = b$ $a=1$ Neutro
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}$ $a+b = b+a = 0$ $b=-a$ Opposto
- $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0\ \exists b \in \mathbb{R}$ $a\,b = b\,a = 1$ $b=1/a$ Inverso

Assiomi di ordine:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$ oppure $b \leq a$
- se $a \leq b \wedge b \leq a$ allora $a = b$
- se $a \leq b \wedge c \in \mathbb{R}$ allora $a + c \leq b + c$
- se $a \geq 0,\ b \geq 0$ allora
  - $a+b \geq 0$
  - $a \cdot b \geq 0$



$d \in \mathbb{Q}$?

NO

Per assurdo

$d = \frac{p}{q}$

$d^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0$

p/q Ridotta ai minimi termini

$2q^2 = p^2$

- NO: p Pari $\Rightarrow$ 4 divide p^2 ma non q^2
- NO: q pari
- NO: Nè p nè q pari

La **negazione** della tesi porta ad una **contraddizione**

Vaore assoluto

$\forall a \in \mathbb{R}$ $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

- $|a| \geq r$ $r > 0 \iff a \geq r$ op. $a \leq -r$

Proprietà

- $|a| \geq 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$
- $|a| = |-a|$

- $|a| \leq r \quad r>0 \iff \begin{cases} a \geq r \\ a \leq r \end{cases}$ op. $\begin{cases} a < 0 \\ -a \leq r \end{cases}$

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$= \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \text{ op. } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

- $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$ DIMOSTRARE

DEF se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

A è superiormente limitato se $\exists k \in \mathbb{R} : a \leq k \ \forall a \in A$

A è inferiormente limitato se $\exists H \in \mathbb{R} : H \leq a \ \forall a \in A$

è limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente

Se A è superiormente limitato ogni $k \in \mathbb{R}$ $a \leq k$ si chiama maggiorante di A

Se A è superiormente limitato ogni $H \in \mathbb{R}$ $H \leq a$ si chiama minorante di A

Intervalli

Tutti e solo gli intervalli limitati

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ Intervallo **chiuso** di estremi a e b

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ Intervallo **aperto** di estremi a e b

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Intervalli illimitati

$a \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

Si chiama Intorno aperto di x_0 di raggio r l'insieme

$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\}$

DEF Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Si dice che $M \in A$ è massimo di A se $a \leq M$, $\forall a \in A$

Si dice che $m \in A$ è minimo di A se $m \leq a$, $\forall a \in A$

OSS Sia $A \subseteq \mathbb{R}, \neq \emptyset$, superiormente limitato

$\Downarrow$

$M_A \neq \emptyset \quad \wedge \quad M_A$ è inferiormente limitato

---

DEF Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato

Si chiama estremo superiore di A, e si indica con $\sup A$,
Il numero reale

$$\sup A = \min M_A$$

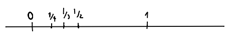
Se A è inferiormente limitato, si chiama estremo inferiore di A
$\inf A$ il numero reale

$$\inf A = \max m_A$$

Assioma di completezza

In $\mathbb{R}$ vale l'assioma di completezza:
Ogni sottinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore in $\mathbb{R}$

Es: $A = \left\{ \frac{1}{n} \quad n > 0 \right\}$



$M_A = [1 ; +\infty) \qquad m_A = (-\infty ; 0]$

$\sup A = \min M_A = 1 \in A$

$\inf A = \max m_A = 0 \notin A$

DEF sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ non superiormente limitato

Si pone $\sup A = +\infty$

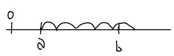
Se A non è inferiormente limitato,

Si pone $\inf A = -\infty$

OSS In $\mathbb{R}$ valgono le proprietà:

- Proprietà Archimedea — Siano $0 < a < b$

  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$: $na > b$



- Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

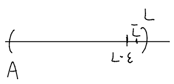
  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$

  $\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : a < \frac{p}{q} < b$

Caratterizzazione di $\sup A$, $\inf A$

sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato, allora

$L = \sup A$ se e solo se $\begin{cases} L \text{ è maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{L} \in A : L - \varepsilon < \bar{L} \leq L \end{cases}$



Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A inferiormente limitato, allora

$\ell = \inf A$ se e solo se $\begin{cases} \ell \text{ è minorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{\ell} \in A : \ell \leq \bar{\ell} < \ell + \varepsilon \end{cases}$

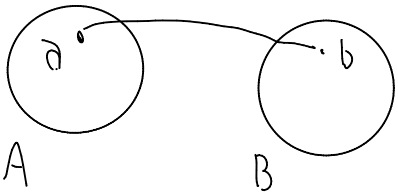
29.09.21

mercoledì 29 settembre 2021 10:44

FUNZIONI

A, B $\Rightarrow$ Insiemi qualsiasi

$f : A \to B$ È una <u>funzione</u> che associa ad ogni elemento di A un <u>unico</u> elemento di B $\Rightarrow f(A)$



A è il dominio di f

B è il codominio (*spazio d'arrivo*) di f

$f(a)$ è l'immagine di B in A tramite f

$f(A)$ è l'insieme immagine $\Rightarrow \{f(a),\ a \in A\} \subseteq B$

$G(f)$ è il grafico di f $\Rightarrow \{(a,b) \in A \times B \quad b = f(a)\}$

Sia $C \subset A$ si chaiam restrizione di f a C $f|_C$ la funzione

$f|_C : C \to B$

$f|_C(c) = f(c)$

Esempio: restringere l'insieme della classe agli studenti di sesso maschile

DEF Si dice che f è **iniettiva** se $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2$ si ha $f(a_1) \neq f(a_2)$

DEF Si dice che f è **suriettiva** se $f(A) = B$

DEF Se f è sia iniettiva sia suriettiva, allora f è **biunivoca** (**biettiva**)

$$\forall b \in B \quad \exists!\, a \in A \quad f(a) = b$$

DEF Sia f biunivoca. Si chiama funzione inversa di f (f^{-1}) la funzione tale che

$$f^{-1}: B \longrightarrow A : f^{-1}(b) = a \qquad a \in A : f(a) = b$$

DEF Si chiama funzione identità di A la funzione

$$id_A : A \longrightarrow A \qquad id_A(a) = a$$

DEF Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Si chiama funzione composta di f e g la seguente

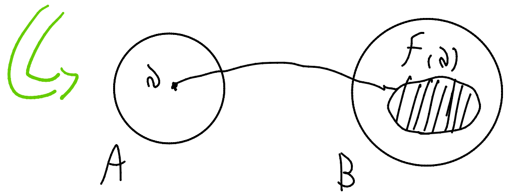
$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

OSS

Dare una funzione equivale a specificare $\begin{cases} f \\ A \end{cases}$

OSS Sia $f: A \to B$ una funzione qualsiasi

$\Rightarrow f: A \to f(A)$ è sempre **suriettiva**



OSS sia $f: A \to B$ biunivoca, allora

$f: A \to B$

$f^{-1}: B \to A$

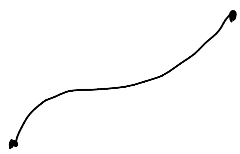
$f^{-1} \circ f(a) = id_A(a)$

$f \circ f^{-1}(b) = id_B(b)$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad B = \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

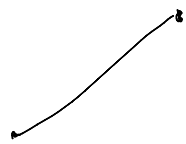
DEF f è (monotona) crescente se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$

si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$

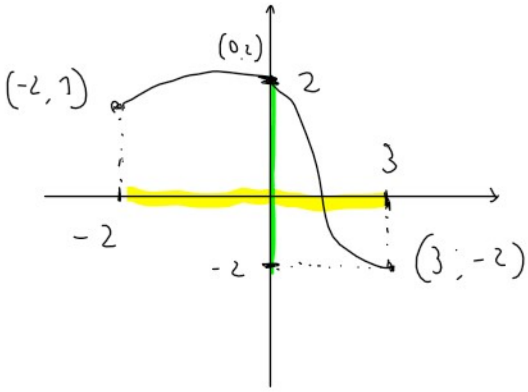


DEF f è (monotona) strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$



ES



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

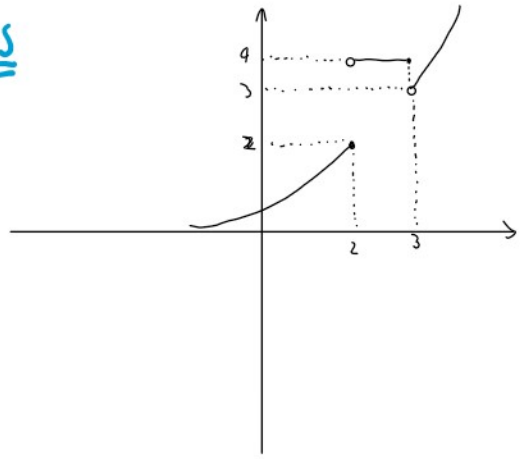
$D(f) = [-2;3]$

DOMINIO

$f(A) = [-2;2]$

INSIEME IMMAGINE

ES



$A = D(f) = \mathbb{R}$

$f(A) = (0,2] \cup (3,+\infty)$

DEF

sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia dice che f è superiormente, inferiormente limitata se $f(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente, inferiormente limitato

DEF

f è superiormente limitata se $\exists K \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq K \quad \forall x \in A$

f è inferiormente limitata se $\exists H \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq H \quad \forall x \in A$

In particolare, f è limitata se è sia superiormente che inferiormente limitata

$\sup f(x) = \sup f(A)$

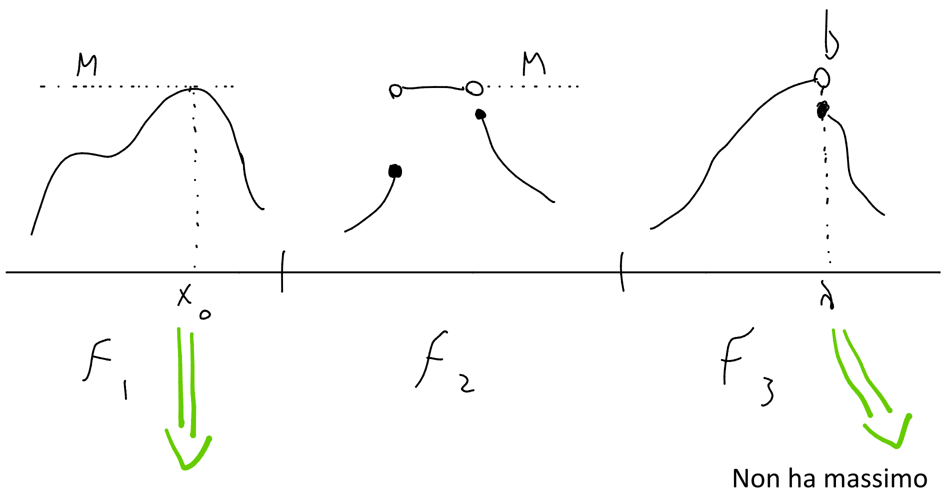
$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$$

DEF

Si dice che f ha massimo in A se $f(A)$ ammette massimo M $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in A : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$

ES



X_0 è punto di massimo

Non ha massimo

$b \notin D(f_3)$

DEF

Si dice che f ha minimo in A se $f(A)$ ammette minimo m $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in A : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$

05.10.2021

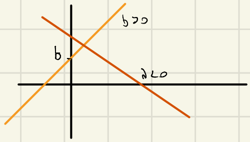
Funzioni Elementari

- Funzione costante : $f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}$

  $D: \mathbb{R}$

- Funzioni di primo grado : $f(x) = ax + b \qquad a \neq 0$

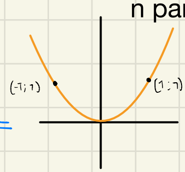
  $D: \mathbb{R}$



- Funzioni potenza di x : $f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

  $D: \mathbb{R}$

n pari

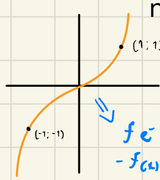


f è PARI $\Leftarrow$

$f(x) = f(-x)$

- NON INIETTIVA
- NON SURIETTIVA

n dispari



$\Rightarrow$ f è DISPARI

$-f(x) = f(-x)$

- INIETTIVA
- SURIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE
- BIUNIVOCA
- MONOTONA

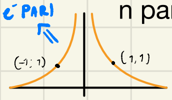
- Funzioni potenza di x negative : $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

  $D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  $\Rightarrow (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

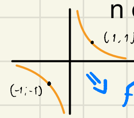
f è PARI

n pari



- NON INIETTIVA
- NON SURIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE < 0
- STRETTAMENTE DECRESCENTE > 0

n dispari

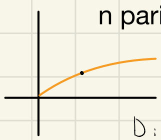


$\Rightarrow$ f è DISPARI

- NON SURIETTIVA
- INIETTIVA

- Funzioni radice ennesima di x : $f(x) = \sqrt[n]{x}$

n pari

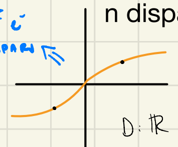


$D: [0; +\infty)$

- NON SURIETTIVA $n \geq 2$
- INIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE

f è DISPARI

n dispari



$D: \mathbb{R}$

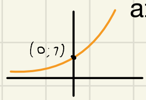
$n \geq 3$

- SURIETTIVA
- INIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE
- BIUNIVOCA
- MONOTONA

- Funzioni esponenziali : $f(x) = a^x \qquad a > 0,\ a \neq 1$

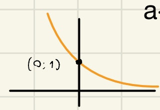
  $D: \mathbb{R}$

a>1



- NON SURIETTIVA
- INIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE

a<1

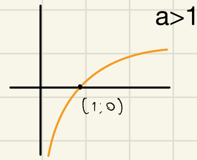


- NON SURIETTIVA
- INIETTIVA
- STRETTAMENTE DECRESCENTE

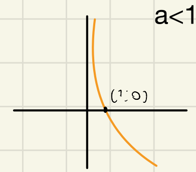
- Funzioni logaritmiche:

$f(x) = \log_a x \qquad a>0,\ a\neq 1$

$D: (0; +\infty)$

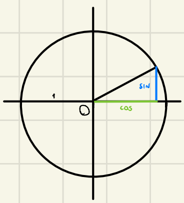


- SURIETTIVA
- INIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE
- BIUNIVOCA
- MONOTONA



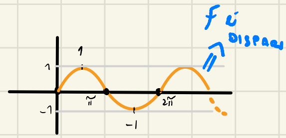
- SURIETTIVA
- INIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE
- BIUNIVOCA
- MONOTONA

- Funzioni trigonometriche:



$f(x) = \sin x$

$f^{-1}(x) = \arcsin x: [-1;1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



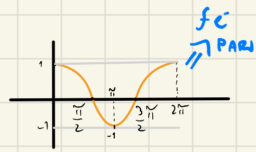
$\sin k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{Im}(\sin) = [-1; 1]$

- PERIODICA $P = 2\pi$
- NON INIETTIVA
- NON SURIETTIVA

$f(x) = \cos x$

$f^{-1}(x) = \arccos x: [-1;1] \rightarrow [0; \pi]$



$\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

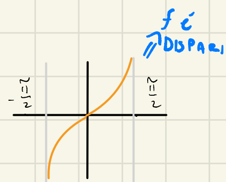
$\mathrm{Im}(\cos) = [-1; 1]$

- PERIODICA $P = 2\pi$
- NON INIETTIVA
- NON SURIETTIVA

$f(x) = \tan x$

$D: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$f^{-1}(x) = \arctan x: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$



- PERIODICA $P = \pi$
- SURIETTIVA
- NON INIETTIVA
- STRETTAMENTE CRESCENTE

06.10.2021

SUCCESSIONI

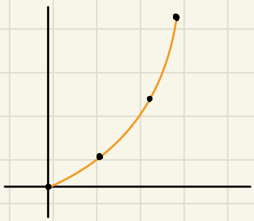
DEF si dice **successione** una funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(n) = a_n$$

termine generale
della successione

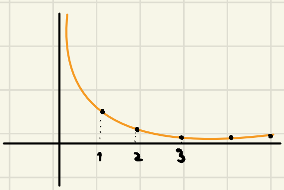
$$\{a_n\} \quad \{a_n\}_n \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a_n = n^2$$
$$n \in \mathbb{N}$$



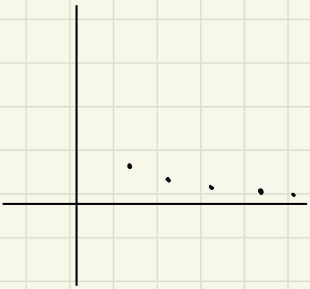
OSS Chiameremo **successione** ogni funzione definita per ogni $n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \ , \ n_0 \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ funzioni a partire da un certo n

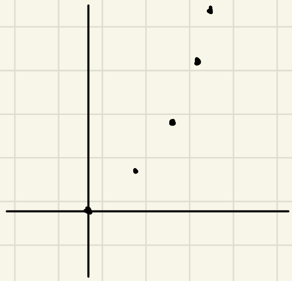
$$a_n = \frac{1}{n}$$
$$n \geq 1$$

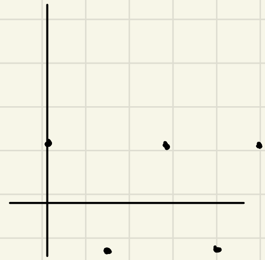


$$\operatorname{Im}\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \ n \geq 1\right\}$$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad a_n = n^2$ $\qquad a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ PARI} \\ -1 & n \text{ DISPARI} \end{cases}$







DEF sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali

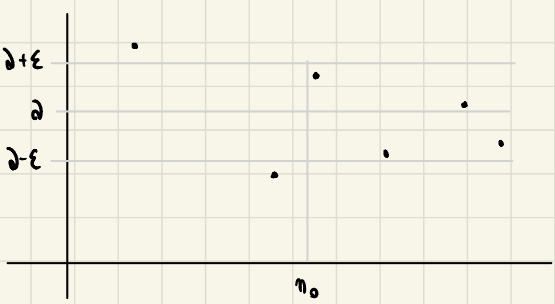
si dice che $\{a_n\}$ converge ad $a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ TENDE A $a \in \mathbb{R}$

(per n che tende a $+\infty$), e si indica con

$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \qquad a_n \xrightarrow[n]{(n \to +\infty)} a$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}:$

$\forall n \geq n_0, \ |a_n - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$



$\varepsilon > 0 \quad (a = 0)$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$

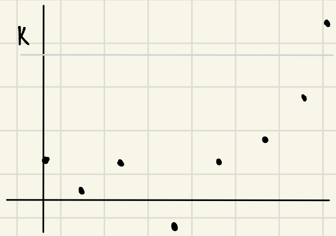
$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Downarrow$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

DEF si dice che $\{a_n\}$ **diverge positivamente**, cioè tende a $+\infty$ se

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \text{si ha} \quad a_n > K$$

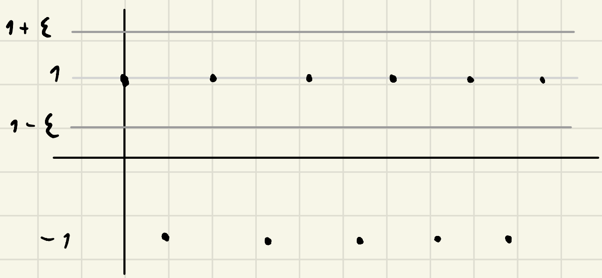


DEF si dice che $\{a_n\}$ **diverge positivamente**, cioè tende a $+\infty$ se

$$\forall H \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \text{si ha} \quad a_n < H$$

DEF una successione **converge** se tende a un numero finito, e **diverge** se tende a infinto.

si dice invece che **non ha limite** (*oscilla*) se non è né convergente né divergente



$a_n \to 1$

TEO **UNICITÀ DEL LIMITE**

se $\{a_n\}$ ammette un limite, questo è **unico**

OSS se $\{a_n\}$ è convergente, allora è anche **limitata**

TEO

PERMANENZA DEL SEGNO

sia $\{a_n\}$: $a_n \to a > 0$ oppure $a_n \to +\infty$

allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ $\forall n \geq n_0$

$\{n^\alpha\}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

OPERAZIONI SUI LIMITI

TEO siano $\{a_n\}, \{b_n\}$: $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$

- $a_n \pm b_n = a \pm b$
- $a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- $a_n / b_n = a/b$ $(b \neq 0)$

TEO siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$:

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n$

allora $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = l$

12.10.2021

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \nexists & a = -1 \\ & a < -1 \end{cases}$$

OSS $\{a_n\}$ $\quad a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$

$a_n \to l \Rightarrow |a_n| \to |l|$

$$\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} : \quad -\infty < x < +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \pm\infty = \pm\infty$

$\pm\infty \pm\infty = \pm\infty$ ← SOLO SEGNO UGUALE

$x > 0 \quad x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

$x < 0 \quad x \cdot \pm\infty = \mp\infty$

$\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$

$\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x / \pm\infty = 0$

Come si estendono le operazioni sui limiti

TEO $\{a_n\}, \{b_n\}$ $\quad a_n \to \ell, \quad b \to \ell'$

$\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$

- $a_n + b_n \to \ell + \ell'$
- $a_n \cdot b_n \to \ell \cdot \ell'$
- $a_n / b_n \to \ell / \ell'$

purchè $\ell + \ell'$, $\ell \cdot \ell'$, ℓ / ℓ' siano definiti

ES

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2^n + \sqrt{n}\right) = +\infty$$

$2^n \to +\infty$

$\sqrt{n} \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n^3 + (-1)^n\right) =$$

$n^3 \to +\infty$

$(-1)^n \to \nexists$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{n^3}_{+\infty}\left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^3}}_{0}\right)\right) = +\infty$$

$$\underbrace{\frac{-1}{n^3}}_{0} \leq \frac{(-1)^n}{n^3} \leq \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{0}$$

teorema del confronto $\downarrow$ 0

OSS

se $a_n \to 0$ e b_n è **limitata**

allora $a_n \cdot b_n \to 0$

Forme indeterminate (o di indecisione):

- $\pm\infty \mp \infty$
- $0 \pm \infty$
- $\pm\infty / \mp\infty$
- 0^0
- 1^∞
- ∞^∞

$a_n \to 0$	$b_n \to +\infty$	$a_n \cdot b_n$
$1/n$	n^2	$+\infty$
$1/n^2$	n	0
k/n	n	k
$\frac{(-1)^n}{n}$	n	$\nexists$

DEF si dice che $\{a_n\}$ è monotona **crescente** se $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

strettamente crescente se $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

DEF si dice che $\{a_n\}$ è monotona **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

TEO **teorema di esistenza di un limite per successione monotona**

Sia $\{a_n\}$ crescente e sia $l = \sup\{a_n\}$

allora $a_n \to l \implies \{a_n\}$ è *regolare*

$\uparrow$

DIM

- $l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; a_{\bar{n}} \in \{a_n\}$:

$l - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq l$

$\Downarrow$

$a_n \leq l \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow$

$l - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \leq l$

$\forall n > \bar{n}$

- $l = +\infty$

$k \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_{\bar{n}} > K$

$\forall n > \bar{n}$

$a_n \geq a_{\bar{n}} > K$

Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proprietà relativa a n

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} : P(n)$ VALE $(n \geq n_0)$
- SE $P(n)$ È VERA, $P(n+1)$ È VERA

$\implies$ $P(n)$ VALE $\forall n \geq n_0$

Es

$$P_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

- $n_0 = 0 \qquad q^0 = 1 \qquad \frac{1-q}{1-q} = 1$

IPOTESI INDUZIONE
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ È VERA $= P_{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

DIM
- $\sum_{k=0}^{n+1} q^k + q^{n+1}$

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q}$$

Es

Disuguaglianza di Bernouli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= P_{(n)} \qquad x \in (-1; +\infty)$$

- $P_{(n)}$ È VERA $\quad 1 \geq 1$

IPOTESI INDUZIONE
- $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

DIM
- $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

Successioni definite per Ricorrenza

consideriamo la seguente successione:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

ES
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

ES 2
fibonacci
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Condizione Sufficiente per la *regolarità* di $\{a_n\}$ è la sua **monotonia**

Se $\{a_n\}$ **non** è **limitata** $\nearrow +\infty$, $\searrow -\infty$

se $\{a_n\}$ è **limitata** esiste limite $l \in \mathbb{R}$

$a_n \to l$

$a_{n+1} \to l$

se f è somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni elementari e $a_n \to l$ si ha $f(a_n) \to f(l)$ con $(l \in D(f))$

$a_n \to l$

$a_{n+1} \to l$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & f(l) \end{array}$$

DEF Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l \in A$

si dice che l è **punto fisso** di f

se $f(l) = l$

ES

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \end{cases}$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$a_n > 0 \quad \forall n$

- $a_0 = 2 > 0$
- $a_n > 0 \xRightarrow{\text{INDUZIONE}} a_{n+1} > 0$

MONOTONA

$a_0 = 2 \qquad a_1 = \frac{5}{4} \qquad a_2 = \frac{41}{40}$

DECRESCENTE

$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\| $

$P(n)$

- VERO PER $n=0$
- $a_{n+1} < a_n \Rightarrow P(n)$

$a_{n+2} < a_{n+1} \Rightarrow P(n+1)$

- $\frac{1}{2}\left(a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \overset{?}{<} a_{n+1}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right) \overset{?}{<} \frac{a_{n+1}}{2} \Rightarrow a_{n+1}^2 \overset{?}{>} 1$$

15.10.2021

$$(1+a_n) \longrightarrow e \qquad \frac{(1+a_n)^{\alpha}-1}{a_n} \longrightarrow \alpha$$

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \longrightarrow 1 \qquad \frac{e^{a_n}-1}{a_n} \longrightarrow 1$$

Limiti Notevoli

$$\sin a_n \to 0 \qquad \cos a_n \to 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n}$$

$$\Downarrow$$

supponiamo $a_n > 0$

$$0 < \sin a_n < a_n < \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$$

$$0 < \frac{\cos a_n}{\sin a_n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sin a_n}$$

$\times \sin a_n$

$$0 < \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1$$

$$\cos a_n \to 1, \quad \frac{\sin a_n}{a_n} \xrightarrow{\text{teorema confornto}} 1, \quad 1 \to 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2}$$

$$\frac{(1+\cos a_n)(1-\cos a_n)}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n}$$

$$\frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \to 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan a_n}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan a_n}{a_n} = 1$$

ES

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \sin\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin 3/n}{3/n} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)}{4\sin\frac{2}{n}} = \underbrace{\frac{\ln\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot \tan\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4\sin\frac{2}{n}} = \frac{\tan\frac{1}{n}}{4\sin\frac{2}{n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{\frac{2}{n}}{\sin\frac{2}{n}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

DEF

siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ $\quad a_n \neq 0 \quad b_n \neq 0 \quad \forall n$

si dice che sono **asintotiche** se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

si indica con $a_n \sim b_n$

OSS

asintotici dai limiti notevoli

- $\ln(1+a_n) \sim a_n$
- $(1+a_n)^\alpha \sim \alpha \cdot a_n$
- $e^{a_n} - 1 \sim a_n$
- $\sin a_n \sim a_n$
- $1-\cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$
- $\tan a_n \sim a_n$
- $\arctan a_n \sim a_n$

OSS

non è detto che $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ siano infinitesimi

DEF siano $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\qquad b_n \neq 0 \ \forall n$

si dice che a_n è "o **piccolo**" di b_n se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si indica con $a_n = o(b_n)$

OSS

se $a_n \sim b_n$, $b_n \sim b'_n$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n b_n = \lim_{n \to +\infty} a'_n b'_n$$

$\begin{pmatrix} b_n \neq 0 \\ b'_n \neq 0 \end{pmatrix}$ $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a'_n}{b'_n}$$

ES

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \cdot \sin\frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)}$$

$\sin\frac{2}{n} \sim 2/n \qquad \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \sim \frac{3}{n^2} \qquad 1 - \cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n} \cdot \frac{2}{\cancel{n}} \cdot \frac{3}{\cancel{n^2}}}{e^3 \cdot \frac{1}{2\cancel{n^2}}} \qquad \frac{12}{e^3}$$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin\frac{1}{n}} - 1}{\left(e^{2/n^2} - 1\right) \cdot \arctan\left(\frac{-L}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{3n}}{\frac{2}{n^2} \cdot \left(\frac{-L}{n}\right)}$$

19.10.2021

DEF

sia $\{a_k\}$ una successione

si chiama **serie di termine generale** a_k l'operazione di associazione ad $\{a_k\}$ la successione $\{s_n\}$

dove $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

la successione S_n è detta **successione delle somme parziali** e si indica

con $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Es

$$a_k = (-1)^k$$

$+1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1$

$\underline{s_0 = 1} \qquad \underline{s_1 = 0} \qquad \underline{s_2 = 1} \qquad \underline{s_3 = 0}$

DEF

diciamo che la serie di termine generale a_k è **convergente**

se *esiste finito* $\lim_{n \to +\infty} s_n$ $(= S)$

in questo caso S è la **somma** della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_k = S$

TEO **CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA**

se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\lim_{n \to +\infty} a_k = 0$

DEF

diciamo che la serie di termine generale a_k è **divergente**

se *esiste infinito* $\lim_{n \to +\infty} s_n$

Oss

data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ se si cambia un numero finito di termini

il **carattere** della serie non cambia

Oss

data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $c \neq 0$ le serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (c \cdot a_n)$

hanno sempre lo **stesso carattere**

Oss

date $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ se

- entrambe convergono S, S' allora

  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$ converge e ha somma $S + S'$

- $\sum^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge $(\pm \infty)$

  allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverge $(\pm \infty)$

ES

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (\text{SE } x=0 \quad x^0 = 1)$$

è la **serie geometrica di ragione x**

DEF

sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice che **converge assolutamente** se è

convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

TEO

se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora la serie converge

TEO

sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_k$ e $a_k \geq 0$

allora la serie è **regolare**, cioè, o **converge** o **diverge** a $+\infty$

20.10.2021

ES

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$ serie armonica

$$\{s\}_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\{s_{2^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

proviamo che $\{s_{2^k}\}$ non è limitato superiormente limitato

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right)}_{2^1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}\right)}_{2^2} + \underbrace{\left(\qquad + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2^2} + 2^2\frac{1}{2^3} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}k$$

$$s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \implies$$ non è superiormente limitata

OSS

$$0,\bar{9} = 1$$

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$$

$$\frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \dots\right)$$

$$\frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 1$$

TRA 0 E 1

SOMMA $\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$

TEO **CRITERIO DEL CONFRONTO**

siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con $a_n, b_n > 0$

e siano $a_n \leq b_n$ allora

- se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge
- se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

DIM

- $s_n = a_0 + a_1 + a_n \leq b_0 + b_1 + b_n = s'_n$

$$0 \leq s_n \leq s'_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

per il teorema del confronto

$$+\infty = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq \lim_{n\to+\infty} s'_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s'_n = +\infty$$

- SE $\lim_{n\to+\infty} s'_n = S' \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{s_n\}$ é SUP. LIM.

$(s_n \leq S')$

TEO

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

siano $\sum_{0}^{+\infty} a_n$ $\sum_{0}^{+\infty} b_n$ con $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\forall n \geq n_0)$

se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, $c \in \mathbb{R}$

allora le due serie hanno lo stesso carattere

dim

$$c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq N$$

sia $\varepsilon = \frac{c}{2}$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} c$$

$$\frac{c}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2} c \cdot b_n$$

SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c}{2} b_n$ CONVERGE.

SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2} c b_n$ DIVERGE

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE $\qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$? $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\ln n}$?

DIV

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

ES

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$ serie di Mengoli

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n$$

$$S = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$

26.10.2021

TEO

CRITERIO DELLA RADICE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

SIA $a_n > 0$

SIA $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}$

se $l < 1$ la serie converge

se $l > 1$ la serie diverge

se $l = 1$ non si può concludere

ES

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^a}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^a}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{a \ln n}{n}} \to 0 = 1$$

ES

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)^n} \qquad a_n^{1/n} = \frac{n^{3/2}}{2n} = \frac{\overbrace{e^{\frac{3}{n}\cdot \ln n}}^{\to 1}}{2n} =$$

$$= \longrightarrow 0 \Rightarrow a_n \text{ CONVERGE}$$

TEO CRITERIO DEL RAPPORTO

SIA $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}$

se $\ell < 1$ la serie converge

se $\ell > 1$ la serie diverge

se $\ell = 1$ non si può concludere

ES

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2n!} = a_n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,/\,(2n+2)!}{(2n+2)!\,/\,(2n)!} =$$

$$= \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow 0 \Rightarrow a_n \text{ CONVERGE}$$

SERIE CON SEGNO QUALSIASI

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n a_n \qquad a_n > 0 \qquad \varepsilon_n \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Caso particolare di serie a segno qualsiasi sono le **serie a segno alternato**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad a_n > 0$$

TEO **CRITERIO DEL LEIBNIZ**

SIA $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ TALE CHE

- $a_n > 0$
- $a_n \to 0$
- $a_{n+1} < a_n$

allora la serie **converge**

LIMITI DI FUNZIONI

$$X \subseteq \mathbb{R}$$

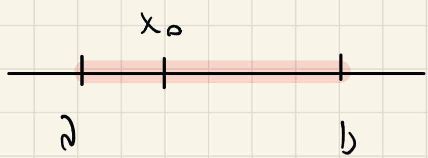
DEF

- $x_0 \in \mathbb{R}$ è di **accumulazione** X se $\forall r > 0$
  $((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$
- $x_0 \in X$ è un **punto isolato** per X se $\exists r > 0$
  $((\alpha_0 - r, \alpha_0 + r) \cap X) = \{x_0\}$
- $x_0 \in X$ è un **punto interno** a X se $\exists r > 0$
  $: (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq X$

ES

$$X = [a, b]$$

$a < b$



a, b accomulazione, non interni

$a < x_0 < b$ accomulazione, interno

DEF

SIA f $X \subseteq \mathbb{R}$ E SIA x_0

DI ACCUMULAZIONE PER X

SI DICE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; \forall x \neq x_0,$

$x \in X \cap (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$

SI HA $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

DEF

sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non* superiormente limitato

si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

SE $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \quad x > H$

SI HA $\quad 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$

DEF

sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non* superiormente limitato

si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

SE $\forall K > 0 \quad \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \quad x > H$

SI HA $\quad f(x) > K$

ES $\quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad (a > 1)$

proviamo che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists H \in \mathbb{R}$

$\forall x < H \quad$ SI HA $\quad \cancel{-\varepsilon <} a^x < \varepsilon$

$x < \log_a \varepsilon$

ES

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \forall x > M \quad \frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

TEO

SIA $f \; X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

x_0 DI ACCUMULAZIONE PER X

ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

SE E SOLO SE $\forall \{x_n\} \subset X$
$x_n \longrightarrow x$

SI HA $f(x) \longrightarrow l$

TEO UNICITÀ DEL LIMITE

SIA x_0 DI ACC. PER X

E SIA $f\ X \to \mathbb{R}$ SE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, ALLORA l È UNICO

27.10.2021

TEO OPERAZIONI SUI LIMITI

SIA x_0 DI ACC. PER X

E SIANO $f, g: X \to \mathbb{R}$

SE $f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l' \in \overline{\mathbb{R}}$$

ALLORA:

PURCHÉ

- $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'$ — $l+l'$
- $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$ — $l \cdot l'$ SIANO DEFINITI
- $\lim_{x \to x_0} (f/g)(x) = l/l'$ — l/l' IN $\overline{\mathbb{R}}$

TEO

LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

SIANO $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$

SIA x_0 DI ACC. PER X E SIA

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

SIA y_0 DI ACC. PER Y E SIA

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = l$$

SUPPONIAMO CHE $g \circ f$ SIA DEFINITA

IN $((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap X$

SUPPONIAMO INOLTRE CHE SIA

$f(x) \neq y_0$ IN $((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap X$

ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l$$

ES

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists \delta > 0 \quad e^{x_0} - \varepsilon < e^x < e^{x_0} + \varepsilon$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(\underbrace{e^{x_0} - \varepsilon}) < x < \ln(\underbrace{e^{x_0} + \varepsilon})$$

$$x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_1$$

ES funzione composta

$$\lim_{x \to 2} (e^x + 4)^3 \qquad f(x) = e^x + 4$$

$$g(y) = y^3$$

$$= \lim_{y \to e^2 + 4} y^3 = \qquad f(x) \xrightarrow[x \to 2]{} e^2 + 4$$

$$(e^2 + 4)^3$$

Es

$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0 \qquad x_0 > 0$$

$$\lim_{x \to 7} e^{\underbrace{(x \ln(1+x)+4)}_{f(x)}}$$

$$\lim_{x \to 7 \ln(8)+4} e^{y} = e^{7 \ln(8)+4}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} \qquad f(x) = y \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$$

TEO

PERMANENZA DEL SEGNO

SIA $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E SIA

x_0 DI ACC. PER X

SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ ALLORA $\exists r > 0$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap ((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\})$

TEO

CONFRONTO

SIANO $f, g, h \quad X \longrightarrow \mathbb{R}$

E SIA x_0 DI ACC. PER X

E VALGANO LE SEGUENTI

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

OSS IL TEO. DEL CONFRONTO VALE ANCHE SE $x \to \pm\infty$

ES

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^x}_{\to +\infty} (\cos x + 3)$$

$(\cos x + 3)$ → OSCILLA TRA 2 E 4

NO LIMITE

$$\underbrace{2e^x}_{\to +\infty} < \underbrace{e^x(\cos x - 3)}_{\to +\infty} < \underbrace{4e^x}_{\to +\infty}$$

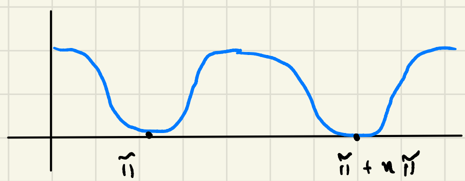
CONF.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(\cos x + 1)}{x}$$

$(\cos x + 1)$ → OSCILLA TRA 0 E 2

$x_n = \pi + 2n\pi \to +\infty$

$y_n = 2n\pi \to +\infty$



$f(x_n) = 0 \quad \forall n$

$f(y_n) = 2 \cdot e^{2n\pi} \to +\infty$

LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

DEF

$X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

SI DICE CHE x_0 È PUNTO DI ACC. A DESTRA PER X SE

$$\forall r > 0 , \quad X \cap (x_0 , x_0 + r) \neq \emptyset$$

DEF

$X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

SI DICE CHE x_0 È PUNTO DI ACC. A SINISTRA PER X SE

$$\forall r > 0 , \quad X \cap (x_0 - r , x_0) \neq \emptyset$$

DEF

SIA $f \ X \to \mathbb{R}$, x_0 DI ACC. A DESTRA PER X

SI DICE CHE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ SE

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\forall x \in X \cap (x_0 , x_0 + \delta)$$

2.11.2021

DEF

SIA $f: X \to \mathbb{R}$, x_0 DI ACC A SINISTRA PER X, SI DICE CHE

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{SE}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0)$$

SI HA $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

DEF

SI DICE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $-\infty$ SE

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0)$$

SI HA $f(x) > K$ $f(x) < K$

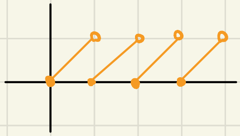
ES

$f(x) = [x]$ $\qquad x_0 = k \in \mathbb{Z}$

$\lim_{x \to k^+} [x] = k$ $\qquad \lim_{x \to k^-} [x] = k-1$

ES

$f(x) = x - [x]$



$\lim_{x \to k^+} x - [x] = 0$

$\lim_{x \to k^-} x - [x] = 1$

TEO

SIA $f\ X \to \mathbb{R}$, x_0 DI ACC. PER X

SIA A DESTRA CHE A SINISTRA

ALLORA

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ SE E SOLO SE

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

TEO ($\exists$ lim PER FUNZIONE MONOTONA)

SIA $f: X \to \mathbb{R}$, x_0 DI ACC. A DESTRA PER X

SIA f CRESCENTE ALLORA

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x)$$

SE x_0 È DI ACC. A SINISTRA PER X

SE $f(x)$ È CRESCENTE, ALLORA

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$$

LIMITI NOTEVOLI

SIA $f\ X \to \mathbb{R}$, x_0 DI ACC. PER X,

SIA INOLTRE $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $f(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$

ALLORA:

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \cos(f(x))}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\tan f(x)}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\arctan f(x)}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{(1 + f(x))^{\alpha}}{f(x)} = \alpha$$

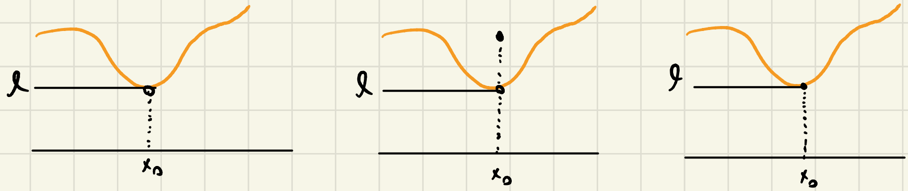
E7

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{e^{x-2}} - 1}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{1 + (e^{x-2} - 1)} - 1}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{1 + (e^{x-2} - 1)} - 1}{e^{x-2} - 1} \cdot \frac{e^{x-2} - 1}{x-2} =$$

$$\frac{1}{5} \cdot 1$$

CONTINUITÀ



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

DEF Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$

- se x_0 è isolato per X, diciamo che f è continua in x_0
- se x_0 è di acc. per X, diciamo che f è continua in x_0

  se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e $\ell = f(x_0)$

Si dice che $f: X \to \mathbb{R}$ è continua su X se è continua in ogni punto di X

OSS Le funzioni elementari sono continue sul loro dominio

ES

$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$$

$\varepsilon > 0$ $\qquad \underbrace{\ln x_0 - \varepsilon}_{\ell} < \ln x < \underbrace{\ln x_0 + \varepsilon}_{\ell}$

$$-\varepsilon < \ln x - \ln x_0 < +\varepsilon;$$

$$-\varepsilon < \ln \frac{x}{x_0} < \varepsilon;$$

$$e^{-\varepsilon} < \frac{x}{x_0} < e^{\varepsilon}; \qquad x_0 \cdot e^{-\varepsilon} < x < x_0 \cdot e^{\varepsilon}$$

DISCONTINUITÀ ELIMINABILE (TERZA SPECIE)

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ MA $\ell \neq f(x_0)$

ES $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$x_0 = 0$

- $f\ X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e di acc. per X

  allora f è continua in x_0 se e solo se $\forall \{x_n\} \in X$

  e ha $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

- Sia $f\ X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e di acc per X

  f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$ allora

  $\exists r > 0 \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap (x_0 - r, x_0 + r)$

- Sia $f, g\ X \to \mathbb{R}$ continua in x_0

  allora $f \pm g$, $f\ g$ $(g(x_0) \neq 0)$ f/g continua in x_0

TEO **TEOREMA DI WEIESTRASS**

SE $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA, ALLORA

f HA MASSIMO E MINIMO $[a,b]$

$\exists\ x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in [a,b]$

3.11.2021

TEO **TEOREMA DEGLI ZERI**

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

SIA $f(a), f(b) < 0$

ALLORA $\exists x_0 \in (a,b),\ f(x) = 0$

$[a,b] \Rightarrow I$ INTERVALLO NON INTERROTTO

TEO VALORI INTERMEDI

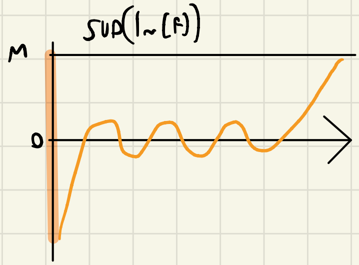
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua,

allora f allora f assume in I tutti

i valori tra $\inf\{f(x)\}$ e $\sup\{f(x)\}$

Se $I = [a, b]$

f assume tutti $[m; M]$



TEO CONTINUITÀ FUNZIONI MONOTONE

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f monotona

Allora f è continua su I se e solo se

$f(I)$ è un intervallo

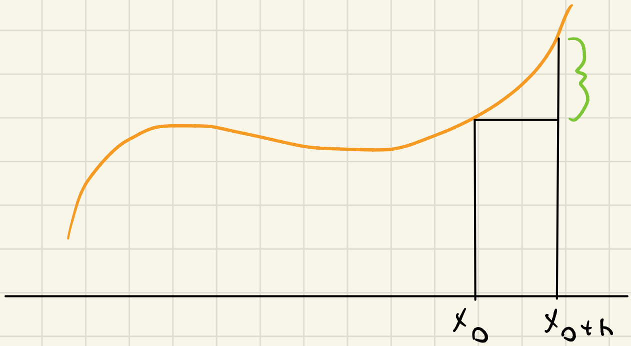
TEO CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, f continua

strettamente monotona, allora

$f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è continua

DERIVATA



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$\Downarrow$

rapporto incrementale $\Leftarrow$ variazione relativa di f nel passaggio da x_0 a x_0+h

ES $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$ $\quad h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = h+2$$

DEF

SIA $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ E DI ACC. PER X

SI DICE CHE f E' DERIVABILE IN x_0 SE

ESISTE FINITO $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

DERIVATA

OSS

SE f E' DERIVABILE IN x_0

ALLORA $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \omega_x$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega_x = 0$$

16.11.2021

DEF

SIA $x_0 \in X$ DI ACC. A DESTRA PER X

SI DICE CHE f HA DERIVATA DESTRA IN x_0

SE ESISTE FINITO

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

ES

$f(x) = |x| \qquad x_0 = 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

NON ESISTE

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = f'_+(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = f'_-(0)$$

TEO

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA DERIVABILITÀ

SIA $x_0 \in X$ DI ACC. PER X

SE f E' DERIVABILE IN x_0, ALLORA

f E' CONTINUA IN x_0

DEF

SE $\exists f'(x_0)$, LA RETTA DI EQUAZIONE

$y = f(x_0) + f(x)(x - x_0)$ E' LA RETTA

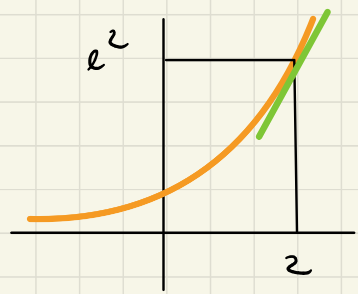
TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$

ES

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 2$

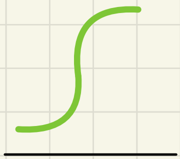
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{2+h} - e^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} e^2 \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} = e^2$$



$y = e^2 + e^2 (x - 2)$

DEF



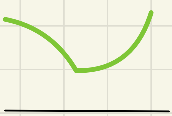
SIA $x_0 \in X$ DI ACC. PER X

SE $f : X \to \mathbb{R}$ E' CONTINUA IN x_0

E $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad (0 -\infty)$

x_0 E' UN PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE

DEF



SIA $x_0 \in X$ DI ACC. PER X

SE $f : X \to \mathbb{R}$ E' CONTINUA IN x_0

E $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$

E $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$

(OPPURE $l_1 = +\infty, -\infty$, $l_2 \in \mathbb{R}$ O VICEVERSA)

SI DICE CHE x_0 E' UN PUNTO ANGOLOSO

OSS

SIA $x_0 \in X$ DI ACC. PER X

SE $f : X \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN x_0

E $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad (-\infty)$

E $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \quad (+\infty)$

SI DICE CHE x_0 È PUNTO DI CUSPIDE

TEO DERIVATE DI SOMMA, PRODOTTO E QUOZIENTE

SIANO $f, g \ I \to \mathbb{R}$, x_0 INTERNO A I

SE $\exists f'(x_0), g'(x_0)$ ALLORA

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

SE $g(x_0) \neq 0$

OSS Siano $f_1, f_2 \dots f_n : I \to \mathbb{R}$

x_0 interno a I, $\exists f_i'(x_0)$ $i = 1 \dots n$

allora

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + \dots + f_n'(x_0)$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdot \dots \cdot f_n(x_0) +$$

$$f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0) \dots f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \dots f_n'(x_0)$$

TEO **DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE**

Siano I, J intervalli aperti e siano

$f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$

sia $x_0 \in I$, se $\exists f'(x_0)$, $\exists g'(f(x_0))$ allora

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

TEO **DERIVATA DI FUNZIONI INVERSE**

Sia I un intervallo aperto $f : I \to \mathbb{R}$

strettamente monotona e continua

Sia f derivabile in $x_0 \in I$ $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$

è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

1. $f(x) = c$ $\qquad f'(x) = 0$
2. $f(x) = x$ $\qquad f'(x) = 1$
3. $f(x) = x^n$ $\qquad f'(x) = n x^{n-1}$
4. $f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x$ $\qquad f'(x) = a^x \cdot \ln a$

   $0 < a < 1,\ a \neq 1$
6. $f(x) = \ln x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

   $x > 0$
7. $f(x) = \ln |x|$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

   $x \neq 0$
8. $f(x) = \log_a x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

   $x > 0;\ a > 0,\ a \neq 1$
9. $f(x) = \sin x$ $\qquad f'(x) = \cos x$
10. $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$
11. $f(x) = \tan x$ $\qquad f'(x) = 1 + \tan^2 x \ ; \ \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $f(x) = \arcsin x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $f(x) = \arccos x$ $\qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $f(x) = \arctan x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

SIA $I \to \mathbb{R}$ $\quad \forall x_0 \in I \quad \exists f'(x_0)$

INTORNO APERTO

DEF si chiama ***FUNZIONE DERIVATA*** di f la funzione $f': I \to \mathbb{R} \quad x \to f'(x)$

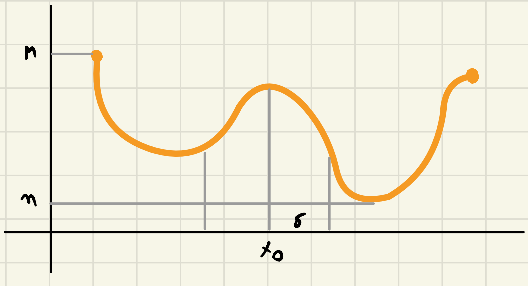
DEF SIA $f: I \to \mathbb{R}$, CON $f': I' \to \mathbb{R}$, CON $I' \subseteq I$

SIA $x_0 \subseteq I'$ DI ACC. PER I', SE ESISTE FINITO

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

si dice che f è derivabile due volte in x_0 e il valore del limite si indica con $f''(x_0)$

$f: X \to \mathbb{R}$



DEF sia $x_0 \in X$ si dice che x_0 è punto di **massimo relativo** (o **locale**) se

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

DEF se la funzione ammette massimo su X, detto x_m un punto di $X: f(x_m) = M$ è detto punto di **massimo assoluto** (o **globale**)

TEO

TEOREMA DI FERMAT

SIA $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 INTERNO A I

SIA f DERIVABILE IN x_0. SE x_0 È PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO RELATIVO, ALLORA

$f'(x_0) = 0$

23.11.2021

TEO

TEOREMA DI ROLLE

SIA $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ T.C.

- f È CONTINUA IN $[a, b]$
- f È DERIVABILE IN (a, b)
- $f(a) = f(b)$

ALLORA $\exists\ c \in (a; b) : f'(c) = 0$

TEO **TEOREMA DI CAUCHY**

SIANO $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ T.C.

- f, g CONTINUE IN $[a, b]$
- f, g DERIVABILI IN (a, b)

ALLORA $\exists\, c \in (a, b)$:

$$f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a))$$

TEO **TEOREMA DI LAGRANGE**

SIA $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ T.C.

- f CONTINUA IN $[a, b]$
- f DERIVABILE IN (a, b)

ALLORA $\exists\, c \in (a, b)$: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

- SIA f CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b)
  SE $f'(x)=0$ SU (a,b), f È COSTANTE

- SIANO f, g CONTINUE IN $[a,b]$ E DERIVABILI IN (a,b)
  SE $f'(x)=g'(x)$, ALLORA $f(x)=g(x)+\text{cost}$

TEO

TEST DI MONOTONIA

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b)

- $f'(x)>0 \quad \forall x\in(a,b) \Rightarrow f$ È STRETT. CRESCENTE IN (a,b)
- $f'(x)<0 \quad \forall x\in(a,b) \Rightarrow f$ È STRETT. DECRESCENTE IN (a,b)

TEO

CRITERIO DI MONOTONIA

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b)

- $f'(x)\geq 0$ SU $(a,b) \Leftrightarrow f$ È CRESCENTE IN (a,b)
- $f'(x)\leq 0$ SU $(a,b) \Leftrightarrow f$ È DECRESCENTE IN (a,b)

ES

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\exists\, f'(0)$?

$$\underset{x \neq 0}{f'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot -\frac{1}{\cancel{x^2}} =$$

$$2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \Big(\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \cos \frac{1}{x} \Big) \Rightarrow \text{non ESISTE}$$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{h}}{h} \to 0$$

24.11.2021

OSS

SIA $f : I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, $x_0 \in I$

SE f È DERIVABILE IN x_0

$$f(x) = f'(x_0)\, f(x-x_0) + \omega(x)(x-x_0) \qquad = o(x-x_0)$$

CON $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\omega(x)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

DEF

SIANO f, g DEFINITE IN UN INTORNO DI x_0, E SIA

$g(x) \neq 0$, $x \neq x_0$

SI DICE CHE f È "O PICCOLO" DI g PER $x \to x_0$

SE $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ SI INDICA CON $f(x) = o(g(x))$

ES

$f(x) = x^2 - x \qquad g(x) = x^{1/3} \qquad x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x^{1/3}} = \lim_{x \to 0} \left(x^{5/3} \to x^{2/3}\right) = 0$$

ES

$f(x) = x^2 - 1 \qquad x \to x_0 \qquad g(x) = x - 1$

$\frac{f(x)}{g(x)} = x + 1 \to 0$

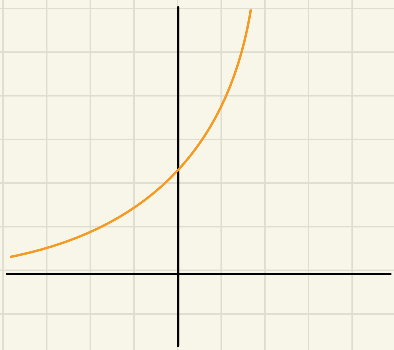
$\searrow$ se e solo se $\quad x \to -1$

- $o(g) + o(g) = o(g) \qquad x \to x_0$
- $g_1\, o(g_2) = o(g_1\, g_2)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

ES

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$



$e^x = 1 + x + o(x) =$

$= 1 + x + a x^2 + o(x^2)$

$e^x - 1 - x - a x^2 = o(x^2)$

$\frac{e^x - 1 - x - a x^2}{x^2} \to 0 \qquad x \to 0$

$$\overset{\hat{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - 2a x}{2x} \rightarrow \overset{\hat{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2a}{2} =$$

$$= \frac{1 - 2a}{2} = 0$$ SE E SOLO SE $a = \frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$e^x = 1 + x + o(x) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

DEF **Polinomio di Taylor**

SIA $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f DERIVABILE n VOLTE IN x_0

SI CHIAMA POLINOMIO DI TAYLOR D'ORDINE n

CENTRATO IN x_0 IL SEGUENTE POLINOMIO $T_n(x; x_0) =$

$$\frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

SE $x_0 = 0$, IL POLINOMIO $T_n(x; 0) = T_n(x)$ SI

CHIAMA POLINOMIO DI MAC LAURIN

OSS

$$T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

OSS

$T_n(x;x_0)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che ha in comune con f il valore delle derivate in x_0 fino all'ordine n (e il valore in x_0)

TEO **FORMULA DI TAYLOR**

SIA $f: I \to \mathbb{R}$ DERIVABILE $n-1$ VOLTE IN I E n VOLTE IN $x_0 \in I$, ALLORA

$$(*) \quad f(x) = T_n(x;x_0) + o(x-x_0)^n$$

INOLTRE, T_n E' L'UNICO POLINOMIO DI GRADO $\leq n$ PER CUI VALE $(*)$

ES

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \quad + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

ES

$$f(x) = \ln(1+x) \;;\; (1;+\infty) \to \mathbb{R} \qquad x_0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Big|_{x=0} = 1 = 0!$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} \Big|_{x=0} = -1 = -1!$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \Big|_{x=0} = 2 = 2!$$

$$f^{IV}(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4} \Big|_{x=0} = -2\cdot 3 = -3!$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

$$T_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

ES

$$f(x) = \cos(x) \qquad x_0 = 0$$

$$f'(x) = -\sin(x) \Big|_{x=0} \quad 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) \Big|_{x=0} \quad -1$$

$$f'''(x) = \sin(x) \Big|_{x=0} \quad 0$$

$$f^{IV}(x) = \cos(x) \Big|_{x=0} \quad 1$$

$$1 + 0\cdot x + \frac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + 0\cdot x^5 \ldots$$

$$T_{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Oss $\quad T_{2n} = T_{(2n+1)} \qquad f(x) = T_{2n}(x) + o(x^{2n})$

30.11.2021

ES $\quad f(x) = e^{x^2} - 1 - \sin^2 x \qquad x_0 = 0$

$f'(x) = 2x e^{x^2} - 2\sin x \cdot \cos x$

$f'(x_0) = 0$

$f'(x) > 0$? come

TEO **CONDIZIONE SUFFICIENTE PER ESTREMANTE IN UN PUNTO STAZIONARIO**

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto, f derivabile in I $(n-1)$ volte, e $\exists f^{(n)}(x_0)$, $x_0 \in I$

Se $f'(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ allora

- se n è pari
  - $f^{(n)}(x_0) > 0$: x_0 è minimo relativo forte
  - $f^{(n)}(x_0) < 0$: x_0 è massimo assoluto forte
- se n è dispari

  x_0 è flesso a tan. oriz.

ES

$F'(0)=0 \quad \Big| \quad F''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} - \cos^2 x + 2\sin^2 x \qquad F''(0) = 0$

$F'''(x) = 4x e^{x^2} + 8x e^{x^2} + 8x^3 e^{x^2} + 8\cos x \sin x + 4\sin x - \cos x$

$F'''(0) = 0$

$F^{IV}(x) \ldots\ldots \qquad F^{IV}(0) = 20$

PUNTO DI MINIMO LOCALE

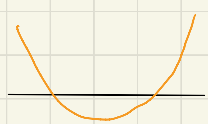
ES

CONCAVITÀ E CONVESSITÀ

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

F DERIVABILE $\qquad f$ DECRESCENTE IN $(-\infty; x_0)$

CRESCENTE IN $(x_0, +\infty)$

DEF

$f : I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, f DERIVABILE

- si dice che f è **convessa** (in I) se $\forall x_0 \in I$

$f(x) \geq f(x_0) + \underline{f'(x_0)(x - x_0)}$ TANGENTE

F SOPRA LA TANGENTE

strettamente convessa se $\forall x_0 \in I$, $x_0 \neq x$

$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

- si dice che f è **concava** (in I) se $\forall x_0 \in I$

$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

strettamente concava se $\forall x_0 \in I$, $x_0 \neq x$

$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

OSS

SIA $f : I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO

f È CONVESSA SE $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ y \geq f(x)\}$

È UN INSIEME CONVESSO

TEO

CONDIZIONE DEL II ORDINE DI CONVESSITÀ O CONCAVITÀ

SIA $f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO APERTO, DERIVABILE 2 VOLTE IN I, ALLORA f È CONVESSA (CONCAVA) IN I SE E SOLO SE

$f'(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \in I$

DEF

SIA $f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, f DERIVABILE IN I

SI DICE CHE x_0 È PUNTO DI FLESSO SE $\exists\, \delta > 0$

T.C. f È CONVESSA IN $(x_0 - \delta ; x_0)$ f È CONCAVA IN $(x_0 ; x_0 + \delta)$ O VICEVERSA

TEO

SIA $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 INTERNO A I, f DERIVABILE

SE x_0 È UN PUNTO DI FLESSO E $\exists\, f'(x_0)$

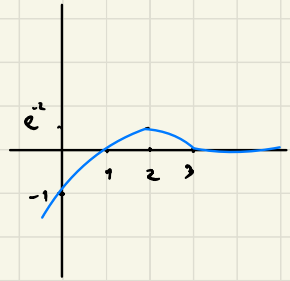
ALLORA $f'(x_0) = 0$

ES

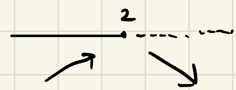
$$f(x) = (x-1)e^{-x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

NO AS. OBL. $\qquad$ $y=0$ AS. OR.



$$f'(x) = e^{-x} + -(x-1)e^{-x} = e^{-x}(2-x) \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} 0 \quad \begin{matrix} x<2 \\ x=0 \end{matrix}$$



$f(2) = e^{-2}$ MAX

$$f'' = -e^{-x}(2-x) + e^{-x}(-1) = (x-3)e^{-x} \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} 0 \quad \begin{matrix} x>3 \\ x=3 \end{matrix}$$

CALCOLO INTEGRALE

DEF

si dice che $G: I \to \mathbb{R}$ è **primitiva** di $f: I \to \mathbb{R}$ se

G è derivabile e $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

OSS

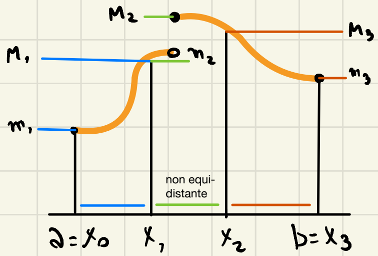
SE G E' UNA PRIMITIVA, ANCHE $G + \text{CONST}$ LO E'

INOLTRE G_1 E G_2 SONO PRIMITIVE DI f IN I

$\Rightarrow G_2 = G_1 + \text{CONST}$

01.12.2021

SIA $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, f LIMITATA $(\exists H, K \in \mathbb{R}: H \le f(x) \le K \ \forall x \in [a,b])$



DEF

si chiama **suddivisione** DI $[a, b]$

un insieme finito di punti

$$P = \left\{ \begin{matrix} x_0 = a, \ x_1, \ x_2 \dots x_n = b, \\ x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \end{matrix} \right\}$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} (f(x)) \qquad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} (f(x))$$

DEF

si chiama **somma superiore** associata a una qualsiasi suddivisione la seguente

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

DEF

si chiama **somma inferiore** associata a una qualsiasi suddivisione la seguente

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

OSS

SIANO P E Q DUE SUDDIVISIONI DI $[a,b]$ CON $P \subsetneq Q$. ALLORA

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

OSS

SIANO P_1 E P_2 DUE SUDDIVISIONI DI $[a,b]$ QUALSIASI, È VERO CHE $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$

SI CONSIDERA $Q = P_1 \cup P_2$

indichiamo $\sup\limits_{P \text{ suddiv. di } [a,b]} \{ s(f,P) \} = \underline{\int_a^b} f$ integrale inferiore

$\in \mathbb{R}$

$\inf\limits_{P \text{ suddiv. di } [a,b]} \{ S(f,P) \} = \overline{\int_a^b} f$ integrale superiore

DEF sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f limitata,

si dice che f è **riemann integrabile** su $[a,b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

ES di funzione non R-integrabile

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0;1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0;1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

funzione di dirichlet

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DI RIEMANN (O INTEGRALI DEFINITI)

- linearità se f, g sono integrabili su $[a,b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

- additività

SIA f INTEGRABILE IN $[a, b]$ E

SIA $c \in [a, b]$

ALLORA f È INTEGRABILE IN $[a, c]$ E $[c, b]$

E $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

- confronto
(o monotonia)

SIANO f, g, INTEGRABILI SU $[a, b]$

E $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$ ALLORA

$\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

TEO

SIA $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, LIMITATA, ALLORA f

È INTEGRABILE SU $[a, b]$ SE E SOLO SE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P$ SUDDIVISIONE DI $[a, b]$ T.C.

$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$

TEO

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA

ALLORA È INTEGRABILE

TEO

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, MONOTONA

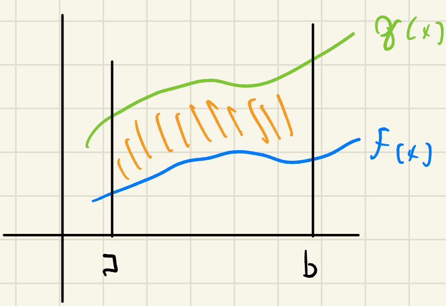
ALLORA È INTEGRABILE

14.12.2021

AREA DI FIGURE PIANE

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, INTEGRABILI

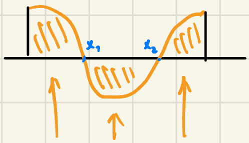
$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$



SIA $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$

SI DEFINISCE AREA DI $A =$

$$\int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$$



$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$\mathcal{A}A = \mathcal{A}A_1 + \mathcal{A}A_2 + \mathcal{A}A_3$$

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \qquad \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

OPPURE

$$\mathcal{A}A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

OSS

SE $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE

$$\left| \int_a^b f(x) \right| \le \int_a^b |f(x)|$$

TEO TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, INTEGRABILE ALLORA

SE $m = \inf f(x)$ E $M = \sup f(x)$ $x \in [a,b]$

LA MEDIA INTEGRALE DI f, $m(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f$, E' TALE CHE

$m \le m(f) \le M$

SE f E' CONTINUA, $\exists\, x_0 \in [a,b] : m(f) = f(x_0)$

FUNZIONE INTEGRALE

sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, e sia $x \in [a, b]$

si definisce $F = \int_a^b f(x) \; : \; [a,b] \to \mathbb{R}$

e si chiama **funzione integrale**

TEO

sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, e sia $x \in [a, b]$

allora $F(x) = \int_a^b f(x)$ è continua su $[a, b]$

TEO

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

allora $F(x) = \int_a^x f(x)$ è una primitiva di f su $[a, b]$

OSS

SE f è INTEG. IN $[a, b]$ $\quad x_0 \in [a, b]$

$$\int_{x_0}^{x} f = \int_a^x f + \int_{x_0}^{a} f = F(x) + \int_{x_0}^{a} f$$

(SECONDO TEOREMA)

TFI

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua, e sia

$G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f

allora $\int_a^b f = G(b) - G(a)$