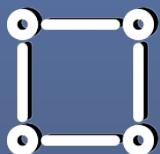




# GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

- Appunti -



## ○ ALGORITMO DI GAUSS

17.03.2022

$$Ax = B$$

$$A = \begin{matrix} \text{matrice} \\ \left( \begin{array}{cc} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$\bullet (A \mid B)$$

si chiama matrice completa del sistema

○ un sistema si può scrivere sotto forma di matrice

**esempio**

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

○ come operazione posso scambiare le equazioni (righe)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \lambda_{11} x_1 + \dots + \lambda_{1n} x_n = b_1 \\ \lambda_{21} x_1 + \dots + \lambda_{2n} x_n = b_2 \end{cases} \quad \text{equivalenti}$$

$$\begin{cases} (\lambda_{11} + \lambda \lambda_{21}) x_1 + \dots + (\lambda_{1n} + \lambda \lambda_{2n}) x_n = b_1 + \lambda b_2 \\ \lambda_{21} x_1 + \dots + \lambda_{2n} x_n = b_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_1 x = b_1 \\ A_2 x = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{riga}} \begin{cases} (A_1 + \lambda A_2) x = b_1 + \lambda b_2 \\ A_2 x = b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A_1 + \lambda A_2) x = A_1 x + \lambda A_2 x = b_1 + \lambda b_2$$

esempio

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+2\text{II}} \left( \begin{array}{cc|c} 8 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

● come operazione posso scambiare le colonne

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B \quad Ax = B$$

$$x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = B \quad (A^2 \ A^1 \ \dots \ A^n) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 = b_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = y_1 \quad x_2 = y_1$$

$$\begin{cases} \alpha_{12} y_1 + \alpha_{11} y_2 = b_1 \\ \alpha_{22} y_1 + \alpha_{21} y_2 = b_2 \end{cases}$$

● l'obiettivo dell'algoritmo di gauss è ridurre il sistema ad un sistema a scala

una **matrice a scala** è una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & \\ 0 & \alpha_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{kk} \end{pmatrix} \quad \alpha_{11} \dots \alpha_{kk} \neq 0$$

le singole righe possono essere interamente nulle

### esempio

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad \lambda_{11} \neq 0, \lambda_{22} \neq 0, \lambda_{33} \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \dots + \lambda_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + \lambda_{22}x_2 + \dots + \lambda_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \lambda_{kk}x_k + \dots + \lambda_{kn}x_n = b_k \end{array} \right.$$

### esempio

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4$

per ogni valore di  $x_4$  trovo una e  
una sola soluzione

pongo  $x_4 = t$

ricavo le altre  $x$

$$III \quad 0x_1 + 0x_2 - x_3 + t = 1 \Rightarrow x_3 = t - 1$$

$$II \quad 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + t = 0 \Rightarrow x_2 = 2 - 3t$$

$$I \quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + t = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1-t}{2}$$

esempio

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

pivot

$$x_1 = 2 \quad x_3 = b \quad x_4 = 1$$

$$x_2 = 1 - 2x_3 = 1 - 2b$$



Algoritmo di Gauss

$$(A | B) \rightarrow (S | C) \quad S \text{ matrice a scala}$$

(1) sia  $A^k$  la prima colonna di  $A$  non nulla

sia  $a_{1k}$  il primo termine non nullo della colonna  $A^k$

scambiamo la riga  $j$ -esima con la prima

(2) sommo a ogni riga  $j$ -esima con  $j > 1$  la prima riga

moltiplicata per  $\frac{-a_{ik}}{a_{1k}}$

(3) estraggo la matrice  $\left( \begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & b_n \end{array} \right)$  e reitero

## O Applicazione algoritmo di Gauss

1

esempio con scambio

$$\left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad n = 2 \quad k = 2 \quad \rightarrow \quad \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

esempio senza scambio (continua nel 2)

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right) \quad n = 1 \quad k = 1$$

esempio completo

(continua nel 2 e nel 3)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array} \right) \quad n = 1 \quad k = 1$$

2

esempio parziale

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} - \frac{3}{2}\text{I}} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$\cancel{3}$

esempio completo (continua nel 3)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} - 4\text{I}, \text{III} - 7\text{I}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array} \right)$$

3

estratto e reitero

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array} \right) \quad n = 2 \quad k = 2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} - 2\text{II}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

risolvo il sistema a scala

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 6x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{pongo } x_3 &= t \\ -3x_2 - 6t &= -3 ; \quad x_2 = 1 - 2t \\ x_1 + 2x_2 + 3t &= 1 \\ x_1 + 2(1 - 2t) + 3t &= 1 \\ x_1 + 2 - 4t + 3t &= 1 \\ x_1 + 2 - t &= 1 \\ x_1 &= t - 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

le soluzioni si ottengono sommando una soluzione particolare e una soluzione generica del sistema omogeneo associato

ad esempio  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  è una soluzione particolare

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$AB \in M_{m,p}(\mathbb{K}) \quad B = (B^1 \quad B^p)$$

$$AB = (AB)^1 \quad AB^p$$

in colonna  
n elementi

## ● PRODOTTO DI MATRICI

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad C, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{m,p}(\mathbb{K}) \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$A(\lambda B) = B(\lambda A) = \lambda(AB)$$

$$A \in M_{n,n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{m,p}(\mathbb{K}), \quad C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$(AB)C \in M_{m,q}(\mathbb{K})$$

$$A(BC) \in M_{m,q}(\mathbb{K})$$

$$(AB)C = A(BC)$$

18.03.2022

$$A \in M_{n,m}(\mathbb{K}) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$AX = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n \in \mathbb{K}^m$$

○  $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  matrici quadrate

$$AB = M_{n,n}(\mathbb{K}) \neq BA \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = (AB^1 \ AB^2) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = (BA' \quad BA^L) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE: Matrice Identica

$$I_m \in M_{m,m}(\mathbb{K}) \quad I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{TERMINI}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

È elemento neutro del prodotto

$$A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \quad I \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

$$AI_n = A \quad I_n A = A$$

$A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  è invertibile se esiste  $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

$$\text{r.c. } AB = I_n \quad BA = I_n$$

diciamo che  $B$  è l'inverso di  $A$

l'inversa, se esiste, è unica

○ esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}$$

○  $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$      $AB = I_n$      $(AB^T \ AB^n) = (e_1 \ e_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB^T = e_1 \\ AB^n = e_n \end{array} \right.$$

$$(A | e_1 \ e_n) \xrightarrow{\text{GAUSS}} (S | C)$$

○ esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ invertibile?}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

faccio diventare  
il pivot = 1

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}\text{II}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-3\text{II}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

||

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

○ esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{invertibile?}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I - 2II} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

impossibile

○ se esiste l'inversa di  $A \in M_{m,m}(\mathbb{K})$   
allora la riduzione a scala di  $A$  ha  $m$  pivot

○  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$AB = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{1p} \\ c_{m1} & c_{mp} \end{pmatrix} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

$$c_{ij} = A_i^j B^j$$

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hj}$$

○  $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

$$AB = I_n$$

" "

$$(c_{is}) \quad (\delta_{is})$$

$$\sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hi} = \delta_{ij} \quad \forall i,j$$

○  $A$  quadrata ha riduzione a scala con  $n$  pivot

se e solo se  $A$  è invertibile, e l'inversa si ottiene  
risolvendo  $(A | I)$

○  $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

il sistema lineare  $AX = B$  ha una unica soluzione

se e solo se  $A$  è invertibile

○ il prodotto di matrici invertibili è invertibile

○  $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{K} \quad x_n \in \mathbb{K} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

1)  $V + (m + w) = (V + m) + w$

2)  $\exists \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V + \underline{0} = V + \underline{0} + V$

3)  $\exists (-V) \quad V + (-V) = \underline{0}$

4)  $V + w = w + V$

5)  $\lambda(mv) = (\lambda m)v$

6)  $(\lambda + m)v = \lambda v + mv$

7)  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

8)  $1 \cdot V = V$

## ○ SPAZIO VETTORIALE

uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  è un insieme  $V$  munito di due operazioni

$$V \times V \rightarrow V \quad \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

$$(v, w) \rightarrow v + w \quad (\lambda, v) \rightarrow \lambda v$$

### ○ esempio

$\mathbb{K}^n$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$

### ○ esempio

$\mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \rightarrow a + b \quad (\lambda, a) \rightarrow \lambda a$$

### ○ esempio

$M_{m,n}(\mathbb{K})$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad A + B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$\lambda \in \mathbb{K}, A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \lambda A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

○ in uno spazio vettoriale ○  $\underline{V} = \underline{0} \in V$

$$(1+0)V = 1V + 0V \\ \Rightarrow \underline{0} = 0V$$

$$(-1)V + 1V = (-1+1)V = 0V = \underline{0} \\ \Rightarrow -1V = -V$$

○ esempio

$$X \text{ insieme non vuoto } \{F: X \rightarrow \mathbb{R}\} = V$$

$$V \rightarrow V \quad \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(f, g) = f + g \quad (\lambda f) = \lambda f$$

$$\underline{0}(x) = 0$$

$$f, g: X \rightarrow \mathbb{R} \quad f + g: X \rightarrow \mathbb{R} \quad (f + g)(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} f(x) + g(x)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad f \cdot \lambda: X \rightarrow \mathbb{R} \quad (\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

$$(f + \underline{0})(x) = f(x) + \underline{0}(x) = f(x)$$

○  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  un sottosieme  $W \subseteq V$   
 è un sottospazio vettoriale se

- 1)  $0 \in W$
- 2)  $w, v \in W \Rightarrow w + v \in W$
- 3)  $w \in W, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda w \in W$

○ esempio

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \mid Ax = 0 \right\} = \text{ker } A \quad \text{kernel (o nucleo)}$$

$\text{ker } A \subseteq \mathbb{K}^n$  sottospazio vettoriale

$$1) 0 \in \text{ker } A \Leftrightarrow A0 = 0$$

$$2) w, v \in \text{ker } A$$

$$A(w+v) = Aw + Av = 0 + 0 = 0$$

$$3) \lambda \in \mathbb{K}, w \in \text{ker } A \quad A(\lambda w) = \lambda(Aw) = \lambda(0) = 0$$

$$\lambda w \in \text{ker } A$$

## OSSERVAZIONE

se  $\mathbb{K}$  è infinito, ogni spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  è  $\{\underline{0}\}$  oppure è infinito

$\forall \in V \neq \underline{0}$  (con più di un elemento)

$$\lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda v \in V$$

$$\lambda v = w v \Rightarrow \lambda v - w v = \underline{0}$$

$$(\lambda - w)v = \underline{0} \Rightarrow (\lambda - w) = \underline{0}$$

$$v \neq \underline{0} \quad v \in V \quad \lambda v = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \lambda = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha^{-1} \alpha v = 1v = v$$

$$1v = \underline{0} \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha v) = \underline{0} \Rightarrow 1v = \underline{0} \Rightarrow v = \underline{0}$$

$$\mathbb{K} \rightarrow V \quad \lambda \mapsto \lambda v \text{ iniettiva}$$

$\bigcirc V$  sp. vett.  $v_1, \dots, v_k \in V$  una combinazione lineare di  $\{v_1, \dots, v_k\}$   
è una scrittura del tipo  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$

## ESEMPIO

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è comb. lineare di } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

○ i vettori  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}$

sono linearmente dipendenti se

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ non tutti nulli}$$

sono linearmente indipendenti

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ tutti nulli}$$

31.03.2022

○  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  il rango di  $A$  è  $\text{RANK}(A)$

ed è la dimensione dello spazio  $\{A^1, \dots, A^n\}$

equivale al numero di pivot

○ esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{RANK}(A) = \dim \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

○  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{RANK}(A) \leq n$



## TEO Rouché-Capelli

un sistema lineare  $A X = B$

ha soluzione se e solo se  $\text{RANK}(A) = \text{RANK}(A|B)$



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è invertibile se

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

non sono linearmente dipendenti



## TEO

per ogni  $n \geq 1$  esiste un'unica

$$D: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{m \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{K}$$

multilineare alternante  $D^1(l_1, \dots, l_m) = 1$



## TEO

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$



## TEO Cramer

sia  $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  matrice invertibile

allora la soluzione  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  di  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B$

soddisfa  $x_i = \frac{\det(A^1 \cdots \overset{i}{B} \cdots A^n)}{\det A}$

$$\det(A^1 \overset{i}{\cancel{B}}, A^n) = (-1)^{j+i} \delta_{ji} 0 + \cdots + (-1)^{j+i} \delta_{ji} \det A$$

### O esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \quad \text{invertibile}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -2$$



## **TEO** Completamento della Base

sia  $V$  spazio vettoriale  $\dim V = m$ , siano  $v_1, \dots, v_k$

vettori di  $V$  linearmente indipendenti, allora esistono

$v_{k+1}, \dots, v_m \in V$  tali che  $v_1, \dots, v_m$  è una base



### esempio

Trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  che contiene  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{dov } \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -y \text{ dov } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -y$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ formano una base } \Leftrightarrow y \neq 0$$

$A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  invertibile  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\text{RANK } A = \dim \text{Span} \{A' \dots A^n\}$

- se  $A$  è quadrata, cioè  $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$   
 $\text{rank } A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

### TEO

sia  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  t.c. una sua sottomatrice  $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  abbia  $\det B \neq 0$

supponiamo che tutte le sottomatrici di  $A$  ottenute orlando  $B$  abbiano determinante zero, allora  $\text{rank } A = n$

### esempio

sottomatrici ottenute orlando  $B = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det = 0 \quad \det = 3 \times$$

$$\textcircled{2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{l'unico modo di orlare } B \text{ è prendendo } A$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 5 = -15 \neq 0$$

$$\text{RANK } A = 3$$

○ esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

①  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  orlate di  $B$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $\det B = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$

②  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  orlate di  $B$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$   $\det B = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 0$

③ gli orlati di  $B$  hanno  $\det = 0$   $\text{RANK } A = 2$

sia  $\mathbb{K}$  un campo, un polinomio su  $\mathbb{K}$

nell'indeterminata  $t$  è una scrittura

formale  $\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_d t^d$

## POLINOMI

$$\lambda \geq 0 \quad \lambda_0 \cdots \lambda_d \in \mathbb{K}$$

due polinomi si coincidono se

$$\text{se } p = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_d t^d$$

$$\text{si pone } \lambda_k = 0 \text{ per ogni } k > d$$

$\forall k \geq 0$  hanno lo stesso  
coefficiente di grado  $k$

$$\text{se } p \neq 0, d \in p$$

è il massimo  $k$  t.c. il

coefficiente di grado  $k$

è diverso da zero

$\lambda_i$  è il coefficiente di grado  $i$

$p = 0$  polinomio con tutti i  
coeffienti = 0

$\mathbb{K}[t]$  è spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K}[t] \rightarrow \mathbb{K}[t]$$

$p + q$  è il polinomio il cui coefficiente di grado  $k$

è la somma dei coefficienti di grado  $k$  di  $p$  e  $q$



### TEO

se  $f, g \in \mathbb{K}[t]^{d \neq 0}$  esistono unici

$q, r \in \mathbb{K}[t]$   $\deg r < \deg q$

t.c.  $F = gq + r$

○  $\mathbb{K}[t]$  è anello su  $\mathbb{K}$

○  $p \in \mathbb{K}[t]$ ,  $x \in \mathbb{K}$

$x$  radice di  $p$  se  $f_p(x) = 0$

○ cor. se  $x$  radice di  $p$  allora  $p = (t-x)q$

○ cor. se  $p \in \mathbb{K}[t]$  ha grado  $d$ , allora ha al più  
 $d$  radici distinte

○ se  $x$  radice di  $p \in \mathbb{K}[t]$

la molteplicità di  $x$  è il massimo  $K$

tale che  $p \mid (t-x)^k q$

per qualunque  $q$

## ● APPLICAZIONI LINEARI

07.04.2022

Siano  $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$

$f: V \rightarrow W$  si dice applicazione lineare se

$$\textcircled{1} \quad f(v + v') = f(v) + f(v') \quad \forall v, v' \in V \quad (\text{additività})$$

$$\textcircled{2} \quad f(k \cdot v) = k \cdot f(v) \quad \forall v \in V, k \in \mathbb{K} \quad (\text{omogeneità})$$

in pratica,  $f$  "si comporta bene" rispetto alle operazioni di spazio vettoriale di  $V$  e  $W$

dalla proprietà  $\textcircled{2}$  della def. segue che, scelto qualsiasi  $v \in V$

$$f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$$

ogni applicazione lineare manda l'origine di  $V$  nell'origine di  $W$

dalla proprietà  $\textcircled{2}$  della def. segue che, se  $\exists v \in V$  t.c.  $f(v) \neq 0$

$$\Rightarrow f(kv) = kf(v) \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

e questi sono tanti vettori diversi quanti sono gli elementi di  $\mathbb{K}$

 esempio

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+x', y+y') = \\ & \left( \frac{(x+x') + (y+y')}{\sqrt{2}}, \frac{(y+y') - (x+x')}{\sqrt{2}} \right) = \\ & \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \frac{y'-x'}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad f(kx, ky) = \\ \left( \frac{kx+ky}{\sqrt{2}}, \frac{ky-kx}{\sqrt{2}} \right) = k \cdot \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right)$$

$f$  è lineare

$$f \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{y-x}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## ○ esempio

$V = \mathbb{R}_{\leq 3} [x]$  spazio vett. dei polinomi a coefficienti reali di grado  $\leq 3$

$W = \mathbb{R}_{\leq 2} [x]$  spazio vett. dei polinomi a coefficienti reali di grado  $\leq 2$

$$f : V \rightarrow W \quad f(p(x)) = p'(x)$$

derivata

$$f \text{ è lineare}$$

$\textcircled{1} \quad f((p+q)(x)) = p'(x) + q'(x) = f(p(x)) + f(q(x))$

$\textcircled{2} \quad f(k \cdot p(x)) = k \cdot p'(x) = k \cdot f(p(x))$

## ○ DEFINIZIONE

sia  $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

la funzione  $L_A : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$   
è data da  $L_A(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{K}^m$

$L_A$  è lineare

### ○ esempio

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad L_A : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

### ○ TEO

Dati  $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$ , data  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e scelti  $w_1, \dots, w_n \in W$  qualsiasi, esiste una e una sola applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  t.c.  $f(v_i) = w_i \quad i = 1 \dots n$

### ○ DEFINIZIONE

$V, W$  spazi vett. su  $\mathbb{K}$   $f: V \rightarrow W$  lineare

○ l'immagine di  $f$  è  $\text{Im } f = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$   
sottospazio vett. di  $W$

○ il nucleo di  $f$  è  $\text{KER } f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$   
sottospazio vett. di  $V$

○ se  $\text{KER } f = \{0\}$  allora  $f$  è iniettiva

## DEFINIZIONE

$f : V \rightarrow W$  lineare

il rango di  $f$  è  $RKf = \dim Im f$

## TEO Nullità-Rango

siano  $V, W$  spazi vett. su  $\mathbb{K}$  sia  $f : V \rightarrow W$  lineare, allora  
 $\dim V = RKf + \dim \ker f$

## REGRESSIONE LINEARE

08.04.2022

Siamo in  $\mathbb{R}^n$

### ① Distanza

in generale, dato  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|^2 = x^t \cdot x$  norma  $\|\cdot\|$

$$\text{se } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x^t \cdot x = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

distanza tra  $x, y \in \mathbb{R}^n = \|x - y\| = \sqrt{(x - y)^t \cdot (x - y)}$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x^t y$$

$$x \perp y \Leftrightarrow y^t \cdot x = 0$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0$$

la "lunghezza" del vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  è  $\|x\| = \sqrt{x^t x}$

$x, y \in \mathbb{R}^n$  sono perpendicolari se e solo se  $y^t \cdot x = 0$  ( $x^t \cdot y = 0$ )

se  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  è un sottospazio vettoriale

e  $x \in \mathbb{R}^n$  è un vettore, in punto di  $x$  più vicino a  $\mathbb{W}$  è

la proiezione ortogonale di  $x$  su  $\mathbb{W}$ , cioè è il vettore  $y \in \mathbb{W}$

tale che  $(x - y) \perp w \quad \forall w \in \mathbb{W}$

## ② Soluzioni Approssimate di un Sistema Lineare

sia  $A \in \mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

se  $Ax = b$  non ha soluzioni in  $\mathbb{R}^n$ , posso pormi il problema  
di trovare la migliore approssimazione alla soluzione, cioè  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$   
tale che  $\|A\bar{x} - b\|^2$  sia minima possibile

$\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Im } L_A \in \mathbb{R}^k$  è un sottospazio vett.

$\Rightarrow$  devo cercare la proiezione ortogonale di  $b$  su  $\text{Im } L_A$

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \quad L_A(x) = Ax$$

### ● TEO

$\min(n, k)$  poniamo  $n =$  numero colonne

Se  $R_k A$  è il massimo possibile, allora

①  $A^t \cdot A$  è invertibile

$$\text{② } \bar{x} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot b$$

in generale: se  $Ax = b$  non si risolve,  $A^t A x = A^t b$  si risolve  
e dà le "soluzioni approssimate" del sistema originale

## ③ Regressione Lineare

$$\text{peso} = \alpha (\text{altezza}) + \beta$$

rilevamenti  $w_1, h_1$ , *risolvono?*

$$w_1, h_1$$

:

$$w_n, h_n$$

$$w = \alpha h + \beta$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ b_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ? = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

||      ||      ||

$$A \quad x \quad b \quad \text{RK } A = 2 \quad (A^T \cdot A) \text{ invertibile}$$

sistema impossibile  
con  $N$  righe >> 2 colonne

cerco una soluzione approssimata  $\bar{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b \quad \bar{x} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$

la retta  $y = \bar{\alpha}x + \bar{\beta}$  è la retta che minimizza la somma dei quadrati degli scarti dei punti dati da essa

$$\frac{\sum_{i=1}^N (w_i - \bar{\alpha}h_i - \bar{\beta})^2}{N} \quad \text{SSE / Scarto quadratico medio}$$

in generale, dati punti  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ , la retta di regressione è

$$y = \hat{\alpha}x + \hat{\beta} \quad \text{con}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad \hat{\beta} = \bar{y} - \hat{\alpha}\bar{x}$$

$$\text{con} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

