

Première partie

Équations diophantiennes du 1^{er} degré $a \cdot x + b \cdot y = c$. Autres exemples d'équations diophantiennes.

Déf 1 On appelle équation diophantienne à n inconnues, une équation du type $P(Y_1, \dots, Y_n) = 0$ avec $P \in \mathbb{Z}[X_1 \dots X_n]$. On cherche les solutions dans \mathbb{Z}^n .

I Équations diophantiennes linéaires

a Équations diophantiennes du 1^{er} degré à 2 inconnues $a \cdot x + b \cdot y = c$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \cdot x + b \cdot y = c$ (*1)

Prop 1 On appelle équation diophantienne à n inconnues, une équation du type $P(Y_1, \dots, Y_n) = 0$. Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'au moins 1 solution de (*1) est $\text{pgcd}(a, b) \mid c$.

Théorème de Bezout

a, b sont 2 entiers. a et b sont premiers entre eux ssi il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \cdot u + b \cdot v = 1$

Prop 2 Dans le cas où a et b sont premiers entre eux (breadcrumbs : chapeaux chinois congruence calculatrice HP48), une solution de (*1) est $(x_0, y_0) = (c \cdot u, c \cdot v)$ avec (u, v) dans le théorème de Bezout.

L'ensemble des solutions de (*1) est alors $S = (x_0 + \lambda \cdot b, y_0 - \lambda \cdot a), \lambda \in \mathbb{Z}$

Méthodes de résolution

- trouver (x_0, y_0) par divisions euclidiennes successives
- méthode des congruences : **exemple** : $3 \cdot x + 5 \cdot y = 1$: on cherche x tel que $3 \cdot x \equiv 1[5] \Leftrightarrow x \equiv 2[5]$. D'où $S = (2 + 5 \cdot \lambda, -1 - 3 \cdot \lambda), \lambda \in \mathbb{Z}$

b Systèmes d'équations diophantiennes linéaires

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2, (a_{11}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}, (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$
On cherche $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que :

II Équations diophantiennes et décomposition en facteurs premiers

III Équations diophantiennes et corps de nombres quadratiques

Équation de Fermat pour $n=3$

IV Équations diophantiennes et fractions continues

<https://linuxconfig.org>

1