面向Redis List的OT函数的设计、验证与实现

141220044, 纪业

2018 年 4 月 11 日

1 绪言

1.1 应用背景：协同编辑应用

协同编辑系统，可以允许不同地点的用户同时编辑同一份文档。为了获得较快的响应和较高的实用性，系统会在不同的地点或设备进行文档的复制。一个用户可以在某个副本上进行文档的编辑，并将做出的修改异步地传递给其他副本。不必要等待服务器处理完再响应用户操作，本地操作可以立即执行。同时系统必须保证编辑的一致性，即在所有用户完成文档的编辑后，所有的副本内容一致。

1.2 技术背景：Replicated List 规约及其基于OT的Replicated List 算法

1.3 相关工作及其不足

可以设计OT函数，并通过控制算法的调用来保证最终结果的一致性，现在ins,del,set等简单operation的OT函数已经基本实现。

1.4 本文研究工作: 面向Redis List 的OT函数的设计、验证与实现

本次毕业设计的目标是实现Redis List所支持的14种非阻塞操作的OT函数，并且对实现函数的正确性进行验证。阿里云和RedisLab的团队目前都在对Redis List的操作进行开发，Redis List操作的OT函数实现具有应用前景和商业前途。

2 Redis List OT 函数设计

2.1 Redis List API 分类：根据“Effects”分为三类

单个元素的删除、修改、插入：$Insert(pos, ele), delete(pos), set(pos, ele)$, $(Lpush(ele), Lpushx), (Rpush(ele), Rpushx), Lpop, Rpop$

单个区间的删除、插入：$Ins(pos, str), Del(pos, len)$

多个区间的删除：$Rem(pos1, len1; pos2, len2; ...; posk, lenk), Trim(pos1, pos2)$
而$Trim$操作可以转换为$Rem(0, pos1 - 1; pos2 + 1, len - pos2 - 1)$

2.2 第一类OT 函数的设计

$$Lpush \begin{cases} OT(Lpush(x), Lpush(y)) = Lpush(x) \\ OT(Lpush(x), Rpush(y)) = Lpush(x) \\ OT(Lpush(x), Lpop) = Lpush(x) \\ OT(Lpush(x), Rpop) = Lpush(x) \\ OT(Lpush(x), Set(i, y)) = Lpush(x) \\ OT(Lpush(x), Ins(i, y)) = Lpush(x) \\ OT(Lpush(x), Del(i)) = Lpush(x) \end{cases} \tag{1}$$

$$Rpush \begin{cases} OT(Rpush(x), Lpush(y)) = Rpush(x) \\ OT(Rpush(x), Rpush(y)) = Rpush(x) \\ OT(Rpush(x), Lpop) = Rpush(x) \\ OT(Rpush(x), Rpop) = Rpush(x) \\ OT(Rpush(x), Set(i, y)) = Rpush(x) \\ OT(Rpush(x), Ins(i, y)) = Rpush(x) \\ OT(Rpush(x), Del(i)) = Rpush(x) \end{cases} \tag{2}$$

$$Lpop \begin{cases} OT(Lpop, Lpush(x)) = Del(1) \\ OT(Lpop, Rpush(x)) = Lpop \\ OT(Lpop, Lpop) = no - op \\ OT(Lpop, Rpop) = Lpop \\ OT(Lpop, Set(i, x)) = Lpop \\ OT(Lpop, Ins(i, x)) = \begin{cases} Del(1) & i = 0 \\ Lpop & i \neq 0 \end{cases} \\ OT(Lpop, Del(i)) = n \begin{cases} no - op & i = 0 \\ Lpop & i \neq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

$$Rpop \begin{cases} OT(Rpop, Lpush(x)) = Rpop \\ OT(Rpop, Rpush(x)) = Del(-2) \\ OT(Rpop, Lpop) = Rpop \\ OT(Rpop, Rpop) = no - op \\ OT(Rpop, Set(i, x)) = Rpop \\ OT(Rpop, Ins(i, x)) = \begin{cases} Del(-2) & i = len - 1 \\ Rpop & i \neq len - 1 \end{cases} \\ OT(Rpop, Del(i)) = \begin{cases} no - op & i = len - 1 \\ Rpop & i \neq len - 1 \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

$$Set\begin{cases} OT(Set(i,x), Lpush(y)) = Set(i+1,x) \\ OT(Set(i,x), Rpush(y)) = Set(i,x) \\ OT(Set(i,x), Lpop) = \begin{cases} no-op & i=0 \\ Set(i-1,x) & i\neq 0 \end{cases} \\ OT(Set(i,x), Rpop) = \begin{cases} no-op & i=-1 \\ Set(i,x) & i\neq -1 \end{cases} \\ OT(set(i,x), set(j,y)) = set(i,x) \\ OT(Set(i,x), Ins(j,y)) = \begin{cases} Set(i,x) & i<j \\ Set(i+1,x) & i=j \\ Set(i+1,x) & i>j \end{cases} \\ OT(Set(i,x), Del(j)) = \begin{cases} Set(i,x) & i<j \\ no-op & i=j \\ Set(i-1,x) & i>j \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

$$Ins\begin{cases} OT(Ins(i,x), Lpush(y)) = Ins(i+1,x) \\ OT(Ins(i,x), Rpush(y)) = Ins(i,x) \\ OT(Ins(i,x), Lpop) = \begin{cases} Ins(i,x) & i=0 \\ Ins(i-1,x) & i\neq 0 \end{cases} \\ OT(Ins(i,x), Rpop) = \begin{cases} Ins(i-1,x) & i=-1 \\ Ins(i,x) & i\neq -1 \end{cases} \\ OT(Ins(i,x), set(j,y)) = Ins(i,x) \\ OT(ins(i,x), ins(j,y)) = \begin{cases} ins(i+1,x) & i>j \\ ins(i,x) & i<j \\ ins(i,x) & i=j \end{cases} \\ OT(Ins(i,x), Del(j)) = \begin{cases} Ins(i,x) & i<j \\ Ins(i,x) & i=j \\ Ins(i-1,x) & i>j \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

$$
Del \begin{cases} OT(Del(i), Lpush(y)) = Del(i+1) \\ OT(Del(i), Rpush(y)) = Del(i) \\ OT(Del(i), Lpop) = \begin{cases} no-op & i=0 \\ Del(i-1) & i!=0 \end{cases} \\ OT(Del(i), Rpop) = \begin{cases} no-op & i=-1 \\ Del(i) & i \neq -1 \end{cases} \\ OT(del(i), set(j,x)) = del(i) \\ OT(del(i), ins(j,x)) = \begin{cases} del(i+1) & i>j \\ deli & i<j \\ del(i+1) & i=j \end{cases} \\ OT(del(i), del(j)) = \begin{cases} del(i-1) & i>j \\ del(i) & i<j \\ no-op & i=j \end{cases} \end{cases} \tag{7}
$$

2.3 第二类OT 函数设计

$$
OT(Ins(p1,s1), Ins(p1,s2)) = \begin{cases} Ins(p1,s1) & p1<p2 \\ Ins(p1+|s2|, s1) & p1=p2 \\ Ins(p1+|s2|, s1) & p1>p2 \end{cases} \tag{8}
$$

$$
OT(Ins(p1,s1), Del(p2,l1)) = \begin{cases} Ins(p1,s1) & p1 \le p2 \\ no-op & p2<p1<p2+l1 \\ Ins(p1-l1, s1) & p1 \ge p2+l1 \end{cases} \tag{9}
$$

$$
OT(Del(p1,l1), Ins(p2,s1)) = \begin{cases} Del(p1,l1) & p1+l1 \le p2 \\ Del(p1, l1+|s1|) & p1<p2<p1+l1 \\ Ins(p1+|s1|, l1) & p1 \ge p2 \end{cases} \tag{10}
$$

$$
OT(Del(p1,l1), Del(p2,l2)) = \begin{cases} Del(p1,l1) & p1+l1 \le p2 \\ Del(p1-l2, s1) & p1 \ge p2+l2 \\ Del(p1, p2-p1) & p1<p2<p1+l1 \le p2+l2 \\ Del(p2, p1+l1-p2-l2) & p2 \le p1 < p2+l2 < p1+l1 \\ Del(p1, l1-l2) & p1 \le p2 < p2+l2 < p1+l1 \\ no-op & else \end{cases} \tag{11}
$$

2.4 第三类OT 函数设计

$OT(Ins(p_{k+1}, s_{k+1}), Del(p_1, l_1; p_2, l_2; ...; p_k, l_k))$

$$= \begin{cases} Ins(p_{k+1}, s_{k+1}) & p_{k+1} \leq p_1 \\ no - op & p_i < p_{k+1} < p_i + l_i \\ Ins(p_{k+1} - l_1 - l_2 - ... - l_i, s_{k+1}) & p_i + l_i \leq p_{k+1} \leq p_{i+1} \\ Ins(p_{k+1} - l_1 - l_2 - ... - l_i, s_{k+1}) & p_{k+1} \geq pk + |sk| \end{cases} \tag{12}$$

$OT(Del(p_1, l_1; p_2, l_2; ...; p_k, l_k), Ins(p_{k+1}, s_{k+1}))$

$$= \begin{cases} Del(p_1, l_1; p_2, l_2; ...; p_k, l_k) & P_k + l_k \leq p_{k+1} \\ Del(p_1, l_1; p_2, l_2; ...; p_{i-1}, l_{i-1}; p_i, l_i + |s_{k+1}|; p_{i+1} + |s_{k+1}|, l_{i+1}; ...; p_k + |s_{k+1}|, l_k) & p_i < p_{k+1} \leq pi + li \\ Del(p_1, l_1; p_2, l_2; ...; p_i, l_i; p_{i+1} + |s_{k+1}|, l_{i+1}; ...; p_k + |s_{k+1}|, l_k) & p_i + l_i < p_{k+1} \leq p_{i+1} \end{cases} \tag{13}$$

$OT(Del(p_{k+1}, s_{k+1}), Del(p_1, l_1; p_2, l_2; ...; p_k, l_k))$

$$= \begin{cases} Del(p_{k+1}, s_{k+1}) \quad p_{k+1} < p_1 & p_{k+1} + l_{k+1} \leq p_1 \\ Del(p_{k+1}, s_{k+1}) \quad p_{k+1} < p_1 & p_j < p_{k+1} + l_{k+1} \leq p_j + l_j \\ Del(p_{k+1}, s_{k+1}) \quad p_{k+1} < p_1 & p_j + l_j < p_{k+1} + l_{k+1} \leq p_{j+1} \\ Del(p_{k+1}, s_{k+1}) \quad p_{k+1} < p_1 & p_{k+1} + l_{k+1} > P_k + l_k \\ Del(p_i - l_1 - l_2 - ... - l_{i-1}, p_j - p_i - l_i - l_{i+1} ... - l_{j-1}) & p_i \leq p_{k+1} < p_i + l_i \\ & p_j < p_{k+1} + l_{k+1} \leq p_j + l_j \\ Del(p_i - l_1 - l_2 - ... - l_{i-1}, p_{k+1} + l_{k+1} - p_i - l_i - l_{i+1} - ... - l_j) & p_i \leq p_{k+1} < p_i + l_i \\ & p_j + l_j < p_{k+1} + l_{k+1} \leq p_{j+1} \\ Del(p_i - l_1 - l_2 - ... - l_{i-1}, p_{k+1} + l_{k+1} - p_i - l_i - l_{i+1} - ... - l_k) & p_i \leq p_{k+1} < p_i + l_i \\ & p_{k+1} + l_{k+1} > P_k + l_k \\ Del(p_{k+1} - l_1 - l_2 - ... - l_{i-1}, p_{k+1} - p_j - l_{i+1} - l_{i+2} - ... - l_{j-1}) & p_i + l_i \leq p_{k+1} < p_{i+1} \\ & p_j < p_{k+1} + l_{k+1} \leq p_j + l_j \\ Del(p_{k+1} - l_1 - l_2 - ... - l_{i-1}, l_{i+1} - l_{i+1} - l_{i+2} - ... - l_j) & p_i + l_i \leq p_{k+1} < p_{i+1} \\ & p_j + l_j < p_{k+1} + l_{k+1} \leq p_{j+1} \\ Del(p_{k+1} - l_1 - l_2 - ... - l_{i-1}, l_{i+1} - l_{i+1} - l_{i+2} - ... - l_k) & p_i + l_i \leq p_{k+1} < p_{i+1} \\ & p_{k+1} + l_{k+1} > P_k + l_k \\ Del(p_{k+1} - p_1 - p_2 ... - p_k, l_{k+1}) & p_{k+1} \geq p_k + l_k \\ & (i \geq j) \end{cases} \tag{14}$$

3 基于TLA+ 的OT函数验证

4 Redis List OT 函数实现