FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

27.09.2021

Insiemi

- ## Forma

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 1, 3\}$ $C = \{1, 3, 2\}$

- $A = B$
- $A = C$
- $B = C$

due insiemi sono uguali quando possideono gli stessi elementi
in un insieme non si distingue la molteplicità e l'ordinde degli elementi

- ## Notazione

la notazione estensionale {} si utilizza esclisivamente con gli insiemi finiti

rappresentare l'insieme (infinito) dei numeri pari P:

$P = \{x \in N : x \bmod 2 = 0\}$ $\Rightarrow$ Notazione **intensionale** (operazionale) di un insieme infinito

$Q = \{x \in N : x \geq 1 \underset{\text{AND}}{\wedge} x \leq 10\}$ $\Rightarrow$ Notazione intensionale di un insieme finito

- ## Cardinalità

$\|A\| = 3$ $\|B\| = 3$ $\|C\| = 3$

la cardinalità rappresenta il numero di elementi

Insiemi fondamentali

- $\mathbb{N}$ Naturali
- $\mathbb{Z}$ Relativi
- $\mathbb{Q}$ Razionali
- $\mathbb{R}$ Reali

29.09.21

mercoledì 29 settembre 2021 08:58

$\forall x$ => Per ogni X

$\exists x$ => Esiste x

$\exists! x$ => Esiste un solo x

$\in$ => appartiene

$\notin$ => Non appartiene

Devono essere della stessa natura/tipo =>

OGG. $\in$ INS.

Esempi di sintassi corretta e errata

$A = PARI$
$S \notin A$ ✓

$\{S\} \in \mathbb{N}$ ✗

$\{S\} \subset \mathbb{N}$ ✓

$7{,}5 \in \mathbb{N}$ ✓

Errato ma corretto sintatticamente

$\subset$ => Inclusione stretta

$\subseteq$ => Inclusione imprecisa
PUO' ESSERE UGUALE

Paradosso di Russel

Un insieme appartiene a se stesso quando è della **stessa natura** (l'insieme dei concetti, è un concetto; l'insieme dei cani **non** è un cane)

Consideriamo l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi, e chiediamoci se questo insieme appartiene o meno a se -> appartiene a se stesso

$\Downarrow$

Gli insiemi che non appartengono a se stessi, e l'insieme degli stessi non sono insiemi, ma classi

$\emptyset$ => Insieme vuoto, è sempre incluso in tutti gli insiemi

Operazioni tra Insiemi

$\cup$ => Unione => restituisce un insieme con tutti gli elementi presenti nel primo o nel secondo

$\cap$ => Intersezione => restituisce un insieme con tutti gli elementi presenti in entrambi gli insieme

^{c} => Complemento => contiene tutti gli elementi dell'universo che non sono presenti nell'insieme

$/$ => Differenza => inseieme degli elementi che contiene il primo ma non il secondo

$P(A)$ => Insieme delle parti (di A) = {sottoinsiemi di A}

Esempio

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad \|A\| = n \Rightarrow \|P(A)\| = 2^n$

$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \emptyset, \{1,2,3\}\}$

$\{1\} \in P(A)$ ✓

$1 \in P(A)$ ✗

$\{\{1\}\} \subseteq P(A)$ ✓

$1 \in A$ ✓

$1 \subseteq A$ ✗

$\{1\} \subset A$ ✓

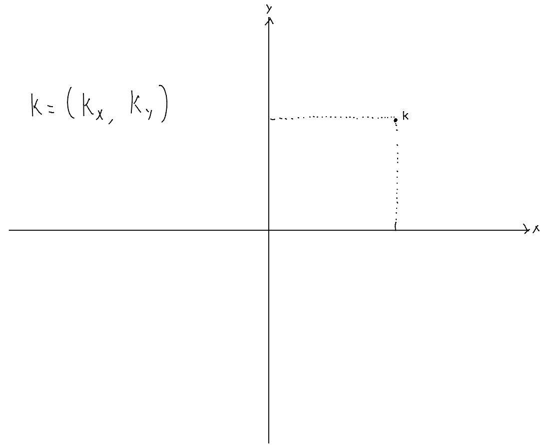
Prodotto Cartesiano

A, B $\qquad \|A \times B\| = \|A\| \times \|B\|$

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle,\ a \in A \wedge b \in B \} \Rightarrow$$ SELECT * FORM A,B

Coppie abbinate di elemente, il cui primo sta in A e il secondo sta in B

$k = (k_x, k_y)$



Esempio

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 5\}$

$A \times B = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 3,1 \rangle \}$

Partizione

Un insieme di insiemi in cui ogni elemento di A deve appartenere ad un elemento della partizione e l'intersezione fra gli elementi della partizione sia vuota

$A = \{1, 2, 3\}$

Partizioni di A

- $\{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \}$
- $\{ \{1, 2, 3\} \}$
- $\{ \{1, 3\}, \{2\} \}$
- $\{ \{1, 2\}, \{3\} \}$

Livello 0 $\Rightarrow$ ELxINS $= \langle 1, A \rangle$

Livello 1 $\Rightarrow$ INSxINS $= \langle \{1\}, P(A) \rangle$

Livello 2 $\Rightarrow$ INSxINS $= \langle \{\{1\}\}, P(P(A)) \rangle$

04.10.2021

Relazione

una relazione binaria è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $R \subseteq A \times B$

$$\langle a, b \rangle : a \in A \wedge b \in B$$

Arietà

$$R : N \times N = \{ \langle 5, 7 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 21, 74 \rangle, \langle 2, 5 \rangle \ldots \}$$

L'arietà stabilisce la natura degli insiemi e la molteplicità = numero di insiemi del cartesiano e loro tipo

$$R_1 : N \times Z \neq R$$

$R_2 : Q \times Q \rightarrow$ arietà: relazione binaria definita in Q x Q

$$< \; : N \times N = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 5, 7 \rangle \ldots \}$$

$$\leq \; : N \times N = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle \ldots \}$$

$$\Rightarrow \; < \; \subset \; \leq$$

$$= \; : N \times N = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \ldots \}$$

si possono definire relazioni di ogni arietà

$$+ : N \times N \times N = \{ \langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 7, 7, 14 \rangle, \langle 3, 1, 4 \rangle, \langle 1, 3, 4 \rangle \ldots \}$$

proprietà commutativa

$S : N \times N = \{ \langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle \dots \}$

f e S sono funzioni $\Rightarrow$ $\langle 1, 2 \rangle$ $\langle 1, 2, 3 \rangle$

dominio codominio

dipende da i primi due, può esserci solo un valore

gli elementi del dominio vanno in uno e un solo elemento del codominio

$\langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle = f$

una funzione si dice **suriettiva** quando ogni elemento del codominio è immagine di un elemento del dominio

una funzione si dice **iniettiva** se distinti elementi del dominio vengono mappati in elementi distinti del codominio

una funzione iniettiva è invertibile

$S \Rightarrow$ non è suriettiva perchè lo 0 nel codominio non corrisponde a nessun elemento del dominio

06.10.2021

approssimato per eccesso

per rappresnetare n Informazioni $\Rightarrow$ $\overline{\log_2 n}$ Bit

Funzione iniettiva $\Rightarrow$ (1) Rappresentazione univoca per ogni I

$\Downarrow$

f^{-1} Funzione inversa (2)

I1 $\rightarrow$ $\langle 000 \rangle$

I2 $\rightarrow$ $\langle 001 \rangle$

I3 $\rightarrow$ $\langle 010 \rangle$

I4 $\rightarrow$ $\langle 011 \rangle$

I5 $\rightarrow$ $\langle 100 \rangle$

Funzioni
- Totali : $f = x - 4 \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ D: $(-\infty; +\infty)$
- Parziali : $f' = x - 4 \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ D: $[4; +\infty)$

$f = \frac{4}{x} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ D: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ Parziale

la funzione inversa è biunivoca

- una funzione è **biunivoca** quando è iniettiva, suriettiva e totale
- una funzione è **biiettiva** quando è iniettiva, suriettiva e parziale

non implica che dominio e codominio abbiano la stessa cardinalità

11.10.2021

$S(\sqrt{x})$ $\quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

il successore della radice non esiste

$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

la funzione successore non è suriettiva

Operazioni

sia S un insieme, un'operazione è definita come $S^n \to S$

il prodotto crtesiano con se stesso per n volte

Funzione Caratteristica

dato un universo U un $A \subseteq U$ e un elemento $x \in U$

$$CAR(A, x) = \begin{cases} 1 & SE \ x \in A \\ 0 & SE \ x \notin A \end{cases}$$

non è sempre calcolabile

$\|A\| = n$ $\quad A = \langle 1, 2, 3 \rangle$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

000
001
010
011
100
101
110
111

$CAR(\emptyset, 1) = 0$

$CAR(\emptyset, 2) = 0$

$CAR(\emptyset, 3) = 0$

Proprietà delle Relazioni

vedi pag. 12

tabella di verità

A	$\rightarrow$	B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Data una relazione R essa può essere:

- riflessiva
- irriflessiva
- simmetrica
- assimmetrica
- antisimmetrica
- transitiva

$\Downarrow$

$\wedge$ and
$\vee$ or
$\neg$ not

- R si dice riflessiva quando $\forall x \quad xRx$
  $y = x$
- R si dice irriflessiva quando $\forall x \ \neg(xRx)$
  $y < x$
- R si dice simmetrica quando $\forall x, y$ se xRy allora yRx
  $R = \{<1,2>, <2,1>\}$
- R si dice asimmetrica quando $\forall x, y$ se xRy allora $\neg(yRx)$
  $R = \{<1,2>, <2,3>\}$
- R si dice antisimmetrica quando $\forall x, y$ se $(xRy) \wedge (yRx)$ allora $(x = y)$
- R si dice transitiva quando $\forall x, y, z$ se $(xRy) \wedge (yRz)$ allora (xRz)

18.10.2021

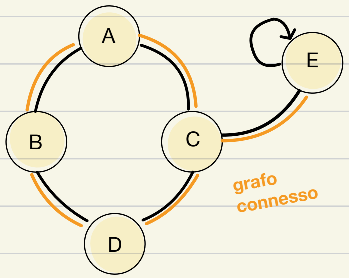
Grafi

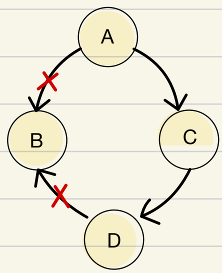
DEF

definiamo un **nodo isolato** come nodo privo di archi entranti o uscenti

DEF

un grafo si dice **connesso** quando presi due qualsiasi nodi distinti esiste un *semicammino*

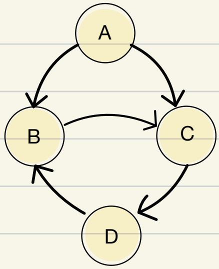




DEF

si dice che un grafo in un nodo A ha un **ciclo** quando esiste un *cammino* che da A torna ad A

si dice che un grafo in un nodo A ha un **semiciclo** quando esiste un *semicammino* che fa A torna ad A



tutti i nodi hanno un ciclo tranne A

tutti i nodi hanno un semiciclo

Alberi

DEF

un **DAG** è un grafo orientato e aciclico

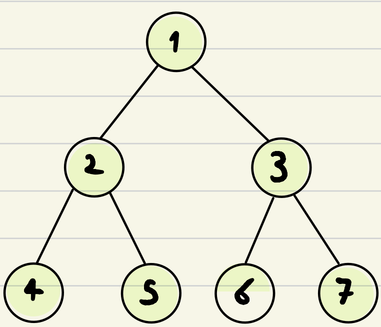
irect cyclic raph

DEF

l'**albero** è un tipo di *DAG* con varie proprietà aggiuntive:

- ha un **nodo radice**, ovvero un nodo senza *archi entranti*
- ogni nodo esclusa la radice ha uno e un solo *arco entrante*
- un nodo senza *archi uscenti* è detto **foglia**
- un albero si dice **bilanciato** se tutti i cammini dalla radice hanno lunghezza uguale

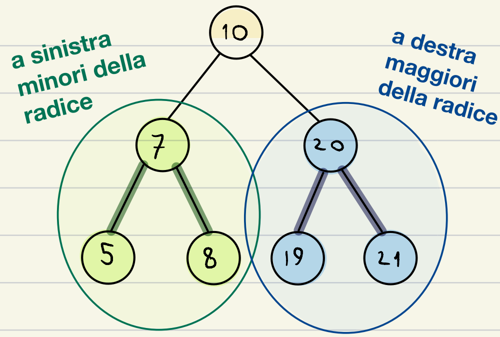
- un albero è detto **binario** quando per ogni nodo esistono al più *due archi uscenti*
- un albero è detto **strettamente binario** quando per ogni nodo esistono esattamente *zero* o *due archi uscenti*

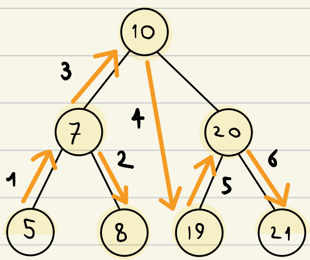


il numero di **nodi** di un albero *strettamente binario* e *bilanciato* si calcola con la seguente formula

$$2^n - 1$$

dove n è il numero di nodi che si incontrato percorrendo l'albero dalla radice un **albero** è detto **di ricerca** se tutti i nodi a sinistra della radice sono minori rispetto alla radice stessa, se tutti i nodi a destra rispetto alla radice sono maggiori o uguali rispetto alla radice stessa, e se tali proprietà persistono per tutti i sottoalberi.





visitando un *albero di ricerca* seguendo il seguente ordine:

- sottoalbero di sinistra
- radice
- sottoalbero di destra

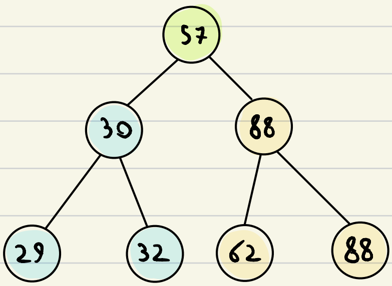
si ottiene una sequenza lineare e ordinata

20.10.2021

Rapporti tra le proprietà delle relazioni vedi pag. 9

- Ogni relazione *asimmetrica* è *irriflessiva*
- Ogni relazione *irriflessiva* e *transitiva* è *asimmetrica*
- Ogni relazione *asimmetrica* è *antisimmetrica*
- Ogni relazione *antisimmetrica* e *irriflessiva* è *asimmetrica* e *vicecersa*

Ricerca in un Albero



ricerca di

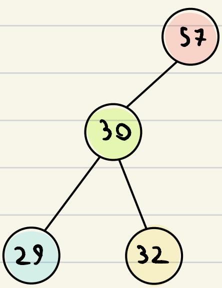
nell'albero

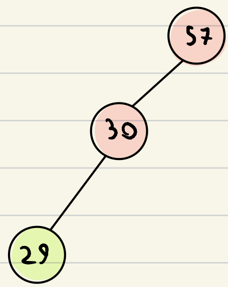
1) primo confronto con la radice

l'albero è *di ricerca*, quindi escludo il sottoalbero di destra in quanto la radice è più grande del nodo ricercato.

2) secondo confronto

escludo il ramo a destra in quanto il nodo con valore 30 è maggiore rispetto al nodo ricercato, 25.





3) terzo confronto

il nodo con valore 29 è una foglia, ed è diverso rispetto al nodo ricercato.
La ricerca di conclude con esito negativo.

Relazioni di Ordinamento

Data una relazione binaria R definita in $S \times S$ si di che essa è:

PreOrdine
- riflessiva
- transitiva

parziale
Ordine largo
- riflessiva
- antisimmetrica
- transitiva

quasi ordine
Ordine stretto
- asimmetrica
- transitiva

Ordine lineare

Tutti gli elementi di un insieme S, sono confrontabili tra di loro.

$$\forall x, y \in S, \; x \neq y, \; xRy \quad o \quad yRx$$

Proprietà tricotomica

una relazione si dice tricotomica quando $\forall x, y \in S$

- $x = y$ e non xRy, yRx

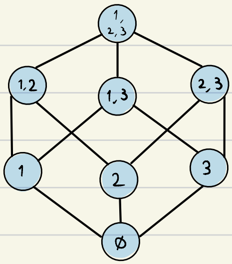
  oppure
- xRy e non $x = y$, yRx

  oppure
- yRx e non $x = y$, xRy

25.10.2021

Rappresentare Relazioni ad Ordine Largo

Diagramma di Hasse



- ogni nodo ha un cappio
- il grafo si legge dal basso verso l’alto
- la chiusura transitiva è implicita

Elementi Estremali

$\langle S, \leq \rangle$,
$s \in S$

- s è un **massimale** di S se $\nexists s' : s < s'$
- s è un **minimale** di S se $\nexists s' : s' < s$

- definiamo **maggiornate** di X $s \in S$ $s \geq x \in X$
- definiamo **minorante** di X $s \in S$ $s \leq x \in X$

$X \subseteq S$

- definiamo **minimo dei maggioranti** di X $\sqcup X \leq s'$
  $\forall s'$ maggiorante
- definiamo **massimo dei minoranti** di X $\sqcup X \geq s'$
  $\forall s'$ minorante

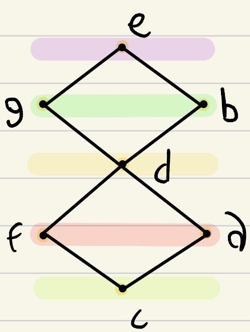
- se il *minimo dei maggioranti* appartiene a X si dice **massimo** di X
- se il *massimo dei minoranti* appartiene a X si dice **minimo** di X

27.10.2021

Reticoli

Latex

I **reticoli** sono dei particolari *ordini parziali* in cui, dati due elementi qualsiasi, abbiamo un *massimo minorante* e un *minimo maggiorante*.



si rappresentano con il **diagramma di Hasse**

non fa parte della definizione di reticolo, che i **sottografi** di un reticolo siano reticoli a loro volta.

ogni nodo sta sia sotto che sopra a se stesso in quanto la **riflessività** è *implicita*

$x \sqcup y$ minimo maggiorante - ***join***

$x \sqcap y$ massimo minorante - ***meet***

Proprietà dei Reticoli

- **Idempotenza**

$x \sqcap x = x$

$x \sqcup x = x$

- **Commutatività**

$x \sqcup y = y \sqcup x$

$x \sqcap y = y \sqcap x$

- **Associatività**

$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$

$x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

- **Assorbimento**

$x \sqcap (x \sqcup y) = x$

$x \sqcup (x \sqcap y) = x$

Esistono particolari reticoli che godono di ulteriori proprietà:

- **Distributività**

$$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$$
$$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$$

- **Completezza**

il *massimo minimale* e il *minimo massimale* appartengono al grafo

- **Complementazione**

$x \sqcap x' = 0 \quad \wedge \quad x \sqcup x' = 1$

03.11.2021

Algebra Booleana

l'**algebra booleana** è un reticolo *distributivo*, *limitato* e *complementato*.

$$B = \langle \sqcup, \sqcap, ', 0, 1, X \rangle$$

gli *assiomi* della *teoria degli insiemi* valgono per l'algebra booleana, e viceversa.

entrambi presentano la **stessa struttura**.

Assiomi

1) $x \sqcup y = y \sqcup x$
2) $x \sqcap y = y \sqcap x$
3) $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$
4) $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$
5) $x \sqcup 0 = x$
6) $x \sqcap 0 = 0$
7) $x \sqcup 1 = 1$
8) $x \sqcap 1 = x$
9) $x \sqcup x' = 1$
10) $x \sqcap x' = 0$
11) $0 \neq 1$

Duale

$x = 1 \rightarrow x^D = 0$

$x = 0 \rightarrow x^D = 1$

$x = \sqcup \rightarrow x^D = \sqcap$

$x = \sqcap \rightarrow x^D = \sqcup$

Principio di Dualità

vale per tutti gli assiomi

se $X = Y \iff X^D = Y^D$

dove X^D è il **duale** di X

e Y^D **duale** di Y

Altri teoremi e proprietà

- $(x')' = x$
- $x \sqcup x = x$
- $(x \sqcup y)' = x' \sqcap y'$

  De Morgan
- $(x \sqcup y') \sqcap (x \sqcup y) = x$
- $(x \sqcap y)' = x' \sqcup y'$

15.11.2021

Definitzione di N di Peano

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. se $x \in \mathbb{N}$ allora $S(x) \in \mathbb{N}$
3. niente alto $\in \mathbb{N}$

L'insieme $\mathbb{N}$ risulta sufficientemente definito perché la seconda clausola utilizza un x generico, perciò tale insieme è infinito.

Principio di Induzione

Base

$P(0)$

$P(1)$

Passo

IP $P(x)$

Tesi

TE $P(s(x)) \longrightarrow \forall x \ P(x)$

17.11.2021

Esempio di Induzione

Dimostrazione per Induzione che il numero $10^n - 1$ è sempre divisibile per 9

Base

$n = 1$

$10^1 - 1 \,\%\, 9 = 0$

Passo

IP: $10^n - 1 \,\%\, 9 = 0$

Tesi

TE: $10^{n+1} - 1 \,\%\, 9 = 0$

$$10(10^n) - 1 + 9 - 9 =$$
$$= 10(10^n) - 10 + 9 =$$
$$= 10[10^n - 1] + 9 =$$
$$= 10[9k] + 9 =$$
$$= 9[10k + 1] \,\%\, 9 = 0$$

Ricorsione

$$\text{BINOMIALE}(n; k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \text{ oppure } k = n \\ n & \text{se } k = 1 \text{ oppure } k = n+1 \\ \text{altrimenti} & \\ \text{BIN}(n-1, k) + \text{BIN}(n-1, k-1) & \end{cases}$$

⇑

il processo utilizzato dagli elaboratori per eseguire la ricorsione

22.11.2021

Linguaggio

Sintassi → forma

Semantica → significato

Pragmatica → uso

Logica Proposizionale

Definizione del **Linguaggio** della *Logica Proposizionale*

1. p, q, r — variabili proposizionali
2. $\land$ (and), $\lor$ (or), $\neg$ (not), $\rightarrow$ (implica) — costanti logiche
3. $($, $)$ — simboli ausiliari
4. nessun altro è un simbolo del linguaggio

Formule Ben Formate (FBF)

1. tutte le variabili proposizionali $\in L$
2. se $\overset{\text{metavariabili}}{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \in L$ allora $(\mathcal{A} \land \mathcal{B})$, $(\neg \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \lor \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \in L$
3. niente altro $\in L$

$$(\underbrace{(\overset{\text{FBF}}{p} \land \overset{\text{FBF}}{q})}_{\text{FBF}} \lor \underbrace{r}_{\text{FBF}}) \Rightarrow \text{FBF}$$

24.11.2021

Se e Solo Se

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} =_{DF} (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \land (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$$

Riduzione del Linguaggio

- *Primitive:* $\neg$, $\land$

De Morgan (vedi pag 18)

$$A \lor B = \neg(A \land \neg B) = \neg\neg A \lor \neg\neg B = A \lor B$$

De Morgan

$$A \to B = \neg(A \land \neg B) = \neg A \lor \neg\neg B = \neg A \lor B = A \to B$$

- *Primitive:* $\neg$, $\lor$

De Morgan

$$A \land B = \neg(\neg A \lor \neg B) = \neg\neg A \land \neg\neg B = A \land B$$

$$A \to B = \neg A \lor B$$

Dimostrabilità e Teoremi

$\vdash A \Rightarrow A$ è ***dimostrabile*** nella logica proposizionale

$\Gamma \vdash A \Rightarrow$ da **gamma** Γ , insieme di *ipotesi*, devo dimostrare A

Metodo dei Tableaux

$FA,\ TA$ => **Formule Segnate**

S => Insieme di **Formule Segnate**

Regole Deduttive

$T\neg\ \dfrac{S,\ T\neg A}{S,\ FA}$ $\quad T\vee\ \dfrac{S,\ TA\vee B}{S, TA \,/\, S, TB}$ $\quad F\neg\ \dfrac{S,\ F\neg A}{S,\ TA}$ $\quad F\vee\ \dfrac{S,\ FA\vee B}{S,\ FA,\ FB}$

$T\wedge\ \dfrac{S,\ TA\wedge B}{S,\ TA,\ TB}$ $\quad T\rightarrow\ \dfrac{S,\ TA\rightarrow B}{S, FA \,/\, S, TB}$ $\quad F\wedge\ \dfrac{S,\ FA\wedge B}{S, FA \,/\, S, FB}$ $\quad F\rightarrow\ \dfrac{S,\ FA\rightarrow B}{S,\ TA,\ FB}$

per dimostrare $\vdash A$? scrivo FA e applico le regole deduttive $\longrightarrow$ ottenendo n **configurazioni** $C_1 / \dots / C_n$

finché $\forall C_i$ $T_{FBF_i}, F_{FBF_i} \in C_i$ dunque il tableaux è **chiuso**

Esempio

$\vdash A\vee\neg A \longrightarrow FA\vee\neg A \longrightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{F A\vee\neg A}{FA,\ F\neg A}\ F\vee}{FA\ \ TA}\ F\neg$$

29.11.2021

Semantica della Logica Proposizionale Classica

Il significato delle *variabili proposizionali* è il loro essere o **vera** o **falsa**

Tabella di Verità

il falso implica sempre il vero

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

Classificazione Semantica delle FBF

- sempre vere (**valide** o **tautologie**)
- sempre false (**contraddizioni**)
- a volte vere a volte false (**soddisfacibili**)

Per verificare che una formula è una **contraddizione**, bisogna iniziare il tableaux con T $\Rightarrow$ voglio verificare se $A \wedge \neg A$ è o no una contraddizione

1
$$\dfrac{\dfrac{F\, A \wedge \neg A}{FA \;/\; F\neg A}}{FA \;/\; TA}$$

tableaux non chiuso

2
$$\dfrac{\dfrac{T\, A \wedge \neg A}{TA,\ T\neg A}}{TA,\ FA}$$

tableaux chiuso

risulta che la *formula* è una **contraddizione.**

le *contraddizioni* non sono **soddisfacibili**.

Rapporto tra Implicazione e Dimostrabilità

Teorema della Deduzione

$$A \vdash B \quad \longleftrightarrow \quad \vdash A \rightarrow B$$

Gamma come insieme di Ipotesi per dimostrare B

Il tableaux viene scritto in questo modo

$\Gamma \vdash B \quad \longleftrightarrow \quad \vdash \Gamma \rightarrow B$; $\quad \Gamma = \{A_1, \dots A_n\}$; $\quad TA_1, \dots TA_n, FB$

Logica Predicativa (del 1º Ordine)

Alfabeto

comune a tutti i linguaggi di primo ordine

- $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ costanti logiche
- $\forall, \exists$ **quantificatori**
- x, y, z **variabili individuali**

Segnatura

differente per tutti i linguaggi di primo ordine

- a, b, c **costanti individuali**
- f^n, g^k, h^w **funzioni** con la loro arietà
- P^h, Q^m, R^k **predicati** con la loro arietà

FBF

- ogni predicato $\in$ FBF
- se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ FBF allora

  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \ \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \ \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \ \neg \mathcal{A} \in$ FBF
- se $x \in$ *variabili individuali* allora

  $\left.\begin{array}{l} \forall_x P(x) \\ \exists_x P(x) \end{array}\right\} \in$ FBF
- se $P^n, t_1 \dots t_n \in$ TERM allora

  $P(t_1 \dots t_n) \in$ FBF
- niente altro $\in$ FBF

Termini del Linguaggio

- ogni *cost. ind.* $\in$ TERM
- ogni *var. ind.* $\in$ TERM
- se $t_1 \dots t_n \in$ TERM

  e $f^n \in$ LING allora

  $f(t_1 \dots t_n) \in$ TERM

- un **termine chiuso** non contiene variabili
- in una **FBF chiusa** tutte le variabili sono **quantificate**
- per indicare **l'unicità** di un predicato P : $P(x,y) \wedge \forall_z \left(P(x,y) \rightarrow (y = z)\right)$

09.12.2021

Mappatura dei Linguaggi di 1º Ordine

- I linguaggi del primo ordine sono abbastanza **potenti** da poter mappare ogni linguaggio

dato un *contesto*, la prima cosa da fare è stabilire come cambia la **segnatura**

ES: Mappatura dell'Aritmetica di Peano

Segnatura

- 0
- $S^1, +^2, *^2$
- $=^2, P^1, \leq^2$

Esempio di FBF

- $\forall_x \forall_y ((S(x) = S(y)) \rightarrow (x = y))$
- $\forall_x \forall_y (x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall_x \forall_y (x * S(y)) = x + (x * y))$

ES: Mappatura della Lingua Italiana

Segnatura

- socrate
- /
- $uomo^1$, $mortale^1$

Esempio di FBF

- $\forall_x (uomo(x) \rightarrow mortale(x))$
- uomo (socrate)
- mortale (socrate)

13.12.2021

Equivalenza Simboli Logici

- $\forall = \neg\exists\neg$
- $\exists = \neg\forall\neg$

16.12.2021

Nuove Regole Deduttive

vedi pag 23

$T\forall$
$$\frac{S, T\forall_x A(x)}{S, TA(a), T\forall_x A(x)}$$

$F\forall$
$$\frac{S, F\forall_x A(x)}{S, FA(b)}$$
nuova costante mai comparsa

$T\exists$
$$\frac{S, T\exists_x A(x)}{S, TA(a)}$$
nuova costante mai comparsa

$F\exists$
$$\frac{S, F\exists_x A(x)}{S, FA(a), F\exists_x A(x)}$$

Interpretazione

Una struttura è composta da un *Dominio* e un'*Interpretazione*

- $c \longrightarrow c' \in D$
- $f \longrightarrow f'$ funzione
- $P \longrightarrow P'$ relazione

Si associa alla variabili di una formula un termine del *dominio* tramite la funzione η di assegnamento
heta

Soddisfacibilità di Formule chiuse

$$S \models A \Rightarrow S \models P(t_1 \ldots t_n)$$

$S \models A \wedge B$ sse $S \models A$ e $S \models B$

$S \models A \vee B$ sse $S \models A$ o $S \models B$

$S \models A \rightarrow B$ sse $S \not\models A$ $S \models B$

$S \models \neg A$ sse $S \not\models A$

$S \models \forall_x A$ sse per ogni $c \in D$, $S \models A(c)$

$S \models \exists_x A$ sse esisite $c \in D$, $S \models A(c)$

$S \models t_1 = t_2$ sse t_1 uguale t_2

$S \models T$

$S \not\models F$

- una *formula* si dice **vera** se esiste *una* struttura che la soddisfa
- una *formula* si dice **valida** se è vera per *ogni* struttura e dominio